NUMERO: 994 DATA: 27/06/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Donati

MATERIA: Analisi Matematica I
Prof. Pellerey

INSIEMISTICA (richiamo)

Insieme = collezione non ordinata di oggetti collegati da un qualche ragionamento logico

colori bandiera italiana → insieme verde - bianco Rosso

$CI = \{Verde, Bianco, Rosso\}$
$\{B, V, R\}$ } non ordinata

X, Y, A, B → insiemi $V \in CI$

x, y, a, b → oggetti apport agli insiemi $G \notin CI$

$\in$ = appartenenza

es. $x \in X$

$\notin$ = non appartenente

es. $x \in X$

$\subseteq$ = contenuto (suppongo che A e B possono essere identici)

es. $A \subseteq B$ gli oggetti di A sono in B (sottoinsieme)

$x \in A \rightarrow x \in B$

$\nsubseteq$ = non contenuto

es. $A \nsubseteq B$

$\subset / \subsetneq$ = sottoinsiemi propri (non accetto $A = B$)

$B \subseteq B$ no non sottoinsieme proprio $B \not\subset B$

- rappresentazione per elencazione → $A = \{\ldots\ldots\}$ elenco
- rappresentazione diagrammi di Venn → 

(sezione di piano delimitata da curva chiusa.)
- rappresentazione insieme vuoto → $\emptyset$
- rappresentazione tramite proprietà → $\{x \in \mathbb{N}^+ \mid x \leq 3\}$ tale che / t.c / :

Proprietà (unione | intersezione)

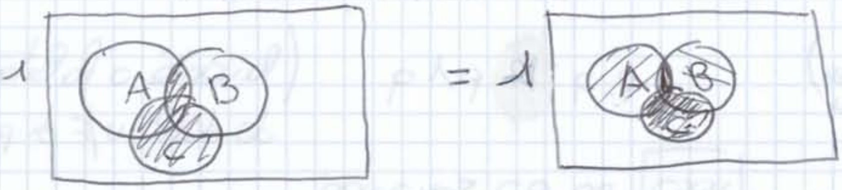
Si supponga di considerare oggetti in un "universo" X

- $A \cap \bar{A} = \phi$

$$\left.\begin{aligned} &\bullet\ A\cap B = B\cap A \\ &\ \ A\cup B = B\cup A \end{aligned}\right]\ \text{commutativa}$$

$$\left.\begin{aligned} &\bullet\ (A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C) \\ &\ \ (A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C) \end{aligned}\right]\ \text{associativa}$$

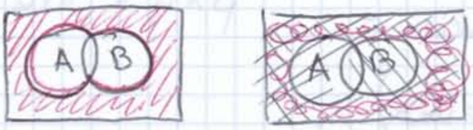
$$\left.\begin{aligned} &\bullet 1\ (A\cap B)\cup C = (A\cup C)\cap(B\cup C) \\ &\ \ 2\ (A\cup B)\cap C = (A\cap C)\cup(B\cap C) \end{aligned}\right]\ \text{distributiva}$$



Leggi di De Morgan

i) $\overline{A\cup B} = \bar{A}\cap\bar{B}$

ii) $\overline{A\cap B} = \bar{A}\cup\bar{B}$



- $\bar{\bar{A}} = A$

$X = \{1, 2, \dots, 9, 10\}$

$A = \{x \in X : \frac{x}{2} \in \mathbb{N}^+\}$ $\{2, 4, 6, 8, 10\}$

$B = \{x \in X ! \frac{x}{3} \in \mathbb{N}^+\}$ $\{3, 6, 9\}$

Dire cosa sono $A\cap B$, $A\cup B$ verificare De Morgan

- $A\cap B = \{6\}$ $A\cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$
- $\overline{A\cup B} = \{1, 5, 7\}$ $\Rightarrow$ $\bar{A}\ \{1, 3, 5, 7, 9\}$ $\bar{B}\ \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$

- implicazione $\boxed{\Rightarrow}$ sempre vera eccetto quando pV, qF
  Lo implica

  $p, q \quad p \Rightarrow q$

  "x è pari" $\wedge$ "x è divisibile per 3" $\Rightarrow$ "x è divisibile per 6" V
  "x è pari" $\wedge$ "x è divisibile per 3" $\Rightarrow$ "x è divisibile per 5" F

- equivalenza logica $\boxed{\Leftrightarrow}$ (è equivalente se e solo se)

  $p, q \quad p \Leftrightarrow q$ — vero se entrambe vere o entrambe false
  — falsa altrimenti

- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
  $\neq$/ $\Leftrightarrow (\neg p \vee q)$

  p= "Pefferey è un essere umano"

  q= "Pefferey ha una madre"

  $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ = Pefferey no madre $\Rightarrow$ Pefferey no essere uman

Predicato: enunciato il cui valore di verità dipende da uno o più argomenti x, y ….. (valgono le stesse operazioni delle proposizioni)

$p(x), q(x), p(x,y)\ldots\ldots$

$A \cap B = \{x : p(x) \wedge q(x) \text{ è vero}\}$

$A = \{x : p(x) \text{ è vero}\} \qquad B = \{x : q(x) \text{ è vero}\}$

$A \cup B = \{x : p(x) \vee q(x) \text{ è vero}\}$

$\bar{A} = \{x : \neg p(x) \text{ è vero}\}$

Quantificatori: notazioni utilizzate per indicare quanti sono gli elementi che soddisfano una tale definizione

- Universale $\boxed{\forall}$ → "per ogni"
- Esistenziale $\boxed{\exists}$ → "esiste"

es. $\forall x \in \mathbb{N}^+ \ \exists y \in \mathbb{N}^+ : y > x$

- La lunghezza dell'ipotenusa è esprimibile come razionale

$p = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} = \frac{m}{n}$ → irriducibile

Dim.

$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \Rightarrow 2 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow$ ~~$m^2=2n^2$~~ $m^2 = 2n^2$ ovvero m pari (xk multiplo di 2)

$\exists p \in \mathbb{N}^+ : m=2p$

$\Rightarrow m^2$ pari $\Rightarrow$ m è pari $\Rightarrow m = 2p$

sostituisco ed ottengo $(2p)^2 = 2n^2 \Rightarrow 4p^2 = 2n^2 \Rightarrow 2p^2 = n^2$

ovvero anche n^2 è pari $\Rightarrow$ n è pari

essendo m e n pari sono entrambi divisibili per due, questo è in contrasto con $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ è irriducibile

Quindi si è reso necessario l'introduzione di un nuovo insieme numerico

numeri reali $\boxed{\mathbb{R}}$ < $\mathbb{Q}$ / irrazionali (numeri formati da un infinito numero di cifre dopo la virgola)

3,14 2,7172
$\sqrt{2}$, π, e

Proprietà dei reali

- operazioni definite su $\mathbb{Q}$ si estendono ad $\mathbb{R}$
- l'insieme $\mathbb{Q}$ è $\boxed{\text{denso}}$ in $\mathbb{R}$ (tra due numeri reali esistono infiniti num. razion.)
- l'insieme $\mathbb{R}$ è $\boxed{\text{completo}}$

Siano A e B due sottoinsiemi dei reali : $\forall a \in A, \forall b \in B$ $a \le b \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : a \le c \le b$

$\forall a \in A, \forall b \in B$

- $x \le y$ (tutti i reali sono confrontabili tra loro) → ordinamento

  $x \le y$ $(x<y) \vee (x=y)$

- $x \le y$ $\begin{cases} z \ge 0 \Rightarrow xz \le yz \\ z \le 0 \Rightarrow xz \ge yz \end{cases}$

- $|x|$ = valore assoluto $\begin{cases} x & \text{se } x \ge 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

A è detto limitato se è limitato sia inferiormente che superiormente

- preso un maggiorante [minorante] b dell'insieme A, questo è detto massimo [minimo] di A se oltre ad essere maggiorante è anche dell'insieme A

$$A = \left\{ x : x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^+ \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \dots \right\}$$

1 • è maggiorante
  • $\in A$] → $\max(A)$ [$\min(A)$] } notazioni

Nota: A non ammette $\min(A)$

$b \in \mathbb{R}$ è detto estremo superiore, $\sup(A)$ [estremo inferiore, $\inf(A)$] se è il più piccolo dei maggioranti di A [è il + grande dei minoranti di A]

$A = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \dots \right\}$ $\sup(A)$ = il più piccolo di tutti i magg. $\{3, 18, 54, 1, \dots\}$ ovvero 1

$\inf(A)$ = il più ~~piccolo~~ grande dei minoranti $\{-2, -35, \dots 0, \dots\}$ ovvero 0

Nota: $\boxed{\text{se } \exists \max(A) \Rightarrow \sup(A) = \max(A)}$ (uguale x inf e min)

es. $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = n^2, n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 0, 1, 4, 9, \dots \right\}$

- lim inferiormente? si! minorante → -3, -5, 0
- lim superiormente? no! ∄ maggioranti
- min? si! 0 = $\min(A)$
- max? no!
- estremo inferiore? si! $\inf(A) = 0$
- sup? no!

Alcune grandezze utili

$\sqrt{4} = \boxed{2}$ tengo sempre il positivo

- **Fattoriale**

$$n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} n! = n\cdot(n-1)(n-2)\ldots\ldots 2\cdot 1 \\ 0! = 1 \end{cases}$$

$$4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$$

es.

- possibili ordini d'arrivo (gara n individui)

$$= n\cdot(n-1)(n-2)\ldots\ldots 2\cdot 1$$

(disposizioni di n oggetti)

- mi interessa solo l'ordine d'arrivo dei primi k $[k \leq n]$ → quanti ordini possibili?

$$= n\cdot(n-1)\ldots\ldots(n-k+1) \quad \rightarrow \text{disposizioni di } k \text{ su } n$$

ovvero

$$n(n-1)\ldots(n-k+1)\cdot\frac{(n-k)!}{(n-k)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!}$$

- quanti sottoinsiemi di dimensione k?

$$\# \frac{n!}{(n-k)!}\cdot\frac{1}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k} \quad \boxed{\text{coeff. binomiale}}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k}$$

$$\binom{3}{1} = \frac{3!}{(3-1)!\,1!} = \frac{3\cdot\cancel{2\cdot 1}}{\cancel{(2\cdot 1)}\cdot 1} = 3$$

$$\binom{3}{0} = \frac{3!}{(3-0)!\,0!} = \frac{\cancel{3\cdot 2\cdot 1}}{\cancel{3\cdot 2\cdot 1}\cdot 1} = 1$$

$-2x < +3$

$-x < \frac{3}{2}$

$x > -\frac{3}{2}$

Disequazione 2°

e. $-2x^2+5x+5 \leq 0$

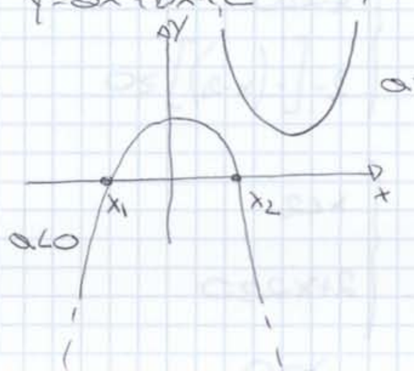
$x_1, x_2 = \frac{-5\pm\sqrt{25+40}}{-4} =$

$= \frac{-5\pm\sqrt{65}}{-4} =$

$= \frac{5\pm\sqrt{65}}{4}$

$(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$

$y=ax^2+bx+c$

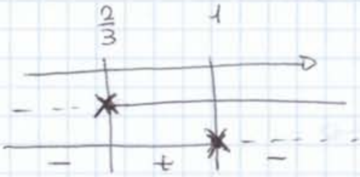


$x_1, x_2 = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$(3x-2)(1-x) < 0$

$3x-2 \geq 0$ $1-x \geq 0$ $-x \geq -1$ $x \leq 1$

$x \geq \frac{2}{3}$



$x < \frac{2}{3} \cup x > 1$

$\left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup (1; +\infty)$

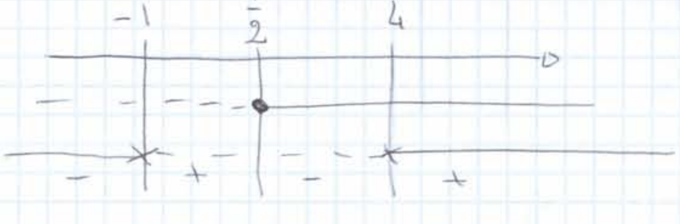
$x^2-1>0$ $x^2>1$ $\boxed{x>\pm 1}$ mai!

