



Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 986

DATA: 11/06/2014

# APPUNTI

STUDENTE: Rinaldi

MATERIA: Fondamenti di Meccanica Strutturale + Eserc.

Prof. Firrone - Chiandussi

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

$$n = g \cdot l = 3 \cdot (\text{num. travi coinvolte nella struttura})$$

$$m = \text{vincoli} = \sum m_{\text{cerniere esterne}} + \sum m_{\text{cerniere interne}} \quad \left. \vphantom{\sum} \right\} h = n - m$$

dove

$$m_{\text{cavallo}} = 1$$



$$m_{\text{cerniera esterna}} = 2$$



$$m_{\text{cerniera interna}} = 2 (\text{num. travi coinvolte nella cerniera} - 1)$$

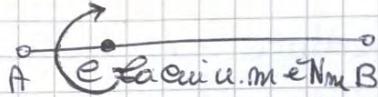
Dove c'è una reazione c'è un grado di libertà interdetto

rispetto a una struttura come quella di prima (la equibria)

Questo fatto non è solo, esclusivamente una coppia ma è simile

esempio di **COPPIA PURA**

concentrata in un punto



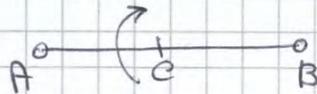
(Nel nostro esercizio è una coppia decisa)

Quando ho un elemento caricato con una coppia le reazioni che si generano in A e in B sono esattamente di questo tipo (= e contrarie)

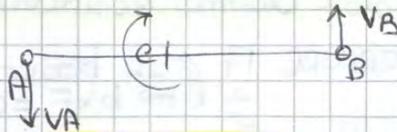
In particolare il valore di reazione per A e B è

$$V_{A/B} = \pm \frac{FR}{3l} \leftarrow \text{lunghezza totale della trave}$$

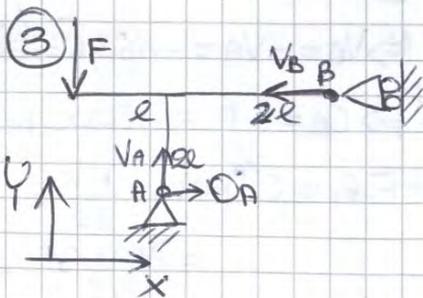
Le reazioni in A e B NON DIPENDONO da dove è applicata  $F$  cioè da dove è posizionata questa coppia, ma dalla lunghezza totale della trave  $L$



⇒ Nasce una coppia agli estremi che la lascia questo modo esterno



⇒  $V_B L = e \Rightarrow V_B = -V_A = \frac{e}{L}$  dove  $e = FR$  se la coppia non è pura

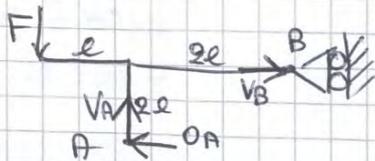


$$h = 3 - (2 + 1) = 0$$

$$\rightarrow -V_B + 0A = 0 \Rightarrow 0A = V_B = -2000 \text{ N}$$

$$\uparrow -F + V_A = 0 \Rightarrow V_A = F = 4000 \text{ N}$$

$$\uparrow F + V_B 2l = 0 \Rightarrow V_B = -\frac{F}{2} = -\frac{4000}{2} = -2000 \text{ N}$$



# CASO CARRELLI in MOTO

Si applica una  $F$  per metterlo in moto applicata nel baricentro  
 In direzione orizzontale i carrelli non offrono reazioni vincolari  $\Rightarrow$  il carrello si muove nel verso opposto alla forza

Ora parleremo di EQUILIBRIO DINAMICO

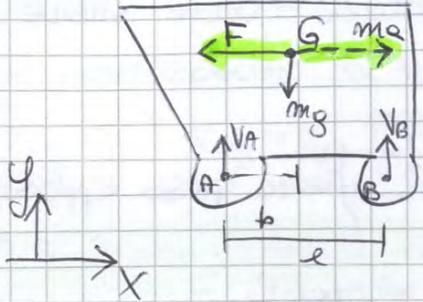
La forza che si oppone al carico esterno è una forza fittizia (di inerzia)  $F^* = ma$

$\Rightarrow$  Reazione =  $ma$

$\rightarrow) -F + ma = 0 \Rightarrow F = ma$

$A \uparrow - mgb + V_B \cdot l + (Fh) = 0$   
 Rispetto prima si aggiunge  $F$  che genera il momento

$\uparrow) V_A + V_B - mg = 0$



2 eq. in per 3 incognite  $\Rightarrow$   
 Per Hp:  $V_B = 0$

$\Rightarrow a = \frac{mgb}{m \cdot h}$

Richiesta del problema!  $a = \frac{g \cdot b}{h} = \frac{9,8 \cdot 0,2}{0,99} = 2,18 \text{ g}$

L'accelerazione che causa il ribaltamento del carrello è proporzionale a  $g$  e a  $b$  e inversamente ad  $h$

Se avessi avuto il baricentro in A o su AB

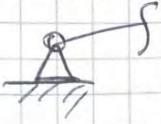
$\Rightarrow h = 0 \Rightarrow a = \infty$  cioè per ribaltare il carrello avrei dovuto avere accelerazione infinita

(Situazione ideale)

Questa direzione non dava contributo di momento in A

Questo punto aveva gli stessi spostamenti del punto limitrofo e le stesse rotazioni

Dato un elemento ogni singolo punto interno è collegato a quello contiguo attraverso un vincolo di tipo incastro (cioè 3 incognite)



Ma avremo 4 incognite per 2 incognite

Alla giunzione invece vi è la cerniera (cioè 2 incognite)  
 ⇒ 3 incognite e 3 eq. in

$$\uparrow) \quad V_A + V_B - F = 0 \quad \Rightarrow V_B = F = 2000 \text{ N}$$

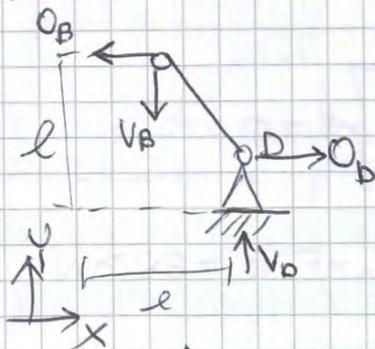
$$\rightarrow) \quad O_A + O_B = 0 \quad \Rightarrow O_B = -O_A = -2000 \text{ N}$$

$$B \downarrow - F \cdot l - V_A \cdot l + O_A \cdot l = 0 \quad \Rightarrow O_A = F = 2000 \text{ N}$$

↳ 0 per la (1)

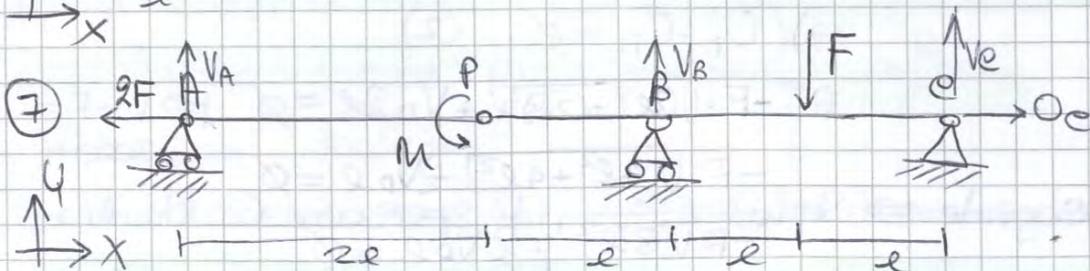
MODO 1 : Sostituisco in (2)  $O_D + O_A = 0$   
 $O_D = -O_A = -2000 \text{ N}$

MODO 2



$$\rightarrow) \quad O_B - O_D = 0 \quad \Rightarrow O_D = O_B = -2000 \text{ N}$$

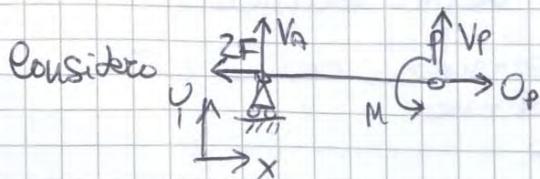
$$\uparrow) \quad -V_B + V_D = 0 \quad \Rightarrow V_D = 2000 \text{ N}$$



$$\rightarrow) \quad -2F + O_C = 0 \quad \Rightarrow O_C = 2F = 2000 \text{ N}$$

$$\uparrow) \quad V_A + V_B + V_C - F = 0 \quad (1)$$

$$M + V_B \cdot 3e - F \cdot 4e + V_C \cdot 5e = 0 \quad (2)$$



$$\uparrow) \quad V_A + V_P = 0 \quad \Rightarrow V_P = -V_A = -250 \text{ N}$$

$$\rightarrow) \quad -2F + O_P = 0 \quad \Rightarrow O_P = 2F = 2000 \text{ N}$$

$$\odot) \quad -V_A \cdot 2e + M = 0 \quad \Rightarrow V_A = \frac{M}{2e} = 250 \text{ N}$$

$$\Rightarrow \quad V_B = F - V_C - V_A$$

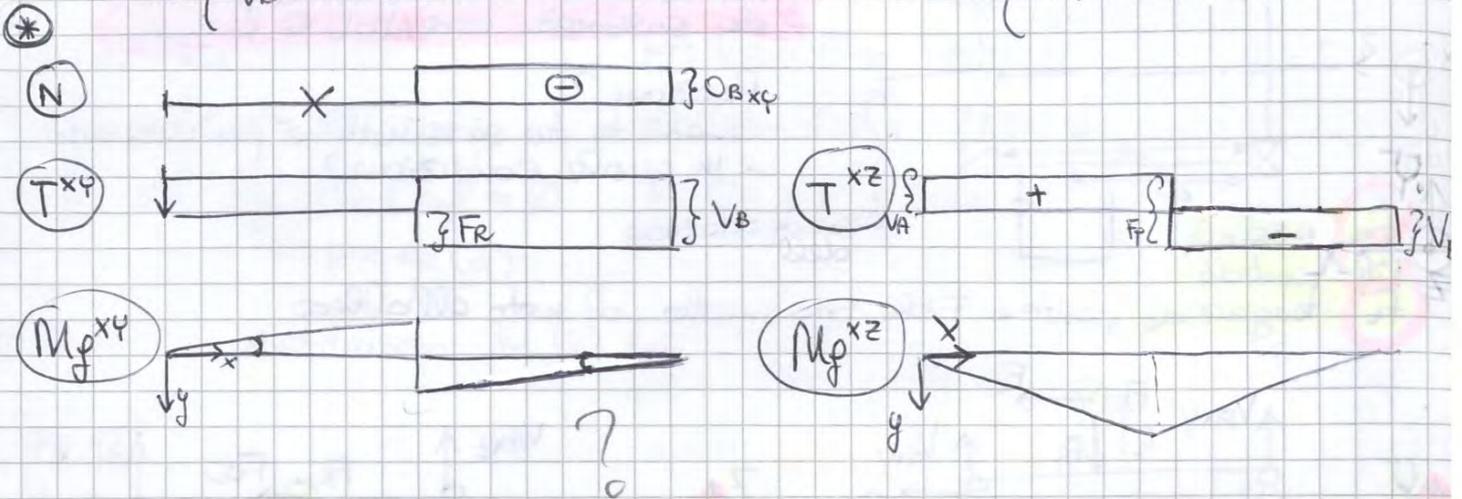
$$\Rightarrow \quad M + F \cdot 3e - V_C \cdot 3e - V_A \cdot 3e - F \cdot 4e + V_C \cdot 5e = 0 \quad \Rightarrow M - V_A \cdot 3e - F \cdot e + 2V_C \cdot e = 0$$

$$\Rightarrow V_{Bxz} = \frac{F_T \cdot a}{l} = 2000 \text{ N}$$

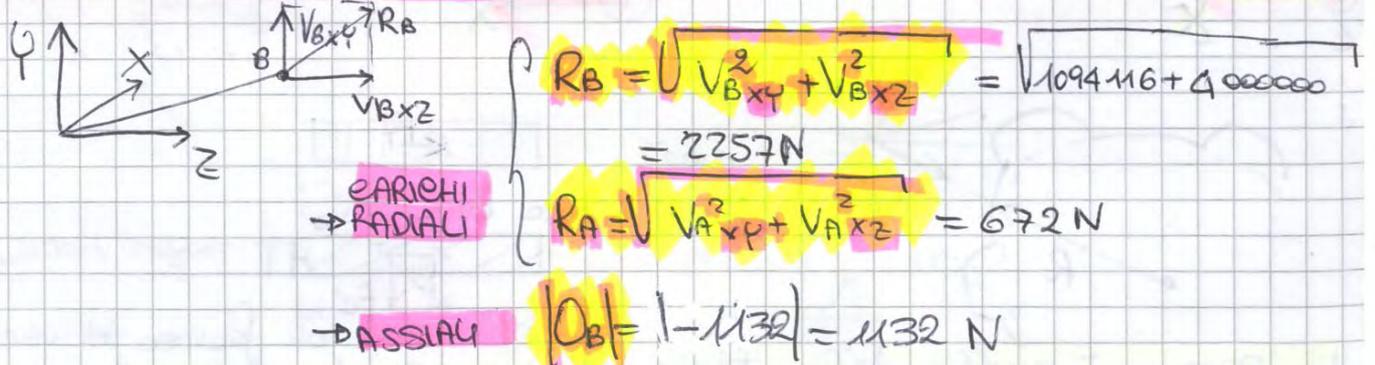
$$V_{Axz} = F_T - V_{Bxz} = 667 \text{ N}$$

Im (X, Y)  $\left\{ \begin{aligned} V_A &= -76 \text{ N} \\ O_B &= -1132 \text{ N} \\ V_B &= 1046 \text{ N} \end{aligned} \right.$

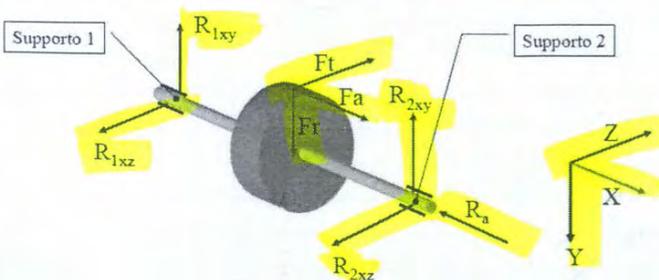
Im (X, Z)  $\left\{ \begin{aligned} V_A &= 667 \text{ N} \\ O_B &= -1132 \text{ N} \\ V_B &= 2000 \text{ N} \end{aligned} \right.$



Le reazioni in A e B sono diverse a seconda dei piani. La reazione compressiva che si genera sul cuscinetto è la risultante.

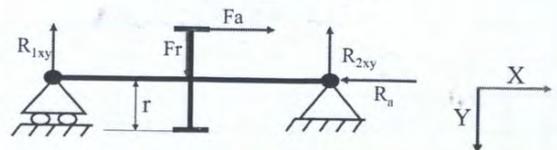


**MOMENTO EQUIVALENTE E FORZE NEI PIANI**  
Esempio. Ruota dentata a denti elicoidali calettata su albero con due supporti

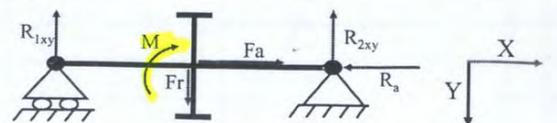


**MOMENTO EQUIVALENTE E FORZE NEI PIANI**

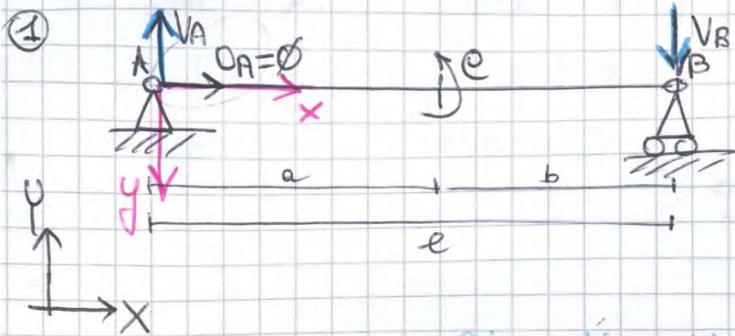
ES. Forze nel piano X-Y



Trasportando le forze della ruota dentata sull'albero, occorre aggiungere il momento di trasporto:  $M = F_a \cdot r$



Esercitazione 2 Reazioni vincolari e caratteristiche di sollecitazione



$l = 50 \text{ mm}$   
 $C = 4000 \text{ Nmm}$   
 $a = 40 \text{ mm}$

A)  $C - V_B l = 0 \Rightarrow V_B = \frac{C}{l}$  (1)  
 ↑)  $V_A = V_B = \frac{C}{l}$  (2)  
 →)  $C_A = 0$

OSS:  $V_B$  e  $V_A$  me li aspetto di segno opposto affinché equilibrio C

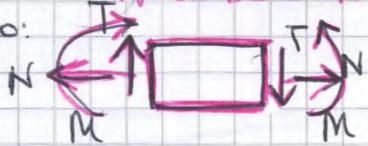
Esistono 4 DIAGRAMMI di SOLLECITAZIONE

CONVENZIONE

→ x  
 ↓ y  
 a sezioni che parta da DS o SN

1. a TAGLIO (T)
2. a SFORZO NORMALE (N)
3. a FLESSIONE ( $M_f$ )
4. a TORSIONE ( $M_t$ )

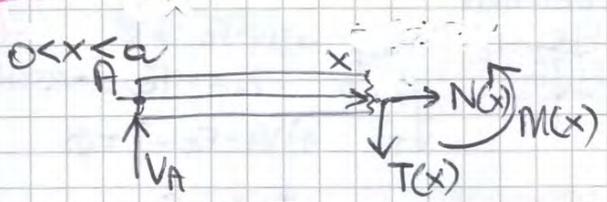
conci infinitesimo:



con riferimento: x: asse della trave  
 y: direzione verso il basso

- Andiamo a definire un dominio (AB)
- Andiamo a riscontrare DISCONTINUITA' di TIPO CARICO
- Studio le CAMPATE che sono tratti in cui vale una certa legge di carico prendendo il concio ottenuto tagliando la struttura in un generico punto x

OSSERVAZIONE: Vado a disegnare solo i diagrammi di sollecitazione - zione carichi

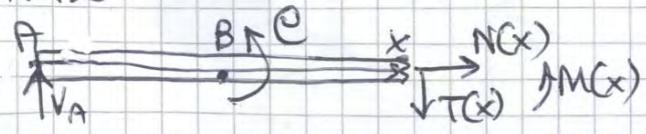


Scrivo le eq. di equilibrio  
 ↑)  $V_A - T(x) = 0 \Rightarrow T(x) = V_A = \frac{C}{l}$  (3)

Quando faccio l'eq. di equilibrio a momento scelgo come polo di rivoluzione x

x ↑  $-V_A x + M(x) = 0 \Rightarrow M(x) = V_A \cdot x = \frac{C}{l} x$  (4)  
 non dimenticarsi!!!  
 - tenere ...

$a < x < l$

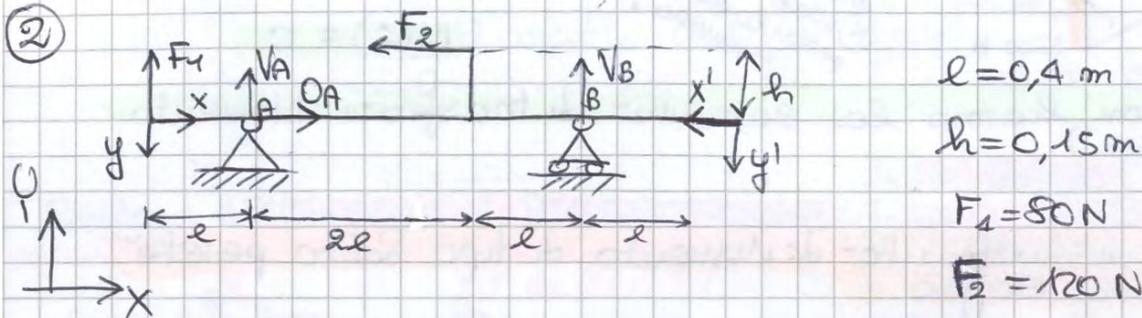


↑)  $V_A - T(x) = 0 \Rightarrow T(x) = V_A = \frac{C}{l}$   
 →)  $N(x) = 0$

x ↑  $-V_A x + C + M(x) = 0 \Rightarrow M(x) = V_A x - C = \frac{C}{l} x - C = C \left( \frac{x}{l} - 1 \right)$  (5)  
 eq. lineari che dipendono dai coefficienti

I diagrammi che hanno senso sono a Taglio e a Flessione, è inutile quello a sforzo normale

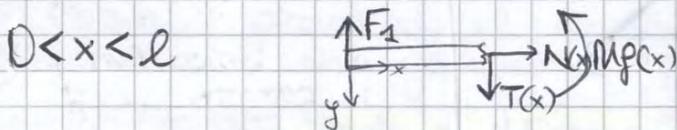
# Equilibrio del componente secondo il poligono chiuso delle forze



↑)  $F_1 + V_A + V_B = 0 \Rightarrow V_A = -F_1 - V_B = -92 \text{ N}$

→)  $O_A - F_2 = 0 \Rightarrow F_2 = O_A = 120 \text{ N}$

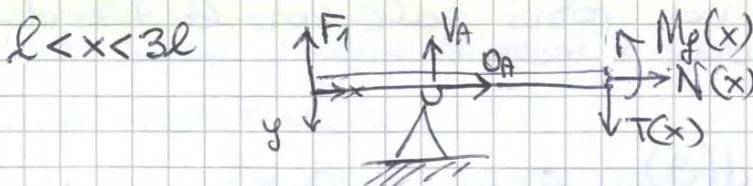
↻)  $-F_1 l + F_2 h + V_B 3l = 0 \Rightarrow V_B = \frac{F_1 l - F_2 h}{3l} = \frac{32 - 18}{1,2} = 11,6 \approx 12 \text{ N}$



↑)  $F_1 = T(x) = 80 \text{ N}$

→)  $N(x) = 0$

↻)  $-F_1 x + M_p(x) \Rightarrow M_p(x) = F_1 x \Rightarrow \begin{cases} M_p(0) = 0 \text{ Nm} \\ M_p(l) = F_1 l = 32 \text{ Nm} \end{cases}$

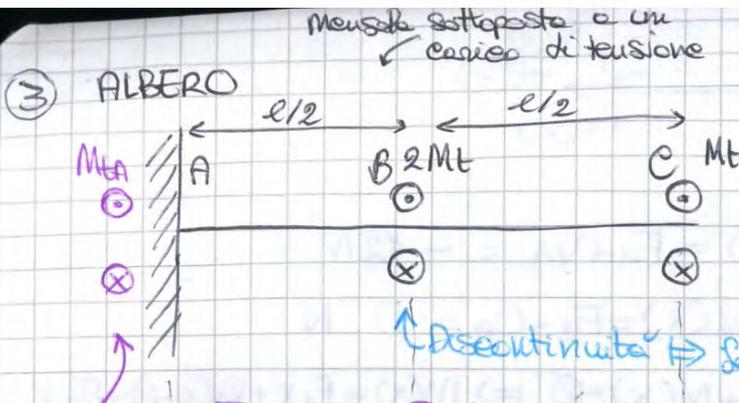


↑)  $F_1 + V_A - T(x) = 0 \Rightarrow T(x) = F_1 + V_A = -12 \text{ N}$

→)  $O_A + N(x) = 0 \Rightarrow N(x) = -O_A = -120 \text{ N}$

↻)  $-F_1 \cdot x - V_A(x-l) + M_p(x) = 0 \Rightarrow M_p(x) = F_1 x + V_A(x-l)$

$\Rightarrow \begin{cases} M_p(l) = F_1(l) + V_A \cdot 0 = 32 \text{ Nm} \\ M_p(3l) = F_1 3l + V_A \cdot 2l = 96 - 73,6 = 22,4 \text{ Nm} \end{cases}$



**MOMENTO TORCENTE**

$\odot$  oppure  $\otimes$  →  
 Questo è una coppia che produce una torsione

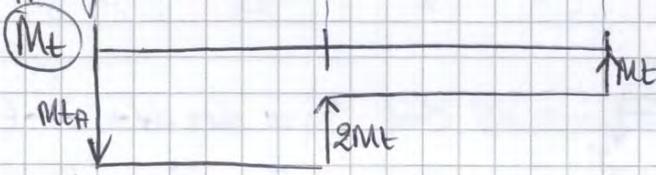
**REAZIONE del (dei) MOMENTO TORCENTE**

ha verso opposto al momento torcente e modulo pari alla somma di momenti torcenti

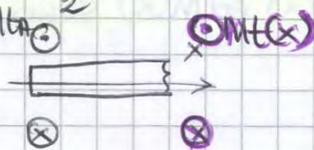
$M_t \odot$  )  $M_{tA} + 2M_t + M_t = 0 \Rightarrow M_{tA} = -3M_t$

Se suppongo  $M_t > 0$

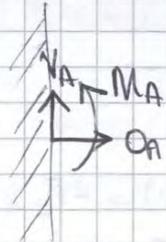
**POLIGONO DELLE FORZE CHIUSO**



$0 < x < \frac{l}{2}$



$M_t \odot$  )  $M_{tA} + M_t(x) = 0 \Rightarrow M_t(x) = -M_{tA} = -3M_t$

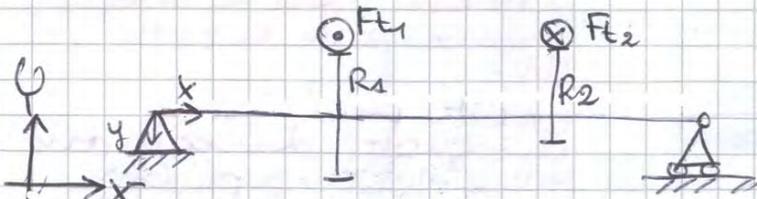


$\begin{cases} O_A = 0 \\ V_A = 0 \\ M_A = 0 \end{cases}$

$F_t, F_a, F_r$  se ha un angolo di elica

**ALBERO IN ROTAZIONE e 2 RUOTE DENTATE CALETTATE**

↳ Associa un vinedo di cerniera ed uno d'assiale.



oss: Non parlo della  $F_{rx}$  o della  $F_{ax}$  ma solo di  $F_t$  perché è quello che genera la coppia!

Coppia entrante come per egem  
una coppia generata da  
una forza tangenziale  $F_{t1}$   
ed una uscente in corrispondenza dell'altra ruota  $R_2$   
dentate generata da un'altra  
forza tangenziale  $F_{t2}$  entrante

Possiamo immaginare che questo albero è in mezzo ad altri alberi, viene mosso da un altro albero superiore che ingranza questa ruota e muove a sua volta un terzo albero inferiore attraverso  $R_2$ .  
 (Trasferisce il moto da un albero superiore a un albero inferiore)  
 Riceve il moto dall'albero superiore attraverso il punto P mediante una  $F_{t1}$  e muove l'altro albero in Q (Restituisce il moto)



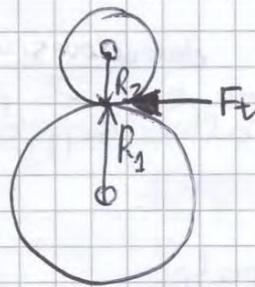
Deute che ingranano con il 1° albero, secondo deute che ingranano con il 2° albero.

Azzio una forza di opposizione di parte dell'albero 3° che garantisce il fatto che (coppia e -coppia) l'equilibrio all'albero

Per avere un moto orario deve essere  $F_t$  sulla I ruota  
 l'albero secondario deve ora trasferire il moto all'albero affinché ingranino sulla II ruota.  
 la superficie trasferisce -C [infatti all'albero vi è equilibrio C-C]

**DUE ALBERI e DUE RUOTE DENTATE**

Es: 2 Alberi che ingranano tra loro, l'uno con la Ruota dentata 1, l'altro con la 2



$C_2 = F_t R_2$

(con 2 Roti inversi)

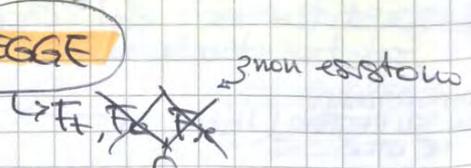
$e_1 = F_t R_1$

$C_1$  non necessariamente deve essere uguale a  $C_2$  si spero che siano  $e_1 \neq e_2$  (altrimenti sto solo trasferendo la forza da una coppia all'altra)

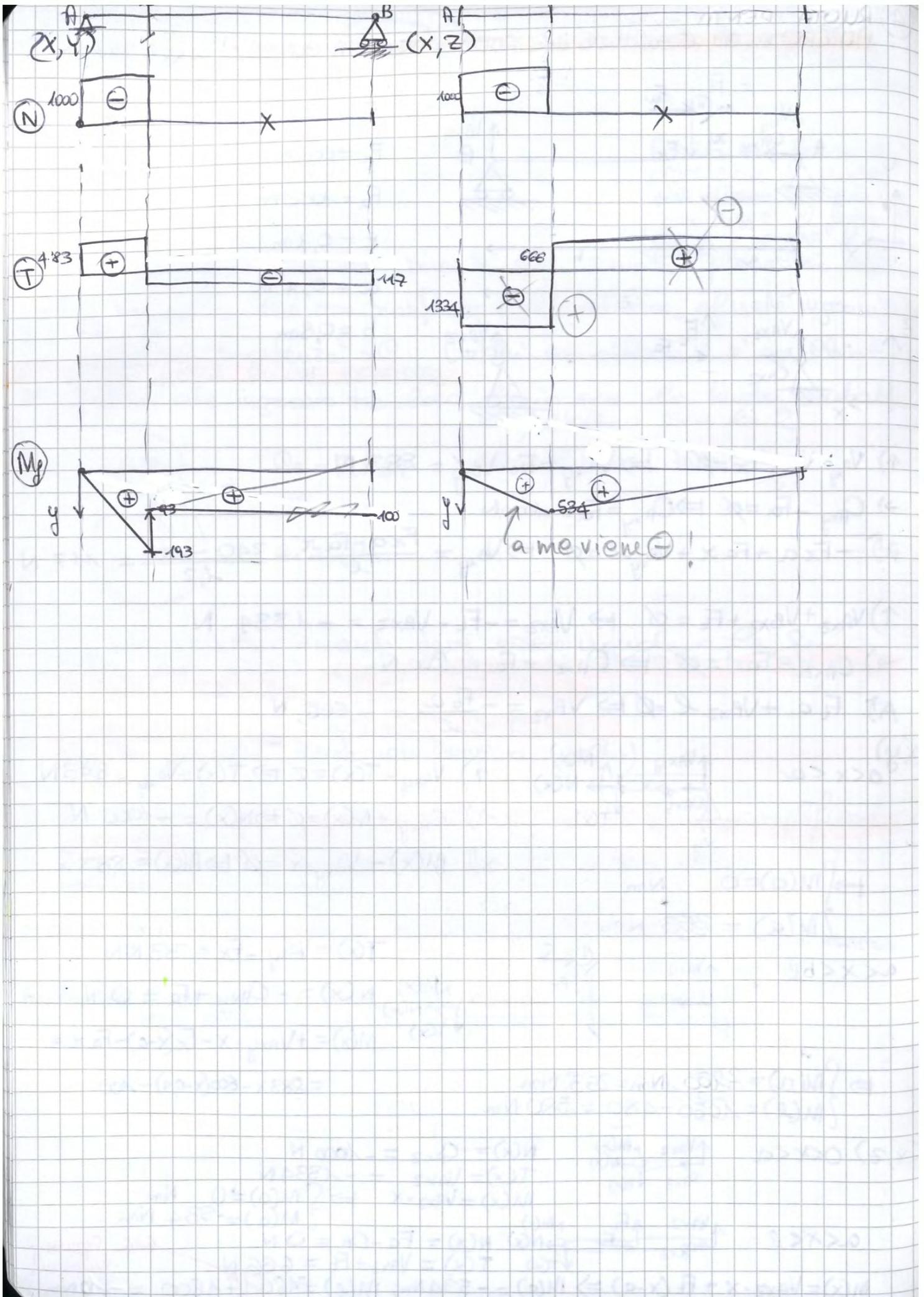
$F_t$  è in comune  $\Rightarrow C_1 = C_2$  se  $R_1 = R_2$   
 (Ma a livello ideale non serve a molto)

Generalmente accoppio alberi per avere un amplificatore di coppia  
 (Entrò con coppia bassa, esce con coppia alta)  
 $\Rightarrow$  Gioco con i raggi

**ALBERO su cui sono state calettate DUE PULEGGE**



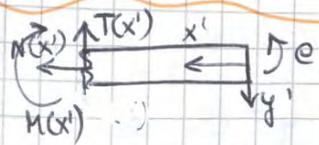
PULEGGIA: Coppia con una fune attorno  
 $\Rightarrow$  E solo  $F_t$  determinato dal tizio della fune



$$\Rightarrow M(x) = V_A x + V_B (x-a) - R(x - \frac{3}{4}a) \Rightarrow M(a) = V_A \cdot a - R(a - \frac{3}{4}a) =$$

$$= V_A \cdot a - \frac{R \cdot a}{4} = 106,4 - 6,4 = 100 \text{ Nm}$$

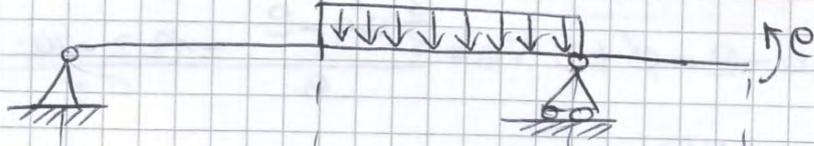
È preferibile:



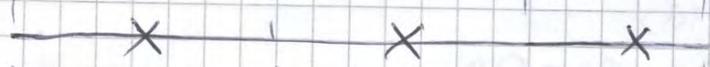
$$\begin{aligned} \Rightarrow N(x') &= \emptyset \\ \uparrow T(x') &= \emptyset \\ x' \uparrow -M(x') + e &= \emptyset \Rightarrow M(x') = e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(b+a) &= V_A(b+a) + V_B(b+a-a) - R(b+a - \frac{3}{4}a) = \\ &= 146,3 - 30,3 - 16 = 100 \text{ Nm} \end{aligned}$$

Diagrammi di sollecitazione



(N)



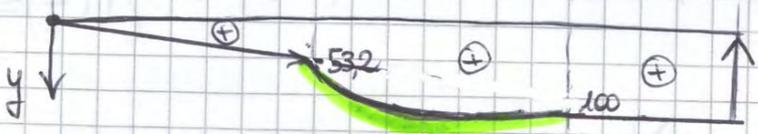
(T)



distribuito  
le cariche concentrate e poco a poco a poco a diminuire il taglio

interviene  $V_B = -101$ !

