NUMERO: 992

DATA: 18/06/2014

A P P U N T I

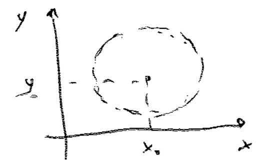
STUDENTE: Nappo

MATERIA: Analisi Matematica II

Prof. De Angelis

TOPOLOGIA

Definizione.



$B_r(P_0)$ cerchio di centro $P_0\ (x_0, y_0)$ e raggio $r \in \mathbb{R}$

$$B_R(P_0) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq R^2 \right\}$$

Definizione.

Un insieme $D \in \mathbb{R}^2$ si dice <u>limitato</u> se è contenuto in qualche cerchio.

Definizione.

Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ e $P_0, P_1 \in D$.

P_0 si dice <u>interno</u> a D se $\exists$ un cerchio di centro P_0 tutto contenuto in D.

P_1 si dice <u>esterno</u> a D se è interno al suo complementare.

L'insieme dei punti che non sono né interni né esterni a D si chiama <u>bordo</u> o <u>frontiera</u> di D.

Un insieme D si dice <u>chiuso</u> se contiene il suo bordo.

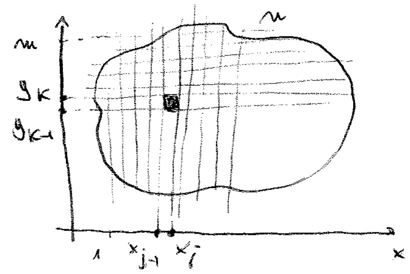
Notazioni.

Frontiera di D: ∂D; interno di D: $\mathring{D} = D \setminus \partial D$; chiusura di D: $\overline{D} = D \cup \partial D$

INTEGRALI DOPPI

Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ <u>chiuso e limitato</u> la cui frontiera è costituita da un numero finito di grafici di funzioni continue.

D si dice <u>dominio di integrazione</u>



$$f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \in D \longmapsto f(x,y) \in \mathbb{R}$$
continua in D

Supponiamo $f \geq 0$

$R_{jk} = [x_{j-1}, x_j] \times [y_{k-1}, y_k]$ quadrato di lato $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$

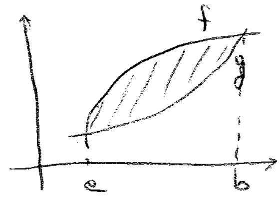
- Additività:

$D = D_1 \cup D_2$ e $D_1 \cap D_2$ non ha punti interni, al più di frontiera

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

- Se $f \equiv 1$:

$$\iint_D 1\,dx\,dy = \text{area}(D) = \begin{cases} \iint dx\,dy \\ \int_a^b f(x) - g(x)\,dx \end{cases}$$



Definizione: MEDIA INTEGRALE

$$\mu = \frac{1}{\text{area}(D)} \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

Definizione

$D \subset \mathbb{R}^2$ si dice CONNESSO PER ARCHI se due suoi punti qualsiasi possono essere congiunti da una curva continua che giace interamente in D.

Teorema della media integrale.

Se $D \subset \mathbb{R}^2$ chiuso, limitato e connesso per archi e f

$f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua su D, allora

$$\exists (x_0, y_0) \in D : f(x_0, y_0) = \frac{1}{\text{area}\, D} \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

Definizione

$D \subset \mathbb{R}^2$ si dice SEMPLICE in y se $\exists$ due funzioni continue

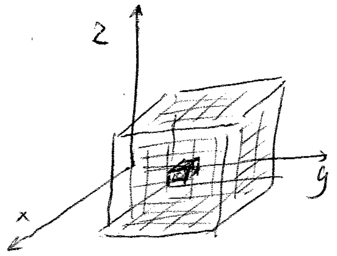
$\alpha: [a,b] \to \mathbb{R}$, $\beta: [a,b] \to \mathbb{R}$ tali che

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x) \}$$

INTEGRALI TRIPLI

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \quad \text{dove } D \subset \mathbb{R}^3 \text{ compatto}$$

$$D_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_i] \times [z_{k-1}, z_k]$$



$$P(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk}) \in D_{ijk}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{l} f(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk})\,\Delta x_i\,\Delta y_j\,\Delta z_k$$

detto $\delta = \max\{\Delta x_i, \Delta y_j, \Delta z_k\}$

Teorema.