$x<-1 \cup x>1$ $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

$\frac{2x-1}{x^2-3x-4} \geq 0$ N $2x-1 \geq 0$ $2x \geq 1$ $x \geq \frac{1}{2}$

D $x^2-3x-4>0$ $x = \frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2} = \frac{3\pm\sqrt{25}}{2} = \frac{3\pm5}{2} \begin{matrix} 4 \\ -1 \end{matrix}$

$x<-1 \cup x>4$



$-1 < x < \frac{1}{2} \cup x > 4$

$\left(-1; \frac{1}{2}\right] \cup (4; +\infty)$

1. n → pari

$$\sqrt[n]{a(x)} > b(x) \qquad \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ b(x) < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} \cancel{a(x) \geq 0} \\ b(x) \geq 0 \\ a(x) > b^n(x) > 0 \end{cases}$$

in questo caso sono autorizzato ad elevare alla n

2. $\sqrt[n]{a(x)} < b(x)$

$$\begin{cases} a(x) \geq 0 \\ b(x) \geq 0 \\ a(x) < b^n(x) \end{cases}$$

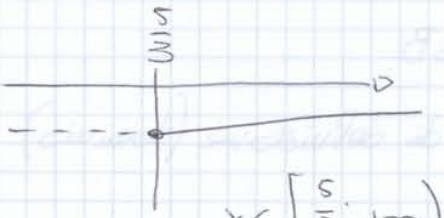
es. $\sqrt{3x-1} \geq 2$

$$\begin{cases} 3x-1 \geq 0 \\ 2 < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} \cancel{3x-1 \geq 0} \\ 2 \geq 0 \end{cases} \longrightarrow 3x-1 \geq 2^2$$

$$3x \geq 5 \qquad x \geq \frac{5}{3}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \cup \begin{cases} \cancel{x \geq \frac{1}{3}} \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$\emptyset$ $\qquad x \geq \frac{5}{3}$



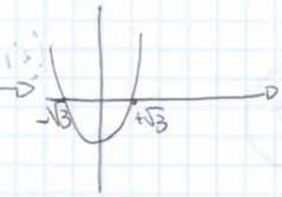
$x \in \left[\frac{5}{3}; +\infty\right)$

facendo l'unione ottengo l'intervallo del 2° sistema

$\sqrt{3x^2-1} > \sqrt{x^2-3}$

$$\begin{cases} \cancel{3x^2-1 \geq 0} \\ x^2-3 \geq 0 \\ 3x^2-1 \geq x^2-3 \end{cases}$$

$x^2-3 \geq 0 \longrightarrow$

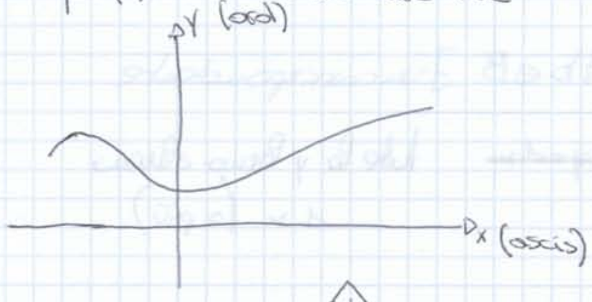


$x \in (-\infty, -\sqrt{3}] \cup [+\sqrt{3}; +\infty)$

$\downarrow$

$2x^2 \geq -2 \qquad x^2 \geq -1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$ quindi ottengo lo stesso di prima

$y=f(x)$ ⇒ forma analitica y = variabile dipendente



$y=f(x)$

punti (x,y) che soddisfano $y=f(x)$

⇑

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA

- Immagine $f\ A \to B$

$x \in A$ è detto immagine di x il valore y ottenuto applicando la funzione $f(x)$ a questo dato valore di x

Dato $C \subseteq A$ è detto immagine di C l'insieme:

$$\{b \in B : \exists c \in C : b = f(c)\}$$

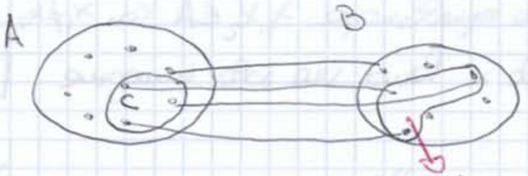
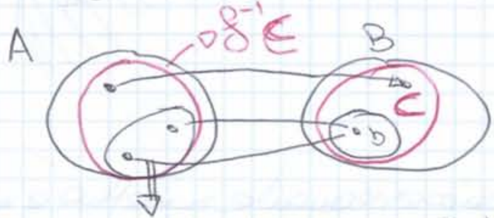


immagine di C in B = $f(C)$

- Controimmagine

Dato $b \in B$ è detto controimmagine di b l'insieme $\{a \in A : f(a) = b\}$

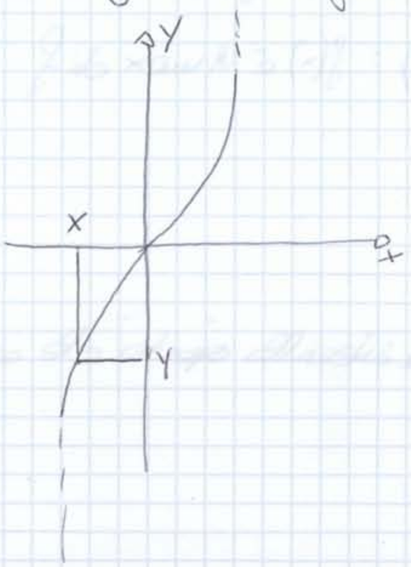
la controimmagine può essere anche un insieme di valori!



controimmagine di b = $f^{-1}(b)$ → può essere un insieme $\subseteq A$

Dato $C \subseteq B$ è detto controimmagine di C l'insieme delle controimmagini di tutti i $c \in C$ = $f^{-1}(C)$

(es. scriverlo in notazione "matematica") es. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f: x \to x^3$



→ invertibile (suriett e iniett)

→ $f^{-1}: x \to \sqrt[3]{x}$

$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

$\boxed{\text{dominio}}$

dom(f) | Data $f: A \to B$ è detto dom(f) l'insieme dei valori di A per cui f risulta essere definita (ovvero per cui ~~esiste~~ $\exists f(x)$)

es.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f: x \to \frac{1}{x}$ → non definito in $x=0$

dom(f) $= \mathbb{R} - \{0\}$

Data $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

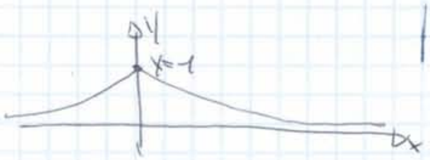
dom(f) il dominio di f

Im(f) l'immagine del dom(f) → i valori effettivamente assumibili dalla funzione

- f è limitata superiormente [infer.]

se Im(f) è limitato superiormente [inf]
↳ insieme delle immagini

es. $f: x \to \frac{1}{x^2+1}$



dom(f) $= \mathbb{R}$

Im(f) $= (0,1]$

⑲

- similmente monotonia decrescente (strett)
- f è monotona se è monotona cresc o decresc su I

COMPOSIZIONE DI FUNZIONI

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad h = f+g$ $\quad h: x \to h(x) = f(x)+g(x)$

$f: B \to C$ $\quad g: A \to B$

è detta composizione tra f e g , $h = f \circ g$

$h: A \to C$ $\quad h: x \to f[g(x)]$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[rr, bend left, "f \circ g"] & B \arrow[r, bend right, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

$$\boxed{f \circ g \neq g \circ f}$$

es. $f(x) = \dfrac{1}{|x+1|}$ $\quad g(x) = x^2 - 1$

$h = f \circ g$

$h(x) = f[g(x)] = f(x^2-1) = \dfrac{1}{|x^2-1+1|} = \dfrac{1}{|x^2|} \to h(x) = \dfrac{1}{x^2}$

$\ell = g \circ f$

$g[f(x)] = \left[\dfrac{1}{|x+1|}\right]^2 - 1 = \dfrac{1}{(x+1)^2} - 1 = \ell$

es.

Data $h(x) = \sqrt{x^2-1}$ riconoscerla come composizione di funzioni elementari

$f(x) = \sqrt{x}$ $\quad g(x) = x^2 - 1$

$f \circ g = \sqrt{x^2-1}$

RIFLESSIONI

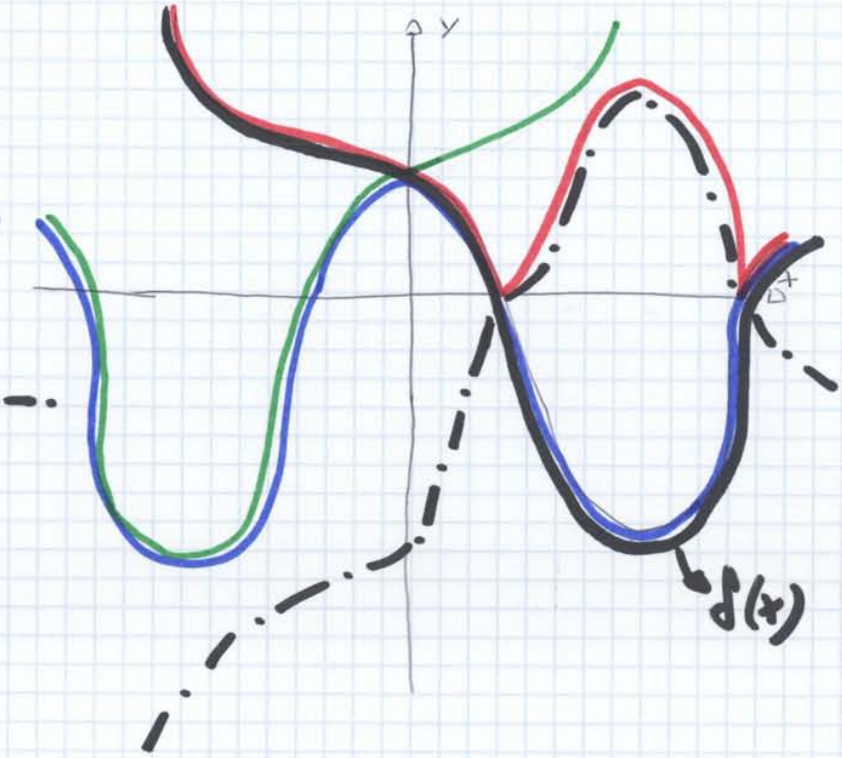
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$h_1(x) = |f(x)|$ ●

$h_2(x) = f(|x|)$ ●

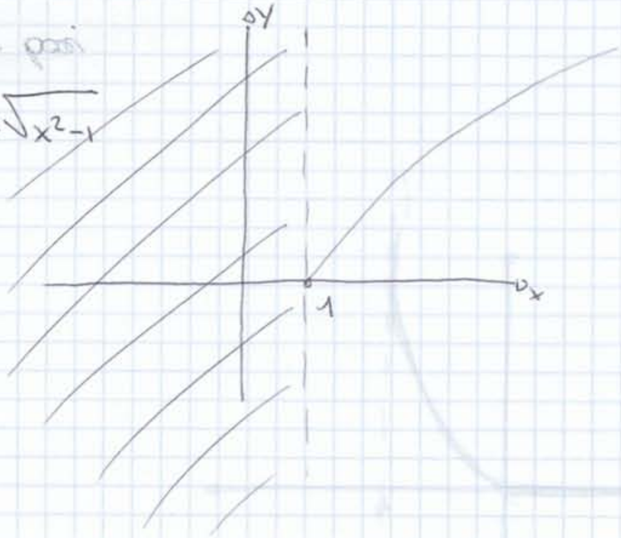
$h_3(x) = f(-x)$ ●

$h_4(x) = -f(x)$ ▬ ▪ ▬



es.