(M<sub>f</sub>)

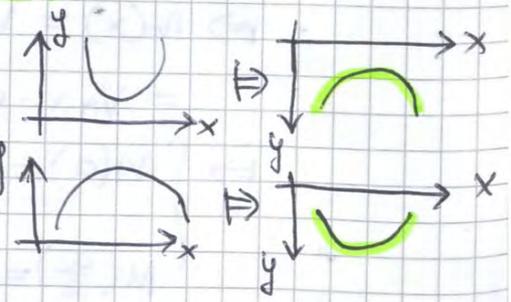


DERIVARE la CONCAVITA' della parabola:

$$q = - \frac{dM^2(x)}{dx^2}$$

Se  $\frac{dM^2(x)}{dx^2} > 0$

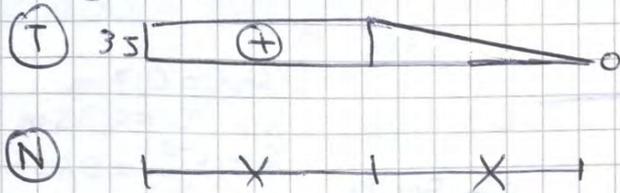
Se  $\frac{dM^2(x)}{dx^2} < 0$



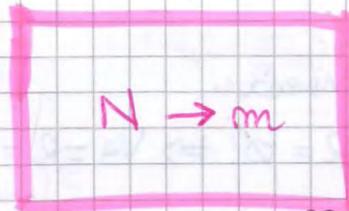
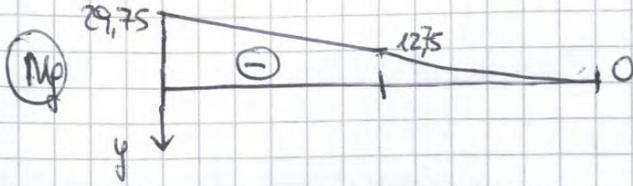
Nell'esercizio:

$$q > 0 \Rightarrow - \frac{dM^2(x)}{dx^2} > 0 \Rightarrow \frac{dM^2(x)}{dx^2} < 0 \Rightarrow$$

Diagrammi



$$q > 0 \Rightarrow -\frac{d^2M(x)}{dx^2} > 0 \Rightarrow \frac{d^2M}{dx^2} < 0$$



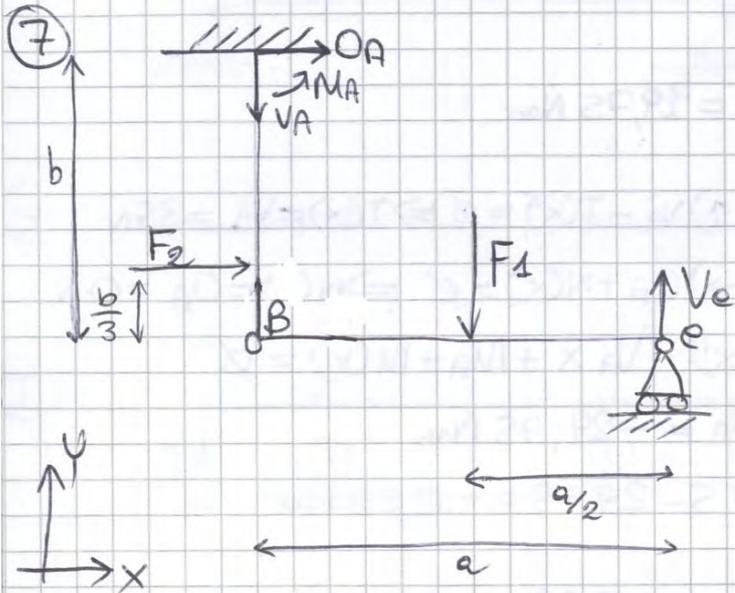
$$a = 80 \text{ mm} = 0,08 \text{ m}$$

$$b = 60 \text{ mm} = 0,06 \text{ m}$$

[m dm cm mm]

$$F_1 = 200 \text{ N}$$

$$F_2 = 150 \text{ N}$$



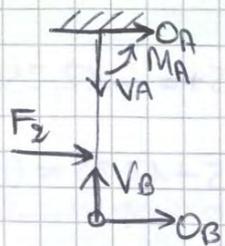
E' corretto che non usasse REAZIONI VINCOLE delle cornici interne

$$\uparrow) -VA - F_1 + Ve = 0 \quad (1)$$

$$\rightarrow) F_2 + OA = 0 \Rightarrow OA = -F_2 = -150 \text{ N} \quad (2)$$

$$\curvearrowright) MA + F_2 \left(b - \frac{b}{3}\right) - F_1 \frac{a}{2} + Ve a = 0 \quad (3)$$

Spezzo in corrispondenza della giunzione degli elementi e faccio diventare la corniera il B di interna e esterna



$$\uparrow) -VA + VB = 0 \Rightarrow VB = VA$$

$$\rightarrow) OA + OB + F_2 = 0 \Rightarrow OB = -F_2 - OA = -150 + 150 = 0 \text{ N}$$

$$\curvearrowright) MA + F_2 \left(b - \frac{b}{3}\right) + OB = 0$$

$$\Rightarrow MA = -F_2 \frac{2}{3} b = -6 \text{ Nm}$$

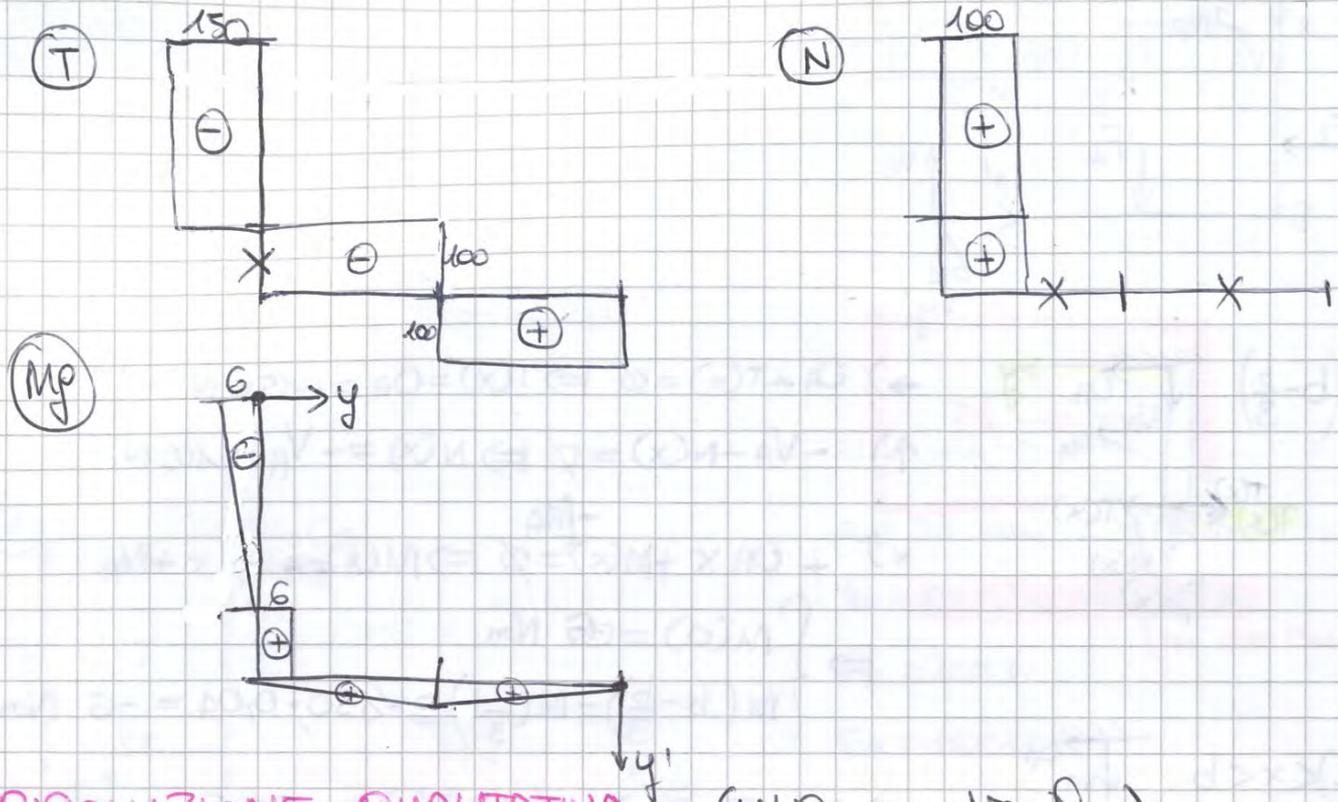
(3)

$$\Rightarrow Ve = \frac{-MA - F_2 \frac{2}{3} b + F_1 \frac{a}{2}}{a} = \frac{6 - 150 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,06 + 200 \cdot \frac{0,08}{2}}{0,08} = 100 \text{ N}$$

(1)

$$\Rightarrow VA = Ve - F_1 = -100 \text{ N}$$

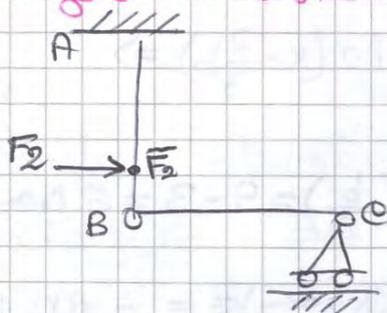
Diagrammi



RISOLUZIONE QUALITATIVA (utile come verifica)

La struttura è <sup>fissata</sup> lineare  $\Rightarrow$  Vale il principio di sovrapposizione degli effetti  
 $\Rightarrow$  Posso studiare quello che genera prima un carico e poi l'altro e poi sommare algebricamente

1. Immagino che esista  $F_2$  e non  $F_1$   
 $\rightarrow$  Flessione da SN a DS



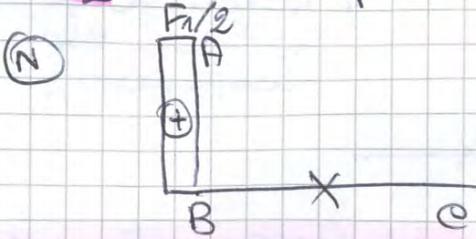
La struttura è caricata con  $F_2$  trasversalmente vi è una mensola in A ( $\Rightarrow$  la  $F_2$  te) incombentata con un altro elemento con carrello

$F_2$  può ricevere (sotto) una reazione, un carico che lo contrasta  
 No, perché se sposto B verso DS, immaginando piccole oscillazioni,  $\overline{BC}$  rimane orizzontale a se stesso e viene spinto di poco  
 Però  $\overline{BC}$  non verrà compresso o caricato in alcun modo [Rimane sciolto, non oppone resistenza]

$F_2$  B potrà essere caricato se in  $\overline{BC}$  non c'è niente che si oppone a  $F_2$ ?  
 No

$F_2$  è applicato in  $\overline{BC}$  e si seziona in A  $\Rightarrow$  il tratto caricato a Taglio è solo  $\overline{AF_2}$  (Dove entra e dove esce il carico)

⇒ la cerniera da esterna è diventata interna e trasferisce  $\frac{F_1}{2}$  in corrispondenza dell'incastro ⇒

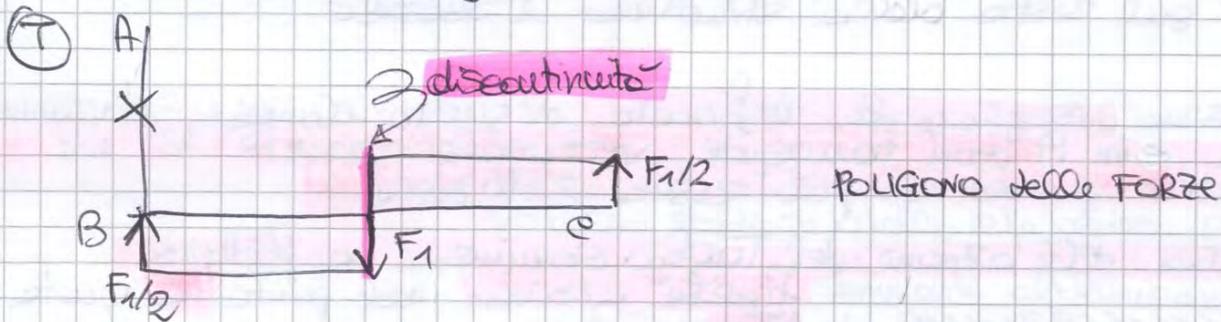


In Be è scario parete non vi sono forze che possano produrre trazioni o compressioni (non è applicato nessun carico allineato lungo l'asse)

In BA c'è  $N = \text{cost} = \frac{F_1}{2}$  di TRAZIONE (+) Infatti

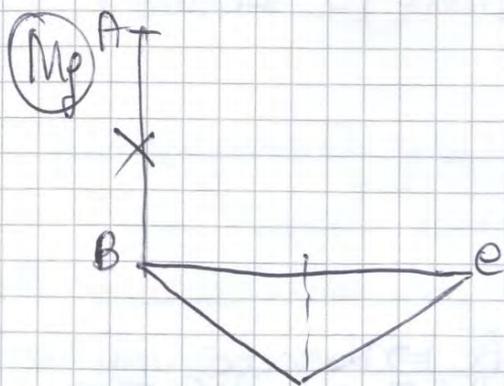
AB è un tirante, potrebbe essere sostituito con una corda con  $F_2$  tizio la "corda" ma si oppone una reazione che tende a far rimanere il tirante così com'è

Considero ora il taglio



AB non è caricato a taglio. Come una corda (è un tirante)

Considero il Momento



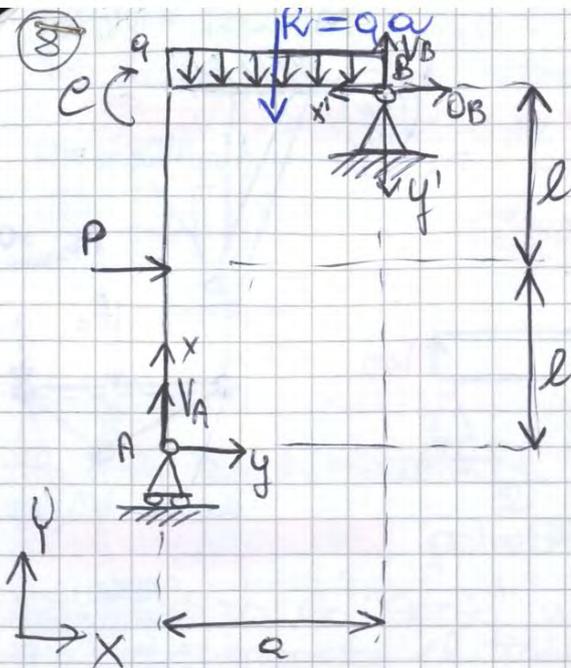
Ma è tracciato sul lato delle fibre tese  
 ⇒ le fibre tese sono sotto AB perché  $F_2$  tende a fluttare AB in questo modo



L'andamento è triangolo che raggiunge il apice in corrispondenza della forza

Si annulla in BeC perché vi è una cerniera che separa due elementi e non può quindi trasferire il momento da uno all'altro

In AB non troviamo componenti di momento, la corda non può essere sottoposta a flessione



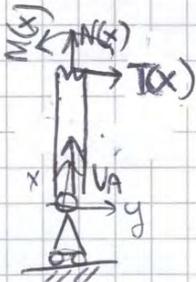
$l = 10 \text{ m}$   
 $a = 7 \text{ m}$   
 $q = 8000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$   
 $C = 600 \text{ Nm}$   
 $P = 1000 \text{ N}$   
 $R = qa = 56000 \text{ N}$

1)  $V_A + V_B - R = 0 \Rightarrow V_B = R - V_A = 26657 \text{ N}$

$\Rightarrow O_B + P = 0 \Rightarrow O_B = -P = -1000 \text{ N}$

$B \uparrow R \frac{a}{2} - C + P l - V_A a = 0 \Rightarrow V_A = \frac{R \frac{a}{2} - C + P l}{a} = \frac{196000 - 600 + 1000}{7}$   
 $= 29343 \text{ N}$

$0 \leq x \leq l$



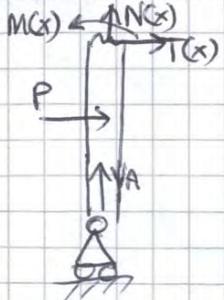
$\Rightarrow T(x) = 0$

*KN da N / 1000*

1)  $V_A + N(x) = 0 \Rightarrow N(x) = -V_A = -29343 \text{ N} = -29,3 \text{ kN}$

2)  $M(x) - T(x) \cdot x = 0 \Rightarrow M(x) = 0$

$l < x \leq 2l$



$\Rightarrow T(x) + P = 0 \Rightarrow T(x) = -P = -1000 \text{ N} = -1 \text{ kN}$

1)  $N(x) = -V_A = -29343 \text{ N} = -29,3 \text{ kN}$

2)  $M(x) + P(x-l) = 0 \Rightarrow$

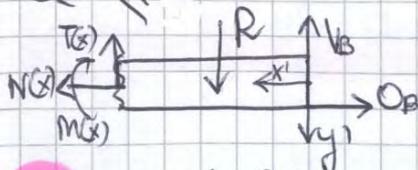
$M(x) = -P(x-l)$

$\Rightarrow \begin{cases} M(l) = 0 \text{ Nm} \\ M(2l) = -1000(2l-l) = -1000 \cdot 10 = -10000 \text{ Nm} = -10 \text{ kNm} \end{cases}$

1)  $V_B - R(x) + T(x) = 0 \Rightarrow T(x) = q x - V_B \Rightarrow \begin{cases} T(0) = -26657 = -26,7 \text{ kN} \\ T(a) = 29343 \end{cases}$

$\Rightarrow N(x) - O_B = 0 \Rightarrow N(x) = -1000 \text{ N} = -1 \text{ kN}$

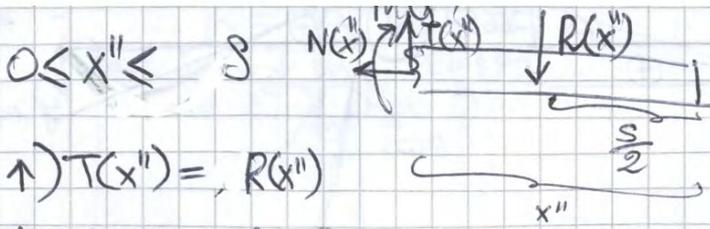
$0 \leq x' \leq a$



2)  $R(x' - \frac{a}{2}) - V_B x' + M(x') = 0 \Rightarrow M(x') = V_B x' - R(x' - \frac{a}{2}) \Rightarrow$

$M(0) = q x' \frac{a}{2} = 0 \text{ Nm}$

$M(a) = 10000 - 56000 \cdot \frac{7}{2} = -186599 - 0,2 = -940,1 \text{ Nm}$



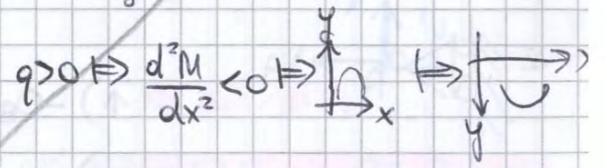
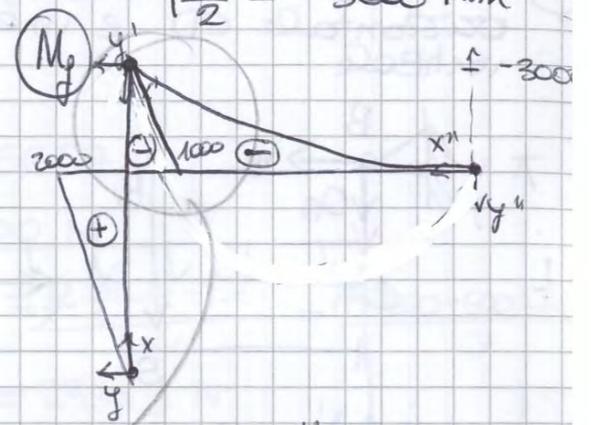
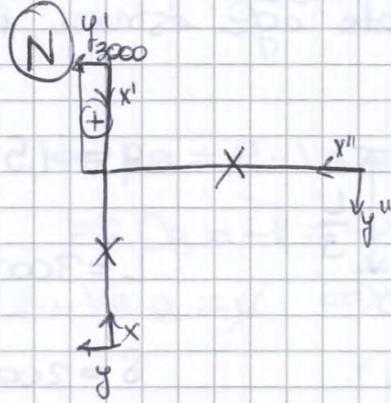
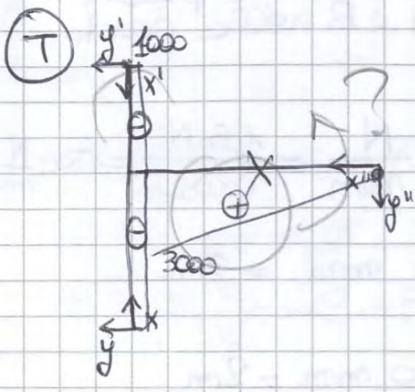
$\uparrow) T(x'') = R(x'')$

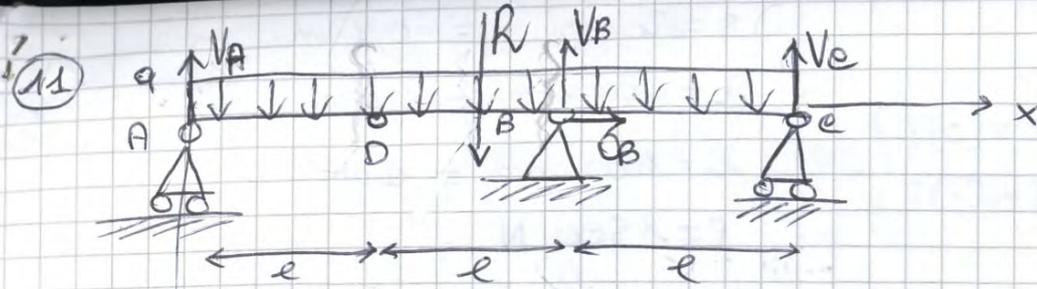
$\Rightarrow \begin{cases} T(0) = 0 \\ T(S) = R \cdot S = 3000 \text{ N} \end{cases}$

$\rightarrow) N(x'') = \emptyset$

$x'' \uparrow) M(x'') + R(x'') \cdot (x'' - \frac{S}{2}) = \emptyset$

$\Rightarrow M(x'') = -q x'' \cdot (x'' - \frac{S}{2}) \Rightarrow \begin{cases} M(0) = 0 \text{ Nm} \\ M(S) = -q S (\frac{S}{2}) = -q S (\frac{S}{2}) \\ = -q \frac{S^2}{2} = -3000 \text{ Nm} \end{cases}$





Verifica isostatica

$$m = 3 \cdot 2 = 6$$

$$m = 1 + 2 + 1 + 2(2-1) = 6 \quad \left. \vphantom{m} \right\} h = m - m = 0$$

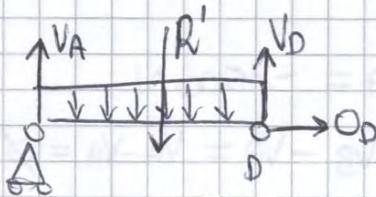
$$\uparrow) \quad \textcircled{V_A + V_B + V_E} - R = 0 \quad (1)$$

$$\rightarrow) \quad O_B = 0 \quad (2)$$

$$B \uparrow) \quad -V_A 2l + R \frac{l}{2} + V_E l = 0 \Rightarrow$$

$$q l \frac{l}{2} - V_A 2l + V_E l = 0 \quad (3)$$

Spazio in D



$$\uparrow) \quad V_A = -V_D + R'$$

$$\rightarrow) \quad O_D = 0$$

$$D \uparrow) \quad +R' \frac{l}{2} - V_A l = 0 \Rightarrow$$

$$V_A = \frac{q l \frac{l}{2}}{l} = q \frac{l}{2} \quad (4)$$

$$\left\{ \Rightarrow V_D = R' - V_A = q l - q \frac{l}{2} = q \frac{l}{2} = V_A \right\}$$

Sostituisco (4) nel sistema (1), (3)

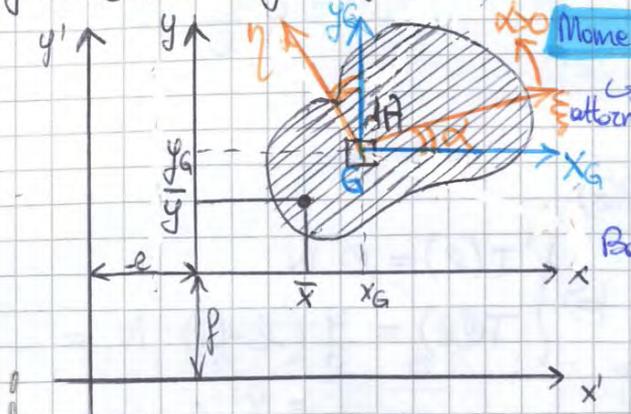
$$(3) \rightarrow V_E = \frac{V_A 2l - q \frac{l^2}{2}}{l} = \frac{V_A 2l - q \frac{l^2}{2}}{l} = q \frac{l}{2} - q \frac{l}{2} = q \frac{l}{2} = V_A$$

$$(1) \rightarrow V_B = R - V_E - V_A = R - 2V_A = q 3l - q l = 2q l$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_A = V_E = q \frac{l}{2} \\ V_B = 2q l \\ O_B = 0 \end{cases}$$

### Esercitazione 3 Geometrie delle Aree (delle sezioni dell'oggetto)

Studiamo la forma della mave nel momento più critiche, baricentro, momenti d'Inerzia e le combinati con  $M_p, T, N, M_t$  ci forniscono gli sforzi  $(\sigma, \tau)$



**Momenti Statici**

$$S_x = \int_A y dA \quad S_x' = \int_A y' dA = S_x + fA$$

$$S_y = \int_A x dA \quad S_y' = \int_A x' dA = S_y + eA$$

**Baricentro della funzione**

$$\begin{cases} x_G = \frac{S_y}{A} \\ y_G = \frac{S_x}{A} \end{cases}$$

Se  $\begin{cases} \bar{x} = x_G \\ \bar{y} = y_G \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_x = 0 \\ S_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_x' = fA \\ S_y' = eA \end{cases}$

**trasposizione**

$$\begin{cases} J_{x'} = J_x + f^2 A \\ J_{y'} = J_y + e^2 A \\ J_{x'y'} = J_{xy} + e f A \end{cases}$$

### Momenti di Inerzia

**rispetto a x**

$$J_x = \int_A y^2 dA$$

**rispetto a y**

$$J_y = \int_A x^2 dA$$

**Mom. Centrifuga**

$$J_{xy} = \int_A xy dA$$

$$\begin{aligned} J_{x'} &= J_x + f^2 A + 2f S_x \\ J_{y'} &= J_y + e^2 A + 2e S_y \\ J_{x'y'} &= J_{xy} + e f A + f S_y + e S_x \end{aligned}$$

**\*RETTANGOLO b·h** ASSE QUIN

$$\begin{cases} J_x = \frac{bh^3}{12} \\ J_y = \frac{hb^3}{12} \end{cases} \quad I_x = \frac{bh^3}{3}$$

### Esercizio tipo:

1. Identifico la sezione complessa con relazioni che la legano a sezioni semplici.
2. Premo R con O nell'angolo in basso a sinistra [Non baricentrico].
3. Calcolo BARICENTRO e MOMENTI d'INERZIA rispetto agli ASSI BARICENTRICI.

numeri sezioni semplici	$x_B$	$y_B$	A	$S_x$	$S_y$	$x_G$	$y_G$	$J_{x_B}^*$	$J_{y_B}^*$	$J_{x_B y_B}$	$f = y_B - y_G$	$e = x_B - x_G$	$J_{x_G}$	$J_{y_G}$	$J_{x_G y_G}$
1															
2															
...															

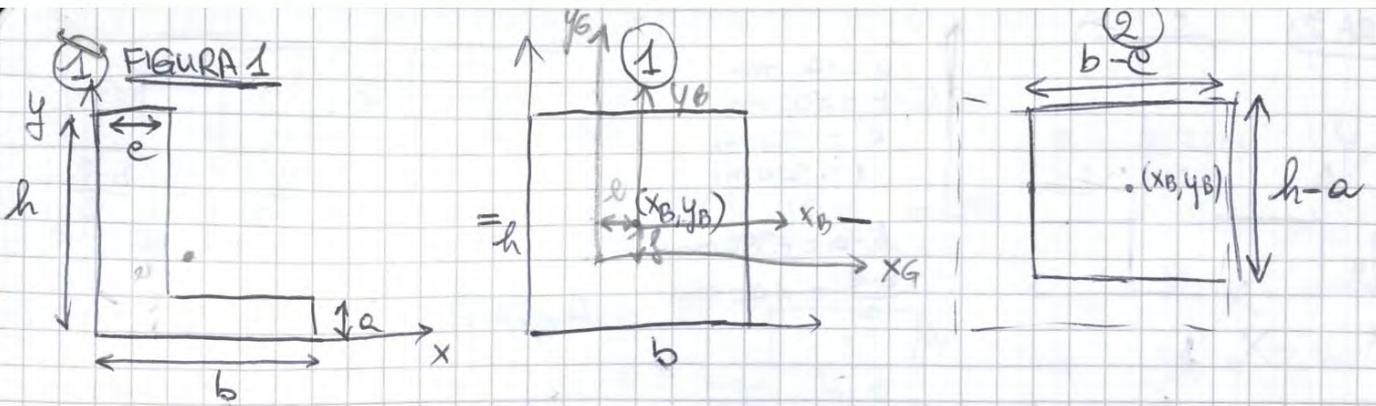
**baricentri delle sezioni semplici**  
 $A = \text{latol}_x \cdot \text{latol}_y$  (oss:  $A \neq x_B \cdot y_B$ )  
 $x_B \neq \frac{\text{latol}_x}{2}$   
 $y_B \neq \frac{\text{latol}_y}{2}$

**Mom. Statici rispetto a  $(x', y')$**   
 rispetto al baricentro  
 $\begin{cases} S_x = y_B A \\ S_y = x_B A \end{cases}$

**Baricentro in  $(x, y)$**   
 $x_G = \frac{\text{Relazione } S_x}{\text{Relazione } A}$   
 $y_G = \frac{\text{Relazione } S_y}{\text{Relazione } A}$

**delle singole sezioni (la seconda della figura)**  
 Mom. Centrifuga  
 OSS: NULLO se identifico almeno 1 asse di simmetria!  
 (es: tr. isoscele, non lo è (tri. scaleno) altrimenti?)