Se f è continua su D, allora $\exists$ ed è finito

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{i,j,k} f(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk})\,\Delta x_i\,\Delta y_j\,\Delta z_k = \iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Definizione.

$D \subset \mathbb{R}^3$ si dice z-semplice se è del tipo

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in A \subset \mathbb{R}^2,\ \alpha(x,y) \le z \le \beta(x,y)\}$$

Coordinate del baricentro:

$$x_G = \frac{1}{\mathrm{vol}(D)} \iiint_D x\,dx\,dy\,dz, \ \ldots, \ \ldots$$

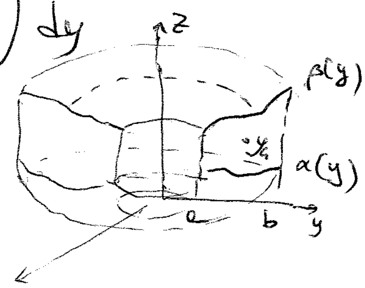
Solidi di rotazione.

$$V = \iint_D \left(\int_{\alpha(\sqrt{x^2+y^2})}^{\beta(\sqrt{x^2+y^2})} dz \right) dx\,dy \qquad D = \{(\rho,\theta) : \theta \in [0, 2\pi],\ a \le \rho \le b\}$$

$$V = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_a^b (\beta(\rho) - \alpha(\rho))\,\rho\,d\rho = 2\pi \int_a^b (\beta(\rho) - \alpha(\rho))\,\rho\,d\rho$$

$$y_G = \frac{1}{\mathrm{area}(A)} \iint_A y\,dx\,dy = \frac{1}{\mathrm{area}(A)} \int_a^b \left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} y\,dz \right) dy$$

$$\int_a^b (\beta(y) - \alpha(y))\,y\,dy = y_G \cdot \mathrm{area}(A)$$



FORMULA DI GULDINO $\quad V = 2\pi \underbrace{y_G}_{R}\, \mathrm{area}(A)$

Sia $r: [a,b] \to A$ curva di classe C^1

$$\frac{dU}{dt}(r(t)) = \nabla U(r(t)) \cdot r'(t)$$

vale se F è conservativo

$$\int F\tau\, ds = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t)\, dt = \int_a^b \nabla U(r(t)) \cdot r'(t)\, dt =$$

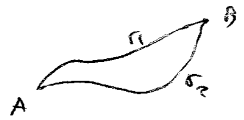
$$= \int_a^b \frac{dU}{dt}(r(t))\, dt = U(r(b) - r(a))$$

dipende solo da a,b

Teorema per i campi conservativi

Date due curve $r_1, r_2 \subset A$ e aventi gli stessi estremi nello stesso ordine:

$$\int_{r_1} F\tau\, ds = \int_{r_2} F\tau\, ds$$



Ne segue che se r è chiusa e contenuta in A

$$\oint_r F\tau\, ds = 0$$ CIRCUITAZIONE

CAMPI IRROTAZIONALI

Se F è conservativo con potenziale $U \in C^2$

$$F_1 = \partial_x U \qquad F_2 = \partial_y U \qquad F_3 = \partial_z U$$

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = (\partial_y F_3 - \partial_z F_2)i + (\partial_z F_1 - \partial_x F_3)j + (\partial_x F_2 - \partial_y F_1)k$$

$$\partial_y F_3 = \partial_y(\partial_z U) \underset{\text{T. di Schwartz}}{=} \partial_z(\partial_y U) = \partial_z F_2; \; \dots \Rightarrow \operatorname{rot} F = 0$$

In $(\mathbb{R}^2)$ $(\mathbb{R}^3)$ $(\mathbb{R})$

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ tale che • APERTO E CONNESSO e SEMPLICEMENTE CONNESSO, cioè che ogni curva chiusa $\gamma \subset A$ è contraibile in un punto, rimanendo sempre in A.