$f(x) = \sqrt{x^2-1}$



disegna

$f(-x)$

$|f(x)|$ ... ecc.

funzioni pari e dispari

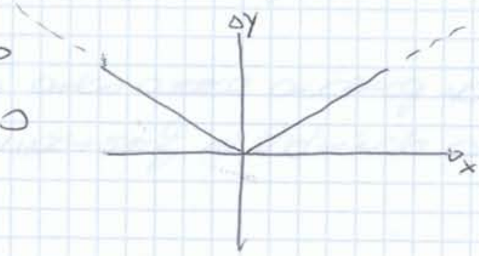
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

f **PARI** se $\forall x \in dom(f)$ vale $f(-x) = f(x)$ (simmetrica rispetto alle ordinate)

f **DISPARI** se $\forall x \in dom(f)$ vale $f(-x) = -f(x)$

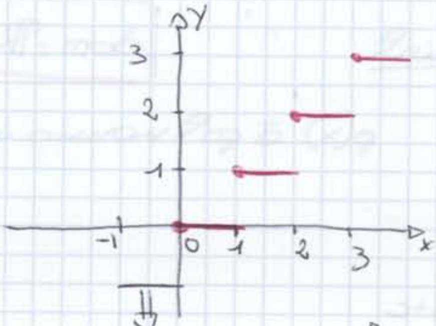
valore assoluto

$$|x| = \begin{cases} -x & x<0 \\ x & x\geq 0 \end{cases}$$



PARTE INTERA

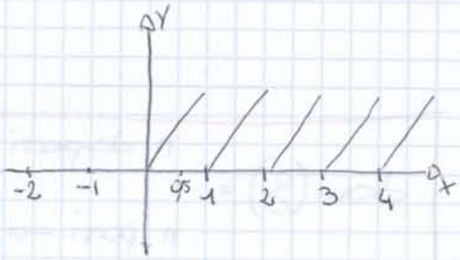
$$[x] = \begin{cases} \vdots \\ 0 \text{ se } x\in[0,1) \\ 1 \text{ se } x\in[1,2) \\ \vdots \end{cases}$$



parte intera = -1 $[-0,37] = -1$

Mantissa (parte del numero dopo la parte intera)

$M(x) = X - [x]$

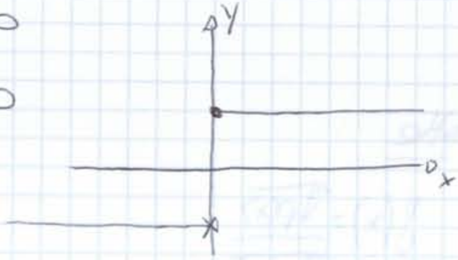


es. 0,5

$0,5-[0] = 0,5$ ecc...

segno

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} +1 & \text{se } x\geq 0 \\ -1 & \text{se } x<0 \end{cases}$$



- funzioni periodiche

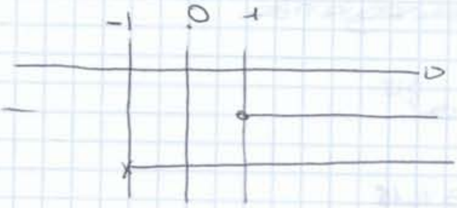
f è detta periodica di periodo p se il suo dom è invariante per traslazione rispetto a p [cioè se $x\in dom(f)$ allora anche $x+p\in dom(f)$]

e se $f(x+p) = f(x)$ $\forall x\in dom(f)$

$p>0$

se quanto detto è vero f se è periodica di p lo è anche di 2p

$\text{dom } f(x) = \{x : x-1 \geq 0 \wedge (x+1) > 0\}$



$x \geq 1 \quad [1, +\infty)$

$f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-\sqrt{x+1}} \qquad \text{dom}(f) = ?$

$x \in \mathbb{R}$ tali che $\begin{cases} x-\sqrt{x+1} \neq 0 & x \neq \sqrt{x+1} \\ x+1 \geq 0 & x \geq -1 \end{cases}$

$\begin{cases} \xrightarrow{} \\ \text{uguaglianza} \\ x \geq -1 \end{cases} \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x^2 = x+1 \end{cases}$ o $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x < 0 \\ \text{no uguagli} \end{cases}$

$\text{dom}(f) = \{x \in \; x \geq -1\} - \{x_0\}$

- funzioni potenza

$a \in \mathbb{R} \quad n \in \mathbb{N}^+ \quad a^n = a \cdot a \ldots a$

$a^{m+n} = \boxed{a^m \cdot a^n} \qquad \underline{a^0 = 1} \Rightarrow a^{n-n} = a^n \cdot a^{-n} = \cancel{a^n} \cdot \dfrac{1}{\cancel{a^n}} = 1$

$a^{-n} = \dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{1}{a} \ldots \dfrac{1}{a} = \boxed{\dfrac{1}{a^n}}$

$a \in \mathbb{R} \quad r \in \mathbb{Q}$

$r = \dfrac{n}{m} \qquad a^r = a^{\frac{n}{m}} \boxed{= \sqrt[m]{a^n}}$

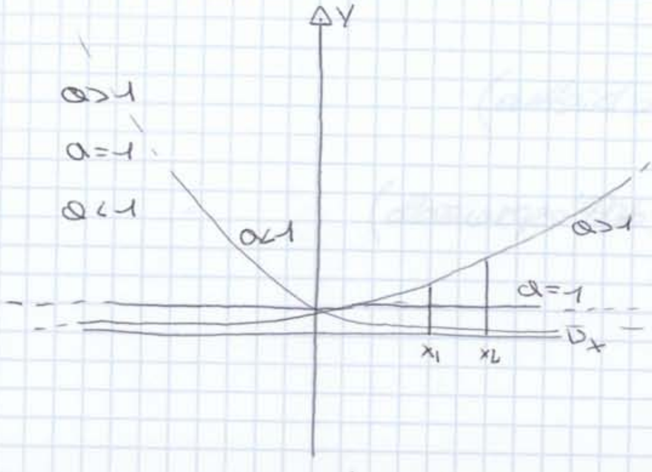
$(a^n)^m = a^{n \cdot m} \qquad$ es. $\left[a^{\frac{n}{m}}\right]^m = \sqrt[m]{a^n} \ldots \sqrt[m]{a^n} =$

$a^{\frac{n}{\cancel{m}} \cdot \cancel{m}} = a^n$

- m pari $= \sqrt[m]{a}$ definita solo per $a \geq 0$

- funzioni esponenziali

$a > 0$ $f: x \rightarrow a^x$ $dom(f) = \mathbb{R}^+$



$x_1 < x_2$ — $a^{x_1} < a^{x_2} \rightarrow$ se $a>1$

— $a^{x_1} > a^{x_2} \rightarrow$ se $a<1$

$a = e$ [numero di nepero] $e = 2,7172$ $e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

es. trovare dom e segno e immagine

$f(x) = 2^{2x} + 3 \cdot 2^x \boxed{-4}$ Dom $= \mathbb{R}$

immagine $= (-4, +\infty)$

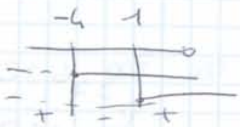
-4 non è accettabile perché anche elevandolo a 0 numero <u>SEMPRE</u> positivo

Lo è estremo inferiore!

segno $f(x) \geq 0$

$z = 2^x$

$f(x) \geq 0$ $z^3 + 3z - 4 \geq 0$ $z = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2}$ $\begin{matrix} 1 \\ -4 \end{matrix}$



$2^x \leq -4$ $\rightarrow$ non acc

$2^x \geq 1$ $2^x \geq 1^0$ $x \geq 0$

$x \leq -4 \cup x \geq 1$

$f(x) \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq 0$

- $\log_a 1 = 0$

- $\log_a a = 1$

- sia $a > 0, a \neq 1$

  siano $x, y > 0$

  allora $\boxed{\log_a xy = \log_a x + \log_a y}$ $*$

Dim.

ricordiamo: $x_1 = x_2 \Longleftrightarrow a^{x_1} = a^{x_2}$ allora dimostrare $*$ è equivalente

a dimostrare che $a^{\log_a(xy)} = a^{\log_a x + \log_a y}$

$$\begin{tikzcd} a^{\log_a(xy)} \arrow[d] & = & a^{\log_a x + \log_a y} \\ xy & = & a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} \\ & & x \cdot y \end{tikzcd}$$

$xy = xy$ c.v.d

- $\boxed{\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y}$

- $\boxed{\log_a (x)^y = y \log_a x}$ (y può essere ∞)

  dimostro $a^{\log_a (x)^y} = a^{y \cdot \log_a x}$

- $\boxed{\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_b x}}$

tra tutte le funzioni logaritmo è importante quella avente base e

$\log_e = \ln = \log$ $\qquad\qquad$ $\log_{10} = \text{Log}$

logaritmo naturale

es.

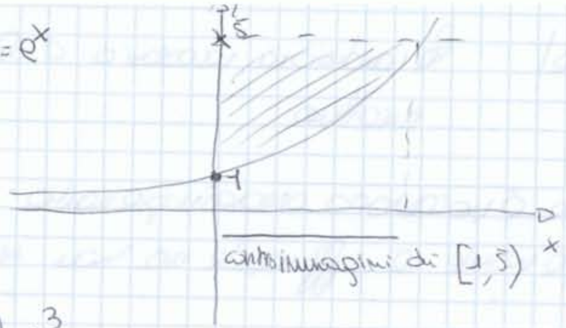
$x = \log_{\frac{1}{2}} \sqrt[5]{16} = \log_{\frac{1}{2}} \sqrt[5]{2^4} = \log_{\frac{1}{2}} 2^{\frac{4}{5}} = \log_{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{4}{5}}\right] = -\frac{4}{5} \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = -\frac{4}{5}$

$\log_x 27 = 3$ $\qquad x^{\log_x 27} = x^3$ $\qquad \Rightarrow 27 = x^3$ $\qquad x = 3$

$(\sqrt{7})^x = 49$ $<$ $x \log \sqrt{7} = 48 = \log_{\sqrt{7}} (\sqrt{7})^4$ $\qquad 4 \log_{\sqrt{7}} \sqrt{7} = 4$

$7^{\frac{x}{2}} = 7^2 = \frac{x}{2} = 2$ $\qquad x = 4$

$f(x) = e^x$



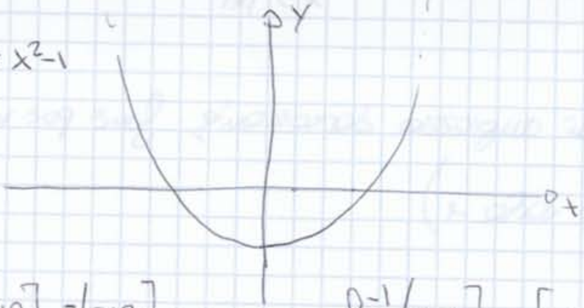
$f(3) = e^3$

$f: [0, +\infty] = [1, +\infty)$ $f(0) = 1 \to$ sempre 1 e!

$f^{-1}(1) = 0$

$f^{-1}[1, 5)$ $e^x = 5 = \log 5$

$f(x) = x^2 - 1$

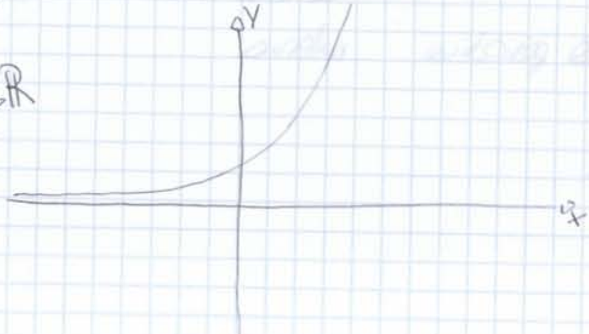


$f(1, 2] = (0, 3]$ $f^{-1}(0, 3] = [-2, -1) \cup (1, 2]$ ⟹

prendo sia i valori prima che dopo lo 0 con ordinata 3! nella sia prima che dopo lo 0!

a $f(x) = e^x$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



iniettiva: si! perché $f(x)$ è tagliata da rette orizzontali in un punto solo!

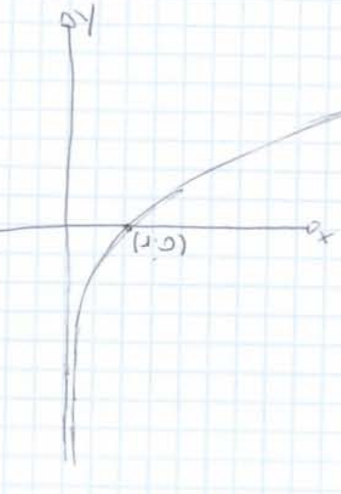
suriettiva: no! se lo studio da $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ si (situazioni + punti) di corrispondenza → biettiva!

↓

0 + di +1 sempre tagliata rette orizz.

$f(x) = \log x$

$D\ (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

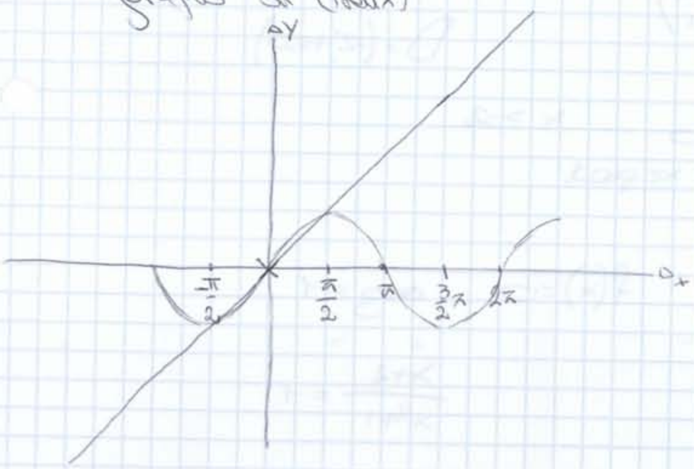


$f(e^2) = 2$

iniettiva: si
suriettiva: si
} biett.