**come  $J_{x'}$ , dove  $J_x = J_{x_B}, J_y = J_{y_B}$**



$a = 100 \text{ mm}$   
 $b = 400 \text{ mm}$   
 $e = 150 \text{ mm}$   
 $h = 500 \text{ mm}$   
 $b - e = 250 \text{ mm}$   
 $h - a = 400 \text{ mm}$

$b^3 = 64 \cdot 10^6$   
 $h^3 = 125 \cdot 10^6$   
 $(b - e)^3 = 15625 \cdot 10^6$   
 $(h - a)^3 = 64 \cdot 10^6$

	$x_B$	$y_B$	$A$	$S_x$	$S_y$	$J_{x_B}$	$J_{y_B}$	$J_{x_B y_B}$	$f = y_B - y_G$	$e = x_B - x_G$
1	200	250	$2 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^7$	$4 \cdot 10^7$	$4,1\bar{6} \cdot 10^9$	$2,6 \cdot 10^9$	0	50	75
2	275	300	$1 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^7$	$2,75 \cdot 10^7$	$1,3 \cdot 10^9$	$0,521 \cdot 10^9$	0	100	150
	mm	mm	mm <sup>2</sup>	mm <sup>3</sup>	mm <sup>3</sup>	mm <sup>4</sup>	mm <sup>4</sup>			

$S_x = y_B A$   
 $S_y = x_B A$

RETANGOLO =  
 $J_x = \frac{b h^3}{12}$   
 $J_y = \frac{b^3 h}{12}$

$f^2$	$e^2$	$e f$
2500	5625	375
10000	22500	1500

$y_G = \frac{S_{x1} - S_{x2}}{A_1 - A_2} = \frac{2 \cdot 10^7 - 3 \cdot 10^7}{10^5} = 2 \cdot 10^2 = 200$   
 $x_G = \frac{S_{y1} - S_{y2}}{A_1 - A_2} = \frac{1,25 \cdot 10^8 - 2,75 \cdot 10^7}{10^5} = 1,25 \cdot 10^2 = 125$

	$J_{x_G}$	$J_{y_G}$	$J_{x_G y_G}$
1	$4,6 \cdot 10^9$	$3,8 \cdot 10^9$	$75 \cdot 10^7$
2	$2,3 \cdot 10^9$	$2,775 \cdot 10^9$	$150 \cdot 10^7$

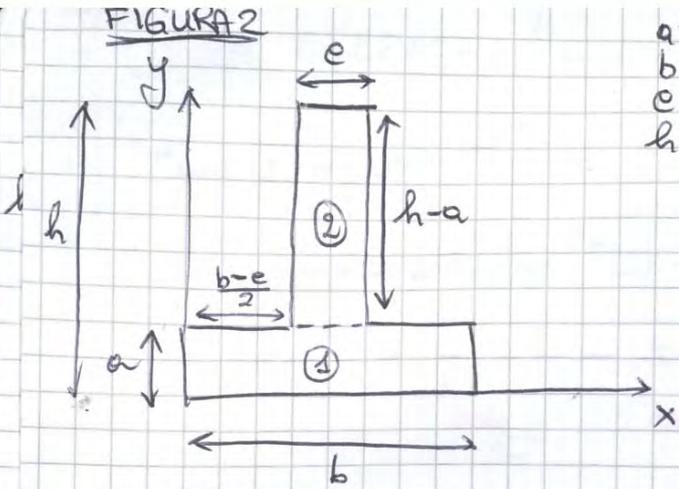
$J_{x'} = J_x + f^2 A + 2 f S_x \Rightarrow J_{x_G} = J_{x_B} + f^2 A + 2 f S_x$   
 $J_{y'} = J_y + e^2 A + 2 e S_y \Rightarrow J_{y_G} = J_{y_B} + e^2 A + 2 e S_y$   
 $J_{x'y'} = J_{x'y} + e f A + f S_y + e S_x \Rightarrow J_{x_G y_G} = J_{x_B y_B} + e f A + f S_y + e S_x$

$\textcircled{1} = 4,16 \cdot 10^9 + 375 \cdot 10^9 + 12,5 \cdot 10^9 = 20 \cdot 10^9$   
 $\textcircled{2} = 1,3 + 30,6 \cdot 10^9 + 10,5 \cdot 10^9$

~~$\textcircled{1} 3 \cdot 10^9 + 0$~~   
 ~~$\textcircled{2} 13,75 \cdot 10^9 + 4,81 \cdot 10^9 + 225 \cdot 10^9$~~

$\textcircled{1} 2,6 \cdot 10^9 + 0 + 0$   
 $\textcircled{2} 5,21 \cdot 10^9 + 5625 \cdot 10^9 + 4,125 \cdot 10^9$

FIGURA 2



$a = 100 \text{ mm}$   
 $b = 400 \text{ mm}$   
 $e = 120 \text{ mm}$   
 $h = 500 \text{ mm}$

$h - a = 400 \text{ mm}$   
 $\frac{b - e}{2} = 140 \text{ mm}$

$R = (1) + (2)$

	$X_B$	$Y_B$	$A$	$S_x = Y_B A$	$S_y = X_B A$	$J_{x_B} = \frac{bh^3}{12}$	$J_{y_B} = \frac{b^3h}{12}$	$J_{x_B y_B}$	→
1	200	50	$40000 = 4 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^6$	$8 \cdot 10^6$	$3,3 \cdot 10^7$	$53,3 \cdot 10^7$	0	→
2	200	300	$48000 = 4,8 \cdot 10^4$	$1,44 \cdot 10^6$	$9,6 \cdot 10^6$	$6,4 \cdot 10^7$	$5,76 \cdot 10^7$	0	→
	mm	mm	mm <sup>2</sup>						

$$X_G = \frac{S_{y1} + S_{y2}}{A_1 + A_2} = \frac{17,6 \cdot 10^6}{8,8 \cdot 10^4} = 2 \cdot 10^2 = 200 \text{ mm}$$

$$Y_G = \frac{S_{x1} + S_{x2}}{A_1 + A_2} = 1,86 \cdot 10^2 = 186 \text{ mm}$$

perché lo annulla e sopra ho un voltor?

→	$f = y_B - y_G$	$l = x_B - x_G$	$J_{x_G} = J_{x_B} + f^2 A + 2flx$	$J_{y_G} = J_{y_B} + l^2 A + 2lly$	$J_{x_G y_G} = flA$
1 →	$f = -136$ <del><math>f^2 = 18496</math></del>	0	<del><math>773 \cdot 10^7</math></del> <del><math>773173333</math></del>	<del><math>53,3 \cdot 10^7</math></del> <del><math>533333333</math></del>	0
2 →	114	0	<del><math>1264 \cdot 10^7</math></del> <del><math>1263808000</math></del>	<del><math>5,76 \cdot 10^7</math></del> <del><math>57600000</math></del>	0

$J_{x_G}^{TOT} = 2036981333 = 2036 \cdot 10^7$

$J_{y_G}^{TOT} = 59,06 \cdot 10^7$

$J_{x_G y_G}^{TOT} = 0$

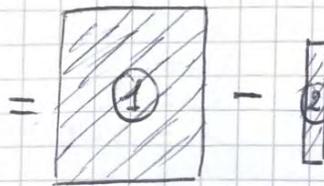
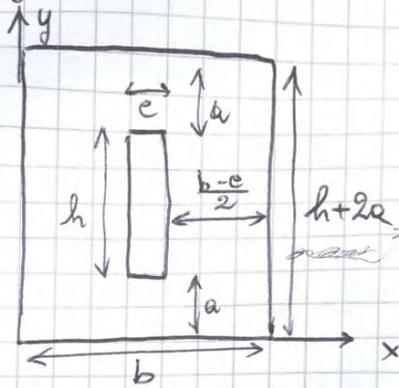
$\tan 2\alpha = \frac{J_{x_G y_G}^{TOT}}{J_{x_G}^{TOT} - J_{y_G}^{TOT}} = 0$

$\frac{J_{x_G}^{TOT} - J_{y_G}^{TOT}}$



$= \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = 0$  se  $\{ \sin(2\alpha) = 0 \} \Rightarrow 2\alpha = k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{k\pi}{2}$

Figura 4



$a = 100 \text{ mm}$   
 $b = 400 \text{ mm}$   
 $e = 100 \text{ mm}$   
 $h = 400 \text{ mm}$   
 $h + 2a = 600 \text{ mm}$

$\frac{b-e}{2} = 150 \text{ mm}$

	$x_B$	$y_B$	A	$S_x = y_B A$	$S_y = x_B A$	$I_{x_B} = \frac{bh^3}{12}$	$I_{y_B} = \frac{b^3 h}{12}$	$I_{x_B y_B}$	$f = y_B - y_G$	$l = x_B - x_G$
1	200	300	$24 \cdot 10^4$	$72 \cdot 10^6$	$48 \cdot 10^6$	$72 \cdot 10^8$	$32 \cdot 10^8$	0	0	0
2	200	300	$4 \cdot 10^4$	$12 \cdot 10^6$	$8 \cdot 10^6$	$53 \cdot 10^8$	$0,33 \cdot 10^8$	0	0	0

→	$I_{x_G} = I_{x_B} + A f^2$	$I_{y_G} = I_{y_B} + A l^2$	$I_{x_G y_G} = I_{x_B y_B} + A f l$
→	$72 \cdot 10^8$	$32 \cdot 10^8$	0
→	$5,3 \cdot 10^8$	$0,33 \cdot 10^8$	0

$y_G = \frac{S_{x1} - S_{x2}}{A_1 - A_2} = \frac{60 \cdot 10^6}{20 \cdot 10^4} = 300$

$x_G = \frac{S_{y1} - S_{y2}}{A_1 - A_2} = \frac{40 \cdot 10^6}{20 \cdot 10^4} = 200$

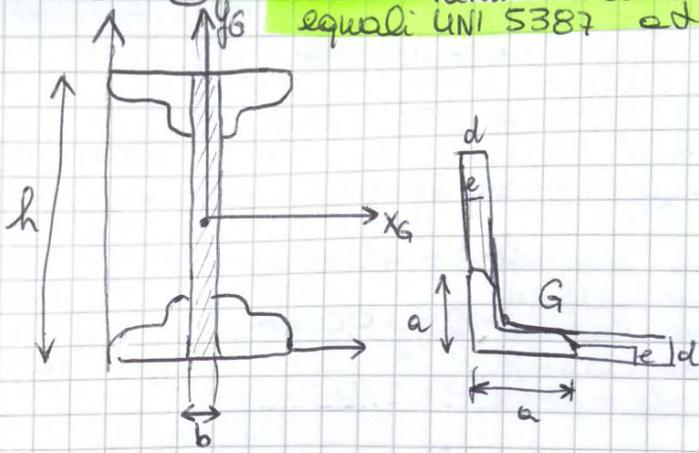
$I_{x_G \text{ TOT}} = 66,6 \cdot 10^8$

$I_{y_G \text{ TOT}} = 31,6 \cdot 10^8$

$I_{x_G y_G \text{ TOT}} = 0$

Esercizio 3

TRAVE ottenuta unendo per saldatura 4 CANTONALI a lati  
 uguali UNI 5387 ad un PROFILATO a sezione RETTANGOLARE



$b = 10 \text{ mm}$   
 $h = 120 \text{ mm}$   
 $e = 5 \text{ mm}$   
 $d = 11,6 \text{ mm}$   
 $A_c = 379 \text{ mm}^2$   
 $I_c = 5,43 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$

$A_x = b \cdot h = 1200 \text{ mm}^2$

$A_{c \text{ TOT}} = 4 \cdot A_c = 2716 \text{ mm}^2$

$\int x_G = 0 \quad x_G = \frac{S_y}{A} \Rightarrow S_y = x_G A = 0$

$\int y_G = 0 \quad y_G = \frac{S_x}{A} \Rightarrow S_x = y_G A = 0$

$x_{Bc} = d + \frac{b}{2} = 16,6$

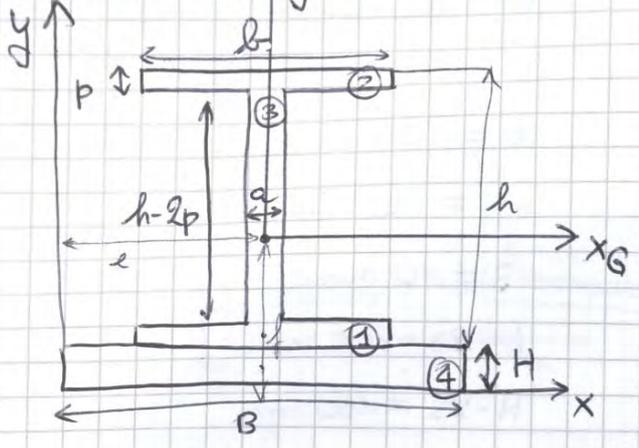
$y_{Bc} = d - \frac{h}{2} = -71,6$

$I_{x_G^c} = I_{x_{Bc}} + A_c \cdot (y_{Bc} - y_G)^2 =$   
 $5,43 \cdot 10^6 + 1942966,24$

?

**Trave saldato a PROFILATO rettangolare**

Esercizio ⑤  $y_G$



- $b = 60 \text{ mm}$
- $a = 10 \text{ mm}$
- $h = 100 \text{ mm}$
- $B = 90 \text{ mm}$
- $p = 5 \text{ mm}$
- $H = 10 \text{ mm}$
- $h - 2p = 90 \text{ mm}$

$d(y_G, y_{\text{TRAVE a DOPPIAT}})$

$I_{x_G}^{\text{TOT}}?$

$\{1 + 2 + 3 + 4\}$

	$x_B$	$y_B$	$A$	$S_x = y_B \cdot A$	$S_y = x_B \cdot A$	$I_{x_B} = \frac{bh^3}{12}$	$I_{y_B} = \frac{b^3h}{12}$	$I_{x_B y_B}$	$f$	$e$
1	45	12,5	300	3750	13500	625	90000	0	-26,875	
2	45	107,5	300	32250	13500	625	90000	0	68,125	0
3	45	60	900	54000	40500	607500	7500	0	20,625	
4	45	5	900	4500	40500	7500	607500	0	-34,375	

$$y_G = \frac{S_{x1} + S_{x2} + S_{x3} + S_{x4}}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4} = \frac{94500}{2400} = 39,375$$

$$x_G = \frac{S_{y1} + S_{y2} + S_{y3} + S_{y4}}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4} = \frac{108000}{2400} = 45$$

	$f^2$	$e^2$
1	722,265625	
2	4644,0156	0
3	425,39	
4	1181,640625	

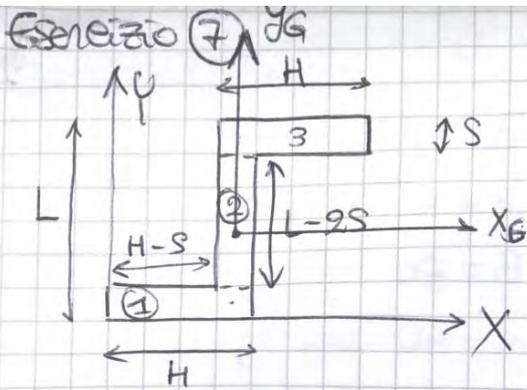
	$I_{x_G} = I_{x_B} + f^2 A + 2f S_x$	$I_{y_G} = I_{y_B} + e^2 A + 2e S_y$	$I_{x_G y_G} = I_{x_B y_B} + e f A + f S_y + e S_x$
1	217304,6875	90000	0
2	1392929,68	90000	0
3	990351	7500	0
4	1070976,563	607500	0

$I_{x_G}^{\text{TOT}} = 3671561,93$      $I_{y_G}^{\text{TOT}} = 795000$      $I_{x_G y_G}^{\text{TOT}} = 0$

$x_{B \text{ TRAVE AT}} = 45$

$y_{B \text{ TRAVE AT}} = \frac{S_{x1} + S_{x2} + S_{x3}}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{90000}{1500} = 60$

$y_{B \text{ TRAVE}} - y_G = 20,625$



$L = 120 \text{ mm}$

$H - S = 50 \text{ mm}$

$H = 60 \text{ mm}$

$L - 2S = 100 \text{ mm}$

$S = 10 \text{ mm}$

$(x_G, y_G)$ ?  
 $I_{x_G \text{ TOT}}, I_{y_G \text{ TOT}}$ ?  
 Orientamento?

	$x_B$	$y_B$	A	$S_x = y_B A$	$S_y = x_B A$	$I_{x_B} = \frac{bh^3}{12}$	$I_{y_B} = \frac{b^3h}{12}$	$f = y_B - y_G$	$e = x_B - x_G$	$f^2$	$e^2$
1	30	5	600	3000	18000	5000	180000	-55	-25	3025	625
2	55	60	1000	60000	55000	833333,3	100000	0	0	0	0
3	80	115	600	69000	48000	5000	180000	55	25	3025	625

$$y_G = \frac{S_{x1} + S_{x2} + S_{x3}}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{132000}{2200} = 60 \text{ mm}$$

$$x_G = \frac{121000}{2200} = 55 \text{ mm}$$

$I_{x_B y_B} = 0$

	$I_{x_G} = I_{x_B} + f^2 A + 2f S_x$	$I_{y_G} = I_{y_B} + e^2 A + 2e S_y$	$I_{x_G y_G} = I_{x_B y_B} + e f A + f S_y + e S_x$
1	182000	555000	825000
2	833333,3	100000	0
3	182000	555000	825000

$$I_{x_G \text{ TOT}} = 4473333,3 = 4,47 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_G \text{ TOT}} = 1210000 = 1,21 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{x_G y_G \text{ TOT}} = 1650000 = 1,65 \cdot 10^6$$

$$\tan 2\alpha = \frac{-2 I_{x_G y_G \text{ TOT}}}{I_{x_G \text{ TOT}} - I_{y_G \text{ TOT}}} = \frac{-1,65 \cdot 10^6 \cdot 2}{3,26 \cdot 10^6} = -1,012$$

$$2\alpha = 45,34^\circ \Rightarrow \alpha = -22,67^\circ$$

L'Angolo di inclinazione del sistema di riferimento principale rispetto a quello baricentrico  $(x_G, y_G)$

## Esercizio 2



positivo perché concavo  
con  $z$

$b = 60 \text{ mm}$   
 $h = 100 \text{ mm}$

$M_z = 1200 \text{ Nm}$

(in questo perché il segno è opposto della freccia)

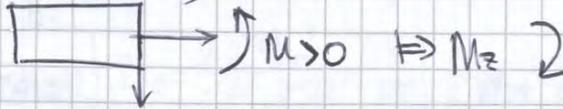
vettore momento (POLICE)

Asses cui disegna il rettangolo

a) Traacciare l'andamento delle sollecitazioni lungo la sezione ( $\sigma$ )

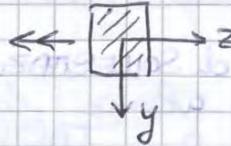
(Specificare le proprie convenzioni:)

Cono autoequilibrato:



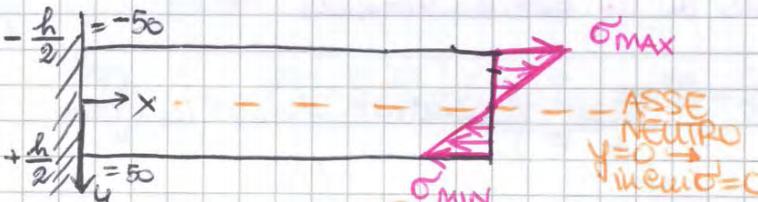
AMBIGUITA' **Attenzione nel COMPTO!**

OSS: se avessi avuto solo la vista laterale qui  $M_z = -1200 \text{ Nm}$  perché disorde con  $z$



osservo che la parte in alto viene tirata, in basso viene compressa

$\Rightarrow$  Vi è un **ANDAMENTO A FARFALLA**



TRAZIONE COMPRESIONE

MOMENTI (in valore ASS.)  
FLETTENTI

$$\sigma_x = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z$$

dove  $I_z = \frac{b h^3}{12}$   
 $I_y = \frac{b^3 h}{12}$

$$\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z} y = \sigma^f(y) = -\frac{+12000}{\frac{b h^3}{12}} y$$

varia linearmente con y

$$\sigma_{MAX} = \sigma^f\left(y = -\frac{h}{2}\right) = +\frac{12000 h}{2 \frac{b h^3}{12}} = \frac{12000 \cdot 6}{b h^2} \frac{\text{Nm}}{\text{mm}^3} = \frac{12000 \cdot 6 \cdot 1000 \text{ Nm}}{60 (100)^2 \text{ mm}^2}$$

$$= \frac{12000 \cdot 6000}{600000} = 120 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 120 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{MIN} = \sigma^f\left(y = +\frac{h}{2}\right) = -120 \text{ MPa}$$

b) Calcolare la tensione minima e massima

c) Calcolare la tensione nel punto di coordinate  $\left\{ \begin{array}{l} z = -20 \text{ mm} \\ y = -30 \text{ mm} \end{array} \right.$

$$\sigma^f(y = -30) = -\frac{M_z y}{I_z} = -\frac{M_z y}{\frac{b h^3}{12}} = -\frac{12000 \cdot 1000 \cdot (-30) \cdot 12^2 \text{ Nmm}^2}{60 \cdot (100)^3} = \frac{12000 \cdot 1000 \cdot 60}{10 \cdot 1000000} = 72 \text{ MPa}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{M_y}{M_z}$$

⇒ in questo caso  $\alpha \approx 27^\circ$

Si identifica l'ASSE NEUTRO cioè il luogo dei punti per cui  $\sigma = 0$

$$\Rightarrow \text{Annulla } \sigma_x = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z = 0$$

$$\Rightarrow y(z) = \frac{I_z}{M_z} \left( \frac{M_y}{I_y} z + \frac{N}{A} \right)$$

Nel caso di  $N=0$  ⇒ 
$$y(z) = \frac{I_z}{M_z} \left( \frac{M_y}{I_y} z \right) = \operatorname{tg} \beta \cdot z$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \frac{I_z}{I_y}$$

Eq. NE dell'ASSE NEUTRO se  $N=0$   
 $\frac{I_z}{M_z} \frac{M_y}{I_y} z = \operatorname{tg} \beta \cdot z$   
 coefficiente angolare

passeremo per l'origine

⇒ in questo caso  $\beta \approx 58^\circ$  ⇒  $\alpha \neq \beta$

SEZIONE circolare o quadrata  $\alpha = \beta$  perché  $I_z = I_y$

Se  $N \neq 0$  ⇒ 
$$y(z) = \frac{I_z}{M_z} \left( \frac{M_y}{I_y} z + \frac{N}{A} \right)$$

A.N. parallela a se stessa traslata fino a intersecare  $O_y$

oss: se  $z=0 \Rightarrow y \neq 0!$

DOMANDA D'ESAME:

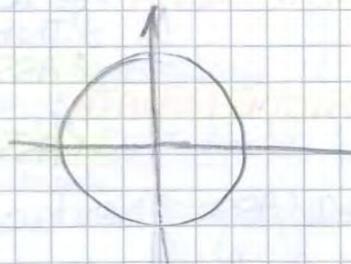
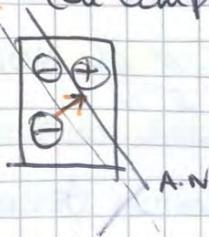
Se  $N > 0$  (di trazione) l'asse neutro va verso il basso per  $y > 0$



Infatti dato che gli effetti si sommano se  $N > 0$  sto tirando ⇒ le fibre tese saranno ancora più tese di prima e le fibre tese aumenteranno di una quantità determinata da  $N$  (Questo perché sommo un campo uniforme di tensione dovuto alla trazione)

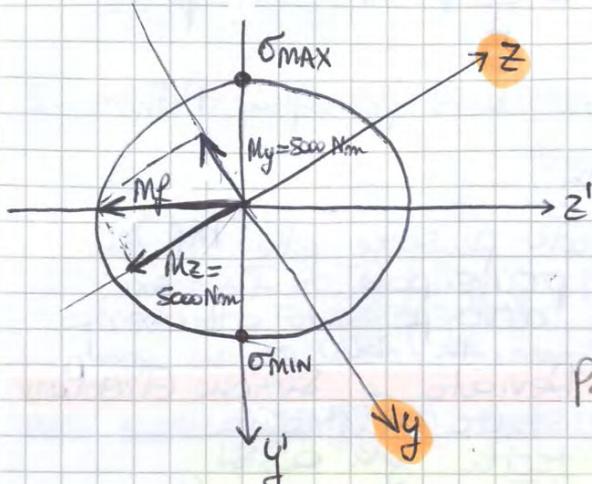
parte del campo precedentemente in compressione sta in trazione

Se  $N < 0$  (di compressione)



Esercizio ④

FLESSIONE RETTA



$d = 50 \text{ mm}, r = 25 \text{ mm}$

$M_z = -5000 \text{ Nm}$

$M_y = -3000 \text{ Nm}$

Procedimento Corretto?

$$\sigma_x = -\frac{M_z z'}{I_z} + \frac{M_y y'}{I_y}$$

$M_f = M_{z'} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{25000000 + 9000000} = 5831 \text{ Nm}$

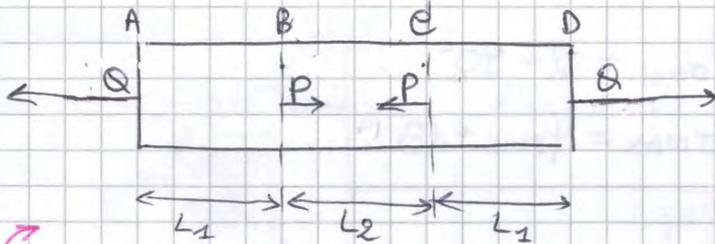
$I_z = \frac{\pi}{4} r^4 = 306640,625$

$\sigma_{MAX}^f(y' = -25) = +0,475 \cdot 1000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 475 \text{ MPa}$

$\sigma_{MIN}^f(y' = 25) = -475 \text{ MPa}$

Esercizio ⑤

Aste di ACCIAIO  $\Rightarrow$  **EBARRA ACCIAIO = 210 000 MPa**



a)  $\sigma_x^{\text{MAX}}$ ?

b)  $\Delta_{MAX}$ ?  
 $r = 25 \text{ mm}$

$L_1 = 400 \text{ mm}$

$L_2 = 800 \text{ mm}$

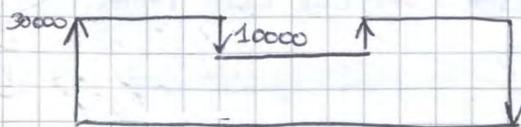
$Q = 30000 \text{ N}$

$P = 10000 \text{ N}$

Struttura autoequilibrata per carichi simmetrici.

Dato che è tirato maggiormente all'esterno rispetto all'interno  $\Rightarrow \sigma_{MAX}^m$

Poligono delle Forze ⑤



a)

$\sigma^m = \frac{N}{A}$



Sezione

$\sigma_{AB}^m = \frac{N}{A} = \frac{30000 \text{ N}}{\pi r^2 \text{ mm}^2} = \frac{30000}{1962,5} \text{ MPa} = 15,29 \text{ MPa} = \sigma_{ED}^m$

$\sigma_{BC}^m = \frac{20000}{1962,5} = 10,2$  **ATTENZIONE:  $N \neq P$ ;  $N = Q - P$ !**

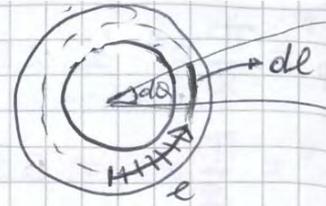
$\Rightarrow \sigma_{AB}^m = \sigma_{MAX}^m$  **è maggiore tra i due**



In forma integrale

$$J_t = \frac{1}{3} \int r^3 dl$$

asse  
curvilineo →



Dato che è sottile  $r^* = r$  oppure  $r^* = R$  e compio un errore trascurabile in realtà  $r^* = \bar{r} = \frac{d+D}{4} = 30 \text{ mm}$

discontinuità

$$J_t = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} s^3 \cdot r^* d\theta = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} s^3 \frac{(d+D)}{4} d\theta = \frac{1}{3} \frac{s^3 (d+D)}{4} 2\pi = \frac{s^3 (d+D) \pi}{6}$$

$$\tau_{MAX} = \frac{M_t \cdot 6 \cdot s}{s^3 (d+D) \pi} = \frac{M_t \cdot 6}{s^2 (d+D) \pi} = 796,18 \text{ MPa}$$

**CAVA TAGLIO**

$$\tau_{MAX} \approx 8 \cdot \tau_{CAVA}$$

Guai a intercompere la continuità della bocca sottile se questo è stato progettato per resistere a torsione

**OSSERVAZIONE CAVA**

Nell'Hp approssimativa di sezione sottile possiamo utilizzare la

**FORMULA di BREDT**

↳ Mi permette di calcolare il valor medio delle  $\tau$  (soggetto a torsione)

Approssima



com



andamento costante, ignorando l'andamento lineare



$$\tau_{MEDIA} = \frac{M_t}{2 \pi s}$$

rappresentativa

Area della sezione tocchata dalla linea media

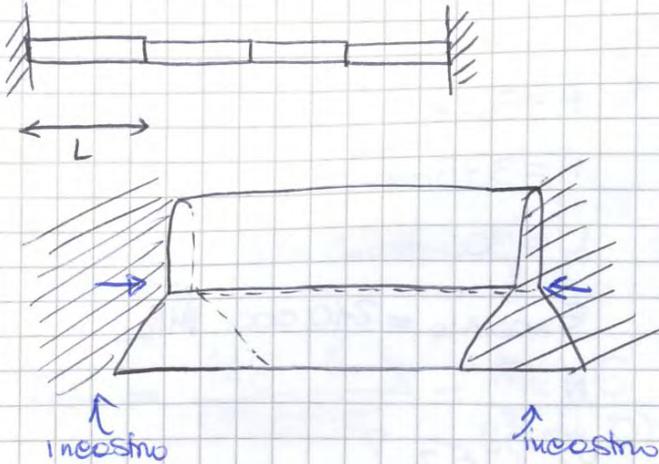
↳ spessore

Quanto più la sezione è sottile, quanto più  $\tau_{m}$  rappre-  
-senta  $\tau_{medio}$ .

$$\left. \begin{matrix} \tau_{MAX} = 100,42 \text{ MPa} \\ \tau_{MIN} = 71,73 \text{ MPa} \end{matrix} \right\} \tau_{medio} = 86,075 \text{ MPa}$$

$$\tau_m = \frac{M_t}{2 \pi (\bar{r})^2 s} = \frac{5000000}{56520} = 88,46 \text{ MPa}$$

# Esercizio 9 BINARIO FERROVIARIO di ACCIAIO



$$\alpha = 11,7 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

$$T = 6^\circ\text{C}$$

$\sigma$  quando  $T = 48^\circ\text{C}$  ?

$$L = 10 \text{ m}$$

$$E_{\text{ACCIAIO}} = 210 \text{ 000 MPa}$$

Assimilabile a TRAVE IPERSTATICA

3-6 = 3 volte IPERSTATICA

Non sei uno stato di <sup>DILATAZIONE?</sup> COMPRESSIONE per il doppio incastro.

Se il binario fosse libero di allungarsi nascerebbe la deformazione causata da una variazione di temperatura  $E_{\Delta T}$

$$E_{\Delta T} = \alpha \Delta T = \alpha (T - T_0)$$

Immagino di applicare forze di pressione che annullino  $E$

$$\Rightarrow E_{\text{MECC}} = -E_{\Delta T}$$

$$\Rightarrow \sigma^m = \frac{N}{A} = \frac{F}{A} = \epsilon E = -E_{\text{MECC}} E$$

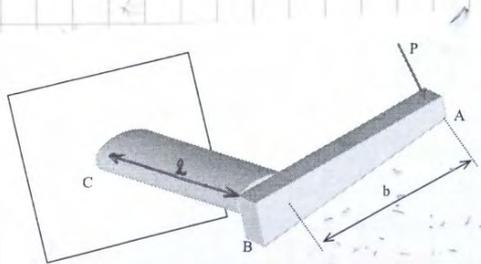
$$E_{\Delta T} = 11,7 \cdot 10^{-6} (48-6) \frac{^\circ\text{C}}{^\circ\text{C}} = 0,0004914$$

$$\sigma^m = E_{\Delta T} E = -103194 \text{ MPa}$$

ATTENTA  
 $491,4 \cdot 10^{-6} =$   
 $0,0004914$   
 Non contarlo!

$\sigma^m < 0$  COMPRESSIONE

Esercizio 11 BARRA di TORSIONE PIENA BE con BRACCIO b e CARICO P



$l = 500 \text{ mm}$

$b = 350 \text{ mm}$

$P = 450 \text{ N}$

Free end  $A < 25 \text{ mm}$

D? → se ACCIAIO

$\tau_{adm} = 105 \text{ MPa}, G = 78 \text{ GPa}$

→ se ALLUMINIO

$\tau_{adm} = 70 \text{ MPa}, G = 27 \text{ GPa}$

l non influisce?