Sia $F: A \to \mathbb{R}^2$ campo irrotazionale di classe C^1. Allora F è conservativo.

Campi vettoriali e uno-forme.

Se $F = (F_1, F_2, F_3)$ è un campo conservativo, $\omega = F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$ si dice ESATTA; chiusa (irrot.) e in un A s.c.

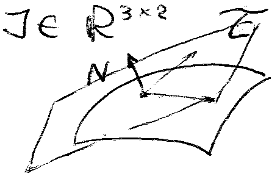
Definizione

α si dice semplice se è iniettiva all'interno di D

Σ si dice regolare o liscia se ammette una parametrizzazione α tale che

- α di classe C^1 su D
- $\left\| \frac{\partial \alpha}{\partial u} \wedge \frac{\partial \alpha}{\partial v} \right\| \neq 0 \quad \forall (u,v) \in D$ cioè se $\frac{\partial \alpha}{\partial u}, \frac{\partial \alpha}{\partial v}$ sono l.i.

cioè se $rk(J) = \max$ $\quad J \in \mathbb{R}^{3\times 2}$



VETTORE NORMALE A Σ

$$N(u_0,v_0) = \frac{\partial \alpha}{\partial u}(u_0,v_0) \wedge \frac{\partial \alpha}{\partial v}(u_0,v_0)$$ $\perp$ al piano tangente

$$N(u,v) = \sqrt{\partial_u f^2 + \partial_v f^2 + 1} = \sqrt{1+|\nabla f|^2}$$

PIANO TANGENTE in P_0

$$\tau_{P_0} : \left(-\partial_u f\right)_{(u_0,v_0)}(x-x_0) - \left(\partial_v f\right)\Big|_{(u_0,v_0)}(y-y_0) + z - f(u_0,v_0) = 0$$

$$\tau_{P_0} : \left(\partial_x f\right)_{(x_0,y_0)}(x-x_0) + \left(\partial_y f\right)_{(x_0,y_0)}(y-y_0) + f(x_0,y_0) = z$$

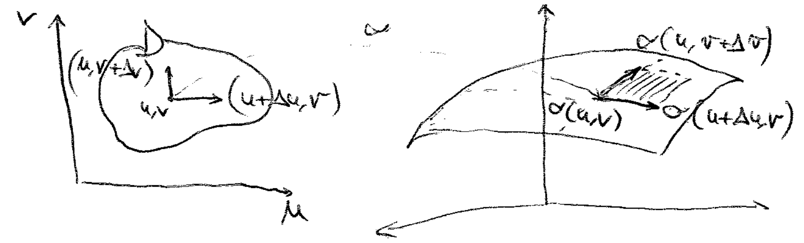
INTEGRALI DI SUPERFICIE

Sia α la rappresentazione parametrica di una superficie regolare.

$$\alpha : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad (u,v) \longmapsto \alpha(u,v) = \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

Sia $f(y,x,z)$ una funzione continua sul sostegno di α $\Sigma = \alpha(D)$.

$$\iint_\Sigma f \, d\sigma = \iint_D f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot \|N(u,v)\| \, du\, dv$$



se $\Delta u, \Delta v \to 0$ si può approssimare il pezzo di superficie di lati $\Delta u, \Delta v$ con il parallelogramma dato dai vettori tangenti $\partial_u \alpha$, $\partial_v \alpha$

$$\alpha(u+\Delta u, v) = \alpha(u,v) + \frac{\partial \alpha}{\partial u}(u,v)\Delta u + \dots$$

$$\alpha(u, v+\Delta v) = \alpha(u,v) + \frac{\partial \alpha}{\partial v}(u,v)\Delta v + \dots$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 36

OSSERVAZIONI:

- Se F è piano si ricade nel T. di GG
- $i: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ immersione, mantiene l'orientamento di D
- $\mathbb{R}^3$ $\int_{\partial^+\Sigma} F \tau \, ds = \iint_\Sigma \operatorname{rot} F \, n \, d\sigma$