㉝

grafico di $(\operatorname{sen} x)^2$



ma nell'origine ha una tangente la bisettrice

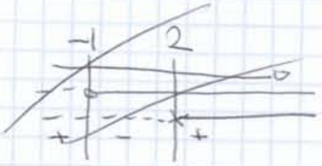
periodo π ⇒ dipende dall'elevaz.

$f(x)=\sqrt{\frac{1-x}{2-x}}$ D $\frac{1-x}{2-x}\geq 0$ $2-x>0$

$1-x\geq 0$ $-x\geq -1$
$x\leq 1$

$x\leq +1 \cup x>2$

$2-x>0$ $-x>-2$ $x<2$



$f(x)=0$ $\sqrt{\frac{1-x}{2-x}}=0$ $\frac{1-x}{2-x}=0$ $x\neq 2$

$x=1$ → f(x) si annulla quando il numer è 0

$f(x)>0$ $\sqrt{\frac{1-x}{2-x}}\geq 0$ $\forall x \in Dom$

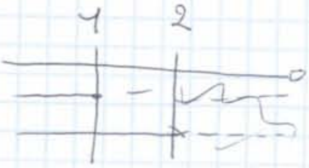
$f(x)=\sqrt{x}$

$f(x)=\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{2-x}}$

$1-x\geq 0$
$2-x\geq 0$
$\sqrt{2-x}\neq 0$

$\begin{cases} x\leq 1 \\ x\leq 2 \end{cases}$
$x\neq 2$

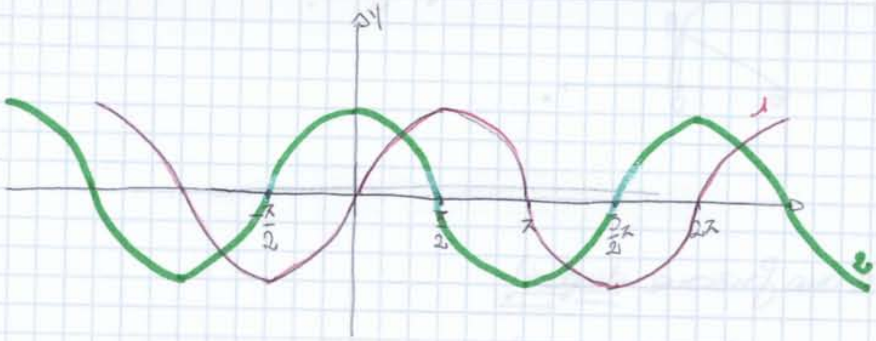
$\boxed{x\leq 1}$



X	cosx	senx	tgx
0	1	0	0
$\frac{\pi}{2}$	0	1	∄
π	-1	0	0
$\frac{3}{2}\pi$	0	1	
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$ / $\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$

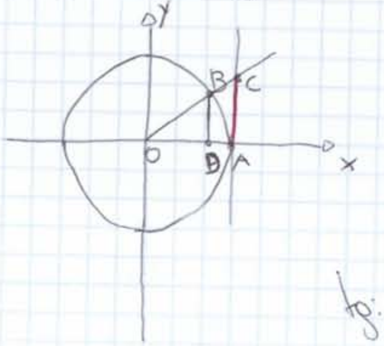
senx = 1

cosx = 2



$tg: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$tg: x \mapsto tg(x) = \tan(x) = \frac{senx}{cosx}$



| → valore assoluto della lungh. della tangente nel punto B

$\frac{senx}{cosx} = \frac{BD}{OD} = \frac{CA}{OA} = \frac{tgx}{1}$

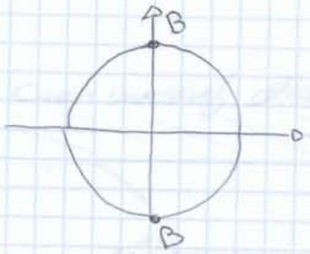
tg: lunghezza con segno I°/III° quad → pos.
II°/IV° quad → neg.

$Dom(tg) = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \dots\right\}$ → valori in cui si annulla il coseno

$= \mathbb{R} - \left\{(2z+1)\frac{\pi}{2}, z \in \mathbb{Z}\right\}$

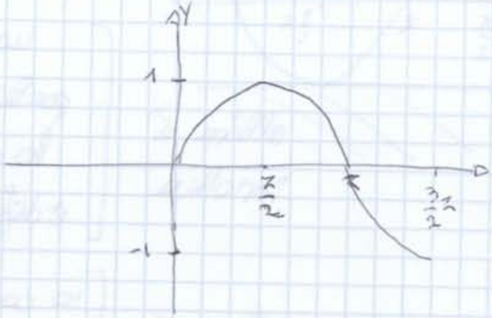
Equazioni trigonometriche

$\operatorname{sen}^2 x = 1 \to \operatorname{sen} x \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$



$x = \frac{\pi}{2} \quad x = \frac{3}{2}\pi$

$\to x = (2z+1)\frac{\pi}{2} \quad z \in \mathbb{Z}$



$\cos^2 x + 3\operatorname{sen} x - 3 = 0$

$1 - \operatorname{sen}^2 x + 3\operatorname{sen} x - 3 = 0$

$-\operatorname{sen}^2 x + 3\operatorname{sen} x - 2 = 0 \qquad \operatorname{sen}^2 x - 3\operatorname{sen} x + 2 = 0 \qquad \operatorname{sen} x = t$

$t^2 - 3t + 2 = 0$

$t = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$

~~$\operatorname{sen} x = 2$~~ = non acc

$\operatorname{sen} x = 1$

$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad 2z\pi \to z \in \mathbb{Z}$

$\operatorname{sen} x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ limitatamente $[0, 2\pi]$

$\frac{\pi}{4} < x < \frac{3}{4}\pi$

$f(x) = \frac{1}{1 - \operatorname{sen}^2 x} \qquad \operatorname{Dom}(f) = 1 - \operatorname{sen}^2 x \neq 0 \quad \operatorname{sen}^2 x \neq 1 \qquad x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$f(x) = \sqrt{2\cos x - 1} \qquad \operatorname{Dom}(f) = 2\cos x - 1 \geq 0 \qquad 2\cos x \geq 1 \quad \cos x \geq \frac{1}{2}$

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \cup \frac{5}{3}\pi \leq x \leq 2\pi$

$\left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5}{3}\pi, 2\pi\right]$

se non fosse limitato a $[0, 2\pi]$ potrei esprimerlo come

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \left[0 + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{5}{3}\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\right] \right\}$$

· **arcotangente** (arctg)(arctan)

tan: $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ arctg: $\mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$

[è suriettiva

[non è iniettiva ma se la restringo all'intervallo $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ lo è

⇓

invertibile

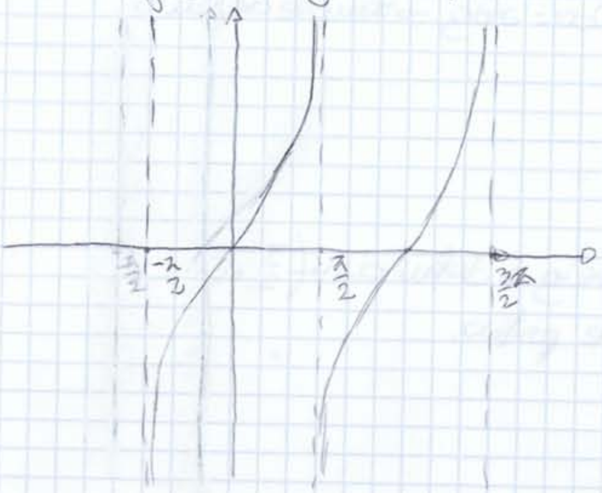
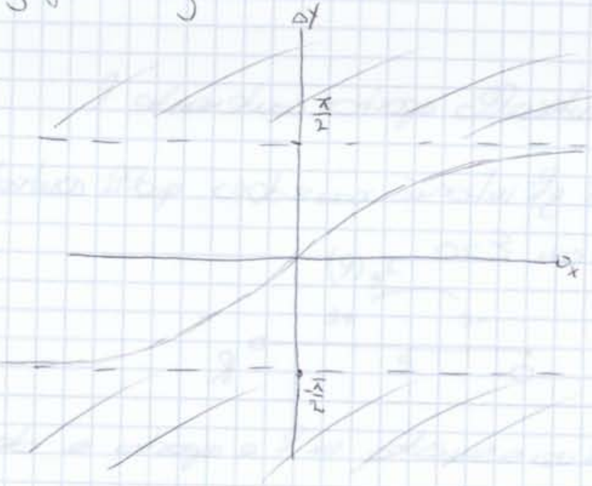


grafico arctg



arctg0 = 0

"arctg ∞" = $\frac{\pi}{2}$

"arctg -∞" = $-\frac{\pi}{2}$

positiva per valori positivi, negativa per valori negativi

es. $\arccos x > \frac{\pi}{2}$ $-1 \leq x < 0$

es. $\text{arctg}(x-1) < 0$ $(x-1) = z$

$\text{arctg}\, z < 0 \xrightarrow{\text{guardo il grafico}} z < 0$

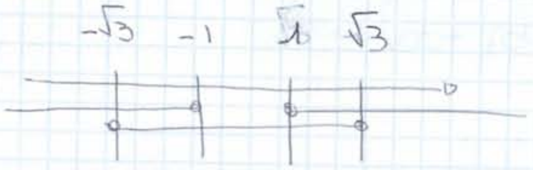
$x-1 < 0$

$x < 1$

$\text{Dom}(f) \to f(x) = \arcsin(x^2-2) \Rightarrow \text{dom arc.}\ -1 \leq \overset{\text{argomento}}{x^2} \leq 1$ ovvero

$-1 \leq x^2-2 \leq 1$

$\begin{cases} x^2-2 \geq -1 \\ x^2-2 \leq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ x^2-3 \leq 0 \end{cases}$ $x \leq -1 \cup x \geq 1$; $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$



$-\sqrt{3} \leq x \leq -1 \cup$

$1 \leq x \leq \sqrt{3}$

Limite di successioni

Successione: [famiglia di numeri reali indicizzata da un indice appartenente ai numeri naturali $(n \in \mathbb{N})$]

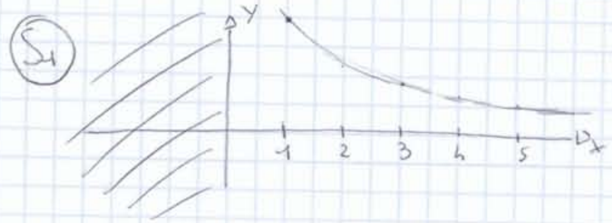
$$a_1, a_2, a_3, \dots\dots\ a_n, a_{n+1}, \dots$$

$\xrightarrow{\text{ovvero}}$ $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$n \longrightarrow a_n$$

es. $S_1 = \left\{ a_n,\ a_n \in \mathbb{N}^+ : a_n = \frac{1}{n} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\}$

$S_2 = \left\{ a_n,\ n \in \mathbb{N}^+ : a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}$
$= \left\{ 2^1, \left(\frac{3}{2}\right)^2, \dots \right\}$



definito solo in $\mathbb{N}^+$

affermo che $f(x) = a_n$ $\rightarrow$ si avvicina allo zero $\rightarrow$ $a_n = 0$

prendo un intorno dello 0. Da un certo punto in poi osservo che tutti i valori della successione a_n sono tutti inclusi nell'intorno dello 0:

$$a_n \in I(0)$$

se prendo un intorno più piccolo trovo notato che tutti gli $a_n \rightarrow a_n \in I(0)$
se $n > n_0$

Definizione

Data la successione S, diciamo che S tende ad $\ell \in \mathbb{R}$, ("ovvero converge ad ℓ", "ha limite ℓ") e scriviamo $\lim_{n \to \infty} a_n = \ell$

se $\forall I(\ell)$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \in I(\ell)$ $\forall_{n > n_0}$

es. $S = \left\{ a_n : a_n = \frac{1}{n} \right\}$ $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