$M_t = P \cdot b = 157500 \text{ Nmm}$

$\tau = \frac{M_t}{I_p} R = \frac{M_t}{I_p} \frac{D}{2} = \frac{M_t}{\frac{D^4 \pi}{32}} \cdot \frac{D}{2} = \frac{16 M_t}{D^3 \pi}$

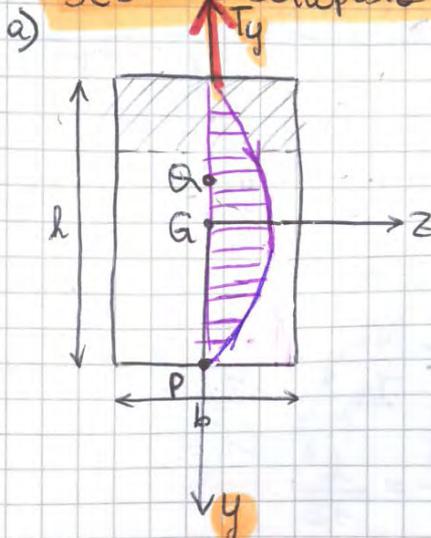
$\Rightarrow D^3 = \frac{16 M_t}{\tau \cdot \pi} \Rightarrow D = \sqrt[3]{\frac{16 M_t}{\tau \cdot \pi}}$

ACCIAIO  $D = 19,69 \text{ mm}$

ALLUMINIO  $D = 22,54 \text{ mm}$

Ris. 25

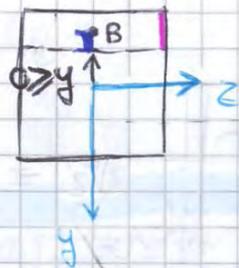
Esercizio (13)  
 SEZIONE sottoposta a TAGLIO nella DIREZIONE del LATO MAGGIORE



$b = 30 \text{ mm}$   
 $h = 60 \text{ mm}$   
 $T_y = 1,5 \cdot 10^4 \text{ N}$   
 $\gamma$  in  $\begin{cases} G(0,0) \\ B(0,10) \\ P(0,30) \end{cases}$  ?

$$\tau_{xy}(y) = \frac{T_y S_z(y)}{I_{z_{TOT}} b(y)}$$

$I_{z_{TOT}} = \frac{bh^3}{12} = 540\,000 \text{ mm}^4$



$\left\{ -\frac{h}{2} - y \right\}$  e  $\left\{ \left(-\frac{h}{2} - y\right) \frac{1}{2} \right\}$

$b(y) = b = 30 \text{ mm}$

Ma ci è richiesta la coordinata di B  $\Rightarrow$   
 $y_B = y + \left(-\frac{h}{2} - y\right) \frac{1}{2}$

$S_z(y) : -\frac{h}{2} \leq y \leq \frac{h}{2}$   
 coordinate

$S_z = y_B A = \left\{ \left(-\frac{h}{2} - y\right) \frac{1}{2} + y \right\} b \left(-\frac{h}{2} - y\right)$   
 Aumento Parabolico

$S_z\left(-\frac{h}{2}\right) = \left[ \left(-\frac{h}{2} + \frac{h}{2}\right) \frac{1}{2} - \frac{h}{2} \right] \left[ b \left(-\frac{h}{2} + \frac{h}{2}\right) \right] = 0$

$S_z\left(\frac{h}{2}\right) = \left[ -\frac{h}{2} + \frac{h}{2} \right] \left[ b \left(-\frac{h}{2} - \frac{h}{2}\right) \right] = 0$

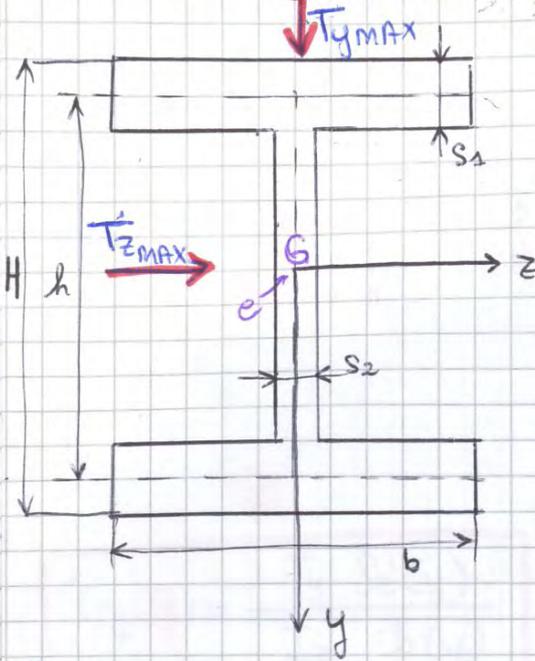
$\gamma =$  perché non posso scrivere con qualche diverso che con l'aria

$\tau_{xy}^G(y=0) = \frac{15000}{540000 \cdot 30} \left[ -\frac{30}{2} \cdot 30(-30) \right] = \frac{15}{540} \cdot \frac{13500}{30} = 12,5 \text{ MPa}$

$\tau_{xy}^A(y=10) = \frac{15000}{540000 \cdot 30} \left[ \left(-\frac{30-10}{2} + 10\right) (30(-30-10)) \right] = \frac{15}{16200} \cdot (-10) \cdot 30 \cdot (-40) = 11,11 \text{ MPa}$

$\tau_{xy}^P(y=30) = \frac{1,5 \cdot 10^4 \text{ N}}{540\,000 \text{ mm}^2} \cdot \frac{1 \text{ mm}^2}{30 \text{ mm}} \left[ \left(-\frac{30-30}{2} + 30\right) (30(-30-30)) \right] = \frac{15000}{540000 \cdot 30} \cdot 0 = 0 \text{ MPa}$

**Esercizio 14** **PROFILO a I in Fe 360** → *utilizzata in Ed. Ed.*



$T_{yMAX}$  e  $T_{zMAX}$  causano  $\tau_{MAX}$   
 $\tau_{MAX} = \tau_{amm} = 80 \text{ MPa}$

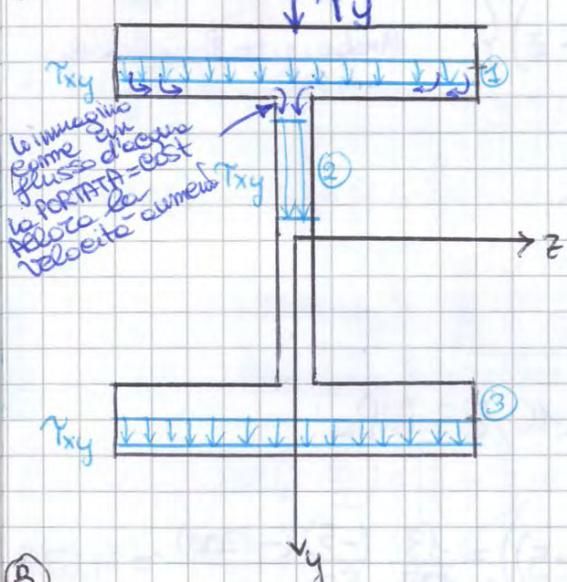
Hp: ogni esatt. di sollecitazione  
 asse separatamente

Determinare i massimi valori  
 sopportabili per i tagli  $T_z$  e  $T_y$   
 $T_{yMAX}$  ?  $T_{zMAX}$  ?

- $b = 64 \text{ mm}$
- $h = 113,7 \text{ mm}$
- $H = h + s_1 = 120 \text{ mm}$
- $s_1 = 6,3 \text{ mm}$
- $s_2 = 4,4 \text{ mm}$

1) Considero  $T_y MAX$ . Vi sono 2 METODI

**A) SEZIONE PIENA**



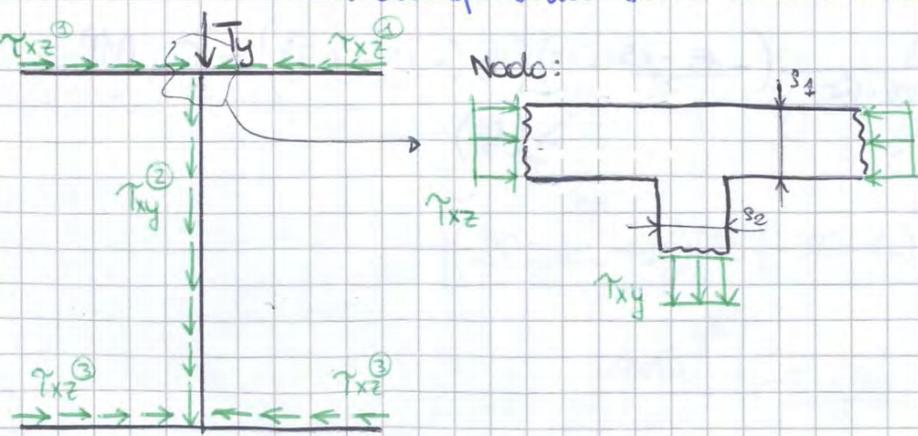
Un taglio che insiste produce delle  $\tau_{cs}$  costanti  
 lungo la corda  $\perp$  a  $T_y$ :

lo immagino  
 come un  
 flusso d'acqua  
 la PORTATA = cost  
 allora la  
 velocità cambia

Queste  $\tau_{xy}$  sono diverse a seconda della zona

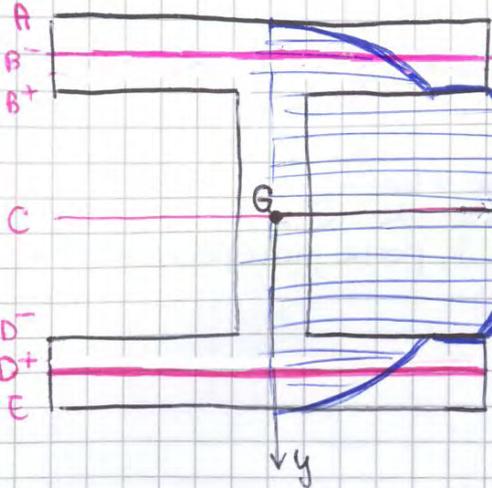
**B) SEZIONE SOTTILE**

Immagino di non tenere conto dell'effetto locale e arrivare  
 in corrispondenza delle discontinuità



$\tau_{cs} \text{ entro} = \tau_{cs} \text{ esce}$

$\tau_{xy}(y)$



per DURASKY

in A :  $\tau_{xy}(y = -\frac{H}{2}) = \frac{T_y \cdot 0}{I_{zTOT} \cdot b} = 0$

in B<sup>-</sup> :  $\tau_{xy}(y = -\frac{H}{2} + s_1) = \frac{T_y \cdot S_{zTOT}^{(A)}}{I_{zTOT} \cdot b} = T_y \cdot a$  (costante)

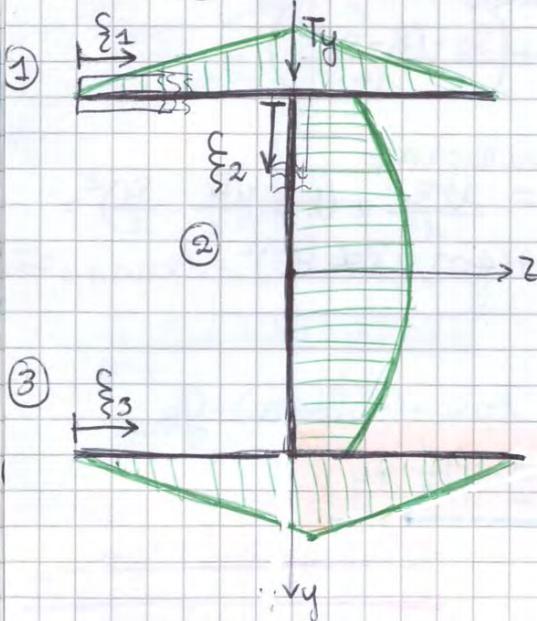
in B<sup>+</sup> :  $\tau_{xy}(y = -\frac{H}{2} + s_1) = \frac{T_y \cdot S_{zTOT}^{(B)}}{I_{zTOT} \cdot b_2} = \frac{T_y \cdot S_{zTOT}^{(A)}}{I_{zTOT} \cdot b_2}$

Per il taglio produce un salto, cioè una discontinuità

in e :  $\tau_{xy}(y = 0) = \frac{T_y \cdot S_{zTOT}^{(e)}}{I_{zTOT} \cdot b_2} = T_y \cdot 0,0037$

Impongo  $\tau_{xy}(0) = \tau_{MAX} = 80 \text{ MPa} \Rightarrow T_y = \frac{80}{0,0037} = 21621,62 \text{ MN} = 21,6 \text{ kN}$

**METODO (B) SEZIONE SOTTILE**



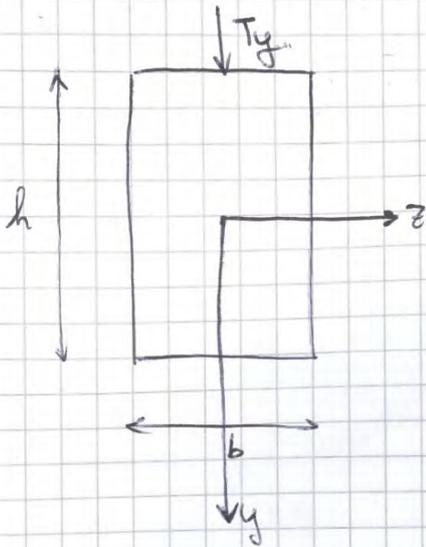
$S_z^{(1)}(\xi_1) = \underbrace{(s_1 \cdot \xi_1)}_{\text{Area}} \cdot \underbrace{(\frac{H}{2} - \frac{s_1}{2})}_{\text{Pothianele omittel}} \Rightarrow \text{produce } \tau_{xz}$

$S_z^{(2)}(\xi_2) = S_z^{(1)}(\xi_1 = \frac{b}{2}) \cdot 2 + (s_2 \cdot \xi_2) (\frac{H}{2} - \frac{\xi_2}{2}) \Rightarrow \text{produce } \tau_{xy}$

$S_z^{(3)}(\xi_3) = S_z^{(1)}(\xi_1) \Rightarrow \text{produce } \tau_{xz}$

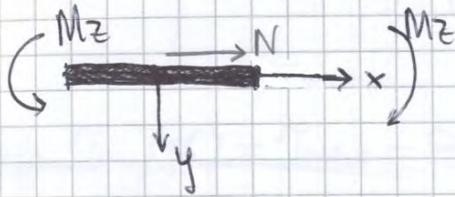
Se i risultati sono molto diversi da quelli ottenuti considerando la sezione piena vuol dire che era sbagliato considerare approssimativa o una sezione sottile

### Esercizio (5)



$h = 160 \text{ mm}$   
 $b = 100 \text{ mm}$   
 $T_y = 6 \cdot 10^5 \text{ N}$   
 $N = 5 \cdot 10^5 \text{ N}$   
 $M_z = 4 \cdot 10^4 \text{ Nm} = 4 \cdot 10^7 \text{ Nmm}$   
 $\sigma_x ? \tau_{xy} ?$  in  $\begin{cases} h/2 \\ h/4 \\ 0 \\ -h/4 \\ -h/2 \end{cases}$

*Menzione sempre all'unità di misura!*



$$\tau_{xy}(y) = \frac{T_y \cdot S_z(y)}{I_{z_{TOT}} \cdot b(y)}$$

$$\bullet I_{z_{TOT}} = \frac{bh^3}{12} = 34133333,3 \text{ mm}^4$$

$$\bullet b(y) = b = 100 \text{ mm}$$

$$\bullet S_z(y) = b \left(-\frac{h}{2} - y\right) \left[\left(-\frac{h}{2} - y\right) \frac{1}{2} + y\right] \quad \text{con } -\frac{h}{2} \leq y \leq \frac{h}{2}$$

$$S_z\left(-\frac{h}{2}\right) = 0 \text{ mm}^3$$

$$S_z\left(\frac{h}{2}\right) = 0 \text{ mm}^3$$

$$\tau_{xy}\left(+\frac{h}{2}\right) = 0 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy}\left(+\frac{h}{4}\right) = \frac{6 \cdot 10^5}{34133333,3 \cdot 100} \cdot 100 \cdot \overbrace{(-20)}^{-20} [-60 + 40] = 42 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy}(0) = \frac{6 \cdot 10^5}{34133333,3 \cdot 100} \cdot 100 \cdot (-80) [-40] = 56,25 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy}\left(-\frac{h}{4}\right) = 42 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy}\left(-\frac{h}{2}\right) = 0 \text{ MPa}$$

Tipo di acciaio	Caratteristiche meccaniche per una sezione di riferimento (vedere appendice B) con un diametro (d) oppure, nel caso di prodotti piani, con uno spessore (t) pari a																							
	d ≤ 16 mm o t ≤ 8 mm					16 mm < d ≤ 40 mm o 8 mm < t ≤ 20 mm					40 mm < d ≤ 100 mm o 20 mm < t ≤ 60 mm					100 mm < d ≤ 160 mm o 60 mm < t ≤ 100 mm					160 mm < d ≤ 250 mm o 100 mm < t ≤ 160 mm			
Designazione alfanumerica	Designazione numerica	R <sub>m</sub> min.	R <sub>m</sub>	A min.	Z min.	KV min.	R <sub>m</sub> min.	R <sub>m</sub>	A min.	Z min.	KV min.	R <sub>m</sub> min.	R <sub>m</sub>	A min.	Z min.	KV min.	R <sub>m</sub> min.	R <sub>m</sub>	A min.	Z min.	KV min.			
		N/mm <sup>2</sup>	%	%	J	J	N/mm <sup>2</sup>	%	%	J	J	N/mm <sup>2</sup>	%	%	J	J	N/mm <sup>2</sup>	%	%	J	J			
C22E C22R	1.1151 1.1149	340	da 500 a 650	20	50	50	290	da 470 a 620	22	50	50	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-			
C25E C25R	1.1158 1.1163	370	da 550 a 700	19	45	45	320	da 500 a 650	21	50	45	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-			
C30E C30R	1.1178 1.1179	400	da 600 a 750	18	40	40	350	da 650 a 750	20	45	40	300 <sup>3)</sup>	da 500 a 650 <sup>3)</sup>	21 <sup>2)</sup>	50 <sup>3)</sup>	40 <sup>3)</sup>	-	-	-	-	-			
C36E C36R	1.1181 1.1180	430	da 630 a 780	17	40	35	380	da 600 a 750	19	45	35	320	da 550 a 700	20	50	35	-	-	-	-	-			
C40E C40R	1.1186 1.1189	450	da 650 a 800	16	35	30	400	da 630 a 780	18	40	30	350	da 600 a 750	19	45	30	-	-	-	-	-			
C45E C45R	1.1191 1.1201	480	da 700 a 850	14	35	25	430	da 650 a 800	16	40	25	370	da 630 a 780	17	45	25	-	-	-	-	-			
C50E C50R	1.1205 1.1241	520	da 750 a 900	13	30	-	460	da 700 a 850	15	35	-	400	da 650 a 800	16	40	-	-	-	-	-	-			
C55E C55R	1.1203 1.1209	550	da 800 a 950	12	30	-	490	da 750 a 900	14	35	-	420	da 700 a 850	15	40	-	-	-	-	-	-			
C60E C60R	1.1221 1.1223	580	da 850 a 1 000	11	25	-	520	da 800 a 950	13	30	-	450	da 750 a 900	14	35	-	-	-	-	-	-			
28Mn6	1.1170	590	da 800 a 950	13	40	35	490	da 700 a 850	15	45	40	440	da 650 a 800	16	50	40	-	-	-	-	-			

1) R<sub>m</sub>: carico unitario di snervamento superiore o, qualora non si manifesti un limite di snervamento marcato, carico unitario di scostamento dalla proporzionalità 0,2% R<sub>0,2</sub>.  
 R<sub>m</sub>: resistenza a trazione.  
 A: allungamento dopo rottura (lunghezza iniziale fra i riferimenti L<sub>g</sub> = 5,65 √S<sub>0</sub>; vedere prospetto 11, colonna 7a, riga 7a).  
 Z: strizione a rottura.  
 KV: resilienza per provetto longitudinale ISO con intaglio a V Charpy (media di 3 valori singoli; nessun valore singolo può essere minore del 70% del valore medio minimo).  
 2) Il fatto che vengano stabiliti dei limiti dimensionali non significa che la bonifica possa aver luogo ad una struttura completamente martensitica fino alla posizione stabilita di profilo della provetta. La profondità di tempera risulta dall'andamento delle curve di tempera ad una estremità (vedere figure da 1 a) a 1 u).  
 3) Vale per diametri fino a 63 mm o per spessori fino a 35 mm.

APPENDICE A - Dati materiali

Tipo di acciaio	Caratteristiche meccaniche per una sezione di riferimento (vedere appendice B) con un diametro (d) oppure, nel caso di prodotti piani, con uno spessore (t) pari a																							
	d ≤ 16 mm o t ≤ 8 mm					16 mm < d ≤ 40 mm o 8 mm < t ≤ 20 mm					40 mm < d ≤ 100 mm o 20 mm < t ≤ 60 mm					100 mm < d ≤ 160 mm o 60 mm < t ≤ 100 mm					160 mm < d ≤ 250 mm o 100 mm < t ≤ 160 mm			
Designazione alfanumerica	Designazione numerica	R <sub>m</sub> min.	R <sub>m</sub>	A min.	Z min.	KV min.	R <sub>m</sub> min.	R <sub>m</sub>	A min.	Z min.	KV min.	R <sub>m</sub> min.	R <sub>m</sub>	A min.	Z min.	KV min.	R <sub>m</sub> min.	R <sub>m</sub>	A min.	Z min.	KV min.			
		N/mm <sup>2</sup>	%	%	J	J	N/mm <sup>2</sup>	%	%	J	J	N/mm <sup>2</sup>	%	%	J	J	N/mm <sup>2</sup>	%	%	J	J			
continua dalla pagina precedente																								
38C2	1.7003	550	da 800 a 950	14	35	35	450	da 700 a 850	15	40	35	400	da 600 a 750	17	45	35	-	-	-	-	-			
46C2	1.7009	650	da 900 a 1 100	12	35	30	550	da 900 a 950	14	40	35	400	da 650 a 800	15	40	35	-	-	-	-	-			
34C4	1.7033	700	da 950 a 1 100	12	35	35	550	da 800 a 950	14	40	40	460	da 700 a 850	15	45	40	-	-	-	-	-			
37C4	1.7034	750	da 950 a 1 150	11	35	30	600	da 850 a 1 000	13	40	35	510	da 750 a 900	14	40	35	-	-	-	-	-			
41C4	1.7035	800	da 1 000 a 1 200	11	30	30	660	da 900 a 1 100	12	35	35	560	da 850 a 950	14	40	35	-	-	-	-	-			
25CMn4	1.7218	700	da 900 a 1 100	12	50	45	600	da 850 a 950	14	55	50	450	da 700 a 850	15	50	400	da 650 a 800	16	50	45	-			
34CMn4	1.7219	800	da 1 000 a 1 200	11	45	35	650	da 900 a 1 100	12	50	40	550	da 800 a 950	14	50	45	300	da 750 a 900	15	55	45	da 700 a 850		
42CMn4	1.7225	900	da 1 100 a 1 300	10	40	30	750	da 1 000 a 1 200	11	45	35	650	da 900 a 1 100	12	50	35	550	da 800 a 950	13	50	35	300	da 750 a 900	

1) R<sub>m</sub>: carico unitario di snervamento superiore o, qualora non si manifesti un limite di snervamento marcato, carico unitario di scostamento dalla proporzionalità 0,2% R<sub>0,2</sub>.  
 R<sub>m</sub>: resistenza a trazione.  
 A: allungamento dopo rottura (lunghezza iniziale fra i riferimenti L<sub>g</sub> = 5,65 √S<sub>0</sub>; vedere prospetto 11, colonna 7a, riga 7a).  
 Z: strizione a rottura.  
 KV: resilienza per provetto longitudinale ISO con intaglio a V Charpy (media di 3 valori singoli; nessun valore singolo può essere minore del 70% del valore medio minimo).  
 2) Il fatto che vengano stabiliti dei limiti dimensionali non significa che la bonifica possa aver luogo ad una struttura completamente martensitica fino alla posizione stabilita di profilo della provetta. La profondità di tempera risulta dall'andamento delle curve di tempera ad una estremità (vedere figure da 1 a) a 1 u).  
 3) Vale per diametri fino a 63 mm o per spessori fino a 35 mm.

segue nella pagina successiva

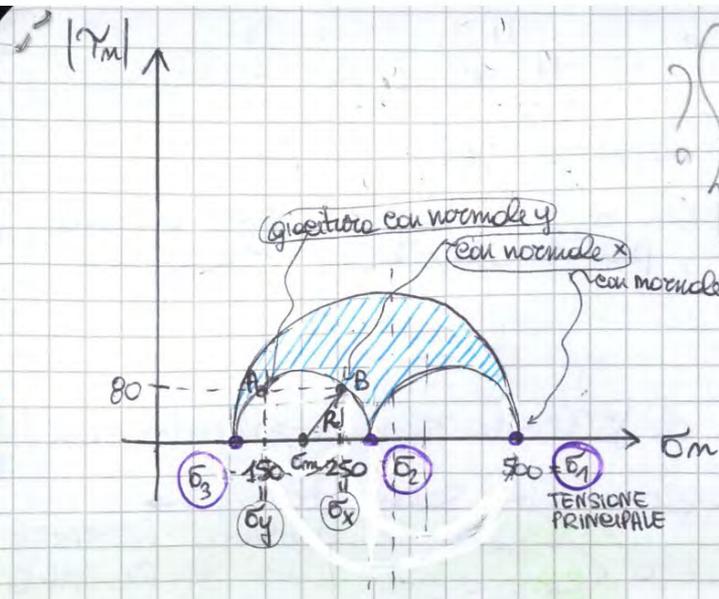
Tipo di acciaio	Caratteristiche meccaniche per una sezione di riferimento (vedere appendice B) con un diametro (d) oppure, nel caso di prodotti piani, con uno spessore (t) pari a																							
	d ≤ 16 mm o t ≤ 8 mm					16 mm < d ≤ 40 mm o 8 mm < t ≤ 20 mm					40 mm < d ≤ 100 mm o 20 mm < t ≤ 60 mm					100 mm < d ≤ 160 mm o 60 mm < t ≤ 100 mm					160 mm < d ≤ 250 mm o 100 mm < t ≤ 160 mm			
Designazione alfanumerica	Designazione numerica	R <sub>m</sub> min.	R <sub>m</sub>	A min.	Z min.	KV min.	R <sub>m</sub> min.	R <sub>m</sub>	A min.	Z min.	KV min.	R <sub>m</sub> min.	R <sub>m</sub>	A min.	Z min.	KV min.	R <sub>m</sub> min.	R <sub>m</sub>	A min.	Z min.	KV min.			
		N/mm <sup>2</sup>	%	%	J	J	N/mm <sup>2</sup>	%	%	J	J	N/mm <sup>2</sup>	%	%	J	J	N/mm <sup>2</sup>	%	%	J	J			
continua da la pagina precedente																								
52CMn4	1.7228	950	da 1 100 a 1 300	9	45	30 <sup>3)</sup>	780	da 1 050 a 1 200	10	45	30 <sup>3)</sup>	700	da 900 a 1 100	12	50	30 <sup>3)</sup>	650	da 850 a 1 000	13	50	30 <sup>3)</sup>	550	da 800 a 950	
30CMn4	1.8511	950	da 1 100 a 1 300	10	45	35	800	da 1 000 a 1 200	11	50	40	700	da 900 a 1 100	12	55	45	800	da 800 a 950	13	60	45	550	da 750 a 900	
34CMn4b	1.8582	1 000	da 1 200 a 1 400	9	40	35	900	da 1 100 a 1 300	10	45	45	800	da 1 000 a 1 200	11	50	45	700	da 900 a 1 100	12	55	45	600	da 800 a 950	
30CMn4b	1.8580	1 050	da 1 250 a 1 450	9	40	30	1 050	da 1 250 a 1 450	9	40	30	900	da 1 100 a 1 300	10	45	35	800	da 1 000 a 1 200	11	50	45	700	da 900 a 1 100	
38NC4b16	1.8773	1 050	da 1 250 a 1 450	9	40	30	1 050	da 1 250 a 1 450	9	40	30	900	da 1 100 a 1 300	10	45	35	800	da 1 000 a 1 200	11	50	45	700	da 900 a 1 100	
51CMn4	1.8159	900	da 1 100 a 1 300	9	40	30 <sup>3)</sup>	800	da 1 000 a 1 200	10	45	30 <sup>3)</sup>	700	da 900 a 1 100	12	50	30 <sup>3)</sup>	600	da 850 a 1 000	13	50	30 <sup>3)</sup>	500	da 800 a 950	

1) R<sub>m</sub>: carico unitario di snervamento superiore o, qualora non si manifesti un limite di snervamento marcato, carico unitario di scostamento dalla proporzionalità 0,2% R<sub>0,2</sub>.  
 R<sub>m</sub>: resistenza a trazione.  
 A: allungamento dopo rottura (lunghezza iniziale fra i riferimenti L<sub>g</sub> = 5,65 √S<sub>0</sub>; vedere prospetto 11, colonna 7a, riga 7a).  
 Z: strizione a rottura.  
 KV: resilienza per provetto longitudinale ISO con intaglio a V Charpy (media di 3 valori singoli; nessun valore singolo può essere minore del 70% del valore medio minimo).  
 2) Il fatto che vengano stabiliti dei limiti dimensionali non significa che la bonifica possa aver luogo ad una struttura completamente martensitica fino alla posizione stabilita di profilo della provetta. La profondità di tempera risulta dall'andamento delle curve di tempera ad una estremità (vedere figure da 1 a) a 1 u).  
 3) Valori provvisori.

Prospetto 1 - Caratteristiche meccaniche della ghisa malleabile a cuore bianco

Qualità	Diametro della provetta * R <sub>m</sub> mm	Prova di trazione				Durezza HB max.
		Carico unitario di rottura N/mm <sup>2</sup> ** min.	Carico unitario di scostamento dalla proporzionalità allo 0,2% N/mm <sup>2</sup> ** min.	Allungamento (l <sub>5</sub> = 3 d) % min.		
W 35-04	9	340	—	5	230	
	12	350	—	4		
	15	360	—	3		
W 38-12 *	9	320	170	15	200	
	12	380	200	12		
	15	400	210	8		
W 40-05	9	360	200	8	220	
	12	400	220	5		
	15	420	230	4		
W 45-07	9	400	230	10	220	
	12	450	260	7		
	15	480	280	4		

\* Per la ghisa malleabile a cuore bianco, il diametro della provetta deve corrispondere il più possibile allo spessore dei pezzi. Il diametro della provetta deve essere concordato fra committente e fornitore.  
 \*\* 1 N/mm<sup>2</sup> = 1 MPa.  
 • Tutte le qualità di ghisa malleabile a cuore bianco possono essere saldate purché i processi impiegati siano corretti.  
 La qualità W 38-12 è preferibile per gli assemblaggi dove è particolarmente richiesta la resistenza, senza



Ruotando il cubetto attorno alla direzione principale (in questo caso z) troveremo un punto in cui  $\tau = 0$

Analicamente vuol dire che i 2 punti di giacitura che non sono interessati dalla direzione principale appartengono a una circonferenza con diametro poggato sulle  $\sigma_m$

⇒ Ho trovato le altre tensioni principali ⇒ Posso chiudere i cerchi

Ruotando il cubetto attorno a direzioni non principali le coppie appartengono all'arco

## 2. DETERMINARE LE TENSIONI PRINCIPALI

Noti A e B simmetrici calcolo R e quindi le tensioni principali

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 200 \text{ MPa}$$

$$\sigma_x - \sigma_m = 50 \text{ MPa}$$

$$R = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_m)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{50^2 + 80^2} = 94,3 \text{ MPa}$$

$$\Rightarrow \sigma_2 = \sigma_m + R = 294,3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = \sigma_m - R = 105,7 \text{ MPa}$$

## 3. Per un MATERIALE DUTTILE calcolare la TENSIONE MINIMA di SNERVAMENTO che GARANTISCE un COEFFICIENTE di SICUREZZA pari a 2.

Per MATERIALE DUTTILE

$$\sigma_s = \frac{R_{eH} \cdot \tau_{VM}}{\sigma_{ideale} \cdot \tau_{VM}} \quad (1)$$

? lo stato di tensione rappresentato lo stato di sollecitazione

possiamo calcolare

secondo Tresca o Von Mises

TRESCA

VON MISES

$$\sigma_{ideale}^T = \text{MAX}(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|)$$

cioè il diametro più grande tra i cerchi di Mohr

$$\sigma_{ideale}^{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

È il più cautelativo / conservativo ⇒ il più sicuro!

oss:  $\sigma^T \geq 0$

Nel nostro caso:

$$\sigma_{ideale}^T = \text{MAX}(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|) = 394,3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{ideale}^{VM} = 341,5 \text{ MPa}$$

2. Valutare i coefficienti di sicurezza secondo le Hp di rottura appropriate

Per Tresca:  $\sigma_{id}^T = \text{MAX}(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|)$

in (A)  $\sigma_{id}^T = 180$

in (B)  $\sigma_{id}^T = +34$

"FON"  
Per Von Mises:  $\sigma_{id}^{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$

in (A)  $\sigma_{id}^{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{180^2 + 180^2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \sqrt{180^2} = 180$

in (B)  $\sigma_{id}^{VM} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \sqrt{34^2} = 34$

Nel caso di tensione monoassiale i risultati di T e VM coincidono

Per calcolare CS considero il caso maggiormente sollecitato

$$CS^{T,VM} = \frac{R_{P02}}{\sigma_{id}^{T,VM} \text{ maggiore tra i due estremi}}$$

In questo caso (A)  $\Rightarrow$

$$CS^T = CS^{VM} = \frac{R_{P02}}{\sigma_{id}^{T,VM}} = \frac{355}{180} = 1,97 \approx 2$$

## Esercizio 4

Calcolare il Massimo Momento Torcente applicabile con  
 $\epsilon_s = 1,5$  da una barra circolare piena ( $d = 40 \text{ mm}$ )

Materiali duttile,

Tensione di snervamento dalla proporzionalità  $R_{p0,2} = 190 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

$$\epsilon_s = \frac{R_{p0,2}}{\sigma_{ideale}^{T,VM}} \Rightarrow \sigma_{ideale}^{T,VM} = \frac{R_{p0,2}}{\epsilon_s} = 126,6$$

do x Tresca?

$$\sigma_f^{\text{MAX}} = \frac{M_f}{W_f} = \frac{M_f}{\frac{\pi d^3}{32}} \Rightarrow M_f = \sigma_f \frac{\pi d^3}{32} = 795462,48 \text{ Nmm} = 795 \text{ Nm}$$

Per Von Mises?

**Esercizio 6 ALBERO a SEZIONE CIRCOLARE in ACCIAIO sollecitato a T e M**

$d = 35 \text{ mm}$       $r = 17,5 \text{ mm}$

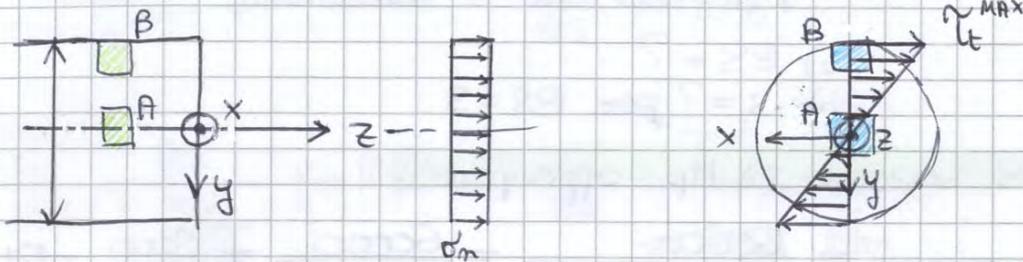
$R_{p02} = 800 \text{ MPa}$

$N = 120 \text{ kN}$

$M_t = 1600 \text{ Nm}$



1. Tracciare l'andamento delle tensioni sulla sezione



$$\bar{\sigma}_m = \frac{N}{A} = \frac{120000 \text{ N}}{\pi \cdot 306,25 \text{ mm}^2} = 124,8 \text{ MPa} = \sigma_z$$

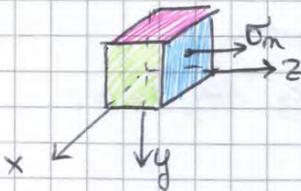
$$\gamma_t^{\text{MAX}} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{M_t}{\frac{\pi D^3}{16}} = \frac{M_t}{0,2 D^3} = \frac{1600000 \text{ Nm}}{0,2 \cdot 42875 \text{ mm}^3} = \frac{1600000}{8575} = 186,6 \text{ MPa}$$

2. Disegnare i Cerchi di Mohr relativi al centro e al bordo esterno della sez.

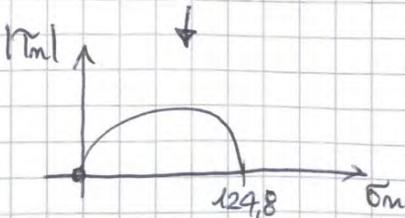
Come sono caricati i cornei?