$\mathbb{R}^2$ $\int F \tau \, ds = \iint (\partial_x F_2 - \partial_y F_1) \, dx \, dy$ scarica integrale sul bordo

$\mathbb{R}$ $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) \, dt$

PROPRIETÀ:

$\operatorname{div}(\mu F) = \nabla\mu \cdot F + \mu \operatorname{div} F$ $\operatorname{rot} \nabla\mu = 0$

$\operatorname{rot} \mu F = \nabla\mu \wedge F + \mu \operatorname{rot} F$ $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0$

$\operatorname{div}(F \wedge G) = \operatorname{rot} F \cdot G - F \operatorname{rot} G$ $\operatorname{div}(\nabla\mu) = \Delta\mu = \frac{\partial^2 \mu}{\partial x_i^2} + \dots$ LAPLACIANO DI μ

TEOREMA DELLA DIVERGENZA

Sia $D \subset \mathbb{R}^3$ dominio di integrazione il cui bordo è costituito da un numero finito di superfici semplici. Sia $F(x,y,z)$ di classe C^1 su un aperto A contenente D

$$\iint_{\partial D} \bar{F} \cdot \bar{n}_+ \, d\sigma = \iiint_D \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz$$

INTEGRAZIONE PER PARTI

Sia μ uno scalare e F campo C^1 di $\mathbb{R}^3$ e sia D una regione solida semplice rispetto a tutti gli assi. ∂D è il bordo - superficie regolare con normale esterna.

$$\iiint_D \nabla\mu \cdot F \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial D} \mu F \bar{n}_e \, d\sigma - \iiint_D \mu \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz$$ Infatti:

Dim.

$$\iint_{\partial D} \mu F n \, d\sigma \overset{\text{T. DIV}}{=} \iiint_D \operatorname{div}(\mu F) \, dx \, dy \, dz = \iiint (\nabla\mu F + \mu \operatorname{div} F) \, dx \, dy \, dz$$ ■

SERIE TELESCOPICA

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ diverge $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$ ma:

$S_1 = \log 2$, $S_2 = \cancel{\log 2} + \log\frac{3}{\cancel{2}}$, $S_n = \log(n+1)$

$\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ converge

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \dots + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$\lim_{n\to\infty} S_n = 1$

Proposizione - Serie somme

Siano $\sum_n a_n$, $\sum_n b_n$ due serie convergenti, tali che $S = \sum_n a_n$ e $T = \sum_n b_n$.

Allora la serie somma $\sum_n a_n + \sum_n b_n = \sum (a_n + b_n) = S + T$ converge.

Dimostrazione.

Considero le ridotte ennesime delle serie somme:

$S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n \qquad T_n = b_0 + b_1 + \dots + b_n$

~~$S_n + T_n = (a_0 + a_1 + \dots + a_n) + (b_0 + b_1 + \dots + b_n) =$~~

$S_n + T_n = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + \dots + (a_n + b_n) = (a_0 + a_1 + \dots + a_n) + (b_0 + b_1 + \dots + b_n)$ $\to S + T$

Proposizione - Moltiplicazione per uno scalare.

Sia $\sum_n a_n$ convergente e $S = \sum_n a_n$, allora

$\lambda \sum_n a_n = \sum_n \lambda a_n$ converge a λS

Dimostrazione.

$\lambda(a_0 + a_1 + \dots + a_n) = \lambda a_0 + \lambda a_1 + \dots + \lambda a_n$

$\lambda S_n = \lambda S_n \longrightarrow \lambda S \ (n \to +\infty)$

Osservazione

Se $\sum a_n$ diverge, $\sum \lambda a_n$ diverge e vale le regole del prodotto dei segni.

2

- CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

Siano $\sum a_n$, $\sum b_n$ serie a termini positivi $(a_n \geq 0,\ b_n \geq 0)$.

Se $\exists$ finito e non nullo il $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$, le due serie hanno lo stesso carattere.