$I(0) = (-0{,}001; +0{,}001)$

$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \to$ no! è fatto vedere che per $n > \frac{1}{2\varepsilon}$ risulta

$$\frac{1}{2}-\varepsilon < a_n < \frac{1}{2}+\varepsilon$$

contro esempio

$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ $I(1) \equiv (0,9 ; 1,1)$ → trovo n_0: per ogni $n > n_0$ vale $a_n \in (0,9 , 1,1)$

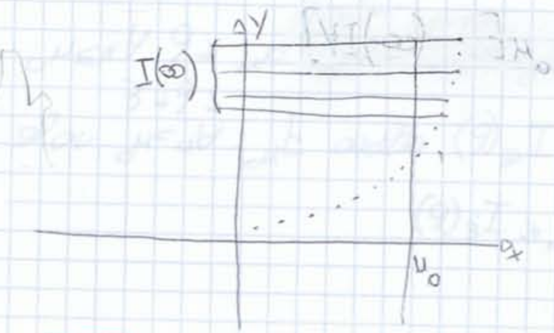
NO! se $n=100$

$$a_{100} = \frac{100+1}{200} = \frac{101}{200} = 0,501$$

se $n = 1000$ $a_{1000} = \frac{1001}{2000} = 0,50001$

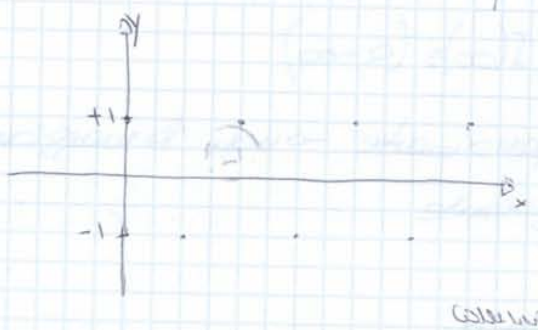
Def Dato S diciamo che S tende a $+\infty$ [o a $-\infty$], ovvero "diverge" e scriviamo $\text{limite}_{n\to\infty} a_n = +\infty$ $[-\infty]$, se $\forall I(+\infty)$ $\exists\, n_0 : \forall n > n_0$ vale $a_n \in I(+\infty)$

se $\forall I(-\infty)$ $\exists\, n_0 : \forall n > n_0$ vale $a_n \in I(-\infty)$



Def Diciamo che S è "indeterminata" se non converge e non diverge

$$S = \left\{ a_n, n \in \mathbb{N} : a_n = (-1)^n \right\} = \{+1, -1, +1, -1 \ldots\}$$



$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ $\boxed{\text{NO}}$

e nemmeno -1

se cambio l'I in uno + grande non vale comunque xk per definizione parla di $\forall$

$a < a_{n_0} \le a_{n_0+1} \le \ldots a_{n+2} \le \ldots a_n$ dove $n > n_0$

Quindi fissato $I(\infty)$ $\exists n_0 : \forall n > n_0$ vale $a_n \in I(\infty)$

es. $S = \left\{ a_n : a_n = \frac{1}{n} \right\}$ → converge

1. ↘ monotona dec.

2. lim inf perchè non può assumere valori neg.

$S = \left\{ a_n, n \in \mathbb{N}^+ : a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}$

$= \left\{ 2, \left(\frac{3}{2}\right)^2 \nearrow 2, \ldots\ldots \right\}$

1. S è ↗

2. $\forall n, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$ (SEMPRE) → lim super

⇓

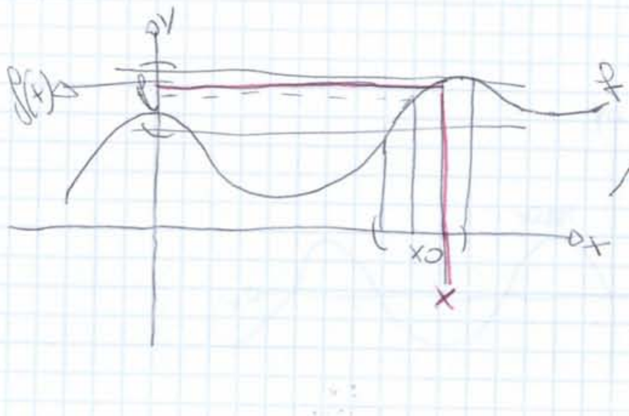
in questo caso S converge $\lim_{n \to +\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

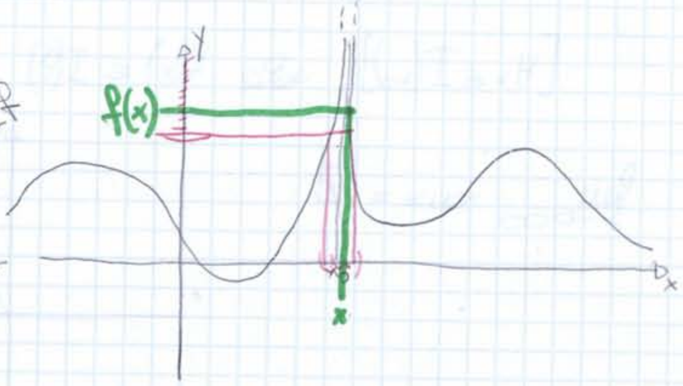
Limiti di funzioni

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, limiti in possibili $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

IP. Supponiamo che la f sia definita in un intorno $I(x_0)$ sufficientemente grande di x_0, tranne al più in x_0

Def Data f come sopra diciamo che $f \xrightarrow{\text{tende a}} l$, $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ per $x \to x_0$ e scriviamo $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ se per ogni intorno del limite esiste l ovvero $\forall I(l)$ $\exists I(x_0) : \forall x \in I(x_0) \cap Dom(f) - \{x_0\}$ vale $f(x) \in I(l)$

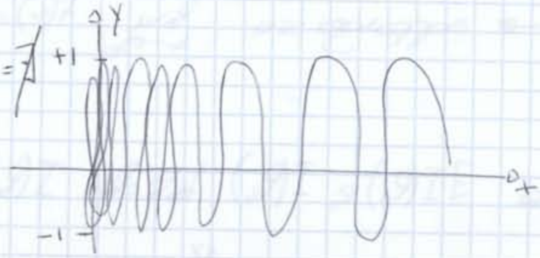




$\lim_{x \to \infty} \operatorname{sen} x = 0$ (perché ondeggia nella sua vicinanza)

$\nexists$ no!

$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = \nexists$



es.

Dimostrare che $\lim_{x \to \infty} x^2 - 2x = +\infty$ (l)

Prendo un $I(l) \equiv I(\infty) = (M; +\infty)$

Devo trovare $I(x_0) = (a; +\infty)$: $\forall x \in I(x_0)$ vale $f(x) \in I(\infty)$

$\boxed{f(x) \in I(\infty) \equiv (M, +\infty)}$ allora

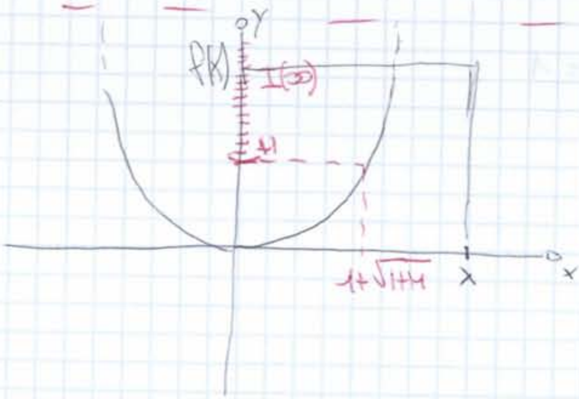
$f(x) > M \to x^2 - 2x > M$ ovvero $x^2 - 2x - M > 0$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4M}}{2} < \begin{matrix} 1+\sqrt{1+M} \\ 1-\sqrt{1+M} \end{matrix}$$

se $x \in (-\infty; 1-\sqrt{1+M}) \cup (1+\sqrt{1+M}; +\infty)$ allora $f(x) \in I(\infty)$

allora vale anche per le $\boxed{x \in (1+\sqrt{1+M}, +\infty) = I(x_0)}$

vale che $\forall x \in I(x_0)$ vale $f(x) \in I(\infty)$



$\boxed{n \in \mathbb{R},\ n \neq 0}$

$\frac{0}{n} \to 0$

$\frac{n}{0} \to \pm\infty$

$\frac{\infty}{n} \to \pm\infty$

$\frac{n}{\infty} \to 0$

Eccezioni (Altri casi con soluzione indeterminata)

- $\frac{\infty}{\infty}$
- $\frac{0}{0}$
- $\infty - \infty$
- $\infty \cdot 0$
- 0^0
- ∞^0
- 1^∞

$\left.\begin{matrix} 0^0 \\ \infty^0 \\ 1^\infty \end{matrix}\right]$ da risolvere con de l'Hopital

es.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2}{x-3} \to \frac{+\infty^2+2}{\infty-3} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\frac{x^{\cancel{2}}\left(1+\overset{\to 0}{\boxed{\frac{2}{x^2}}}\right)}{\cancel{x}\left(1-\underset{\to 0}{\boxed{\frac{3}{x}}}\right)} = \frac{x}{1} = +\infty$$

la regola del raccoglimento vale con i limiti che tendono ad infinito

$$\lim_{x\to\infty} x^2-2x = \infty-\infty = f.i.$$

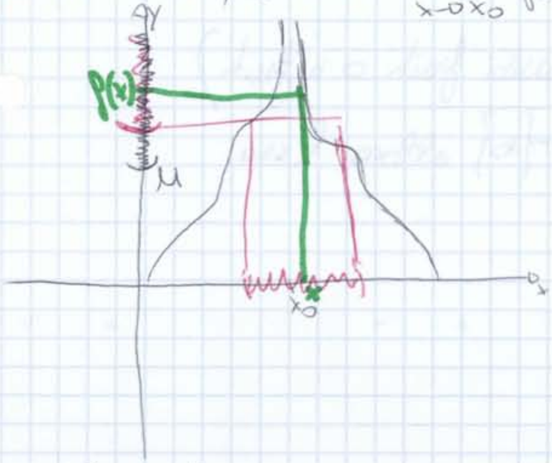
$$x^2\left(1-\overset{\to 0}{\boxed{\frac{2}{x}}}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-x^3+x^2+1}{x^3+3} = \frac{\cancel{x^3}\left(-1+\overset{\to 0}{\boxed{\frac{1}{x}}}+\overset{\to 0}{\boxed{\frac{1}{x^3}}}\right)}{\cancel{x^3}\left(1+\underset{\to 0}{\boxed{\frac{3}{x^3}}}\right)} = -1$$

$$\lim_{x\to0} \frac{x^2+2x}{x} = \frac{x^2\left(1+\overset{\to 0}{\boxed{\frac{2}{x}}}\right)}{x} = 0 \to \frac{\cancel{x}(x+2)}{\cancel{x}} = 0+2=2$$

$$\lim_{x\to2} \frac{x^2-3x+2}{x-2} = \frac{0}{0} \text{ ind}$$

$\ell = \infty$, ovvero $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$



fisso $M>0$

esiste $I(x_0)$ tale che $f(x)>M$ $\forall x \in I(x_0)$

$f(x) > M > 0 \to f(x) > 0$ (escludendo x_0)

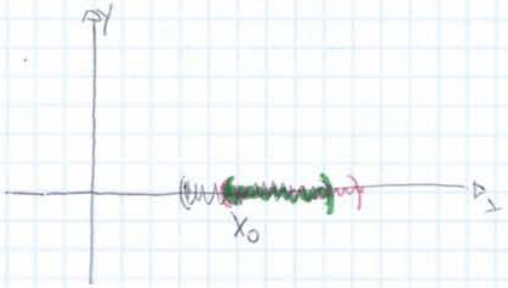
Corollario I

Supponiamo $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$. Supponiamo $\exists$ $I(x_0)$ in cui $f(x) \geq 0$ $\forall x \in I(x_0) - \{x_0\}$. Allora $\ell \geq 0$ oppure è $+\infty$ (similmente per i negativi)

Dim per assurdo.

Supponiamo che lim <0. Allora per il teorema precedente $\exists$ $I'(x_0)$ tale che $f(x)<0$ in $I'(x_0)$ (noto).