\* OSS1:  
Non dimenticare!  
OSS2:  
Non si cancellano!

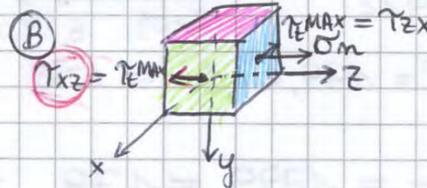
(A)



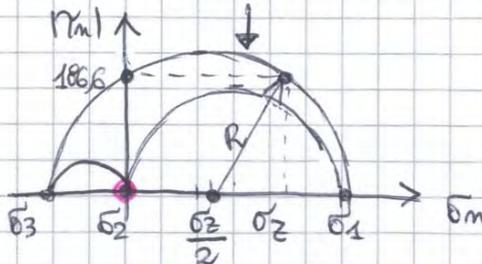
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 124,8 \end{bmatrix}$$



(B)



$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -186,6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -186,6 & 0 & 124,8 \end{bmatrix}$$



Su faccia  $\gamma = 0 \Rightarrow y$  è una direzione principale e vi è  $\sigma_z$  tensione principale

Trovo  $\bar{\sigma}_1$  e  $\bar{\sigma}_2$  tracciando la  $\ell$  passante per  $(0, 186,6)$  e  $(124,8, 186,6)$  con diametro perpendicolare su  $\bar{\sigma}_m$

$\Rightarrow \bar{\sigma}_1$  e  $\bar{\sigma}_2$  saranno le intersezioni di  $\ell$  e  $\bar{\sigma}_m$

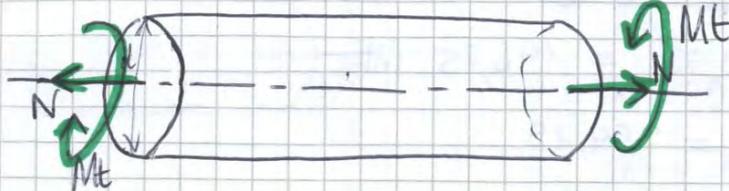
**Esercizio 7** Barra in ghisa a sezione circolare piena sollecitata da  $M_t$  e  $N$

$R_m = 240 \text{ MPa}$

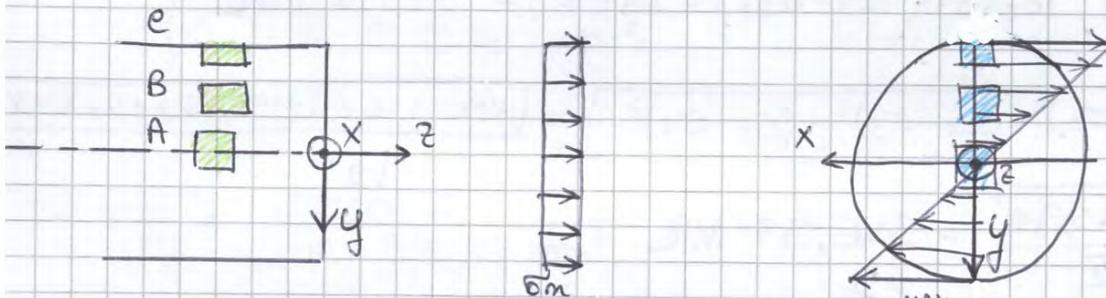
$d = 35 \text{ mm}$

$M_t = 500 \text{ Nm}$

$N = 100 \text{ kN}$

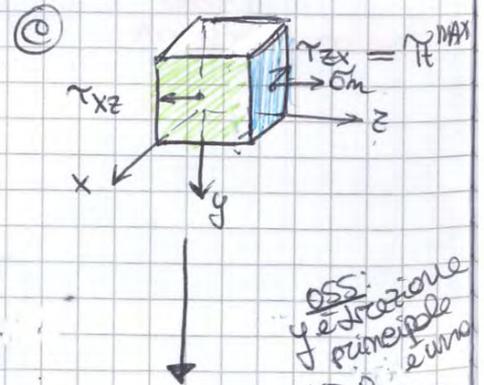
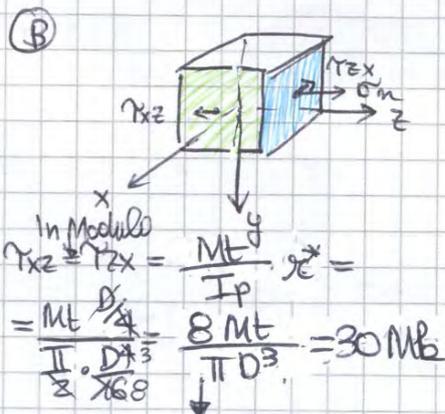
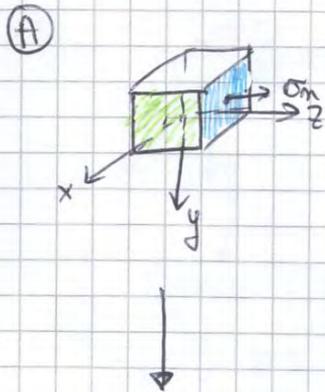


1. Tracciare i cerchi di Mohr relativi al centro ( $r=0$ ) della sezione  
alla sezione intermedia ( $r = \frac{d}{4}$ )  
al bordo esterno ( $r = \frac{d}{2}$ )



$$\sigma_m = \frac{N}{A} = \frac{N}{\pi r^2} = \frac{100\,000}{\pi \cdot (17,5)^2} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 104 \text{ MPa}$$

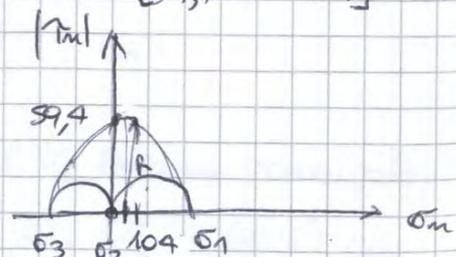
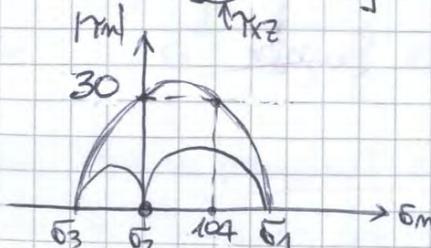
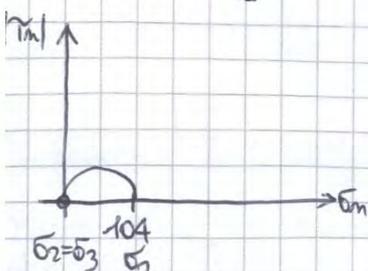
$$\tau_t^{\text{MAX}} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{M_t \cdot 16}{\pi D^3} = \frac{500 \cdot 000 \cdot 16}{\pi (35)^3} \frac{\text{Nmm}}{\text{mm}^3} = 59,4 \text{ MPa}$$



$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 104 \end{bmatrix}$$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -30 \\ 0 & 0 & 0 \\ 30 & 0 & 104 \end{bmatrix}$$

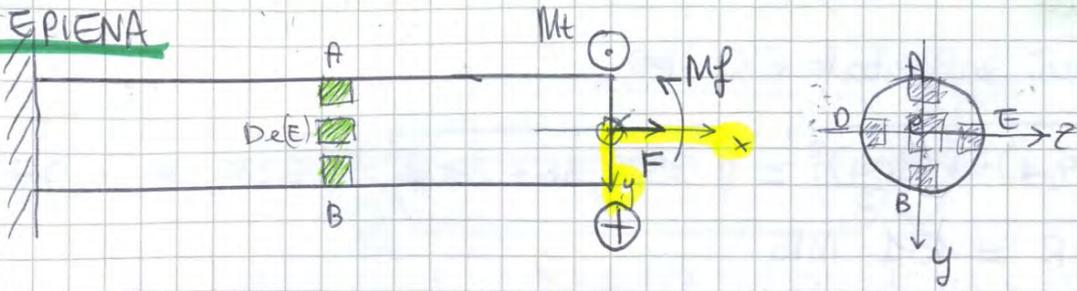
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -59,4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 59,4 & 0 & 104 \end{bmatrix}$$



OSS:  $\tau_{xy} = \tau_t^{\text{MAX}}$   
 y direzione principale  
 $\Rightarrow 0$  tensione principale

# Esercizio (8) Albero a Sezione Circolare sollecitato da $M_f$ , $M_t$ e $N$

## SEZIONE PIENA

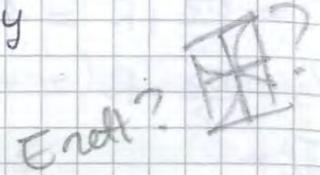


$D = 40 \text{ mm}$      $R = 20 \text{ mm}$

$M_f = 500 \text{ Nm} = 500\,000 \text{ Nmm}$

$M_t = 600 \text{ Nm} = 600\,000 \text{ Nmm}$

$N = 3 \cdot 10^4 \text{ N}$



1. Tracciare i cerchi di Mohr e determinare le tensioni principali nei punti A, B, C, D, E

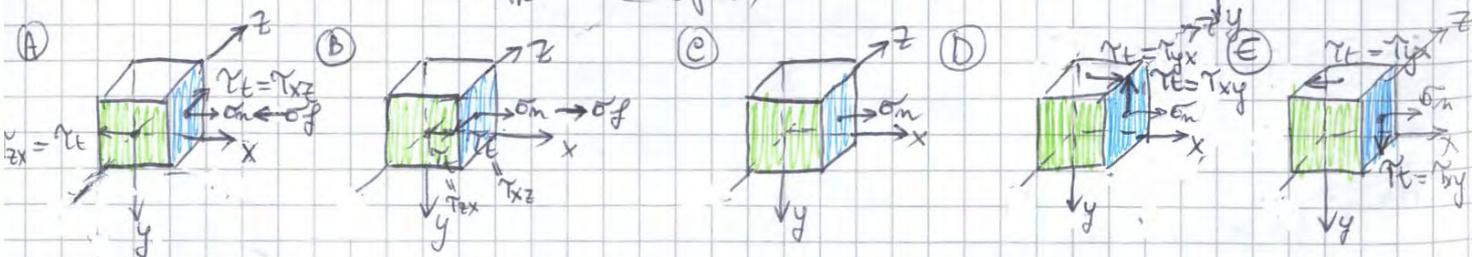
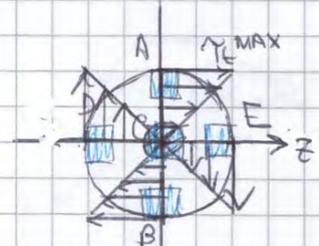
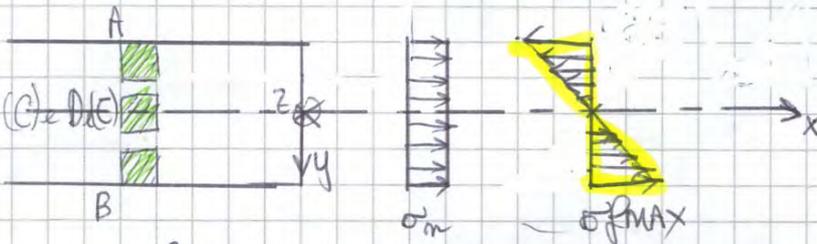
$\sigma_m = \frac{N}{A} = \frac{N}{\pi r^2} = \frac{30\,000}{\pi (20)^2} = 23,88 \approx 24 \text{ MPa}$

$\sigma_f^{\text{MAX}} = \frac{M_f}{W_f} = \frac{M_f \cdot 32}{\pi D^3} = \frac{500\,000 \cdot 32}{\pi (40)^3} \approx 79,6 \text{ MPa}$

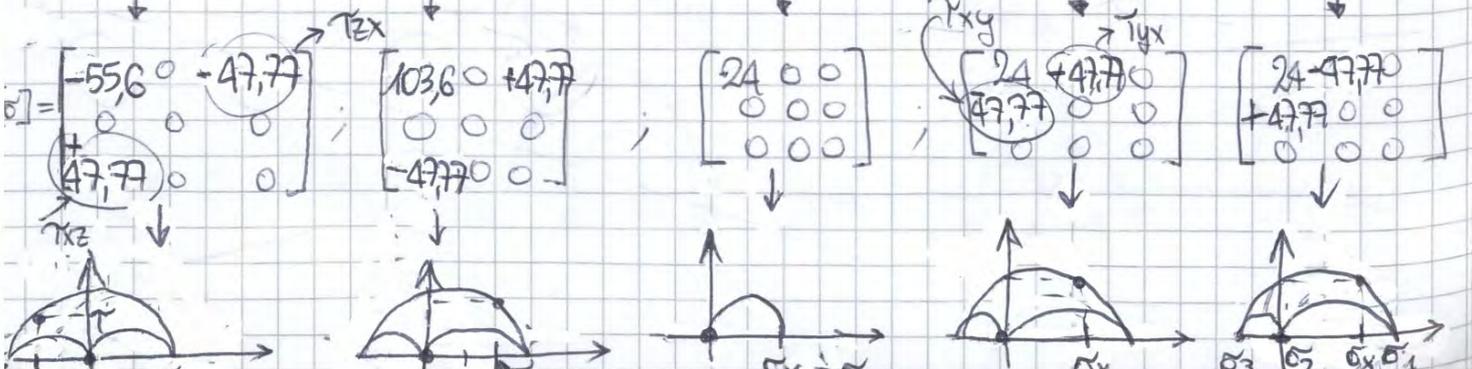
$\tau_t^{\text{MAX}} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{M_t \cdot 16}{\pi D^3} = \frac{600\,000 \cdot 16}{\pi (40)^3} \approx 47,77 \text{ MPa}$

Nota che

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

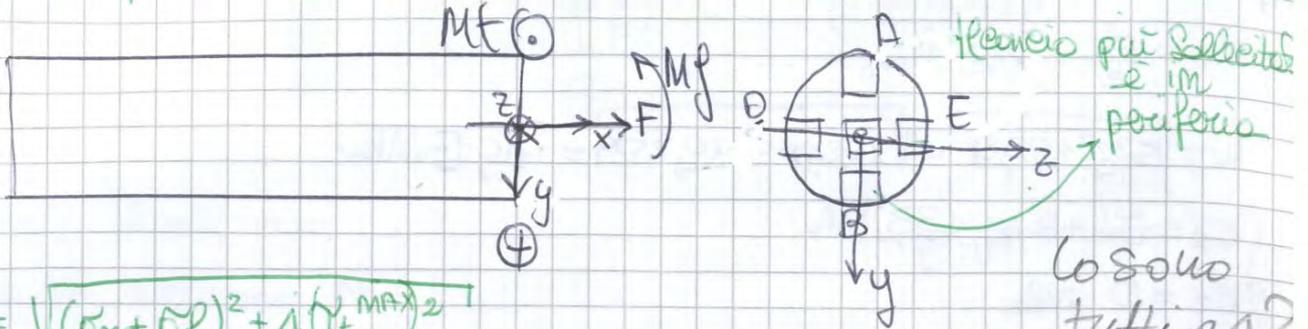


$\sigma_x = \sigma_m - \sigma_f^{\text{MAX}} = -55,6 \text{ MPa}$      $\sigma_x = +103,6 \text{ MPa}$



2. Calcolare, usando le ipotesi di rottura appropriate, il minimo carico unitario di snervamento che garantisce  $CS = 2,5$   
 ↳ cioè  $R_{EH}$ !

TRAVE sottoposta a FLESSO-TORSIONE (ALBERO)



$$\sigma_{id}^T = \sqrt{(\sigma_m + \sigma_f)^2 + 4(\tau_{t, MAX})^2}$$

$$\sigma_{id}^{VM} = \sqrt{(\sigma_m + \sigma_f)^2 + 3(\tau_{t, MAX})^2}$$

Allora  $\sigma_{id}^T = \sqrt{(103,6)^2 + 4(47,77)^2} = \sqrt{10732,96 + 9127,8916} \approx 141 \text{ MPa}$

$$\sigma_{id}^{VM} = \sqrt{(103,6)^2 + 3(47,77)^2} \approx 132,6 \text{ MPa}$$

$$CS = \frac{R_{EH}}{\sigma_{ideale}} \Rightarrow R_{EH} = CS \cdot \sigma_{ideale}$$

$\downarrow$   
2,5

$$R_{EH}^T = 352,5 \text{ MPa}$$

$$R_{EH}^{VM} = 331,6 \text{ MPa}$$

Il minimo carico unitario di snervamento che garantisce  $CS = 2,5$  e

$$R_{EH} \geq 352 \text{ MPa} \text{ secondo Tresca}$$

$$R_{EH} \geq 331,6 \text{ MPa} \text{ " von Mises}$$

↑ perché?

Lo sono tutti e 4?  
Oppure A o B?  
Come lo determino?  
Forse B perché  $\sigma_m + \sigma_f >$  rispetto a ("") in A!

SEZIONE CAVA

$$D = 40 \text{ mm} \quad R = 20 \text{ mm}$$

$$d = 30 \text{ mm} \quad r = 15 \text{ mm}$$

$$\sigma_m = \frac{N}{A_{piena} - A_{vuota}} = \frac{N}{\pi(R^2) - \pi(r^2)} = \frac{30000}{1256 - 706,5} = \frac{30000}{549,5} \approx 54,6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_f^{MAX} = \frac{M_z R}{I_{zP} - I_{zV}} = \frac{M_z R}{\frac{\pi}{4}(R^4 - r^4)} = \frac{4 M_z R}{\pi(R^4 - r^4)} = \frac{40000000}{\pi(160000 - 30625)} = \frac{40000000}{343437,5}$$

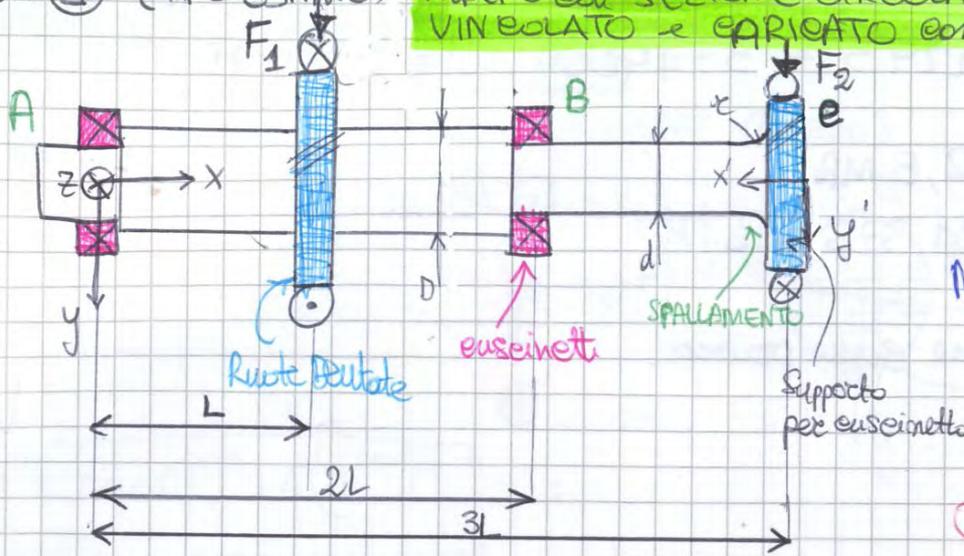
$$\approx 116,47 \text{ MPa}$$

$$\gamma_{CAVA}^{MAX} = \frac{M_t R}{I_P^{PIENA} - I_P^{VUOTA}} = \frac{M_t R}{\frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)} = \frac{12000000}{171718,75} \approx 70 \text{ MPa}$$

1. ... Come prima cambiando i valori

Esercizio 9 (TIPO ESAME)

ALBERO con SEZIONE CIRCOLARE PIENA VINCOLATO e CARICATO come in FIGURA



- $r = 2,5 \text{ mm}$
- $F_1 = 500 \text{ N}$
- $F_2 = 1000 \text{ N}$
- $M_t = e = 600 \text{ Nm}$
- $l = 0,5 \text{ m}$
- $D = 30 \text{ mm}$
- $d = 25 \text{ mm}$

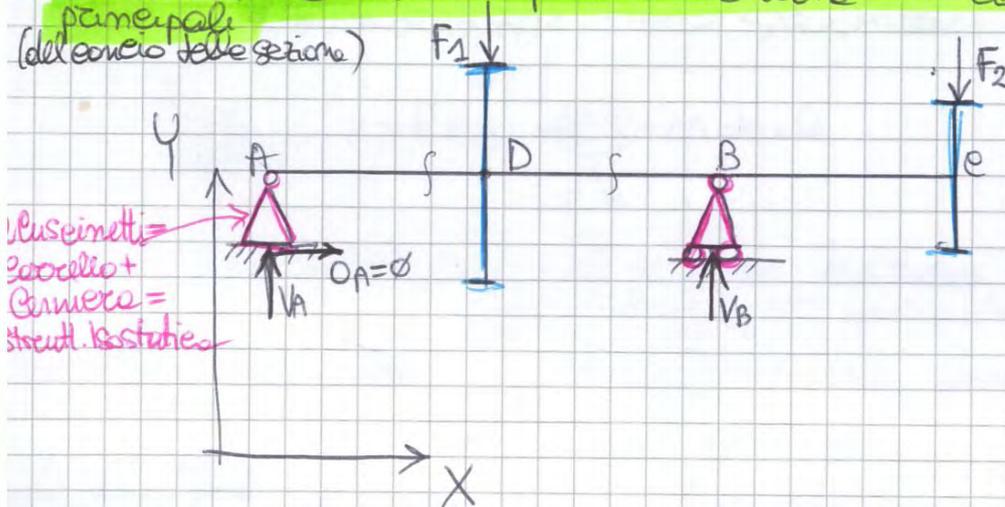
$R_{p0,2} = 800 \text{ MPa}$

Da Tabella per  $16 \leq d \leq 40 \text{ mm}$

MATERIALE DUTTILE

ACCIAIO 36 NiCrMo4 - bonificato -

1. Individuare le sezioni più sollecitate e calcolate le tensioni principali (del conico delle sezioni)



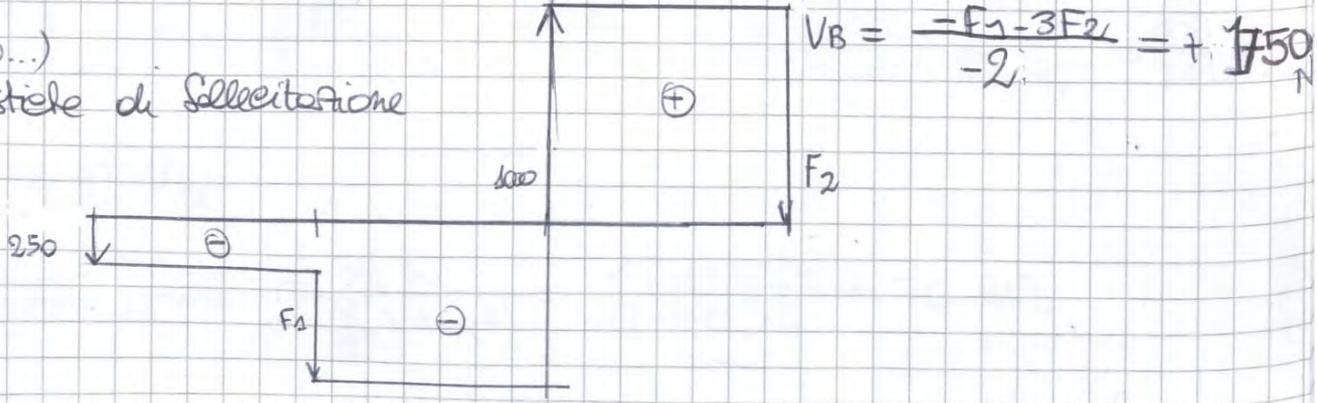
Eq. di equilibrio

$$\begin{cases} V_A - F_1 - F_2 + V_B = 0 \Rightarrow V_A = F_1 + F_2 - V_B = -250 \text{ N} \\ O_A = 0 \\ -V_A 3L + F_1 2L - V_B L = 0 \Rightarrow V_B = 2F_1 - F_1 - 3F_2 + 3V_B \end{cases}$$

(Tagliando...)

Caratteristiche di sollecitazione

(T)



①  $M(x) = V_A \cdot x \quad \begin{cases} M(0) = 0 \text{ Nm} \\ M(L) = 125 \text{ Nm} \end{cases}$

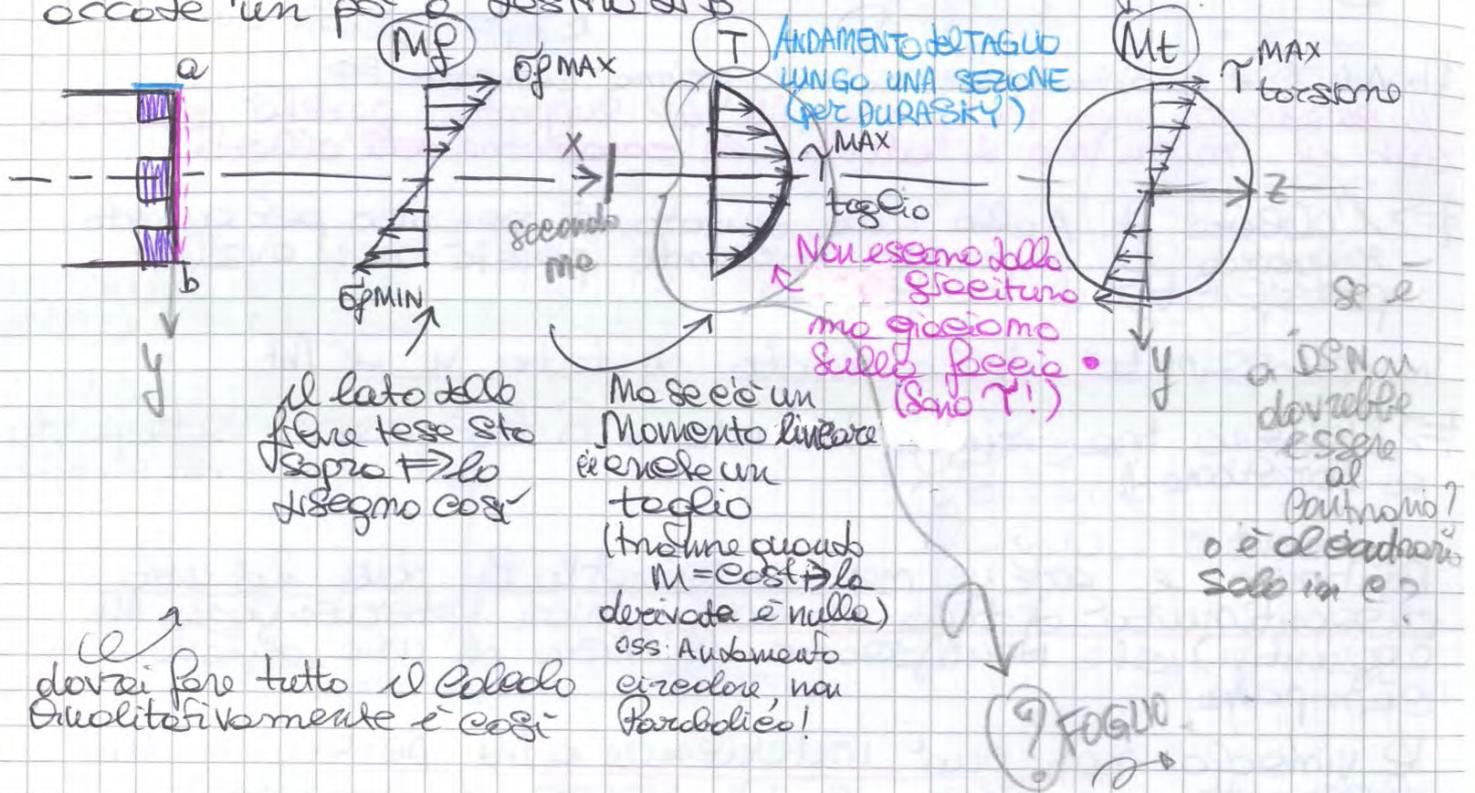
②  $M(x) = V_A(x) - F_1(x-L) \quad \begin{cases} M(L) = 125 \text{ Nm} \\ M(3L) = -250 + 250 - 500 \end{cases}$

③  $M(x') = F_2 \cdot x' \quad \begin{cases} M(0) = 0 \\ M(e) = 500 \end{cases}$

Quale conio è maggiormente sollecitato? cioè la porzione di materiale  $\Delta$  infinitesimamente maggiormente sollecitato?

Vedo che tensioni nascono da quei carichi, poi le metto insieme con il criterio di rottura e calcolo il valore di tensione reale o equivalente

Vado a prendere la SEZIONE di ALBERO in B e guardo cosa accade un po' a destra di B



Quale è il conio maggiormente sollecitato?

In periferia

Ma c'è differenza tra gli estremi a e b?

No perché, essendo all'interno del criterio di rottura tutto al quadrato, i segni si perdono

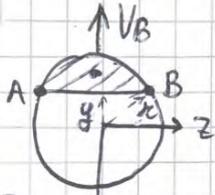
Combinabile se ci fosse anche una trazione perché le  $\sigma$  di trazione si sommerebbero ad a e si sottrarrebbero a b  $\Rightarrow$  sceglierei quello di sopra

Se ci fosse compressione sceglierei b (in valore assoluto!)

Potrei dire che lo stato di sollecitazione MAX potrebbe essere anche al centro. In realtà non esisto mai

In teoria bisognerebbe calcolare il delle sollecitazioni torsioni sia al

# TAGLIO di SEZIONE CIRCOLARE



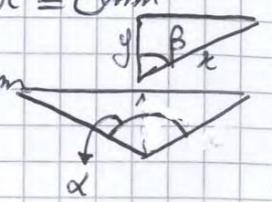
$$\tau_{xy}(y) = \frac{T_y S_z(y)}{I_{zTOT} b(y)} \Rightarrow \left[ \frac{N}{mm^2} \right] = \left[ \frac{N}{mm^2} \right] = [MPa]$$

o V\_B?

T<sub>y</sub> = V<sub>B</sub> a destra = 1000 N

I<sub>zTOT</sub> =  $\frac{\pi}{4} r^4 = 19165,04 \text{ mm}^4$

b(y) = corda(y) =  $2\sqrt{r^2 - y^2}$  → b(0) = 2r = d = 25mm



S<sub>z</sub>(y): -r ≤ y ≤ r

*Giusto?*  
 $S_z = y_B A_{\text{segmento circolare}} = \left( -\frac{r-y}{2} + y \right) \left( \frac{r^2}{2} \left[ \frac{\pi \alpha}{180} - \sin \alpha \right] \right) =$   
 $= \left( -\frac{r-y}{2} + y \right) \left( \frac{r^2}{2} \left[ \frac{\pi 2\beta}{180} - \sin(2\beta) \right] \right) =$   
 $= \left( -\frac{r-y}{2} + y \right) \left( \frac{r^2}{2} \left[ \frac{\pi 2 \arccos\left(\frac{y}{r}\right)}{180} - \sin\left(2 \arccos\left(\frac{y}{r}\right)\right) \right] \right)$

S<sub>z</sub>(-r) =  $\left( -\frac{r+r}{2} - r \right) \left( \frac{r^2}{2} \left[ \frac{\pi 2 \cdot 180}{180} - \sin(2 \cdot 180) \right] \right) =$   
 $= -r (r^2 \pi) = -r^3 \pi = -6132,8 \text{ mm}^3 ?$

S<sub>z</sub>(0) =  $\left( -\frac{r}{2} \right) \left( \frac{r^2}{2} \left[ \frac{\pi 2 \cdot 90}{180} - \sin(2 \cdot 90) \right] \right) = -\frac{r^3}{4} \pi = -1533,20 \text{ mm}^3 ?$

S<sub>z</sub>(r) =  $\left( -\frac{2r}{2} + r \right) (\dots) = 0 \text{ mm}^3$

$\tau_{xy}(y=-r) = \frac{1000 \cdot (-6132,8)}{19165,04 \cdot 0} ?$

$\tau_{xy}(y=0) = \frac{1000 \cdot (-1533,20)}{19165,04 \cdot 25} = 63,2$

$\tau_{xy}(y=r) = \frac{1000 \cdot 0}{19165,04 \cdot 0} = 0 \text{ MPa} ?$

*γ piccola*  
 come immaginavamo flessione e torsione pesano di più e r=0 non è lo stato di sollecitazione MAX!