Richiami sulle successioni

$a_n \sim b_n \iff \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, se $b_n \to \ell \Rightarrow a_n \to \ell$

$a_n \sim b_n$
$c_n \sim d_n$ $\quad a_n c_n \sim b_n d_n$ e $\frac{a_n}{c_n} \sim \frac{b_n}{d_n}$

- CRITERIO DEL RAPPORTO

Sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi tale che $\exists$ finito o infinito

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in \bar{\mathbb{R}}^+$. Allora:

1) se $\ell < 1$ la serie converge
2) se $\ell > 1$ la serie diverge
3) se $\ell = 1$ non si può generalizzare

Dimostrazione.

1) Hp. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell < 1$ ossia: per n suff.te grande

$\forall n > \bar{N}$ $\forall \varepsilon > 0$ tale che $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - \ell\right| < \varepsilon$, $\ell - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \ell + \varepsilon$

$$\sum_{k=\bar{N}+1}^{\infty} a_k = \sum_{h=0}^{\infty} a_{\bar{N}+1+h} := \sum_{h=0}^{\infty} b_n$$

$b_0 = a_{\bar{N}+1} < (\ell+\varepsilon)\, a_{\bar{N}}$

$b_1 = a_{\bar{N}+2} < (\ell+\varepsilon)\, a_{\bar{N}+1} < (\ell+\varepsilon)^2 a_{\bar{N}}$

$\vdots$

$b_n = a_{\bar{N}+1+n} < \dots < (\ell+\varepsilon)^{n+1} a_{\bar{N}}$ serie geometrica di ragione < 1 convergente

2) Hp. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell > 1$

Sia $\varepsilon > 0$ tale che $\ell - \varepsilon > 1$. $\ell - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n}$ $\quad \forall n > \bar{N}$

$a_n < \underbrace{(\ell-\varepsilon)}_{>1} a_n < a_{n+1}$ $\{a_n\}$ è crescente,

quindi non può essere infinitesima $\Rightarrow \sum\limits_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$ diverge.
$a_n \not\to 0$

Dimostrazione

Hp: $\sum_n |a_n|$ converge

Definiamo $b_n := \begin{cases} a_n & a_n \geq 0 \\ 0 & a_n < 0 \end{cases}$ $\quad c_n := \begin{cases} -a_n & a_n < 0 \\ 0 & a_n \geq 0 \end{cases}$ $\quad \begin{matrix} b_n \geq 0 \\ c_n \geq 0 \end{matrix} \ \forall n$

allora $0 \leq b_n \leq |a_n| \qquad 0 < c_n \leq |a_n|$

b_n, c_n convergono per c.c.

$a_n = b_n - c_n =$ differenza di due serie convergenti, converge

- CRITERIO DI LIEBNITZ

$\sum (-1)^n b_n \qquad b_n > 0 \ \forall n$

- $b_{n+1} \leq b_n \ \forall n$
- $b_n \xrightarrow{n \to +\infty} 0$

$\sum (-1)^n b_n$ converge

SUCCESSIONI DI FUNZIONI

Sono funzioni del tipo $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ definite su un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$.

Definizione. CONVERGENZA PUNTUALE

Data una successione di funzioni $f_n(x)$ definita in $A \subseteq \mathbb{R}$ e una funzione f definita in A, si dice che f_n converge puntualmente a f in A se $\forall x \in A \ \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$. Cioè:

$f_n(x) = e^{-nx}$

$\boxed{\forall x \in A \text{ (fissato)}} \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \overset{N(x)}{N} \in \mathbb{N} : \forall n > N \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

ossia N dipende da x, fissata

Definizione. CONVERGENZA UNIFORME

Data una successione di funzioni $f_n(x)$ definita in A e una funzione $f(x)$ definita in A, si dice che f_n converge uniformemente a f in A se

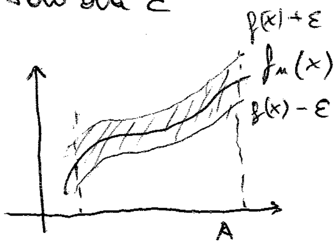
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \boxed{\forall x \in A} \ \forall n > N \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Cioè:

ossia N non dipende da x, ma solo da ε

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \ \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = 0$



Definizioni.