Consideriamo $I^2(x_0) = I(x_0) \cap I'(x_0)$



Sia $x \in I^2(x_0)$

- vale $f(x)<0$
- vale $f(x) \geq 0$

↓

impossibile (è sbagliato supporre che il limite <0)

Dim $(x \neq x_0)$

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \to \exists\, I^f(x_0)$ tale che $f(x) \in I_\varepsilon(l)$ 1
- $\lim_{x \to x_0} g(x) = l \to \exists\, I^g(x_0)$ tale che $g(x) \in I_\varepsilon(l)$ 2

$$\Downarrow$$

posso anche scrivere

1 $l+\varepsilon < f(x) < l+\varepsilon \qquad x \in I^f(x_0)$

2 $l-\varepsilon < g(x) < l+\varepsilon \qquad x \in I^f(x_0)$

ovvero

$$I = I^f(x_0) \cap I^g(x_0) \cap I(x_0)$$

$\Downarrow$

intorno di x_0

Sia ora $x \in I$

$$\left. l-\varepsilon < f(x) \le h(x) \le g(x) < l+\varepsilon \right\} \forall x \in I - \{x_0\} \text{ vale } h(x) \in I_\varepsilon(l)$$

- $\lim_{x \to \infty} \text{sen}\,x = \; ? \; \nexists$
- $\lim_{x \to \infty} \frac{\text{sen}\,x}{x} \to \frac{\text{sen}\,\infty}{\infty} = \; ?$

noto $\underset{f(x)}{\overset{0}{\boxed{-\frac{1}{x}}}} \le \underset{h(x)}{\frac{\text{sen}\,x}{x}} \le \underset{g(x)}{\overset{0}{\boxed{\frac{1}{x}}}} \qquad x \in \mathbb{R}_+ \; (0, +\infty)$

$\Rightarrow$ con $x \to \infty$

$$\lim_{x \to \infty} -\frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Per il teo dei carabinieri $\lim_{x \to \infty} \frac{\text{sen}\,x}{x} = 0$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1+3\cos x}{x} \qquad \underset{0}{\boxed{-\frac{2}{x^2}}} \le \underset{\substack{\Downarrow \\ 0}}{\frac{1+3\cos x}{x^2}} \le \overset{0}{\boxed{\frac{4}{x^2}}}$$

quindi $\lim_{x \to x_0} |f(x) \cdot g(x)| = 0$

quindi $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$

es.

$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$ $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0$

$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x} =$

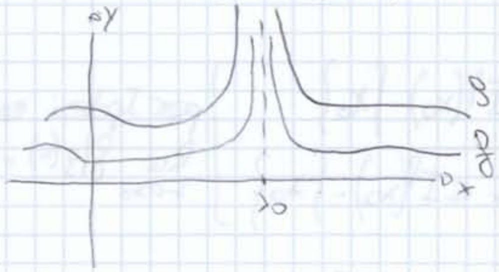
$\Downarrow$

quantità limitata, compresa tra $[-1;1]$

quindi moltiplicato 0 diventa 0, per il teorema appena visto c.v.d.

Teorema (secondo teorema del confronto) (caso infinito)

Sia $\lim_{x \to} f(x) = +\infty$. Se $\exists I(x_0)$ un intorno definite f e g (tranne al più x_0) e $f(x) < g(x)$, $\forall x \in I(x_0) - \{x_0\}$ allora $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$



• caso prodotto (solo per $l, m \in \mathbb{R}^+$)

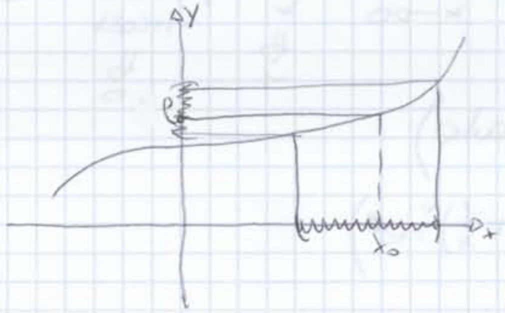
Th = $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = l \cdot m$

Fisso $\varepsilon > 0$. Consideriamo $\frac{\varepsilon}{2} > 0$.

Considero $I_{\frac{\varepsilon}{2m}}(l) \to \exists\, I^f(x_0) : |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2m} \quad \forall x \in I^f(x_0) - \{x_0\}$

- noto: se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, $l \in \mathbb{R}$,

quindi $\exists\, I(x_0)$ dove f è limitata ovvero $\exists\, c : |f(x)| \leq c \quad \forall x \in I(x_0) - \{x_0\}$



considero $I_{\frac{\varepsilon}{2c}}(m) \to \exists I^g(x_0) : |g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2c} \quad \forall x \in I^g(x_0) - \{x_0\}$

intorno in cui $f(x)$ era limitata da c

Sia ora $I = \underline{I^g(x_0)} \cap I^f(x_0) \cap \underline{I(x_0)}$

Sia $x \in I - \{x_0\}$

$$|f(x) \cdot g(x) - l \cdot m| = |f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot m + f(x) \cdot m - l \cdot m| =$$

$$|f(x) \cdot [g(x) - m] + m [f(x) - l]| \leq |f(x) \cdot [g(x) - m]| + |m \cdot [f(x) - l]| =$$

$$= \underset{\leq c}{|f(x)|} \cdot \underset{< \frac{\varepsilon}{2c}}{|g(x) - m|} + \underset{|m|}{|m|} \cdot \underset{< \frac{\varepsilon}{2 \cdot m}}{|f(x) - l|}$$

particolare, in $I(x_0)$ ← abbiamo

$$< \cancel{c} \cdot \frac{\varepsilon}{2\cancel{c}} + \cancel{m} \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot \cancel{m}} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Quindi $\forall x \in I - \{x_0\}$ vale $f(x)\, g(x) \in I_\varepsilon(l \cdot m)$

- $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ poiché la base è $\boxed{e}$ quindi al denom ho 1 (vedi lim sul prec.)

- $\lim_{x \to 0^+} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \to \frac{a^0 - 1}{0} = \frac{0}{0}$ f.i.

sostituisco $(a^x - 1) = y$ $a^x = y+1$ $x = \log_a(y+1)$

se $x \to 0$ $y \to 0$

quindi ho   (per $a > 1$)

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{y}{\log_a(y+1)} = \ln a$$

- $\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = \ln e = 1$

- $\lim_{x \to 0^+} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$ $\alpha \in \mathbb{R}$ sostituendo = f.i.

pongo $1+x = e^y \to x = e^y - 1$

se $x \to 0^+$ $y \to 0^+$

$$\lim_{y \to 0^+} \frac{(e^y)^\alpha - 1}{e^y - 1} \cdot \frac{y}{y} = \lim_{x \to 0^+} \frac{y}{e^y - 1} \cdot \lim_{x \to 0^+} \frac{(e^y)^\alpha - 1}{y} =$$

$$= 1 \cdot \lim_{y \to 0^+} \frac{(e^a)^y - 1}{y} = 1 \cdot \ln e^\alpha = \alpha$$

$\lim_{x \to 0^-}$?

$$\cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{1+3x}-1}{x} \longrightarrow \frac{0}{0} \text{ f.i.}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+3x)^{\frac{1}{5}}-1}{x} \qquad y=3x \qquad \begin{matrix} x\to 0 \\ y\to 0 \end{matrix}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3(1+y)^{\frac{1}{5}}-1}{y} = \cancel{3\lim}\ 3\cdot \alpha^{\frac{1}{5}} = \frac{3}{5}$$

$$\cdot \lim_{x\to \infty} \frac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}} = \frac{\infty}{\infty} \text{ f.i.}$$

$$y=2^x \qquad \begin{matrix} x\to \infty \\ y\to \infty \end{matrix}$$

$$\lim_{y\to \infty} \frac{y-y^{-1}}{y+y^{-1}} = \lim_{y\to \infty} \frac{y(1-y^{-2})}{y(1+y^{-2})} \xrightarrow{\text{sostituisco}} \frac{1-\overset{0}{\boxed{\frac{1}{\infty}}}}{1+\underset{0}{\boxed{\frac{1}{\infty}}}} = 1$$

$$\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x-2} \longrightarrow \text{f.i.}$$

$$= \lim_{x\to \infty} \left(\frac{x+3-3-1}{x+3}\right)^{x+3-3-2} = \lim_{x\to \infty} \left(1-\frac{4}{x+3}\right)^{x+3-5}$$

$$y=x+3 \qquad \frac{x\to \infty}{y\to \infty}$$

$$\lim_{x\to \infty} \left(1-\frac{4}{y}\right)^{y-5} = \lim_{x\to \infty} \underbrace{\left(1+\frac{-4}{y}\right)^{y}} \cdot \left(1-\frac{4}{y}\right)^{-5}$$

$$e^{-4}\cdot \lim_{y\to \infty} \left(1-\frac{4}{y}\right)^{-5}$$

$$\downarrow$$

$$\left(1-\frac{4}{\infty}\right)^{-5} = 1 \qquad e^{-4}\cdot 1 = e^{-4}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$$

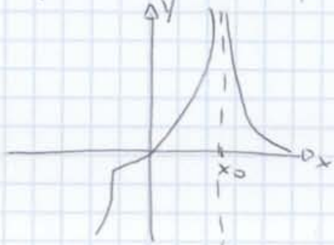
$x = e^y \quad y = \ln x \quad \begin{matrix} x \to \infty \\ y \to \infty \end{matrix}$

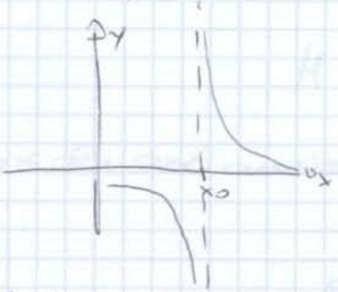
$$\lim_{y\to\infty} \frac{\overset{y}{\cancel{\ln e^x}}}{e^y} = \frac{1}{\lim_{x\to\infty} \frac{e^y}{y}} =$$

Asintoti Verticali

Si presentano quando, per un qualche x_0 (distinto ∉ Dom), vale $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$

$f(x)$ ha asintoto verticale $x = x_0$

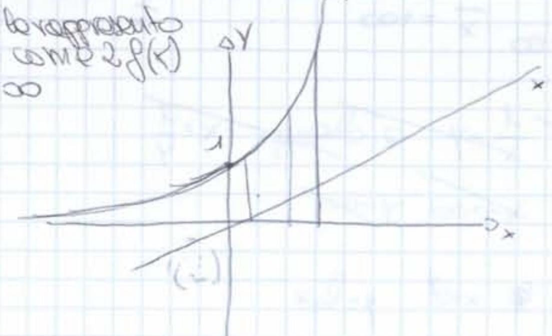




anche in questo caso $x = x_0$ è A.V.

→ $f(x) = \ln x$ ha asintoto a $+\infty$?

- $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ → potrebbe avere A.O
- $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{\infty}{\infty}$? $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\frac{x}{e^x}} = 0$ (con de l'Hôpital)
- $\lim_{x\to\infty} \boxed{\frac{e^x}{x}} = \infty$ lo rappresento come 2 $f(x)$



$f(x) = x$

il rapporto della a $f(x)$ cresce!