3. Calcolare la MAX coppia di torsione trasmissibile dall'albero con  $\sigma_{VM} = 1,5$

Mt ? con  $\sigma_{VM} = 1,5$

$$\Rightarrow \sigma_{VM} = \frac{R \rho_{oz}}{\sigma_{VM}} = 533,3 \quad (1)$$

$$[\sigma]^A = \begin{bmatrix} 326 & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma = \frac{Mt}{\frac{\pi d^3}{16}} = \frac{16 Mt}{\pi d^3} \Rightarrow Mt = \frac{\gamma \pi d^3}{16} \quad (3)$$

*può notare che approssimando a 0,2 il risultato viene molto diverso!*

$$R = \sqrt{163^2 + \tau^2} \Rightarrow R^2 = 26569 + \tau^2 \Rightarrow \tau = \sqrt{R^2 - 26569} \quad (2)$$

da (1)  $533,3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 + (2\tau)^2}$

$$(533,3)^2 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(163+R)^2 + (163-R)^2 + 4R^2} \right)^2$$

$$2 \cdot 284444,0889 = 2 \cdot 26569 + 2R^2 + 326R - 326R + 4R^2$$

$$\frac{568888,1778 - 53138}{6} = R^2$$

$$\Rightarrow R^2 = 85958,36297$$

da (2)  $\tau = 243,699329$

da (3)  $Mt = 747281,1456 \text{ Nmm} \approx 747 \text{ Nm}$

Tutto questo è dovuto al fatto che il MAT. FRAGILE si scontra quando anche una singola porzione di tutto il materiale raggiunge il valore di  $R_m$  (a differenza del MAT. DUTTILE)

Abbiamo considerato l'intensificazione locale causata da  $K$  e confrontare questo punto locale con il valore di rottura

I MAT. DUTTILI si considerano rotti ( $\epsilon_s \leq 1$ ) quando si viene a creare lungo la sezione una "CERNIERA PLASTICA" <sup>di snervamento</sup> cioè tutta la sezione dei raggi più piccoli fino alla periferia, ha raggiunto il valore limite che non è  $R_m$  ma  $R_{p0.2}$  o  $R_{eH}$

Il MAT. DUTTILE riesce a lavorare di più perché se la zona plastica di snervamento è locale, tutto il resto della sezione è elastica. Si rompe solo quando tutti i punti raggiungono  $R_{p0.2}$

Da Tabella cerco  $K_t$ , scelgo l'ALBERO con SPALLAMENTO

$$\frac{r}{d} = \frac{2,5}{25} = 0,1$$

$$r = \frac{30-25}{2} = 2,5$$

$$\frac{D}{d} = \frac{30}{25} = \frac{6}{5} = 1,2$$

Nel mio caso ho  $M_f$  ed  $M_t$  (due grafici)

Nel caso di flessione  $K_t^f = 1,6$

" " " torsione  $K_t^t = 1,33$

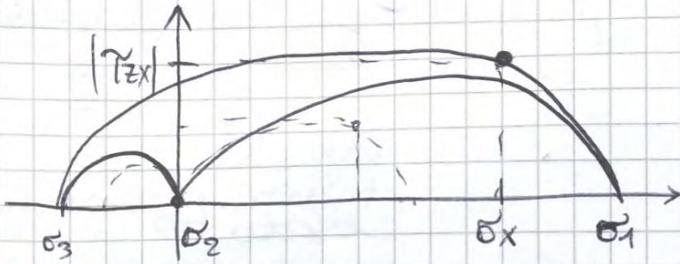
Se ci fosse stato solo  $K_t \Rightarrow \sigma_1^{MAX} = \sigma_1 K_t$  (es:  $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{zx}$ )

Ora dobbiamo trovare in  $\sigma_1$  quali sono le tensioni primarie che lo producono. Dev'essere il  $K_t$  specifico per la propria tensione  $\Rightarrow$

Devo modificare i cerchi di Mohr (ingrossiamo tutto!)

$$\sigma_x = k t^p \cdot 326 \rightarrow \sigma_x \text{ di primo} = 521,6 \text{ MPa}$$

$$|\tau_{zx}| = k t^q |\tilde{\tau}_{zx}| \text{ di primo} = k t^q \cdot 196 = 260,68 \text{ MPa}$$



la faccia superiore è  
risposta superiore

AMPLIFICAZIONE DEI CERCCHI DI MOHR

$$R = \sqrt{\left(\frac{521,6}{2}\right)^2 + 260,68^2} = \sqrt{68016,64 + 67954,0624} = 368,742054$$

$$\sigma_1 = 260,8 + 368,742054 = 629,54 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = -108,2 \text{ MPa}$$

$$e_s = \frac{R_m}{\sigma_1 \text{ MAX}} = \frac{360}{629,5} = 0,57$$

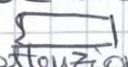
$e_s < 1 \Rightarrow$  l'albero si rompe!

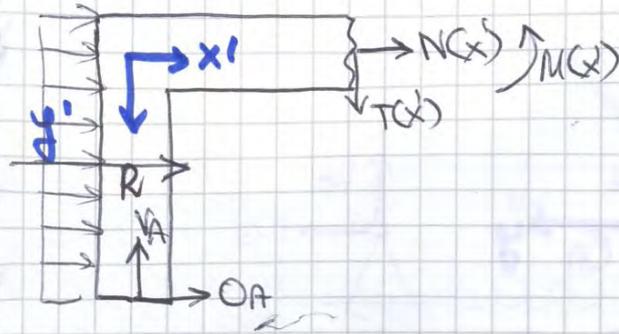
L'albero in ghisa non resiste, quello in acciaio legato resiste

② Spesso in 2 parti

•  $0 \leq x' \leq \frac{l}{2}$

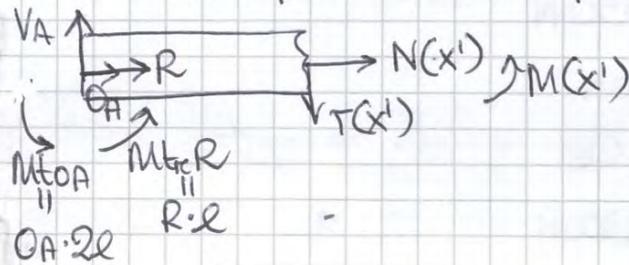
METODO 1: Mi porto dietro tutta la struttura e non uso Metaspazio

Avrei potuto anche fermarmi e percorrere l'altra "L" da destra facendo attenzione al fatto che in  le convenzioni sono le altre. In questo caso attenzione ai R: sulla bocca oizz deve essere edigom.

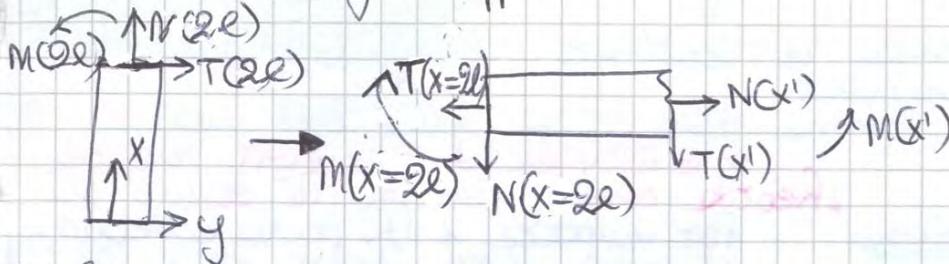


$\rightarrow) N(x') = -OA - R = -6550 \text{ N}$  east  
 $\uparrow) T(x') = VA = 23800 \text{ N}$  east  
 $x') M(x') = -R \frac{x'}{2} - OA 2l + VAx' =$   
 $= -2ql^2 - OA 2l + VAx'$  linear  
 $M(0) = -7140000 \text{ Nmm} = -7,14 \text{ kNm}$   
 Osservo che è uguale a  $M(x=l)$ !  
 $M(\frac{l}{2}) = 0$   
 Mi confermo che è una cerniera

METODO 2: Mi riporto i Metaspazio delle componenti che lo producono (es: OA e R, non VA!)

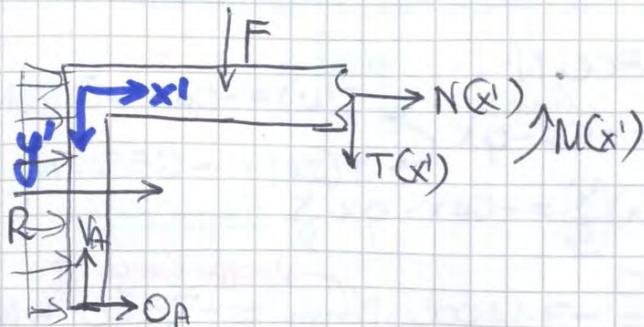


METODO 3: Riporto le reazioni ricavate nella sezione precedente con segno opposto

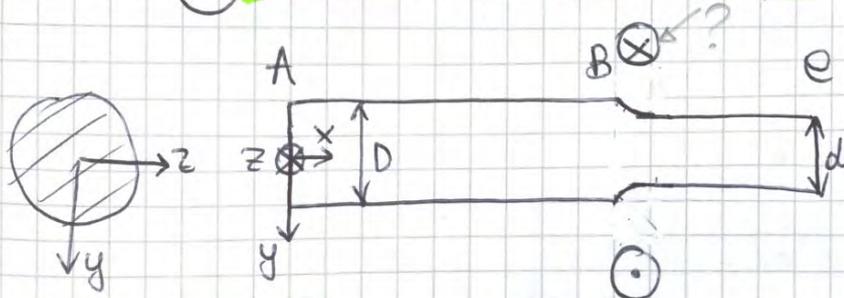


•  $\frac{l}{2} \leq x' \leq l$

$\rightarrow) N(x') = -OA - R = -6550 \text{ N}$  east  
 $\uparrow) T(x') = VA - F = -26200 \text{ N}$  east  
 $x') M(x') = -Rl - OA 2l + VAx' - F(x - \frac{l}{2})$  linear  
 $M(\frac{l}{2}) = 0$  infatti è la cerniera  
 $M(l) = -7,86 \text{ kNm}$



# Esercizio (11) ALBERO in ACCIAIO e40



$D = 40 \text{ mm}$

$d = 36 \text{ mm}$

$\pi = 4$

$M_t = 500 \text{ Nm} = 500000 \text{ Nmm}$

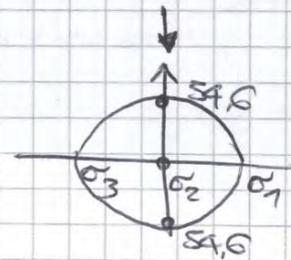
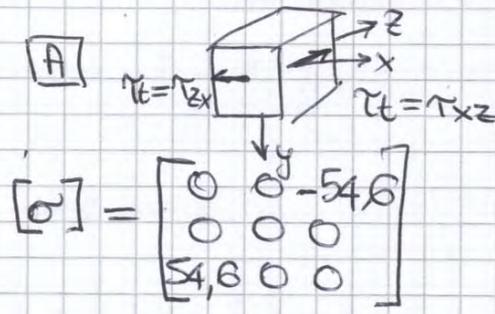
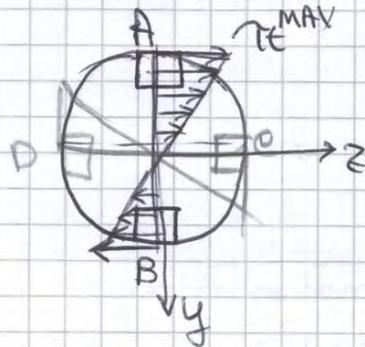
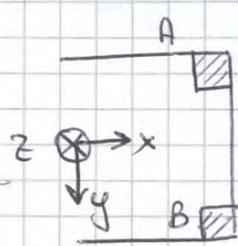
## 1. Calcolare il es

Il punto più sollecitato è B da destra perché?

Infatti  $\tau_{MAX} = \frac{M_t \cdot 16}{\pi \cdot D^3} = 39,8 < \tau_{tor}^{MAX} = DS$

Perché non  $\sigma$ ?

$\tau_{tor}^{MAX} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{M_t \cdot 16}{\pi \cdot d^3} = 54,6$



$\sigma_1 = 54,6$

$\sigma_2 = 0$

$\sigma_3 = -54,6$

$R = 54,6$

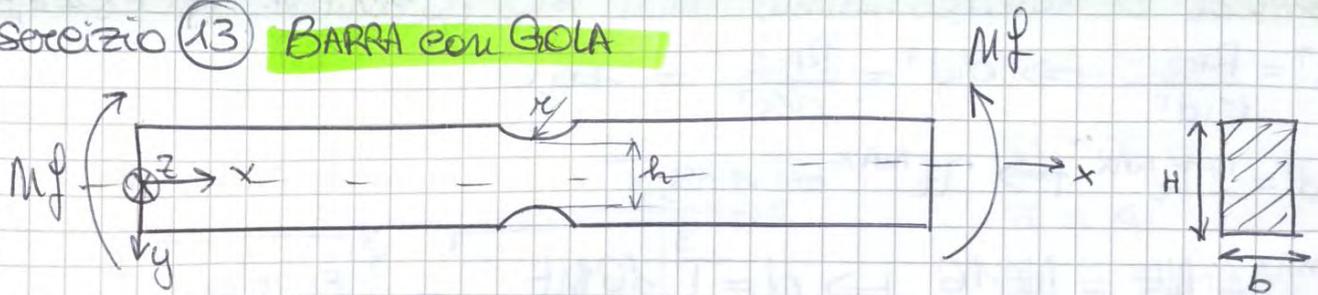
Da Tabella }  $R_{P02} = 400$

$e_s^T = \frac{R_{P02}}{\sigma_{id}^T} = \frac{400}{109,2} = 36,6$

$e_s^{VM} = \frac{R_{P02}}{\sigma_{id}^{VM}} = \frac{400}{\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(109,2)^2 + 2(54,6)^2}} = \frac{400 \sqrt{2}}{\sqrt{11924,64 + 5962,32}} = \frac{565,8}{133,74} = 4,23$

Gid  $k_t \cdot \sigma_{eq} = \frac{360}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0}{2}\right)^2 + 1^2} = 52 \oplus 79 = 131$

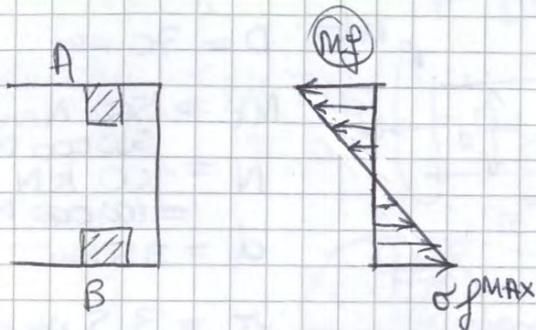
### Esercizio 13 **BARRA con GOLA**



$$M_f = 90 \text{ Nm} = 90.000 \text{ Nmm}$$

$$H = 23 \text{ mm} ; h = 20 \text{ mm} ; b = 6 \text{ mm} ; x = 4 \text{ mm}$$

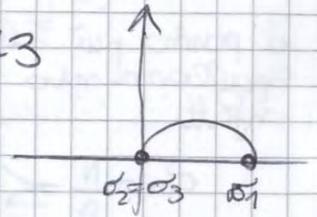
#### 1. Calcolo ES nel caso di materiale ACCIAIO di BONIFICA C22



(Nel caso di Tensione mono assiale  $\sigma^T$  e  $\sigma^{VM}$  coincidono)

$$\sigma^f = \frac{M_z \cdot y}{I_z} \rightarrow \frac{M_z \cdot H/2}{\frac{b H^3}{12}} = \frac{M_z H \cdot 12^6}{2 \cdot b H^3 \cdot 2} = \frac{6 M_z}{b H^2} = 170,13$$

$$\frac{M_z \cdot \frac{h}{2}}{\frac{b h^3}{12}} = \frac{6 M_z}{b h^2} = 225$$



$$\sigma_1 = 112,5$$

???

$$t = \frac{H}{2} = 11,5 \Rightarrow 8 \text{ mm} < t < 20 \text{ mm}$$

$$ES = \frac{R_{p0,2}}{|\sigma_3 - \sigma_1|} = \frac{290}{225} = 1,29$$

per H?

#### 2. ES nel caso di GHISA W35-04

$$\frac{x}{d} = 0,2$$

$$\frac{D}{d} = 1,15$$

$$\Rightarrow K_t^f \approx 1,38$$

$$\sigma_1 = 310,5 = \sigma_1$$

$$\sigma_{MAX} = \sigma_1 K_t = 364,5 \text{ MPa}$$

$$ES = \frac{R_m}{\sigma_1^{MAX}} = \frac{360}{364,5} = 0,98$$

$y''(x) = - \frac{M(x)}{E I_z}$  (1)

Momento flettente  $M(x)$   
 Momento d'Inerzia attorno a z  $I_z$   
 Modulo di Young  $E_{acc} = 200.000 \text{ MPa}$   
 converge al R presso  $(x, y)$

curvatura: derivata seconda di y

la curvatura è proporzionale al momento

Se integro ottengo  $y'(x) = \alpha(x)$

Angolo di rotazione della deformata

Se integro ottengo  $y(x)$

la freccia cioè l'andamento della deflessione del corpo, legge di variazione della deformata lungo x

Se pongo  $x=l$  trovo la FRECCIA MAX  $y(l) = f_{MAX}$

**ERRORE:** Solo dopo avere integrato posso sostituire  $x=l$ !  
 Durante l'integrazione  $M(x)$  deve rimanere funzione di x

Acciaio  $\Rightarrow$

$$E = 200.000 \text{ MPa} = 200.000.000.000 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$\rho = 78.000 \text{ Kg/m}^3$$

↑ densità

$$\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot (1000)^2$$

Abbiamo ricavato  $q = \text{carico per unità di linea}$   
 questo è dato al peso stesso della trave

$$g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 9810 \frac{\text{mm}}{\text{s}^2}$$

$$[q] = \frac{\text{N}}{\text{m}} \rightarrow q = \frac{\text{peso trave } F_p}{\text{lunghezza trave}} = \frac{mg}{l} = \frac{\rho V l g}{l} = \frac{\rho A l g}{l} = \rho A g$$

$$q = \rho A g = 78.000 \cdot (20.000 - 14.400) \cdot 9,81 =$$

$$= 78.000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 5,6 \cdot 10^3 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 4285 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

oppure  $= 9,000,0078 \cdot 5600 \cdot 9810 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} = 428,5 \frac{\text{N}}{\text{m}}$

$$I_z = I_{z \text{ pieno}} - I_{z \text{ vuoto}} = \frac{b \cdot h^3}{12} - \frac{(b-2s)(h-2s)^3}{12}$$

$$= 66666666,67 - 38880000 = 27786666,67 \text{ mm}^4 = 0,00028 \text{ m}^4$$

Sostituisco  $y'(x=0) = 0$  in (2)

$\Rightarrow A = 0$

Sostituisco  $y(x=0) = 0$  con  $A = 0 \Rightarrow B = 0$

$$f_{\max} = y(x=l) = \frac{-\frac{Pl^3}{2} + \frac{Pl^3}{6} - \frac{q}{4}l^4 - \frac{ql^4}{24} + ql^4}{EI_z} =$$

$$= -\frac{(\frac{1}{6} - \frac{1}{2})Pl^3 + (\frac{1}{6} - \frac{1}{4} - \frac{1}{24})ql^4}{EI_z} =$$

$$= -\frac{-\frac{1}{3}Pl^3 + \frac{1}{24}ql^4}{EI_z} = \frac{\frac{1}{3}Pl^3 + \frac{1}{8}ql^4}{EI_z} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3}(5000)(0,8)^3 + \frac{1}{8}(428,5)(0,8)^4}{200000 \cdot 100000 \cdot 0,00028} \frac{Nm^3}{\frac{N}{m^2} \cdot m^4} =$$

$$= \frac{853,3 + 21,9392}{5000000} = 0,00015 m = 0,15 mm$$

0,15?

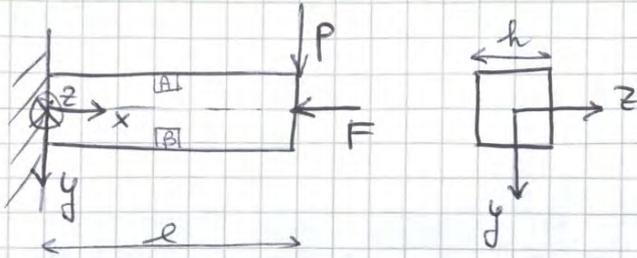
Conformulazio

FIGURA 15

$$f_{\max} = 0,00017 mm$$

$$\cdot 1000 = 0,17 \dots ?$$

## Esercizio (2) TRAVE in ACCIAIO, SEZIONE QUADRATA



$$l = 1,5 \text{ m}$$

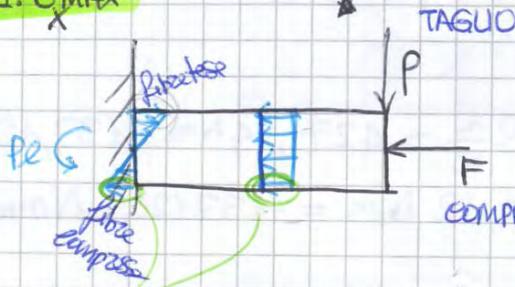
$$h = 40 \text{ mm}$$

$$P = 200 \text{ N}$$

$$F = 600 \text{ N}$$

Sistema qualitativo)

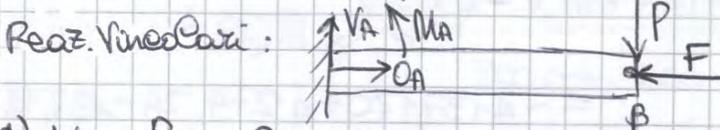
1.  $\sigma_{MAX}$



→ genera il Momento flettente MAX alla radice e si genera un gradiente di tensione lineare con fibre tese e compresse  $\Rightarrow \sigma_x^{MAX}$  si trovano alle RADICI in SUPERFICIE dove le 2 obliquazioni e si genera una tensione media ovunque pari alla forza diviso l'area

Il valore esatto solo MAX

Il punto B è il più sollecitato

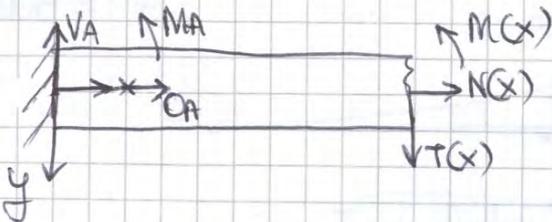


$$1) V_A = P = 200 \text{ N}$$

$$\Rightarrow O_A = F = 600 \text{ N}$$

$$B) M_A = V_A l = 300 \text{ Nm}$$

Caratt. Sollecit.



$$\Rightarrow N(x) = -O_A = -600 \text{ N}$$

$$\uparrow T(x) = V_A = 200 \text{ N}$$

$$x \uparrow M(x) = -M_A + V_A x \quad \begin{cases} M(0) = -M_A = -300 \text{ Nm} \\ M(l) = 0 \end{cases}$$

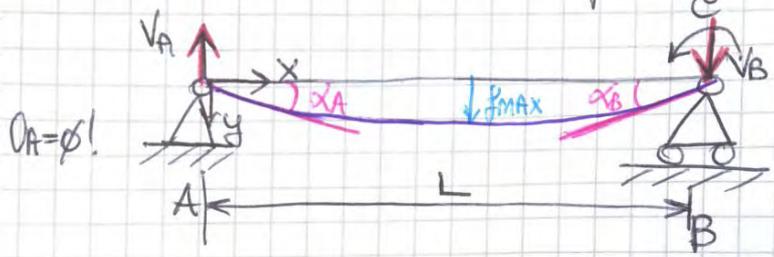
$$\sigma_f^{MAX} = \frac{Mz}{Iz} y = \frac{-300 \cdot 12}{40^4} \cdot \frac{h}{2} = \frac{-300 \cdot 12 \cdot 20}{40^4} \frac{\text{Nm} \cdot \text{mm}}{\text{mm}^4}$$

$$= 0,028125 \cdot 1000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = -28,125 \text{ MPa}$$

$$\sigma^m = \frac{F}{A} = \frac{600 \text{ N}}{1600 \text{ mm}^2} = 0,375 \text{ MPa}$$

$\Rightarrow \sigma_{MAX} = -28,125 - 0,375 = -28,5 \text{ MPa}$  che considero in

Esercizio 4 Determinare le reazioni agli estremi e la massima freccia



$C = 5000 \text{ N/mm}$   
 $L = 1500 \text{ mm}$   
 $I_z = 0,8 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$   
 $E = 2,06 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

Intuitivamente la deformato in questo modo e causa di  $e$  però non so se il MAX è al centro perché la STRUTTURA è SIMMETRICA CARICATA ASIMMETRICAMENTE

Questi 2 punti consentono una rotazione anche quando  $x=0$  oppure  $x=L$

1.  $\alpha_A$ ?  $\alpha_B$ ?

Se la coppia è antioraria nasce una coppia oraria che compensa il  $e$

Dato che vi è una coppia PURA applicata alla struttura

$$V_A = V_B = \frac{C}{L} \quad (1)$$

Da qui viene fuori il Diagramma di Momento:

Ambamento?

- Se ho una forza applicata o un carico <sup>lineare</sup> è lineare
- Ora applico all'esterno un carico  $e$

Il momento sarà nullo sulla cerniera a SN perché la cerniera non può trasferire momento dalla trave al terreno

Sulla cerniera a DS, non è vero che il momento è nullo, vi è dall'esterno una coppia  $\Rightarrow$  il momento qui equilibra non tanto la reazione che scarsierebbe la cerniera a terra ma il carico  $e$  che non è visto come reazione interna con il terreno ma con il carico esterno

Dove lo disegno? Sotto perché le fibre tese le abbiamo disegnato sotto

## 2. $f_{MAX}$

A differenza dei casi in cui la forza è applicata all'estremità, non so in corrispondenza di quale  $x$  vi è  $f_{MAX}$



In corrispondenza di  $f_{MAX}$  ho la tg orizzontale  $\Rightarrow \alpha(y=f_{MAX}) = 0$

1. Determino la cost A

2. Impongo  $y'(x) = 0$  e ricavo la  $x$  (per cui  $y=f_{MAX}$ )

$$\alpha(f_{MAX}) = y'(x) = \frac{-e x^2}{2LEIz} + \frac{eL}{6EIz} = 0$$

$$\frac{-3x^2 + L^2}{6L} = 0$$

$$-3x^2 + L^2 = 0$$

$$x^2 = \frac{L^2}{3}$$

$$x(y=f_{MAX}) = \sqrt{\frac{L^2}{3}} = 866,025$$

3. Sostituisco  $x(y=f_{MAX})$  in  $y(x)$

$$f_{MAX} = y(x(y=f_{MAX})) = \frac{-e x^3}{6LEIz} + \frac{eLx}{6EIz} = -0,022 + 0,066 =$$

$$= 0,044 \text{ mm}$$

**CONDIZIONI al CONTORNO**

①  $\alpha_{AB}(x=l) = \alpha_{BE}(x=l)$

per la continuità della derivata prima  
derivabilità

Se non fosse così vorrebbe dire che la trave si è spezzata

②  $y_{AB}(x=0) = 0$

parete fissa

③  $y_{AB}(x=l) = 0$

Sempre come se lo stessi usando due volte invece sono LIN. INDIP.  
③ determina la linea elastica della 1ª campata  
④ è l'integrazione della 2ª campata

④  $y_{BE}(x=l) = 0$

Conviene usare ② e ③ per la campata AB  $\rightarrow$  ricavo le cost A e B  
Ora che  $\alpha_{AB}(x=l)$  è noto, uso ④ e ① per la campata BE  $\rightarrow$  ricavo le cost C e D

②  $y_{AB}(x=0) = 0 \Rightarrow B = 0$

③  $y_{AB}(x=l) = 0 \Rightarrow \frac{-Ml^3}{6EIz} + Al = 0$

$\frac{-Fal^2}{6EIz} + Al = 0$

$I_z = I_{z \text{ piena}} - I_{z \text{ vuota}} = \frac{BH^3}{12} - \frac{bh^3}{12} = 41666,6 - 241354,6 = 175311,9 \text{ mm}^4$

$\Rightarrow A = \frac{Fal}{6EIz} = \frac{80 \text{ N} \cdot 200 \text{ mm} \cdot 500 \text{ mm}}{6 \cdot 0,55 \cdot \frac{10^3 \text{ N}}{10^8 \text{ mm}^2} \cdot 175311,9 \text{ mm}^4} =$

$= 0,014 \text{ rad}$

$\pi : \text{rad} = 180 : \text{gradi}$

$\alpha_{AB}(x=0) = A = (0,014 \text{ rad}) \cdot \frac{180}{\pi} = 0,80^\circ$

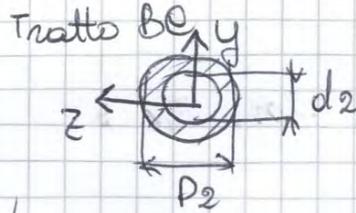
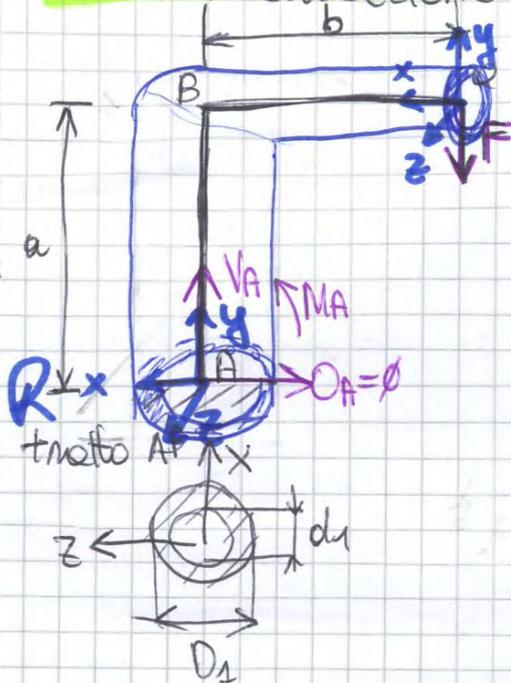
$\alpha_{AB}(x=l) = \frac{-Ml^2}{2EIz} + A = \frac{-80 \text{ N} \cdot 200 \text{ mm} \cdot 500 \text{ mm}}{2 \cdot 0,55 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 175311,9 \text{ mm}^4} + 0,80^\circ$

$= 2,37^\circ + 0,80^\circ = -1,58^\circ$

000?

Esercizio 6

**STRUTTURA con SEZIONE CIRCOLARE CAVA a DIAMETRI VARIABILI**



$F = 10\text{ N}$

$D_1 = 36\text{ mm}$

$R_1 = 18\text{ mm} = 0,018\text{ m}$

$d_1 = 30\text{ mm}$

$r_1 = 15\text{ mm} = 0,015\text{ m}$

$D_2 = 22\text{ mm}$

$R_2 = 11\text{ mm}$

$d_2 = 18\text{ mm}$

$r_2 = 9\text{ mm}$

$a = 3\text{ m}$

$b = 1\text{ m}$

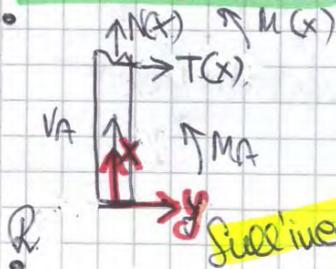
Simile a es 10 da DS (primo parte!)  
 LEGA di ALLUMINIO,  $E = 70\text{ GPa}$   
 Reazioni Vincolari

$\uparrow F = V_A = 10\text{ N}$

$\rightarrow O_A = \emptyset$

$\uparrow M_A - F \cdot b = \emptyset \Rightarrow M_A = F \cdot b = 10\text{ Nm} = 10'000\text{ Nmm}$

Caratt. Sollecitazione



$0 \leq x \leq a$

$\uparrow N(x) = -V_A = -10\text{ N}$

$\rightarrow T(x) = \emptyset$

$x \curvearrowright M(x) = -M_A = -10\text{ Nm}$

cost  
cost  
cost

$0 \leq x' \leq b$

$\uparrow T(x') = V_A = 10\text{ N}$

$\rightarrow N(x') = \emptyset$

$x' \curvearrowright M(x') = V_A x' - M_A$

cost

cost

$M(0) = -M_A = -10\text{ Nm}$

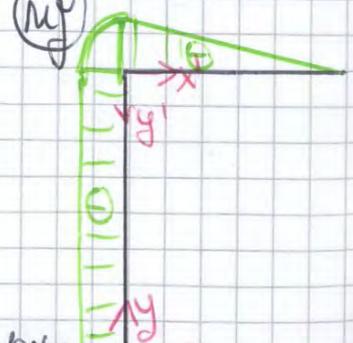
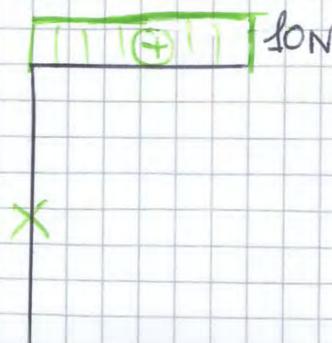
$M(b) = 0\text{ Nm}$

infatti come la trave incastata (Es 3)!

(N)

(T)

(M)



$$\textcircled{1} y_{AB}(x=\emptyset) = \emptyset \Rightarrow B=0$$

$$\textcircled{2} y'_{AB}(x=\emptyset) = \emptyset \Rightarrow A=0$$

$$\textcircled{3} y'_{AB}(x=a) = y'_{Be}(x'=\emptyset)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R_2^4 - r_2^4} &= \frac{10^{12}}{8080} \\ \frac{1}{R_1^4 - r_1^4} &= \frac{10^{12}}{54351} \end{aligned} \right\}$$

$$-\frac{M_A a}{E \frac{\pi}{4} (R_1^4 - r_1^4)} = e \Rightarrow e = \frac{10 \text{ Nm} \cdot 3 \text{ m}}{70 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}} \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \frac{10^{12}}{54351} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e = -0,010044909 \text{ rad} = -0,57^\circ$$

$\cdot \frac{180}{\pi}$

$$\textcircled{4} y_{Be}(x'=\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \theta=0$$

Rotazione in B

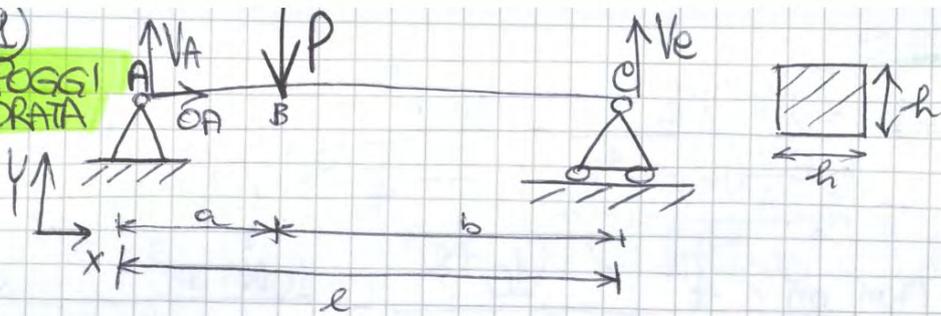
$$\alpha_{AB}(x=a) = \alpha_{Be}(x'=\emptyset) = e = -0,57^\circ$$

Spostamento in B

$$u_B = y_{AB}(x=a) = u_e \rightarrow = 15,06 \text{ mm}$$

$$v_B = ?$$

**Esercizio (1)**  
**TRAVE SU 2 APPOGGI**  
**SEZIONE QUADRATA**  
**ACCIAIO**



$P = 500 \text{ N}$

$l = 1,5 \text{ m}$   
 $a = 0,6 \text{ m}$   
 $b = 0,9 \text{ m}$

$h = 0,1 \text{ m}$

$q = 0,765 \frac{\text{N}}{\text{mm}} = 0,765 \text{ N} \cdot \frac{1}{\frac{1}{1000} \text{ m}} = 765 \frac{\text{N}}{\text{m}}$

**1. Calcolare i diagrammi di Taglio e Momento Flettente**

Reaz. Vincolari

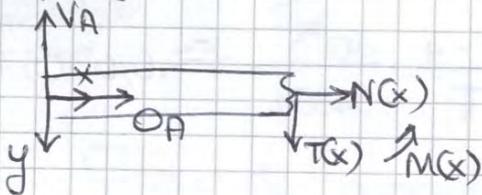
$\uparrow) V_A + V_C - P = 0 \Rightarrow V_A = P - V_C = 300 \text{ N}$

$\rightarrow) O_A = 0$

$\uparrow) -P \cdot a + V_C \cdot l = 0 \Rightarrow V_C = \frac{P \cdot a}{l} = \frac{500 \text{ N} \cdot 0,6 \text{ m}}{1,5 \text{ m}} = 200 \text{ N}$

Caratt. Sollec.