Si dice che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$:

- Converge puntualmente su A se la successione delle sue somme parziali $S_n(x)$ converge puntualmente su A.
- Converge assolutamente su A se $\forall x \in A$, $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$ converge puntualmente su A.
- Converge uniformemente su A se la successione delle somme parziali $S_n(x)$ converge uniformemente su A.

Proprietà trasferibili dalle successioni di funzioni alle serie di funzioni.

Sia f_n continua in $[a,b]$ e $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ convergente uniformemente su A.
Allora la funzione somma $S(x)$ è continua in tutto $[a,b]$

CRITERIO DI WEIERSTRASS

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ una serie di funzioni su un intervallo A.

Se $\exists M_n \geq 0$ successione di numeri tale che $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ converge e

↳ serie numerica a termini positivi

$$|f_n(x)| \leq M_n \quad \forall x \in A, \text{ allora}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge puntualmente, assolutamente e uniformemente su A.

$$|f_n(x)| \leq M_n \iff \sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x)| \text{ converge}$$

$\forall x \in A$, $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ converge

Definizione.

Si dice norma infinito di f in A: $\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in A} |f_n(x)|$.

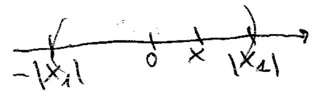
Quindi se $|f_n(x)| \leq M_n$ $\forall x \in A$, $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ converge $\iff \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty$ converge

8

SERIE DI POTENZE $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ $\quad a_n, x_0 \in \mathbb{R}$

Lemma -

Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge in un punto $x_1 \neq 0$ allora converge assolutamente in ogni punto $x \in (-|x_1|, |x_1|)$.



Dimostrazione -

Per ipotesi, la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ converge, quindi $\lim_{n \to +\infty} a_n x_1^n = 0$, ossia $a_n x_1^n$ è una successione limitata:

$\exists M > 0$ tale che $|a_n x_1^n| < M \quad \forall n$

Prendiamo $x \in (-|x_1|, |x_1|)$:

$$|a_n x^n| = |a_n x_1^n| \cdot \left|\frac{x^n}{x_1^n}\right| \leq M \left|\frac{x}{x_1}\right|^n$$ poiché $x < x_1$ converge - serie geometrica -

Quindi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge con $x \in (-|x_1|, |x_1|)$ ■

Definizione -

Data $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, si definisce il suo raggio di convergenza

$$R = \sup \left\{ x \in \overline{\mathbb{R}} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ converge} \right\}$$

Teorema -

Data $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, e sia R il suo raggio di convergenza. Allora:

1) Se $R = 0$ la serie converge solo in $x = 0$;
2) Se $R \in (0, +\infty)$ la serie converge assolutamente in $(-R, R)$ e uniformemente in $[-K, K]$ con $K < R$. Non converge per $|x| > R$;
3) Se $R = +\infty$ la serie converge assolutamente su tutto $\mathbb{R}$ e uniformemente in $[-K, K]$ $\forall K > 0$.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 36

Dimostrazione.

Sia $l \in (0, +\infty)$ il $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x| \xrightarrow{n \to +\infty} l|x|$$

Per il criterio della radice per le serie numeriche, la serie converge quando $l|x| < 1$, ossia quando $|x| < \frac{1}{l} \Rightarrow R = \frac{1}{l}$

FORMULA DEL RAPPORTO

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \text{se } \exists \lim_{n \to +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l \text{ allora } R = \begin{cases} +\infty & l = 0 \\ \frac{1}{l} & l \in (0, +\infty) \\ 0 & l = +\infty \end{cases}$$

con $a_n \neq 0$

Teorema di Abel.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ con $0 < R < +\infty$. Allora:

1) Se la serie converge in $x = R$, allora converge uniformemente in $[-K, R]$, con $0 < K < R$;

2) Se la serie converge in $x = -R$, allora " " in $[-R, K]$

3) " " " " $x = \pm R$, " " " in $[-R, R]$

Somma di serie di potenze.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n; \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \Rightarrow \text{serie somma} = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n.$$

Proposizione.