Se $f(x)$ è monotona (cresc.)
- se f è limitata superiormente → lim è l'estremo sup dell'immagine
- se f è illimitata super → lim divergente → $+\infty$

Algebra degli o piccolo

$f(x)=x^3$ $g(x)=x^2$ $x\to 0$ $x^3=o(x^2)$

$x\to\infty$ $x^2=o(x^3)$

Sia $n>m$ allora $x^n=o(x^m)$ con $x\to 0$

$x^m=o(x^n)$ con $x\to+\infty$

- $o(x^n)\pm o(x^n)=o(x^n)$ $x\to 0$

somma / differenza di funzioni trascurabili $\Rightarrow$ anche la risultante è trascurabile

$o(x^n)\pm o(x^m)=o$ $x\to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{o(x)+o(x^2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\underset{0?}{\boxed{\frac{o(x)}{x^2}}}+\lim_{x\to 0}\overset{\to 0}{\boxed{\frac{o(x^2)}{x^2}}}$$ se io prendo

$$\lim_{x\to 0}\frac{o(x)+o(x^2)}{x^2}=\longrightarrow\lim_{x\to 0}\underset{0}{\boxed{\frac{o(x)}{x}}}+\overset{\to 0}{\boxed{\frac{o(x)}{x}}}$$ perché lo posso vedere

come $\underset{\to 0}{\boxed{\frac{o(x^2)}{x}}}$ $x\to 0$ $\cancel{x}$

- $x^m\cdot o(x^n)=o(x^{n+m})$ $x\to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^m}\cdot o(x^n)}{\cancel{x^{n+m}}}=\lim_{x\to 0}\frac{o(x^n)}{x^n}=0$$

- $o(x^m)\cdot o(x^n)=o(x^{n+m})$

$$\lim_{x\to 0}\frac{o(x^m)\cdot o(x^n)}{x^{n+m}}=\lim_{x\to 0}\frac{o(x^m)}{x^m}+\lim_{x\to 0}\frac{o(x^n)}{x^n}$$

Sia $\varphi(x)$ una funzione limitata in $I(0)$ allora $\varphi(x)\,o(x^n)=o(x^n)$

Alcune equivalenze

- $\operatorname{sen}x\sim x$ $\operatorname{sen}x=x+o(x)$ $x\to 0$
- $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$ $1-\cos x=\frac{x^2}{2}+o\left(\frac{x^2}{2}\right)=\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ $x\to 0$

$$+\lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{o(x)}{2x}}_{0} = \frac{1+2e}{2} + 0 = \frac{1+2e}{2}$$

Proprietà per $x \to x_0$ sono $f \sim \tilde{f}$, $g \sim \tilde{g}$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to x_0} \tilde{f}(x)\cdot\tilde{g}(x)$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)}$$

Dim

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)\cdot\frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{f}(x)}\cdot\frac{\tilde{g}(x)}{\tilde{g}(x)} = \lim_{x\to x_0} \underbrace{\frac{f(x)}{\tilde{f}(x)}}_{1}\cdot\underbrace{\frac{g(x)}{\tilde{g}(x)}}_{1}\cdot\tilde{f}(x)\tilde{g}(x) =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \tilde{f}(x)\tilde{g}(x)$$

Proprietà

$f_1 = o(f)$ $\quad g_1 = o(g)$ per $x \to x_0$

$$\lim_{x\to x_0} \underbrace{[f(x)+f_1(x)]}_{\tilde{f}}\cdot\underbrace{[g(x)+g_1(x)]}_{\tilde{g}} = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)+f_1(x)}{\underbrace{g(x)+g_1(x)}_{\tilde{g}}} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Dim

Basta definire $\tilde{f} = f + f_1 \to \tilde{f} \sim f$

$\tilde{g} = g + g_1 \to \tilde{g} \sim g$

è sufficiente sostituire nei limiti della prop. precedente

es. $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{2x}-1}{\sqrt{x}} = \frac{0}{0}$ f.i. $\qquad e^{2x}-1 = 2x$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{x^{\frac{1}{2}}} = \lim_{x\to 0^+} 2\sqrt{x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}-x}{} \cdot \frac{(\sqrt{x^2+x}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{x}+x} = \frac{1}{2}$$

INFINITI E INFINITESIMI (e loro ordini)

Def

Sia f definita $I(x_0)-\{x_0\}$. Diciamo che f è infinitesimo se $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$

Diciamo che f è infinito se $\lim_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$

Def

Siano f e g infinitesimi in un certo x_0.

- se $f \sim g$ allora f e g sono infinitesimi dello stesso ordine
- se $f=o(g)$ f è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a g (va + velocemente)
- se $g=o(f)$ f è infinitesimo di ordine inferiore rispetto a g

es. x^2 è infinitesimo di ordine superiore ad x per $x\to 0$

Se nessuna di quelle sopra è soddisfatta allora f e g sono infinitesimi non confrontabili

Def

Siano f e g degli infiniti in x_0

- se $f \sim g$ $\to$ infiniti dello stesso ordine
- se $f=o(g)$ $\to$ f è un infinito di ordine inferiore a g
- se $g=o(f)$ $\to$ f è un infinito di ordine superiore a g

Se nessuna di queste allora f e g sono infiniti non confrontabili

$f(x)=x^2$ $g(x)=x$ $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)}=0$ f è inf. di ordine sup.

Def

Sia f un infinitesimo (infinito) di un certo punto x_0. Sia poi φ un infinitesimo (infinito) campione.

Supponiamo che $\exists \alpha \in \mathbb{R}^+ : f \overset{\smile}{\frown} \varphi^{\alpha}$

Allora α è detto ordine di infinitesimo (infinito) rispetto all'infinitesimo (infinito) campione φ

Nota: questo equivale a dire

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \ell \qquad \ell \neq 0$$

$$f(x) \sim \ell \cdot \varphi^{\alpha}(x) \qquad f(x) = \underbrace{\ell \cdot \varphi^{\alpha}(x)} + o(\varphi^{\alpha})$$

dell'infinito (infinitesimo)

parte principale ~~di~~ f rispetto a φ → <u>non</u> è trascurabile

Def Sia I un qualunque intervallo $I \subseteq Dom(f)$

Diciamo che $f(x)$ è continua in I se lo è in ogni $x_0 \in I$

Proprietà: tutte le funzioni elementari viste fino ad ora (rette, polinomiali, trigonometriche, esponenziali, logaritmiche, ...) sono continue nel loro dominio

Se non è continua è discontinua

Def. Sia f definita in $I(x_0)$, x_0 escluso.

Sia $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

Se • $\ell \neq x_0$

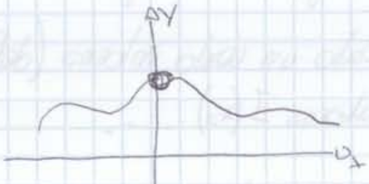
• $x_0 \notin Dom f$ (f non è definita in x_0)

allora x_0 è un punto di discontinuità ~~di 1ª specie~~ eliminabile

Es. $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ $x_0 = 0$

$x_0 \notin Dom f$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$



discont. di 1ª specie → consentono i prolungamenti di continuità

Es. • $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ è continua in x_0? si

• $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ $x_0 = 1$ $x_0 \notin Dom f$

$\lim_{x \to 1} \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0} \to \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = 2$

discont ~~di 1ª specie~~ (eliminabile) definendo $f(x)$ nuova:

$f(x) \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$

in -3 è continua

-2 no (discont ~~1° specie~~ eliminabile)

$-2<x<0$ si

0 si

4 no (discont ~~2°~~ 1° specie)

continuità unilaterale

Diciamo che $f(x)$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è continua da destra [da sinistra] se $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$

$$\left[\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)\right]$$

Es. vedi $f(x)$ precedente $x_0=4$ (2ª specie)

se lo faccio $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=0=f(x_0)$ è una funzione continua da sinistra

Discontinuità di 2° tipo: tutte quelle non eliminabili o di 1° tipo

Teorema (di sostituzione o scambio limite funzioni continue)

Se $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$. Sia poi $g(x)$ definita in $I(\ell)$: soddisfi una delle seguenti condizioni:
valore limite di f

- se $\ell\in\mathbb{R}$, allora g è continua in ℓ
- se $\ell=\pm\infty$, allora $\underset{y\to\ell}{g(y)}$ (limite della composizione)

Allora $\exists \lim_{x\to x_0} g\circ f$ e in particolare:

$$\lim_{x\to x_0} g[f(x)] = \lim_{y\to\ell} g(y)$$

In particolare, se g è continua in ℓ $\lim_{x\to x_0} g[f(x)] = \lim_{y\to\ell} g(y) = g(\ell) \to$

$$\to g\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)$$

Utilizzato in $\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2+1}{x}} = \sqrt{\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x}} = \sqrt{\infty} = \infty$

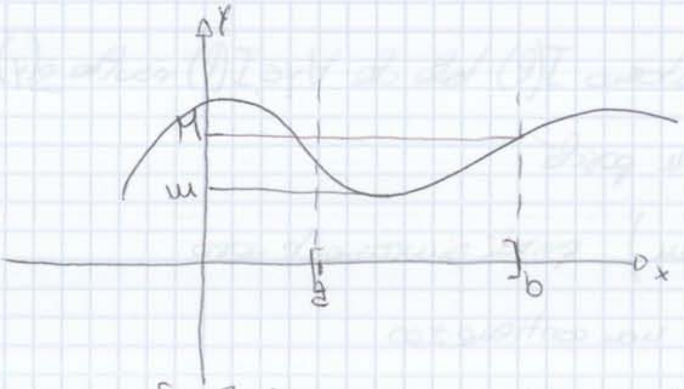
$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = e^{\overbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln(1+x)}^{1}} = e^1 = e$$

TEOREMI SULLE FUNZIONI CONTINUE

Ricordo che: Data $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, un punto $x_0 \in Dom(f)$ è detto zero di $f(x)$ se $f(x_0)=0$

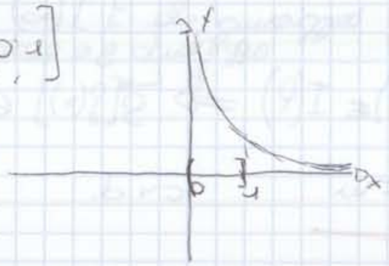
Teorema di Weierstrass

Sia $f(x)$ una funzione continua su un certo intervallo chiuso $[a,b]$.
Allora $f(x)$ è limitata su $[a,b]$ e in $[a,b]$ raggiunge un suo minimo $m=\min\{f(x)\}$ $x\in[a;b]$ ed un suo massimo $M=\max\{f(x)\}$ $x\in[a;b]$



Nota bene: $[a;b]$ deve essere un intervallo chiuso!

Es $f(x)=\frac{1}{x}$ $(0;1]$



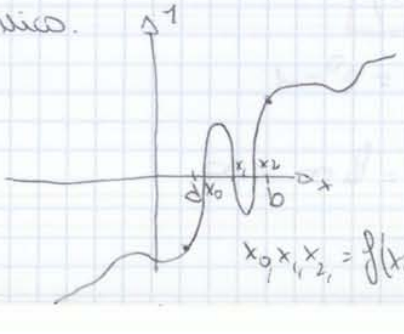
non sono in grado di definire un max

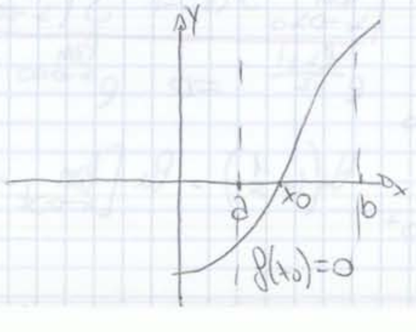
Teorema (dell'esistenza degli zeri)

Def. Sia $f(x)$ una funzione continua su un intervallo chiuso $[a;b]$.

Se $f(a)\cdot f(b)<0$. Allora $\exists$ uno zero di f in $(a;b)$.

Se poi f è monotona su $[a;b]$, strettamente, allora tale zero è unico.





se f monot. strett.

La successione delle a_n è limitata! (sup) ↗ cresc.

// // // // b_n è limitata (inf) ↘ decr.

$\exists \lim_{n \to \infty} a_n = x_0^-$ $\exists \lim_{n \to \infty} b_n = x_0^+$

Ora $x_0^+ - x_0^- = \lim_{n \to \infty} b_n - \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$

$$\left.\begin{aligned} \text{Se } b_0 - a_0 &= b-a \\ b_1 - a_1 &= \frac{b-a}{2} \\ b_2 - a_2 &= \frac{b-a}{4} \end{aligned}\right\} \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

Quindi $x_0^+ = x_0^- = x_0$

$\lim_{n \to \infty} a_n = x_0 = \lim_{n \to \infty} b_n$

$$f\left(\lim_{n \to \infty} a_n\right) = \underbrace{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}_{\text{perché } f(x) \text{ continua}} = f\left(\lim_{n \to \infty} b_n\right)$$

$\downarrow$ $\lim_{n \to \infty} f(a_n)$ $\Downarrow$ in questo caso $f(x)$ assume SOLO valori ≤ 0

$\downarrow$ $\lim_{n \to \infty} f(b_n)$ $\Downarrow$ $f(x)$ assume solo valori ≥ 0

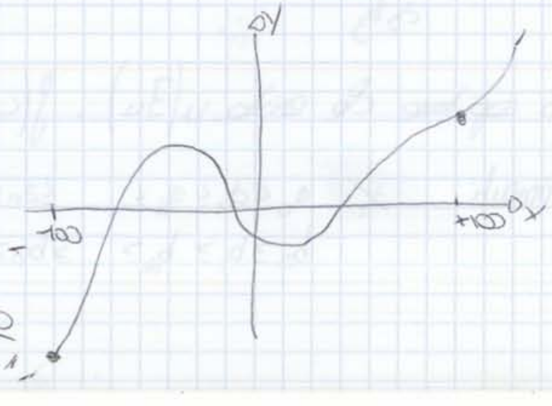
$\Downarrow$ di conseguenza $= 0$

ovvero $f(x_0) = 0$

Es. Data $f(x) = x^3 - 2x + 4$, posso affermare che sicuramente almeno una volta

perché se faccio $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



essendo polinomio è continua

(81) non posso dire che è invert. perché per R $-2x$!

Dim Sia $f(a) = f(b)$ risultato banale.