$0 \leq x \leq a$

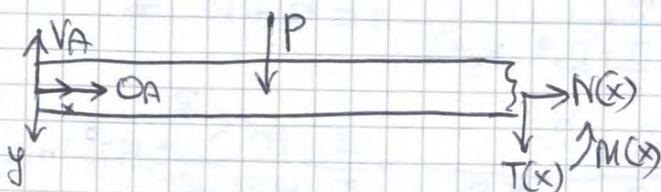


$N(x) = -O_A = 0$

$T(x) = V_A = 300 \text{ N}$

$M(x) = V_A \cdot x \Rightarrow M(0) = 0 \text{ Cerniera}$   
 $M(a) = 180 \text{ Nm}$

$a \leq x \leq l$



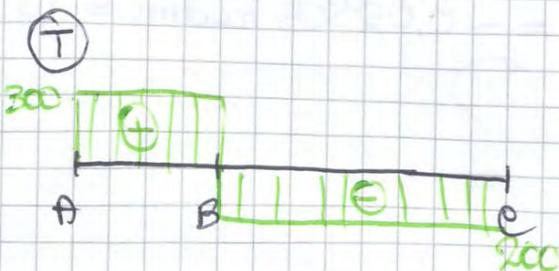
$N(x) = -O_A = 0$

$T(x) = -P + V_A = -200 \text{ N}$

$M(x) = V_A \cdot x - P(x-a)$

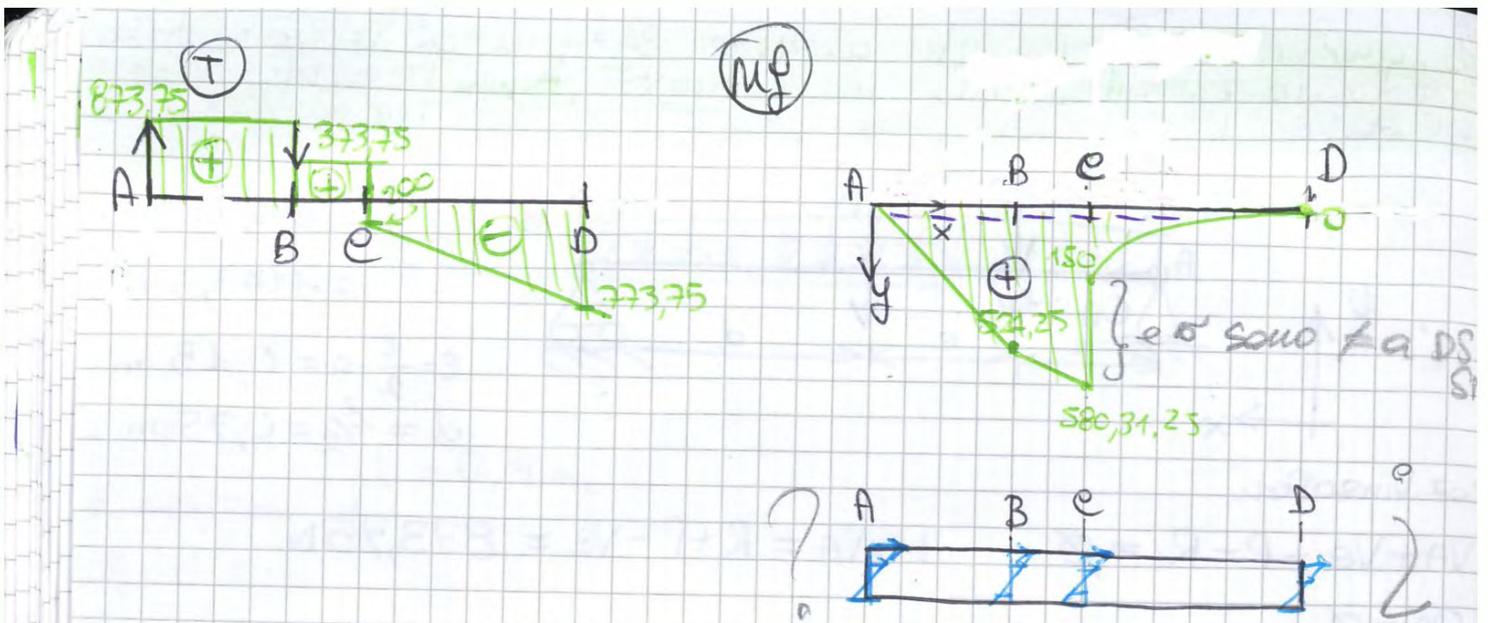
$M(a) = V_A \cdot a = 180 \text{ Nm}$

$M(l) = V_A \cdot l - P \cdot b = 450 - 450 = 0 \text{ Cerniera}$



(M)





3. la tensione di flessione MAX  $\sigma_{xMAX}$

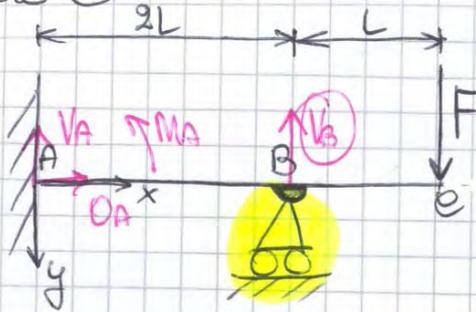
Il punto più sollecitato è presente sulla sezione che taglia la trave nel punto e a sinistra e in alto

$$\sigma_{xMAX} = \sigma_{fMAX} = \frac{Mz}{Iz} y = \frac{Mz}{\frac{bh^3}{12}} \cdot \frac{h}{2} = \frac{6Mz}{h^3} = \frac{6 \cdot 580,3125 \text{ Nm}}{(0,1)^3 \text{ m}^3} = 3,48 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

### Esercitazione 9: Iperstatiche

Sei (un'informazione in più) : l'istante della struttura e la sezione della trave

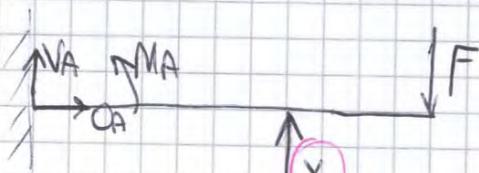
#### Esercizio 2



$h = (m) - v = 3 - 4 = 1$  Struttura una volta iperstatica

Abbiamo 3 eq. in 4 incognite  $\Rightarrow$  Non sarebbe risolvibile mediante semplici equilibri  $\Rightarrow$  Separiamo la struttura in 2 strutture ISOSTATICHE

Consideriamo la prima incognita (incognita principale)  $V_B$  così che lasciamo indisturbato parete e il calcolo della linea elastica semplice

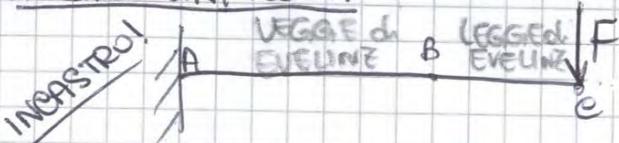


(Nota una incognita le altre saranno dette dalle eq. in di equilibrio)

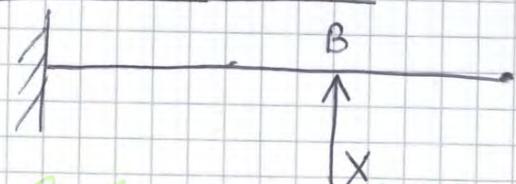
$\leftarrow$  rappresenta la reazione del vincolo del carrello. Abbiamo sostituito il carrello con una forza equivalente, come se il carrello non esistesse

Separiamo il calcolo in due momenti come segue

#### I<sup>a</sup> STRUTTURA ISOST.



#### II<sup>a</sup> STRUTTURA ISOST.



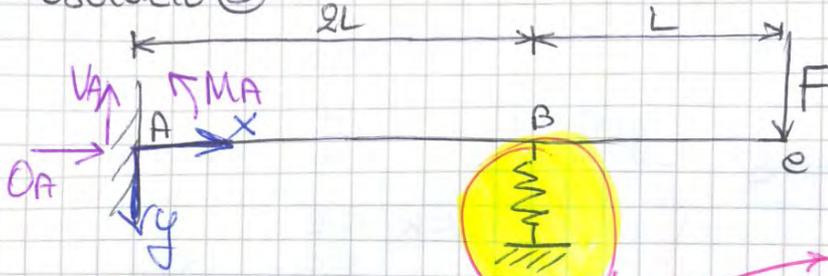
Si sommano gli effetti e quindi anche le linee elastiche le sommano algebricamente

(deflessione della trave)  $\rightarrow$  TOTALE (data dalla somma delle 2 linee elastiche)

OSS la linea elastica si annulla in B (Abbiamo trovato la CONDIZ. ALTERNATA  $\leftarrow$  perché abbiamo sostituito il carrello con una forza)

In teoria dove calcoleremo 4 linee elastiche ma in B la linea elastica si annulla  $\Rightarrow$  Posso calcolare le linee elastiche in AB in I<sup>a</sup> STR e in AB nella II<sup>a</sup> STR (non ci interessa sapere la linea elastica nel tratto BC perché in B si annulla)  $\Rightarrow$  le linee elastiche da calcolare sono 2

Esercizio ③



le forze di reazione X sono legate alla costante K

VINCOLO CEDEVOLE: molla con coefficiente elastico K.

(Non è come il carrello in cui lo spostamento è nullo)

LO SPOSTAMENTO NON È NULLO e la somma delle linee elastiche non sarà nulla

Se la MOLLA è COM.PRESSA allora -mo spostamenti y positivi

Forza elastica di reazione al vincolo  $F_k = (k) \cdot (\text{spostamenti in B})$

$$X = k \cdot y(x=2L) \Rightarrow y(x=2L) = \frac{X}{k}$$

$y_I + y_{II} = y_{TOT} \neq 0$  infatti  $y_{TOT} = y(x=2L) = \frac{X}{k}$

Come Es ②:

$$y_{TOT}(x=2L) = y_I(x=2L) + y_{II}(x=2L) = \frac{F}{EI_2} \frac{4L^2(9L-2L)}{6} - \frac{X}{EI_2} \frac{4L^2(6L-2L)}{6}$$

impongo  $y_{TOT}(x=2L) = \frac{X}{k}$

$$\frac{2}{3} \frac{XL^2}{EI_2} (7F - 4X) = \frac{X}{k}$$

$$\frac{2L^3}{3EI_2} (7F - 4X) = \frac{X}{k}$$

$$\frac{14}{3} \frac{L^3}{EI_2} F = X \left( \frac{1}{k} + \frac{8L^3}{3EI_2} \right)$$

$$V_B = X = \frac{14 L^3 F}{3 EI_2 \left( \frac{1}{k} + \frac{8 L^3}{3 EI_2} \right)} = \frac{14 L^3 F k}{3 EI_2 (3 EI_2 + 8 k L^3)} = \frac{14 L^3 F k}{3 EI_2 + 8 k L^3}$$

Se  $k \rightarrow +\infty$   $X = \frac{14}{3} \frac{L^3 F}{EI_2} \frac{3}{8} \frac{EI_2}{L^3} = \frac{7}{4} F$  che è lo stesso risultato di prima

VINCOLO NON CEDEVOLE con RIGIDEZZA INFINITA

ooo Dovrei continuare imponendo le eq.mi di ...

Decido di studiare solo la CAMATA AB cioè  $0 \leq x \leq 2l$

$$\begin{aligned}
 y_I(x=a=2l) &= \frac{q \cdot 2 \cdot ((3l)^2 - l^2) \cdot ((3l)^2 - (2l)^2) + 3l \cdot (2l)^3 - (3l)^4 + l^4}{EI_z \cdot 3l} \cdot 2l = \\
 &= \frac{q \cdot 2 \cdot (8l^2) \cdot (5l^2) + 24l^4 - 81l^4 + l^4}{36 \cdot EI_z} = \\
 &= \frac{q \cdot [80l^4 + 24l^4 - 81l^4 + l^4]}{36 \cdot EI_z} = \\
 &= \frac{l^4 \cdot 24q}{36EI_z} = \frac{2}{3} \frac{ql^4}{EI_z}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_{II}(x=a=2l) &= \frac{-xl \cdot 2l \cdot (ql^2 - l^2 - 4l^2)}{EI_z \cdot 3l} = \\
 &= \frac{-xl \cdot 4l^2}{EI_z \cdot 9} = -\frac{x}{EI_z} \frac{4}{9} l^3
 \end{aligned}$$

$$y_{TOT}(x=2l) = y_I(x=2l) + y_{II}(x=2l) = 0$$

$$\frac{2}{3} \frac{ql^4}{EI_z} - \frac{4}{9} \frac{x l^3}{EI_z} = 0$$

$$6ql - 4x = 0$$

$$V_B = x = \frac{6}{4} ql = \frac{3}{2} ql$$

Eq. equibrio

$$\rightarrow) OA = 0$$

$$\uparrow) V_A + V_B + V_e - q \cdot 2l = 0$$

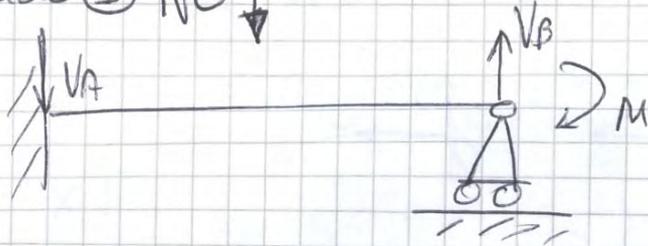
$$A \rightarrow -R \cdot l + V_B \cdot 2l + V_e \cdot 3l = 0$$

$$\Rightarrow V_e = \frac{R \cdot l - V_B \cdot 2l}{3l} = \frac{q \cdot 2l - V_B \cdot 2}{3} =$$

$$= \frac{2}{3} ql - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} ql = -\frac{1}{3} ql$$

$$\Rightarrow V_A = q \cdot 2l - V_e - V_B = ql \left( 2 + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} \right) = \frac{5}{6} ql$$

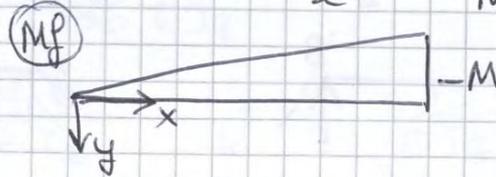
Esercizio ① NO ↓



(come es4 esere. 6)

$$V_A = V_B = \frac{M}{l}$$

$$M(x) = -V_A x = -\frac{M}{l} x \quad \begin{cases} M(0) = 0 \\ M(l) = -M \end{cases}$$



$$y(x) = \frac{M}{l} \frac{x^3}{6EIz} + Ax + B$$

Incastro in A  $\Rightarrow y(x=0) = 0 \Rightarrow B = 0$

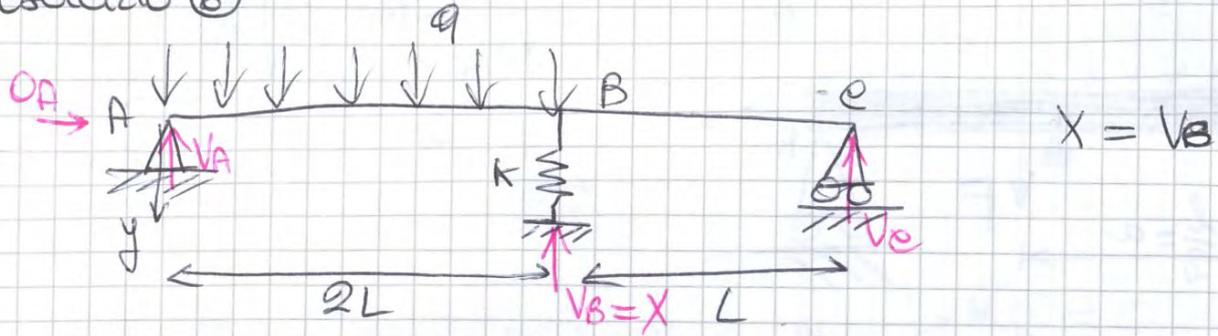
Cerniera in B  $\Rightarrow y(x=l) = 0$

$$\frac{M l^2}{6EIz} + A l = 0$$

$$A = \frac{-M l^2}{6 l EIz} = \frac{-M l}{6EIz}$$

$$\left\{ \Rightarrow y(x=l) = \frac{M}{l} \frac{l^3}{6EIz} - \frac{M l^2}{6EIz} = \frac{(M l^2 - M l^2)}{6EIz} = 0 \right\}$$

### Esercizio 6



Come es(5), cambio solo la condizione. Infatti  $y^{TOT}(x=2L) = \frac{X}{K}$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} \frac{q l^4}{EI_z} - \frac{4}{9} \frac{x l^3}{EI_z} = \frac{x}{K}$$

~~$$\Rightarrow x = k \left( \frac{6 q l^4 - 4 x l^3}{9 EI_z} \right)$$~~

$$\frac{2}{3} \frac{q l^4}{EI_z} = x \left( \frac{4 l^3}{9 EI_z} + \frac{1}{K} \right) = x \left( \frac{4 k l^3 + 9 EI_z}{9 EI_z k} \right)$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{3} \frac{q l^4}{EI_z} \frac{9 EI_z k}{(4 k l^3 + 9 EI_z)} = \frac{6 q l^4 k}{-4 k l^3 + 9 EI_z}$$

Perché?

$$y''_{Be}(x) = -\frac{q/2(x-L)^2}{EIz} = \frac{q(x^2 - 2xL + L^2)}{2EIz}$$

$$y'_{Be}(x) = \frac{q}{2EIz} \left( \frac{x^3}{3} + L^2x - \frac{2Lx^2}{2} \right) + c$$

$$y_{Be}(x) = \frac{q}{2EIz} \left( \frac{x^4}{12} + \frac{L^2x^2}{2} - L\frac{x^3}{3} \right) + cx + D$$

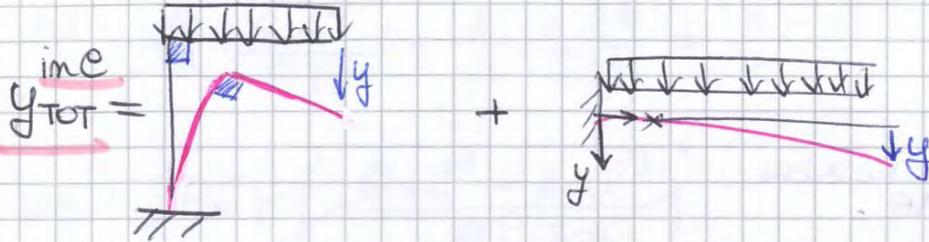
CONDIZIONI al contorno

Insieme le deformazioni assoli  $\nabla$

Se regione coste  
prendo il tratto orizzon-  
-tale come incastro  
le costanti di integra-  
-zione saranno

$$y'_{Be}(x=0) = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$y_{Be}(x=0) = 0 \Rightarrow c = 0$$



$$\Rightarrow y_{e, \text{TOT}} = y'_{AB}(x=L) \cdot L + y_{Be}(x=L) =$$

$$\left\{ y'_{Be}(x=0) \right\}$$

$$= \left( \frac{qL^2}{2EIz} \right) \cdot L + \frac{q}{2EIz} \left( \frac{L^4}{12} + \frac{L^4}{2} - \frac{L^4}{3} \right) =$$

$$= \left( 1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \frac{qL^4}{2EIz} = \frac{15}{12 \cdot 2} \frac{qL^4}{EIz} = \frac{15^5}{240} \frac{qL^4}{EIz}$$

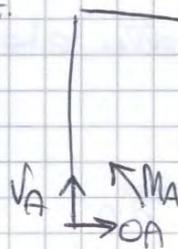
II Caratt. Sollecit.

Forze

$$V_A = -X$$

$$O_A = 0$$

$$M_A = -XL$$



$$M(x) = V_A x - M_A =$$

$$= -X(x) + XL =$$

$$= X(L-x)$$

Studio la linea elastica

$$y''_{AB}(x) = -\frac{XL}{EIz}$$

$$y'_{AB}(x) = -\frac{XL}{EIz}x + A$$

$$y_{AB}(x) = -\frac{XL}{2EIz}x^2 + Ax + B$$

COND. CONT

$$y'_{AB}(x=0) = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$y_{AB}(x=0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$y''_{Be}(x) = -\frac{X(L-x)}{EIz}$$

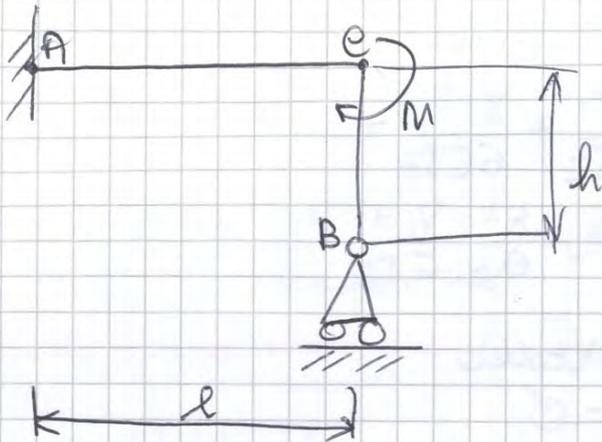
$$y'_{Be}(x) = -\frac{XLx}{EIz} + \frac{Xx^2}{2EIz} + c$$

$$y_{Be}(x) = -\frac{XLx^2}{2EIz} + \frac{Xx^3}{6EIz} + cx + D$$

Condizioni al contorno  
Come se fosse incastro  
 $\Rightarrow c, D = 0$

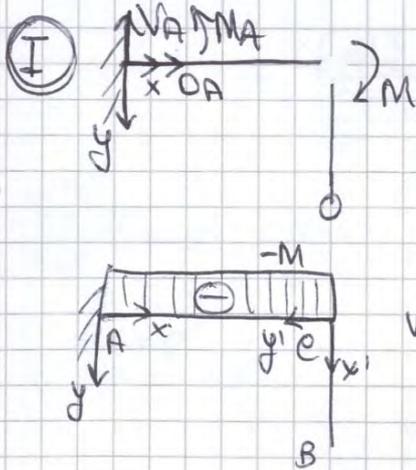
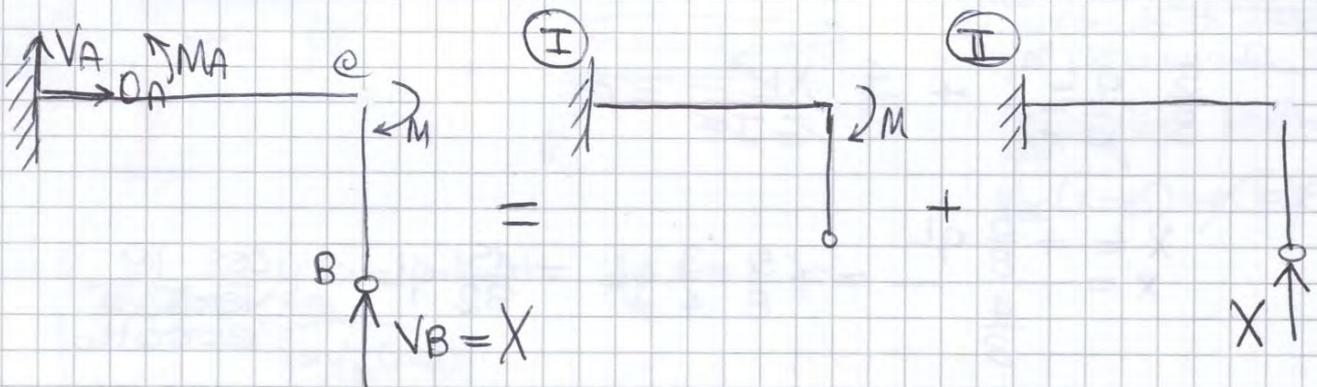
Esercizio 7 Non presentare la deformazione assiale in B

$$h = 4 - 3 = 1$$



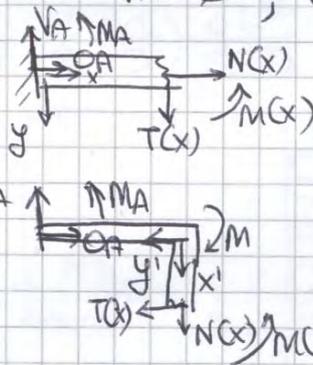
$$y_{B \text{ TOT}} = y_{B \text{ I}}^{\text{TOT}} + y_{B \text{ II}}^{\text{TOT}} = 0$$

perché cartellino



Caratt. Sol.

$$V_A = 0; \quad O_A = 0; \quad M_A = M$$



$$\begin{cases} T(x) = V_A = 0 \\ N(x) = -O_A = 0 \\ M(x) = -M_A + V_A x \\ M(0) = -M_A = -M \\ M(l) = -M + V_A l \end{cases}$$

$$\begin{cases} T(x') = O_A = 0 \\ N(x') = V_A = 0 \\ M(x') = M - M_A + V_A l + O_A x' = 0 \end{cases}$$

Studio linea elastica

$$\left. \begin{aligned} y''_{ae}(x) &= -\frac{M(x)}{EI_z} = +\frac{M_A}{EI_z} \\ y'_{ae}(x) &= +\frac{M_A x}{EI_z} + A \\ y_{ae}(x) &= +\frac{M_A x^2}{2EI_z} + Ax + B \end{aligned} \right\} \text{e.e.}$$

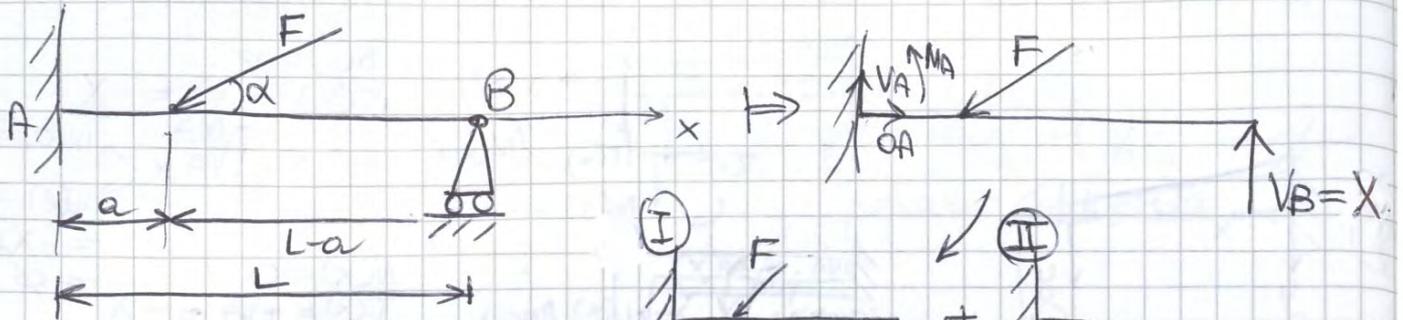
incastro:

$$\begin{cases} y'_{ae}(x=0) = 0 \Rightarrow A = 0 \\ y_{ae}(x=0) = 0 \Rightarrow B = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y'_{eb}(x) &= 0 \\ y'_{eb}(x) &= 0 \\ y_{eb}(x) &= 0 \end{aligned}$$

$$(y_{B \text{ I}})_{\text{TOT}} = y'_{ae}(x=l) \cdot l + y_{eb}(x=l) = +\frac{M l^2}{EI_z}$$

### Esercizio (9)



Impostazione  $y_{B,TOT} = y_{B,I,TOT} + y_{B,II,TOT} = 0$

$\Rightarrow y_{B,TOT} = y_{B,I} + y_{B,II} = 0$

$\begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \end{matrix}$

$\begin{matrix} \text{I}_a \\ \text{II}_b \end{matrix}$

$F_x = F \cos \alpha$      $F_y = F \sin \alpha$

Non Contribuisce al MP!

Da Formulazio:

$$y_{B,I,TOT} + y_{B,II,TOT} = 0$$

$$\frac{(F \sin \alpha)}{EI} \frac{a^2(3l-a)}{6} - \frac{X l^2 (3l-l)}{EI \cdot 6} = 0$$

$$X = \frac{a^2 F \sin \alpha [3l-a]}{2l^3} = V_B$$

$$V_A = -V_B + F_y = F \sin \alpha \left[ 1 - \frac{a^2 [3l-a]}{2l^3} \right]$$

A)  $MA = F_y \cdot a - V_B l = F \sin \alpha a \left[ 1 - \frac{a [3l-a]}{2l^2} \right]$

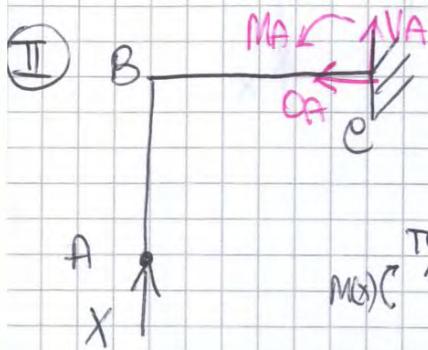
-1?

$$y_{A, \text{I}, \text{TOT}} = y'_{be}(x=l) \cdot l + y_{DA}(x=l) = \cancel{\emptyset}$$

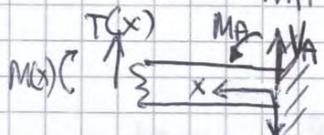
$$= \frac{Pl}{2EI_z} l^2 \cdot l + \frac{Pl \cdot l^2}{4EI_z} - \frac{Pl^3}{6EI_z} + \frac{Pl^3}{6EI_z} - \frac{Pl \cdot l^2}{4EI_z} =$$

$$= \frac{Pl^4}{2EI_z} + \frac{Pl^3}{EI_z} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{4} \right) =$$

$$= \frac{Pl^4}{2EI_z}$$

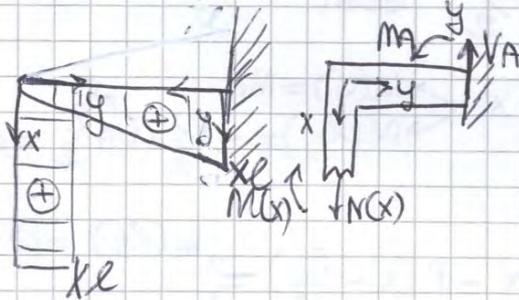


$$\begin{aligned} OA &= \emptyset \\ VA &= -X \\ MA &= Xl \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} T(x) &= -VA \\ M(x) &= MA - T(x)x = MA + VAx \\ &= MA - Xx \end{aligned}$$

$\begin{aligned} M(0) &= MA = Xl \\ M(l) &= \emptyset \end{aligned}$



$$\begin{aligned} N(x) &= VA \\ M(x) &= MA = Xl \end{aligned}$$

$$y''_{be}(x) = -\frac{(MA - Xx)}{EI_z} \quad ; \quad y'_{be}(x) = -\frac{MAx}{EI_z} + \frac{X}{2EI_z} x^2 \quad ; \quad y_{be}(x) = -\frac{MAx^2}{2EI_z} + \frac{X}{6EI_z} x^3$$

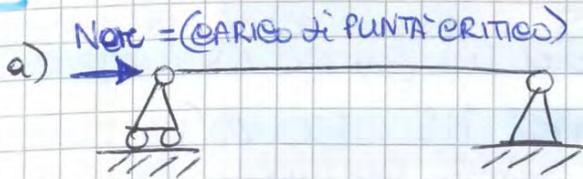
$$y''_{AB}(x) = -\frac{MA}{EI_z} \quad ; \quad y'_{be}(x) = -\frac{MAx}{EI_z} \quad ; \quad y_{be}(x) = -\frac{MAx^2}{2EI_z}$$

$$y_{A, \text{I}, \text{TOT}} = y'_{be}(x=l) \cdot l + y_{AB}(x=l) =$$

$$= -\frac{Xl^3}{EI_z} + \frac{X}{2EI_z} l^3 - \frac{Xl^3}{2EI_z} = -\frac{Xl^3}{EI_z}$$

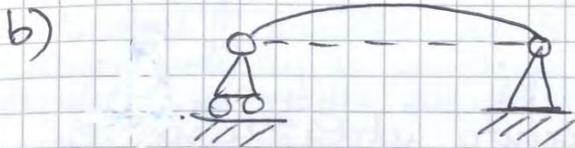
$$y_{A, \text{TOT}} = \emptyset \Rightarrow \frac{Pl^4}{2EI_z} - \frac{Xl^3}{EI_z} = \emptyset \Rightarrow X = \frac{Pl}{2}$$

## CARICO di PUNTA:



Produce un'INSTABILITÀ

La struttura non si rompe, ma passiamo dalla configurazione a) a quella b)



La struttura pure DEFORMANDOSI SOLAMENTE CAMBIA il modo di LAVORARE della STRUTTURA

Non vogliamo raggiungere il valore critico del carico di punta che fa deformare la trave, tale situazione è instabile e porta ad un equilibrio stabile che è diverso da quello iniziale, si attivano nuovi meccanismi

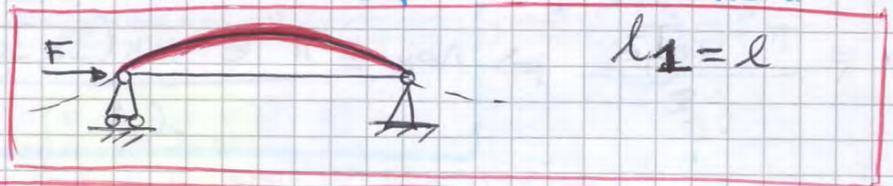
Dimensiono la Biella per instabilità

$$N = N_{cr} = 37680 \text{ N}$$

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 E I_z}{l_1^2} \rightarrow \text{Momento di Inerzia della Biella}$$

$l_1^2$  → lunghezza fra 2 flessi della deformata che dà instabilità

Sui 2 flessi coincidono con le cerniere nell'ambito della piccola deformazione



TRAVE INCASTRATA



$$l_1 = 2l$$

$$\Rightarrow N_{cr} = \frac{\pi^2 E \cdot \frac{\pi R^4}{4}}{l^2} = \frac{\pi^3 E (d^4)}{4 l^2 \cdot 16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{\min} = \sqrt{\frac{64 N_{cr} l^2}{\pi^3 E}} = 27,3 \text{ mm}$$

CONCLUSIONE:

Per il progetto userò un  $d \geq 27,3 \text{ mm}$  così da non avere sia INSTABILITÀ sia SNERVAMENTO nella realtà - Seelego!