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ha raggio di convergenza R_1 e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ ha raggio R_2, la serie somma ha raggio di convergenza $R \geq \min\{R_1, R_2\}$.

In particolare se $R_1 \neq R_2$, allora $R = \min\{R_1, R_2\}$

Integrazione termine a termine.

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ con $R>0$. Poiché $S(x)$ è continua, allora è anche integrabile in $(0,x)$ $\forall x \in (-R,R)$ e $\int_0^x S(t)\,dt$ converge uniformemente.

$$\forall x \in (-R,R) \quad \int_0^x S(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

Ha ancora lo stesso raggio di convergenza.

SERIE DI TAYLOR

Sia I intervallo aperto di $\mathbb{R}$ e $f \in C^\infty(I)$ e $x_0 \in I$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad \text{serie di Taylor di } f \text{ centrata in } x_0$$

Osservazione.

1) Data una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, la si può sempre pensare come una serie di Taylor della somma poiché $a_n = \frac{S^n(x_0)}{n!}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

2) Non sempre si può trovare una funzione $f(x)$ tale che

$$a_n = \frac{S^n(x_0)}{n!} = \frac{f^n(x_0)}{n!} \quad \text{(vale solo per funzioni analitiche)}$$

Definizione.

Sia $f \in C^\infty(I)$ e $x_0 \in I$. f si dice analitica se la sua serie di Taylor centrata in x_0 converge a $f(x)$ in un intorno di x_0.

CRITERIO DI ANALITICITÀ

$f \in C^\infty(x_0-\delta, x_0+\delta)$. Se $\exists A, B > 0$ tali che

$$|f^n(x)| \le A \cdot B^n \quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta),$$ allora la serie di Taylor di f centrata in x_0 CONVERGE a f.

Definizione.

Sia $f(x)$ periodica di periodo 2π e integrabile in $[-\pi, \pi]$. Si definisce

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$ ~~NORMA QUADRATICA~~ MEDIA QUADRATICA

Definizione.

Si chiama spazio dei polinomi trigonometrici di ordine $\leq n$, indicato T_n dove il generico elemento è del tipo $p(x) = s_0 + \sum_{k=1}^{\infty} s_k \cos(kx) + t_k \sin(kx)$.

Definizione.

Sia S_n il polinomio di Fourier di una funzione $f(x)$ periodica e integrabile su $[-\pi, \pi]$, di grado n.

$$S_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

Teorema.

Data $f(x)$ periodica di periodo 2π e integrabile in $[-\pi, \pi]$, la funzione $p \in T_n \longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - p_n(x)|^2 dx = \|f - p\|_2^2$ assume il valore minimo quando $p(x) = S_n$.

$$\|f - S_n\|_2 \leq \|f - p_n\|_2 \quad \forall p_n \in T_n$$

[1] Nota: la norma quadratica serve a capire quanto $f(x)$ è vicina al polinomio di Fourier.

Dimostrazione.

i) Supponiamo f dispari e D_n spazio dei polinomi trigonometrici dispari di grado $\leq n$.

$$D_n = \left\{ p(x) \,\middle|\, p(x) = \sum_{k=1}^{n} t_k \sin(kx) \right\}$$

Allora:
$$\int_{-\pi}^{\pi} |f - p|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f^2| dx + \int_{-\pi}^{\pi} |p^2| dx - 2 \int_{-\pi}^{\pi} f \cdot p \, dx$$

Quindi $\|f - S_n\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f - S_n|^2 \, dx$ SCARTO QUADRATICO MEDIO (coda della serie)

S_n è la proiezione di f nel sottospazio che la minimizza.