Sia $f(a) < f(b)$. Allora per il corollario del teorema degli zeri sappiamo che la funzione (continua) $h(x) = y$ (dove $y \in [f(a), f(b)]$

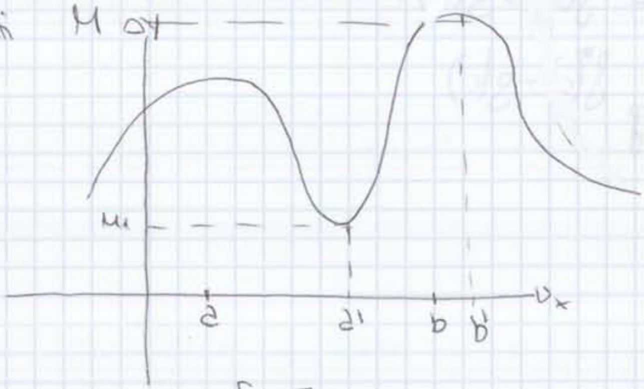
è tale che $h(a) > f(a)$ $h(b) < f(b)$ (vedi grafico) quindi

$\exists c : h(c) = f(c) = y$ c.v.d.

Corollario

Sia f continua in $[a,b]$. Allora f assume tutti i valori compresi tra $m = \min\{f(x), x \in [a,b]\}$ e $M = \max\{f(x), x \in [a,b]\}$. (max e min → esistono dovuti a Weierstrass)

Infatti



Sono ai lati le controimmagini di m e M

Se f è continua in $[a,b]$ ⇒ continua in $[a',b']$. Applicando il teorema dei valori intermedi → ogni $y \in [m, M] \in [f(a'), f(b')]$ viene assunto.

(avrei una sola controimm. se $f(x)$ fosse monotona)

$f(x) = \ln\left(e - \frac{1}{x}\right)$

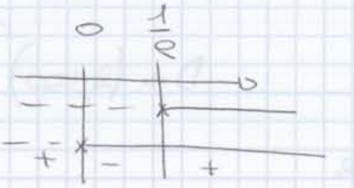
• Dom $x \neq 0$

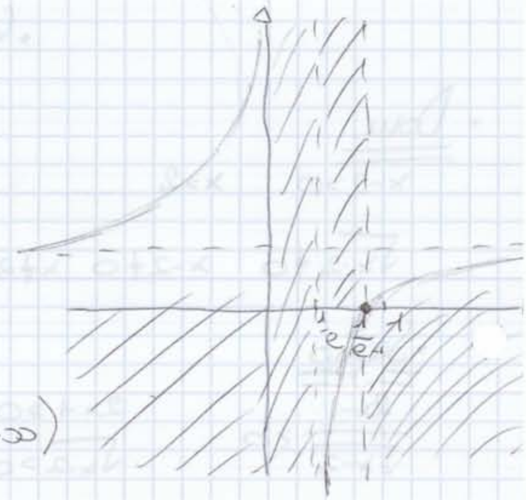
$x \neq 0$

$e - \frac{1}{x} > 0$ ~~$-\frac{1}{x} > -e$~~ ~~$\frac{1}{x} < e$~~ ~~$ex < 1$~~ ~~$x < \frac{1}{e}$~~ NO! NON SO IL SEGNO DELLA x

$\frac{ex-1}{x} > 0$ $ex > 1$ $x > \frac{1}{e}$

$x > 0$ $x > 0$





$x < 0 \cup x > \frac{1}{e}$

$(-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$

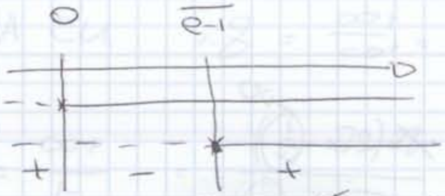
• Segno

$\ln\left(e - \frac{1}{x}\right) \geq 0 = \ln 1$

$e - \frac{1}{x} \geq 1$ $\frac{ex - 1 \geq x}{x}$ = ~~$\frac{-x \geq 1 - ex}{x}$~~ $\frac{ex - x \geq 1}{x} = \frac{x(e-1) \geq 1}{x}$

$x(e-1) - 1 \geq 0$ $x > 0$

$x(e-1) \geq 1$ $x \geq \frac{1}{e-1}$



~~$(-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{e-1}, +\infty\right)$~~

• Limiti / Asintoti

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to -\infty} \ln\left(e - \boxed{\frac{1}{x}}\right) = 1 \\ &\qquad\qquad\qquad\ \downarrow 0 \\ &\lim_{x \to +\infty} \ln\left(e - \frac{1}{x}\right) = 1 \end{aligned}\right\} \text{A.O in } y = 1$$

$\lim_{x \to 0^{\mp}} \ln\left(e - \overset{-\infty}{\boxed{\frac{1}{x}}}\right) = \ln(e \pm \infty) = \infty$

$\lim_{x \to \frac{1}{e}^+} \ln(e - e) = \ln 0^+ = -\infty$

Proprietà varie

- $f \asymp g \to f \sim l \cdot g$ (dove l è il limite)
- $f \sim g \to f = g + o(g)$

infatti sia $h(x) = f(x) - g(x) \Rightarrow f(x) = g(x) + h(x)$ vero se h è trascurabile rispetto alla g con $x \to x_0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{h(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{g(x)}{g(x)} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} 1 - \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{g(x)}{g(x)} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \underset{\downarrow}{\frac{f(x)}{g(x)}} - 1 = 1 - 1 = 0$$ ovvero $h = o(g)$

per ipotesi avevo $f \sim g$ quindi il limite sarà 1

es. $f(x) = \operatorname{sen}x \quad g(x) = x$ = equivalenti per $x \to 0$

$x \to 0 \quad f(x) = g(x) + o(g)$

$\operatorname{sen}x = x + o(x)$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2\operatorname{sen}x}{x^2}$$

per la proprietà precedente senx (in prossimità di 0) può essere scritto come $\operatorname{sen}x = x + o(x)$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2[x + o(x)]}{x^2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2x + 2o(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2}{x} + \lim_{x \to 0^+} \frac{2o(x)}{x^2}$$

$$= +\infty + \lim_{x \to 0} \underset{\Downarrow}{\boxed{\frac{2o(x)}{x}}}^{\to 0} \underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{\frac{1}{x}} = +\infty + \lim_{x \to 0^+}$$

perché $2o(x)$ x def di o (vedi 4 pag. preced.)

es. $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{1}{3} \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

limiti notevoli $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \to \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} = 1 \Rightarrow 1 - \cos x = \frac{x^2}{2}$$ (SEMPRE in prossimità di 0)

$= 1 - \cos x \approx \frac{x^2}{2} + o\left(\frac{x^2}{2}\right)$ sostituisco nel limite ed ottengo =

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^2}{2} + o\left(\frac{x^2}{2}\right)}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{6x^2} + \lim_{x \to 0} \frac{o\left(\frac{x^2}{2}\right)}{3x^2} =$$

Successioni (complementi)

Dato $S=\{a_n, n\in\mathbb{N}\}$ $\lim_{n\to\infty} a_n=\ell$ se $\forall I(\ell)$ $\exists N\in\mathbb{N}$ tale che $\forall n\geq N$ $a_n\in I(\ell)$

- Teorema.

$\{a_n, n\in\mathbb{N}\}$ è una successione monotona → ammette limite $\begin{cases}\infty \\ \ell\in\mathbb{R}\end{cases}$ se S è limitata (inf o sup)

Inoltre per le successioni valgono tutti gli altri teoremi sui limiti che abbiamo visto $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. (es. teo del confronto, etc..)

Similmente il teorema sopra (succ. monotone) vale anche per le funzioni $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Teorema di limitatezza per successioni convergenti.

Se $S=\{a_n, n\in\mathbb{N}\}$ converge, (cioè $\lim_{n\to\infty} a_n=\ell\in\mathbb{R}$) allora la successione è limitata.

Dim.

Sia $\lim_{n\to\infty} a_n=\ell$. Fissiamo l'intorno di ℓ $I(\ell)=(\ell-1,\ell+1)$. Sappiamo che

$\exists N\in\mathbb{N}$ tale che $\forall n\in N$ $a_n\in I(\ell)\to|a_n-\ell|<1$

Osserviamo che vale quanto segue: (per $n\geq N$)

$|a_n|=|a_n-\ell+\ell|\leq|a_n-\ell|+|\ell|<1+|\ell|$ (vedi dimostr.)

consideriamo i seguenti valori

$M=\max=\{|a_1|,|a_2|,\dots\dots,|a_{n-1}|, 1+|\ell|\}$

allora sicuramente $|a_n|\in M$ → M è un maggiorante
$-M$ è un minorante

definitivamente, quindi $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = \ell$

Se per assurdo $\ell \neq 0$ $(\ell > 0)$. Ma allora $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_{n+1}}{\lim_{n\to\infty} a_n} =$

$\frac{\ell}{\ell} = 1$ ma questo non è possibile perché $\boxed{q < 1}$

quindi necessariamente il lim ha valore $\ell = 0$

Dim $\boxed{q > 1}$

basta pensare alla successione $\left\{ a'_n = \frac{1}{a_n},\ n \in \mathbb{N} \right\}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a'_{n+1}}{a'_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{q} < 1$ allora posso dire che

successione di $a'_n \to 0$ allora la succ. degli $\frac{1}{a_n} = \infty$

Es

$\left\{ a_n = \frac{2^n \cdot n!}{n^n},\ n \in \mathbb{N}^+ \right\} = ?$

criterio del rapporto: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n \cdot n!} = \frac{\cancel{2^n} \cdot 2 \cdot \cancel{(n+1)} \cdot \cancel{n!}}{\cancel{(n+1)} \cdot (n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{\cancel{2^n} \cancel{n!}} =$

$\frac{2}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1$

per teorema precedente $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\left\{ a_n = \frac{2n!}{[n!]^2},\ n \in \mathbb{N} \right\}$

sempre criterio del rapporto $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{[2(n+1)]!}{[(n+1)!]^2} \cdot \frac{[n!]^2}{(2n)!} =$

$= \frac{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}}{(n+1)\cancel{n!}(n+1)\cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!\,n!}}{\cancel{(2n)!}} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} = \frac{4n^2 + o(n^2)}{n^2 + o(n^2)} \to 4$

$q > 1 \quad \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

Altre successioni notevoli

$$\lim_{n\to\infty} q^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{q} \quad q \geq 0 \qquad \lim_{n\to\infty} q^{\frac{1}{n}} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} = n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln n^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\ln n} = e^{\lim_{n\to\infty}}$$

$$\frac{\ln n}{n} = e^0 = 1$$

INFINITI (succ. diverg.) all'aumentare dei ~~term~~ valori tendono ad ∞

$$\ln n \quad < \quad \underset{\alpha>0}{n^\alpha} \quad < \quad \underset{q>1}{q^n} \quad < \; n! \quad < \; n^n$$

(Indico con < il fatto che il 1° tipo è infinito di ordine inferiore del 2°)

✓ Es. $q^n < n!$, cioè $q^n = o(n!)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!} = 0 \quad \to \text{lo verifico con il criterio del rapporto}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{q^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{q^n} = \frac{\cancel{q^n} \cdot q \cdot \cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!}\,\cancel{q^n}} = \frac{q}{n+1} = 0$$

quindi essendo $0 < 1$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

FORMULA STIRLING (n molto grande)

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \qquad n \to \infty$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \begin{cases} \lim_{h\to 0^+} \frac{h-0}{h} = 1 \\ \lim_{h\to 0^-} \frac{-h-0}{h} = -1 \end{cases}$$

non coincidono (non esiste la $f'(x)$ di $f(x)=|x|$) in 0!

Infatti così ha senso parlare sia alla derivata destra sia alla derivata sinistra.

deriv. destra → $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

deriv sinistra → $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Def

Sia $I \subseteq Dom(f)$. → intervallo (sottoinsieme e contenuto nel dom)

Diciamo che f è derivabile su I se $\exists f'(x_0) \ \forall x_0 \in I$.

Risulta posta alla def di una nuova funzione

$f' : x_0 \to f'(x_0)$

f' è la derivata di f

(Nota: altre notazioni $f' \equiv \frac{df}{dx} \equiv Df \equiv D[f]$)

Proprietà

Se f derivabile in un punto x_0. Allora f è continua in x_0

Dim

Se f è derivabile in x_0 allora → $\exists f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

poiché il denominatore → 0 allora anche il numeratore → 0

Quindi $\lim_{x\to x_0} f(x)-f(x_0) = 0$ allora $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ → continuità

SE DERIV → CONT. NON VALE IL CONTRARIO.