$$\|f - S_n\|_2^2 = \left\| f - \left[a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right] \right\|_2^2 =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} |f^2| dx + \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right]^2 dx - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left[\overset{\text{def } a_0}{a_0} + \sum_{k=1}^{n} \overset{\text{def } a_k}{a_k} \cos kx + \overset{\text{def } b_k}{b_k} \sin(kx) \right] dx =$$

$$= \|f\|_2^2 + a_0^2 2\pi + \pi \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) - 4\pi a_0^2 - 2\pi \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) =$$

$$= \|f\|_2^2 - 2\pi a_0^2 - \pi \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) = \|f - S_n\|_2^2$$

$$\|f - S_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 - 2\pi a_0 - \pi \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2)$$

$$\underbrace{\|f\|_2^2}_{\geq 0} - \underbrace{\|f - S_n\|_2^2}_{\geq 0} = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2)$$

$$\|f\|_2^2 - \|f - S_n\|_2^2 \leq \|f\|_2^2 \text{ (numero)}$$

$$2\pi a_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \leq \|f\|_2^2$$

Poiché $\|f\|_2^2$ è un numero $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$ converge

e il suo termine generico è infinitesimo $(a_k^2 + b_k^2) \to 0$ per $k \to +\infty$

$\Longrightarrow a_k \to 0$ e $b_k \to 0$ per $k \to +\infty$

<u>Lemma di Riemann - Lebesgue</u>

Se f è periodica di periodo 2π e integrabile su un periodo, allora

$a_k, b_k \longrightarrow 0$ per $k \to +\infty$

Ricordiamo che se f è integrabile su $[a,b]$

- $\|f\|_2^2 = \int_a^b |f(x)|^2 dx$ convergenza in L^2 | $\|f-g\|_2^2$ area delle differenze
- $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$ convergenza uniforme | $\|f-g\|_\infty$ sup delle differenze

Dimostrazione.

Si è provato che

$$\|f\|_2^2 = \underbrace{\|f - S_n\|_2^2}_{\substack{\downarrow n\to+\infty \\ 0 \text{ per il T. di conv. } L^2}} + 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2)$$

REGOLARE A TRATTI
Se si può suddividere in un numero finito di sottointervalli in cui $f \in C^1(I)$ e negli estremi esistono i limiti dx e sx di $f(x)$ e di $f'(x)$.

Definizione

Sia f periodica di periodo 2π. Si dice che f è regolare a tratti in $[-\pi, \pi]$ se $\exists$ un numero finito di punti $-\pi = x_0 < x_1 < \dots < x_N = \pi$ tali che:

1) $f \in C^1(x_{i-1}, x_i)$ $\quad 1 \le i \le N$

2) $\exists$ finiti i limiti $f(x_i^+) = \lim_{x\to x_i^+} f(x)$; $f(x_i^-) = \lim_{x\to x_i^-} f(x)$

$\lim_{x\to x_i^+} f'(x)$; $\lim_{x\to x_i^-} f'(x)$.

Teorema di convergenza puntuale.

Se f è periodica di periodo 2π e f regolare a tratti, allora la serie di Fourier converge puntualmente a

$$\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to x_0^+} f(x) + \lim_{x\to x_0^-} f(x)\right] \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

In particolare, se f è continua in x_0, la serie di Fourier di f converge puntualmente a $f(x_0)$.

Teorema di convergenza uniforme.

Se f è periodica di periodo 2π, f regolare a tratti e f continua su $[a,b]$. La serie di Fourier di f converge uniformemente a $f(x)$ su $[a,b]$

PERIODI DIVERSI DA 2π

Le funzioni periodiche di periodo 2π $\{\sin(kx), \cos(kx)\}$ vengono sostituite

dalle funzioni $\left\{\sin\left(\frac{2\pi}{T}kx\right), \cos\left(\frac{2\pi}{T}kx\right)\right\}$.

Sia f periodica di periodo T, integrabile in $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$.

Allora la serie di Fourier di $f(x)$ è:

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi}{T}kx\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{T}kx\right)$$

dove
$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\,dx$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{T}kx\right)dx$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin\left(\frac{2\pi}{T}kx\right)dx$$