Diametro minimo per non avere INSTABILITÀ nella Biella -  $d > 28!$

Manavella

# Esercizio 7 Calcolo matriciale

Dalla STRUTTURA CONTINUA che ha 2 gradi di libertà (2 punti = 2 x 3 gl) possiamo passare a un MODELLO DISCRETO che ha un numero finito di gl (nodi = 3 gl)

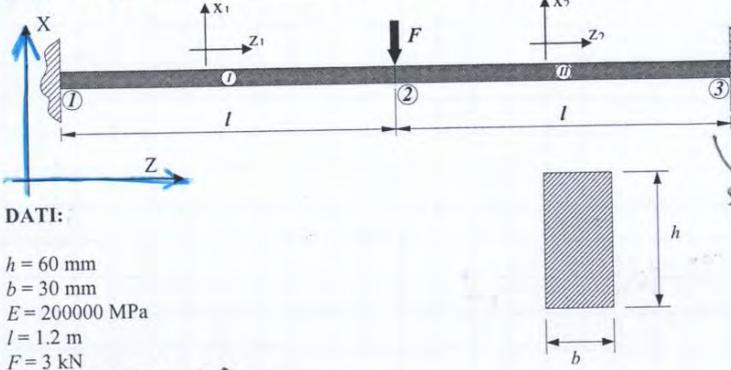
Se R fosse invece di 11 ci sarebbe 11

Probabile è all'incirca con il locale e coincidono o meno dell'origine

Perché questi?

## 1. Travi in serie con carico concentrato in mezzaria

Determinare gli spostamenti nodali, le reazioni vincolari e le tensioni in corrispondenza dei nodi di una trave continua soggetta ad un carico concentrato  $F$  applicato nella mezzaria.



DATI:

- $h = 60 \text{ mm}$
- $b = 30 \text{ mm}$
- $E = 200000 \text{ MPa}$
- $l = 1.2 \text{ m}$
- $F = 3 \text{ kN}$

### 1.1 Calcolo delle proprietà della sezione

Conviene considerare tutte le grandezze in un sistema coerente. Utilizzando i mm per le lunghezze e i N per le forze si ottengono le pressioni/tensioni in MPa ( $\text{N/mm}^2$ ). Le proprietà della sezione risultano così:

$$J = \frac{b h^3}{12} = 540000 \text{ mm}^4$$

$$A = b h = 1800 \text{ mm}^2$$

### 1.2 Assemblaggio della matrice di rigidità globale

La trave continua deve essere considerata come un'unica trave di lunghezza  $2l$ . In corrispondenza di vincoli o forze concentrate applicate dall'esterno è necessario imporre la presenza di un nodo. In particolare, nel caso del sistema rappresentato sarà quindi necessario considerare la presenza di tre nodi. I tratti di trave compresi tra due nodi possono essere studiati separatamente facendo riferimento ad un elemento trave di lunghezza  $l$ .

Poiché i due tratti di trave sono in serie lungo lo stesso asse non è necessario operare alcuna rotazione del sistema di riferimento (sistema di riferimento globale = sistema di riferimento locale).

Si consideri solo il comportamento flessionale nel piano XZ. Infatti ciascun nodo è caratterizzato da due gradi di libertà, uno di traslazione lungo l'asse X ed uno di rotazione attorno all'asse Y.

La matrice di rigidità<sup>1</sup> della trave definita dai nodi 1 e 2 è data da:

<sup>1</sup> Dove con  $u_i$  e  $\varphi_i$  sono stati indicati i gradi di libertà dei nodi, con  $F_i$  e  $M_i$  sono state indicate le forze concentrate generalizzate ad assi applicati e con l'apice I e II sono stati indicati gli elementi del sistema cui si fa riferimento (vedi figura).

MATRICE di RIGIDITÀ dell'ELEMENTO 1

$$\frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^I \\ M_1^I \\ F_2^I \\ M_2^I \end{Bmatrix}$$

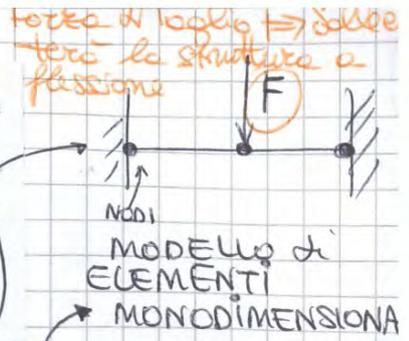
e la matrice di rigidità della trave definita dai nodi 2 e 3 è data da:

MATRICE di RIGIDITÀ dell'ELEMENTO 2

$$\frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ \varphi_2 \\ u_3 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2^{II} \\ M_2^{II} \\ F_3^{II} \\ M_3^{II} \end{Bmatrix}$$

Una volta introdotto il vettore che descrive gli spostamenti nodali del sistema complessivo è possibile passare all'assemblaggio delle matrici per ottenere la matrice di rigidità della struttura completa:

$$\frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l & 0 & 0 \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6l & 12+12 & 6l-6l & -12 & 6l \\ 6l & 2l^2 & 6l-6l & 4l^2+4l^2 & -6l & 2l^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6l & 12 & -6l \\ 0 & 0 & 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ \varphi_2 \\ u_3 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^I \\ M_1^I \\ F_2^I + F_2^{II} \\ M_2^I + M_2^{II} \\ F_3^{II} \\ M_3^{II} \end{Bmatrix}$$



Il modello discreto di questa struttura è fatto almeno da 2 elementi mono dimensionali

STRUTTURA IPERSTATICA a fronte di una inflessione della trave anziché la rete di forze assiali

L'elemento I avrà:

$$\begin{Bmatrix} F_1^I \\ M_1^I \end{Bmatrix}$$

NODI 2:

$$\begin{Bmatrix} F_2^I \\ M_2^I \end{Bmatrix}$$

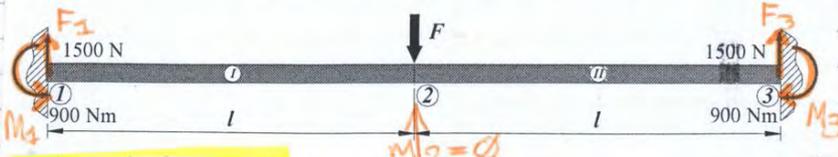
LA ESPANDIAMO:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_2 \\ M_2 \\ F_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 6l & -12 & 6l \\ 0 & 0 & 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6l & 12 & -6l \\ 0 & 0 & 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ \varphi_2 \\ u_3 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix}$$

Termini con gl in comune

verifico l'equilibrio  
 $F_1 + F_3 + F = 0$   
 $1500 + 1500 - 3000 = 0$   
 Atorno a (1)  
 $M_1 + M_2 + M_3 + F_3 \cdot 2l - F \cdot l = 0$   
 $900 - 900 + 1500 \cdot 2400 - 3000 \cdot 1200 = 0$

Le reazioni vincolari sono dunque quelle mostrate in figura:

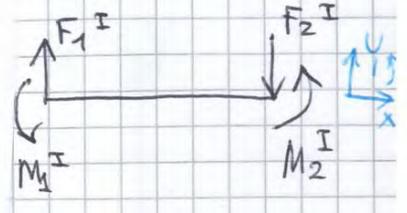


1.5 Calcolo delle forze nodali

3. Ricavo  $F_2^I, M_2^I$  e verifico che  $(F_1^I = F_1), (M_1^I = M_1)$   
 Per l'asta I:

$$\begin{Bmatrix} F_1^I \\ M_1^I \\ F_2^I \\ M_2^I \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ \phi_1 = 0 \\ u_2 = -\frac{Fl^3}{24EJ} \\ \phi_2 = 0 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} \frac{F}{2} \\ \frac{2}{Fl} \\ \frac{4}{F} \\ \frac{2}{Fl} \\ \frac{2}{Fl} \\ \frac{4}{4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1500 \text{ N} \\ 900 \text{ Nm} \\ -1500 \text{ N} \\ 900 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$



L'asta I è dunque soggetta al sistema di forze indicate in figura. Si noti che la forza ed il momento nodali applicati al nodo 1 ( $F_1^I$  ed  $M_1^I$ ) sono pari alle reazioni vincolari  $F_1$  ed  $M_1$ . Ciò è coerente con l'equilibrio del sistema.

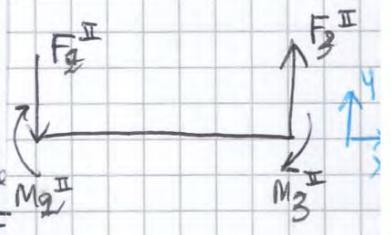
4. Ricavo  $F_2^II, M_2^II$  e verifico  $(F_3^II = F_3), (M_3^II = M_3)$   
 Per l'asta II:

$$\begin{Bmatrix} F_2^II \\ M_2^II \\ F_3^II \\ M_3^II \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 = -\frac{Fl^3}{24EJ} \\ \phi_2 = 0 \\ u_3 = 0 \\ \phi_3 = 0 \end{Bmatrix}$$

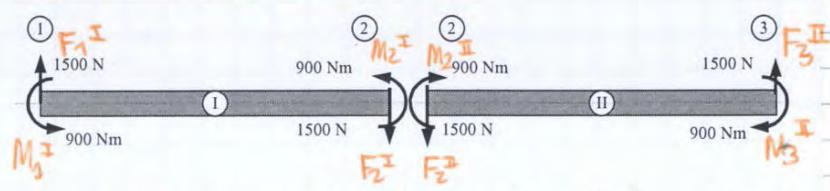
$$= \begin{Bmatrix} -\frac{F}{2} \\ \frac{2}{Fl} \\ \frac{4}{F} \\ \frac{2}{Fl} \\ \frac{2}{Fl} \\ \frac{4}{4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1500 \text{ N} \\ -900 \text{ Nm} \\ 1500 \text{ N} \\ -900 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

Nota che  $M_2^I = -M_2^II$  perché devono annullarsi

Nota che  $F_2^I = F_2^II$  in modulo uguagliano e sono  $F_2^I = F_2^II = F$



L'asta II è dunque soggetta al sistema di forze indicate in figura. Si noti che la forza ed il momento nodali applicati al nodo 3 ( $F_3^II$  ed  $M_3^II$ ) sono pari alle reazioni vincolari  $F_3$  ed  $M_3$ . Si noti anche come il momento  $M_2^I$  sia uguale e contrario al momento nodale  $M_2^II$  dovendo essere nulla la loro risultante. Le forze  $F_2^I$  e  $F_2^II$  sono invece uguali in modulo e concordi in modo da uguagliare la forza concentrata  $F_2 = -F$  sul nodo 2.



con semplici equazioni di equilibrio è possibile verificare lo stato della trave nei due tratti considerati (equilibrio alla traslazione e alla rotazione).

1.6 Calcolo delle tensioni

TENSIONI in NODI di TRAVE

$$\sigma_{max,m} = \pm \frac{M_m^I + M_m^II}{W} = \frac{6(M_m^I + M_m^II)}{bh^2}$$

$$\tau_{max,m} = \pm \frac{3}{2} \frac{(F_m^I + F_m^II)}{A}$$

Per calcolare le tensioni bisogna conoscere l'area della sezione  $A$  ed il modulo di resistenza  $W = bh^2/6 = 18000 \text{ mm}^3$ .

1.6.1 Tensioni nel nodo 1

$$\sigma_{max,1} = \pm M_1^I / W = \pm 50 \text{ MPa} \quad \text{dove } \tau = 0$$

$$\tau_{max,1} = -3/2 F_1^I / A = -1.25 \text{ MPa} \quad \text{dove } \sigma = 0$$

$$\Rightarrow e_s = \frac{Rp_2}{\sigma_{max}} = \frac{1240}{50} = 24.8$$

1.6.2 Tensioni nel nodo 2

$$\sigma_{max,2} = \pm (M_2^I + M_2^II) / W = 0 \text{ MPa}$$

$$\tau_{max,2} = 3/2 (F_2^I + F_2^II) / A = 2.5 \text{ MPa}$$

1.6.3 Tensioni nel nodo 3

$$\sigma_{max,3} = \pm M_3^II / W = \pm 50 \text{ MPa}$$

**1.3 Assemblaggio della matrice di rigidezza globale**

L'operazione di assemblaggio risulta più semplice se si tiene presente uno schema in cui venga riportata la corrispondenza tra la numerazione dei gradi di libertà dei nodi di ciascun elemento nel proprio sistema di riferimento locale (Trave I, Trave II, Asta) e la numerazione degli stessi gradi di libertà nel sistema di riferimento globale a livello di struttura complessiva:

	Nodo 1			Nodo 2			Nodo 3			Nodo 4	
G.d.l.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Struttura	$u_1$	$v_1$	$\varphi_1$	$u_2$	$v_2$	$\varphi_2$	$u_3$	$v_3$	$\varphi_3$	$u_4$	$v_4$
Trave I	$u_1$	$v_1$	$\varphi_1$	$u_2$	$v_2$	$\varphi_2$	0	0	0	0	0
Trave II	0	0	0	$u_1$	$v_1$	$\varphi_1$	$u_2$	$v_2$	$\varphi_2$	0	0
Asta	0	0	0	$u_1$	$v_1$	0	0	0	0	$u_2$	$v_2$

Si noti che i pedici "1" degli spostamenti espressi nei sistemi di riferimento locali si riferiscono al nodo coincidente con l'origine del sistema di riferimento locale stesso.

Matrice di rigidezza della prima trave:

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{EJ}{l^3} & 6\frac{EJ}{l^2} & 0 & -12\frac{EJ}{l^3} & 6\frac{EJ}{l^2} \\ 0 & 6\frac{EJ}{l^2} & 4\frac{EJ}{l} & 0 & -6\frac{EJ}{l^2} & 2\frac{EJ}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -12\frac{EJ}{l^3} & -6\frac{EJ}{l^2} & 0 & 12\frac{EJ}{l^3} & -6\frac{EJ}{l^2} \\ 0 & 6\frac{EJ}{l^2} & 2\frac{EJ}{l} & 0 & -6\frac{EJ}{l^2} & 4\frac{EJ}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{11}^I \\ F_{21}^I \\ M_1^I \\ F_{12}^I \\ F_{22}^I \\ M_2^I \end{Bmatrix}$$

↑ VETTORE SPOSTAMENTI NODALI

Matrice di rigidezza della seconda trave:

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{EJ}{l^3} & 6\frac{EJ}{l^2} & 0 & -12\frac{EJ}{l^3} & 6\frac{EJ}{l^2} \\ 0 & 6\frac{EJ}{l^2} & 4\frac{EJ}{l} & 0 & -6\frac{EJ}{l^2} & 2\frac{EJ}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -12\frac{EJ}{l^3} & -6\frac{EJ}{l^2} & 0 & 12\frac{EJ}{l^3} & -6\frac{EJ}{l^2} \\ 0 & 6\frac{EJ}{l^2} & 2\frac{EJ}{l} & 0 & -6\frac{EJ}{l^2} & 4\frac{EJ}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{22}^II \\ F_{22}^II \\ M_2^II \\ F_{23}^II \\ F_{23}^II \\ M_3^II \end{Bmatrix}$$

Matrice di rigidezza dell'asta: \*

Nel Locale

$$\begin{bmatrix} \frac{EA'}{l} & -\frac{EA'}{l} \\ \frac{-EA'}{l} & \frac{EA'}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_2 \\ f_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 \\ F_4 \end{Bmatrix}$$

→ Nel R Globale deve essere ruotata

$$[T]_{4 \times 2}^T [K]_{2 \times 2} [T]_{2 \times 4} = [K]_{4 \times 4}$$

$$[K]_{xy} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \end{Bmatrix}$$

chiamo  $e = \cos \beta$   
 $s = \sin \beta$

$$[K]_{xy} = \begin{bmatrix} e & 0 \\ s & 0 \\ 0 & e \\ 0 & s \end{bmatrix} \frac{EA'}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & s \end{bmatrix} = \frac{EA'}{l} \begin{bmatrix} e & 0 \\ s & 0 \\ 0 & e \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & s & -e & -s \\ -e & -s & e & s \end{bmatrix} = \frac{EA'}{l} \begin{bmatrix} e^2 & es & -e^2 & -es \\ es & s^2 & -es & -s^2 \\ -e^2 & -es & e^2 & es \\ -es & -s^2 & es & s^2 \end{bmatrix}$$

Ma  $\beta = 45^\circ \Rightarrow \sin \beta = \cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow e^2 = s^2 = es = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

Allora nel Globale

$$\frac{EA'}{l} \begin{bmatrix} \cos^2 \beta & \cos \beta \sin \beta & -\cos^2 \beta & -\cos \beta \sin \beta \\ \cos \beta \sin \beta & \sin^2 \beta & -\cos \beta \sin \beta & -\sin^2 \beta \\ -\cos^2 \beta & -\cos \beta \sin \beta & \cos^2 \beta & \cos \beta \sin \beta \\ -\cos \beta \sin \beta & -\sin^2 \beta & \cos \beta \sin \beta & \sin^2 \beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{22} \\ F_{24} \\ F_{42} \\ F_{44} \end{Bmatrix}$$

→ nel R  $\rightarrow x$

$$\begin{Bmatrix} F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x4} \\ F_{y4} \end{Bmatrix}$$

e cioè, nel caso di  $\beta = 45^\circ$

$$\frac{EA'}{l} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{z2} \\ F_{x2} \\ F_{z4} \\ F_{x4} \end{Bmatrix}$$

**1.4 Imposizione dei vincoli e soluzione**

Le condizioni di vincolo imposte comportano spostamenti  $u_1, u_3, u_4, v_1, v_3, v_4, \phi_1, \phi_3$  nulli. Risulta pertanto nullo anche il prodotto di tali spostamenti per i corrispondenti coefficienti della matrice di rigidità.

Eliminando le righe e colonne che risultano inutili è possibile estrarre un sistema ridotto di equazioni. Esso contiene le sole colonne in cui è significativo il prodotto dei coefficienti della matrice di rigidità per il vettore degli spostamenti nodali e le sole righe di cui si conosce il valore dei termini noti:

$$1. \begin{bmatrix} 2\frac{EA}{l} + c^2\frac{EA'}{l} & cs\frac{EA'}{l} & 0 \\ cs\frac{EA'}{l} & 24\frac{EJ}{l^3} + s^2\frac{EA'}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 8\frac{EJ}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$u_2 = -\frac{cs\frac{EA'}{l}}{2\frac{EA}{l} + c^2\frac{EA'}{l}} v_2$$

$$v_2 = -\frac{\begin{pmatrix} -\left(\frac{cs\frac{EA'}{l}\right)^2 \\ 2\frac{EA}{l} + c^2\frac{EA'}{l} \end{pmatrix} + 24\frac{EJ}{l^3} + s^2\frac{EA'}{l}}{8\frac{EJ}{l}} \phi_2$$

$$\phi_2 = 0$$

La soluzione del sistema di equazioni individuato conduce al seguente risultato:

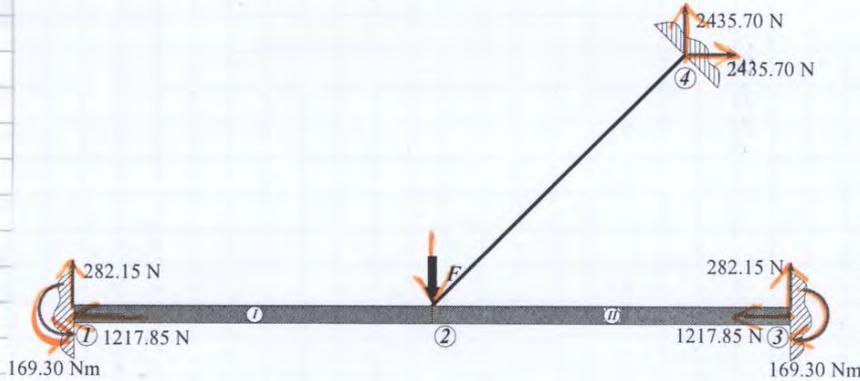
$$\begin{cases} u_2 = 0.004 \text{ mm} \\ v_2 = -0.376 \text{ mm} \\ \phi_2 = 0 \text{ rad} \end{cases}$$

**1.5 Determinazione delle reazioni vincolari**

La determinazione delle reazioni vincolari è possibile una volta noto il vettore degli spostamenti nodali della struttura. Per determinare le reazioni vincolari si riprende il sistema risolutivo ridotto senza le righe associate alle forze note ottenendo otto equazioni indipendenti, da cui si ricavano:

$F_{z1}$ [N]	$F_{x1}$ [N]	$M_1$ [Nm]	$F_{z3}$ [N]	$F_{x3}$ [N]	$M_3$ [Nm]	$F_{z4}$ [N]	$F_{x4}$ [N]
-1217.85	282.15	169.30	-1217.85	282.15	-169.30	2435.70	2435.70

Le reazioni vincolari sono indicate in figura:



L'impostazione e la soluzione di equazioni di equilibrio alla traslazione e alla rotazione permette di verificare l'equilibrio della struttura. I momenti agli incastri delle travi sono uguali ed opposti per l'equilibrio alla rotazione; la risultante delle forze orizzontali è nulla, come era prevedibile non essendoci forze esterne applicate dirette orizzontalmente. La somma delle reazioni vincolari in direzione verticale è caratterizzata dallo stesso modulo della forza esterna applicata nella mezziera della trave, ma verso opposto in modo da rispettare l'equilibrio.

La composizione delle reazioni vincolari agenti sull'asta permette di calcolare la forza assiale agente su di essa:  $F_{assa} = 3444,60 \text{ N}$ .

**1.6 Determinazione delle tensioni**

Per determinare le tensioni che si generano nella struttura, si procede in modo analogo a quanto visto nell'esercitazione 1. (Tensioni sulle travi)  
 Il valore della tensione massima nell'asta si ottiene dividendo il carico assiale per l'area della sezione trasversale:

$$\sigma_m = \frac{N}{A}$$

$$\sigma_{max} = \frac{F_{assa}}{A_{asta}} = 43.86 \text{ MPa}$$

1.  $8\frac{EJ}{l} \phi_2 = 0$   
 $\phi_2 = 0$

2.  $\left(\frac{2EA}{l} + \frac{EA'}{2l}\right) u_2 + \frac{EA'}{2l} v_2 = 0$   
 $\Rightarrow v_2 = \frac{-2Au_2 - A'v_2}{A'}$   
 $= \frac{-4A - A'}{A'} u_2$

3.  $u_2 \left[ \frac{EA'}{2l} + \frac{24EI}{l^3} + \frac{EA'}{l} \right] - \frac{4A - A'}{A'} u_2 = -F$   
 $= -F$   
 $u_2 = \frac{-F}{\frac{EA'}{2l} + \frac{24EI + EA'l^3}{A'l^3}}$   
 $(-4A - A')$

$\frac{-F}{\frac{EA'}{2l} - \frac{96EI}{A'l^3} - \frac{24EI}{A'l^3}}$   
 $\frac{-4EA}{l} - \frac{EA'}{l}$   
 $= \frac{3000 \text{ N}}{6545 - 137509,5 - 1500 - 1200000 - 13090}$

$\frac{3000}{-1345554,5} = -0,0022$   
 analogo errore di calcolo!

Quindi per le tre aste si ha:

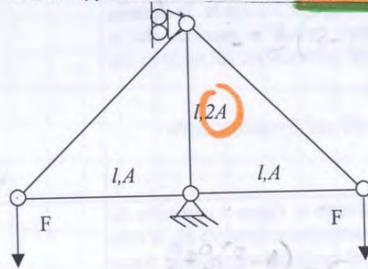
$$[k]^{I}_{XYZ} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [k]^{II}_{XYZ} = \frac{EA}{\sqrt{2}l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad [k]^{III}_{XYZ} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si procede adesso all'assemblaggio prevedendo una matrice di rigidezza complessiva di dimensioni pari al numero di gradi di libertà della struttura intera: 6x6.

Seguendo la mappa di corrispondenza:

$$[K]_{XYZ} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} + 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{X1} \\ F_{Z1} \\ F_{X2} \\ F_{Z2} \\ F_{X3} \\ F_{Z3} \end{Bmatrix}$$

La stessa struttura trattata sinora può rappresentare la metà di una struttura simmetrica:



Si faccia caso all'area doppia che deve avere la struttura simmetrica affinché la struttura precedente possa essere considerata la sua metà simmetrica.

Se il carico è altrettanto simmetrico, gli spostamenti e le reazioni trovati per metà struttura potranno essere considerati uguali a quelli della metà speculare. In particolare la reazione sul puntone centrale risulterà il doppio di quella calcolata con metà struttura.

$15 - (2+2+4+4+2+2) = -1$  la struttura è una volta iperstatica!

~~con intern~~  $\rightarrow$  ~~con est~~  $\rightarrow$  ?  $\rightarrow$  ~~la stessa~~ ~~2 aste~~ ~~- ripete~~  $\rightarrow$  ~~la stessa~~  
 calcolo reazioni e spostamenti: **Non 1 per l'arretto?**

Data la scrittura di rigidezza nel sistema di riferimento globale:  $[k]\{s\} = \{F\}$

considerando che  $U_1=0, U_2=0, U_5=0, F_3=0, F_4=-100 \text{ kN}, F_6=0$  il sistema diventa:

$$400000 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} + 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_3 \\ U_4 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \\ F_5 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -100000 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Risolviendo il primo set di equazioni composto dalla riga 3, 4, 6 si trova:

$$\begin{cases} 4 \cdot 10^5 \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) U_3 + 4 \cdot 10^5 \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) U_4 + 4 \cdot 10^5 \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) U_6 = 0 \\ 4 \cdot 10^5 \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) U_3 + 4 \cdot 10^5 \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) U_4 + 4 \cdot 10^5 \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) U_6 = -100000 \\ 4 \cdot 10^5 \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) U_3 - 4 \cdot 10^5 \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) U_4 + 4 \cdot 10^5 \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + 1\right) U_6 = 0 \end{cases}$$

da cui  $U_3 = -0.25 \text{ mm}, U_4 = -1.21 \text{ mm}, U_6 = -0.25 \text{ mm}$

Analogamente si svolge il secondo sistema di tre equazioni (prima, seconda e quinta) in tre incognite per ricavare le reazioni ai nodi:

$$\begin{cases} -4 \cdot 10^5 U_3 = F_1 = 100 \text{ kN} \\ -4 \cdot 10^5 U_6 = F_2 = 100 \text{ kN} \\ 4 \cdot 10^5 \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) U_3 + 4 \cdot 10^5 \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) U_4 + 4 \cdot 10^5 \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) U_6 = F_5 = -100 \text{ kN} \end{cases}$$

Continua...

Ricorrendo alla mappa si assembla la matrice e si ottiene:

$$[K]_{xyz} = \frac{EA}{2h} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{3\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{3\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{3}{4} & -\frac{3\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{4} & \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix}$$

Sostituendo i valori numerici:

$$[K]_{xyz} = \begin{bmatrix} 7071 & 7071 & 0 & 0 & -7071 & -7071 \\ 7071 & 7071 & 0 & 0 & -7071 & -7071 \\ 0 & 0 & 4330 & 7500 & -4330 & -7500 \\ 0 & 0 & 7500 & 12990 & -7500 & -12990 \\ -7071 & -7071 & -4330 & -7500 & 11401 & 14571 \\ -7071 & -7071 & -7500 & -12990 & 14571 & 20061 \end{bmatrix}$$

Data la scrittura di rigidezza:  $[K]\{s\} = \{F\}$

considerando che  $U_1=0, U_2=0, U_3=0, U_4=0, U_5=0, F_6=F/2=4000$  N diventa:

$$\begin{bmatrix} 7071 & 7071 & 0 & 0 & -7071 & -7071 \\ 7071 & 7071 & 0 & 0 & -7071 & -7071 \\ 0 & 0 & 4330 & 7500 & -4330 & -7500 \\ 0 & 0 & 7500 & 12990 & -7500 & -12990 \\ -7071 & -7071 & -4330 & -7500 & 11401 & 14571 \\ -7071 & -7071 & -7500 & -12990 & 14571 & 20061 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ 4000 \end{Bmatrix}$$

Per trovare  $U_6$  si risolve negli spostamenti (6<sup>a</sup> riga) e si ottiene:

$$20061 U_6 = 4000$$

da cui:

$$U_6 = 0.199 \text{ mm}$$

Per ricavare le reazioni vincolari risolvo dalla 1<sup>a</sup> alla 5<sup>a</sup> riga:

$$F_1 = -7071 U_6 = -1410 \text{ N}$$

$$F_2 = -7071 U_6 = -1410 \text{ N}$$

$$F_3 = -7500 U_6 = -1495 \text{ N}$$

$$F_4 = -12990 U_6 = -2590 \text{ N}$$

$$F_5 = 14571 U_6 = 2905 \text{ N}$$

Si può verificare l'equilibrio della struttura in quanto  $F_1 + F_3 + F_5 = 0$  e  $F_2 + F_4 + F/2 = 0$

Gli sforzi nelle aste valgono

$$N_I = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = 1994 \text{ N}$$

$$N_{II} = \sqrt{F_3^2 + F_4^2} = 2990 \text{ N}$$

da cui si ricavano le tensioni

$$\sigma_I = N_I / A = 20 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{II} = N_{II} / A = 30 \text{ MPa}$$

$$N_{numASTA} = \sqrt{F_{numNODO}^2 + F_{numNODO}^2}$$

$$\sigma_{numASTA} = \frac{N_{numASTA}}{A}$$

$\rightarrow +4000$   
F ha verso + rispetto a R

Carrellino

Sostituendo i valori numerici:

$$[K]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 22500 & -12990 & -22500 & 12990 & 0 & 0 \\ -12990 & 7500 & 12990 & -7500 & 0 & 0 \\ -22500 & 12990 & 26830 & -5490 & -4330 & -7500 \\ 12990 & -7500 & -5490 & 20490 & -7500 & -12990 \\ 0 & 0 & -4330 & -7500 & 4330 & 7500 \\ 0 & 0 & -7500 & -12990 & 7500 & 12990 \end{bmatrix}$$

Data la scrittura di rigidezza:  $[k]\{s\} = \{f\} + \{f_e\}$

considerando che  $U_1=0, U_2=0, U_5=0, U_6=0, F_3=-F=3000$  N, le equazioni di equilibrio diventano:

$$\begin{bmatrix} 22500 & -12990 & -22500 & 12990 & 0 & 0 \\ -12990 & 7500 & 12990 & -7500 & 0 & 0 \\ -22500 & 12990 & 26830 & -5490 & -4330 & -7500 \\ 12990 & -7500 & -5490 & 20490 & -7500 & -12990 \\ 0 & 0 & -4330 & -7500 & 4330 & 7500 \\ 0 & 0 & -7500 & -12990 & 7500 & 12990 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = -3000 \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_6 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_{e1} \\ F_{e2} \\ F_{e3} \\ F_{e4} \\ F_{e5} \\ F_{e6} \end{Bmatrix}$$

Per ricavare i carichi nodali equivalenti si consideri che:  $\{F_e\} = [R]^T \{f_e\}$

Per la dilatazione termica si avrà:

$$\{F_e\} = \alpha E A T_m \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \vartheta & \sin \vartheta \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \alpha E A T_m \begin{Bmatrix} -\cos \vartheta \\ -\sin \vartheta \\ \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{Bmatrix}$$

Per le due aste:

$$\{F_e\}_I = \alpha E A T_m \begin{Bmatrix} -\cos \vartheta_I \\ -\sin \vartheta_I \\ \cos \vartheta_I \\ \sin \vartheta_I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -14549 \\ 8400 \\ 14549 \\ -8400 \end{Bmatrix}$$

$$\{F_e\}_{II} = \alpha E A T_m \begin{Bmatrix} -\cos \vartheta_{II} \\ -\sin \vartheta_{II} \\ \cos \vartheta_{II} \\ \sin \vartheta_{II} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8400 \\ 14549 \\ -8400 \\ -14549 \end{Bmatrix}$$

Si ottiene quindi:

$$\begin{bmatrix} 22500 & -12990 & -22500 & 12990 & 0 & 0 \\ -12990 & 7500 & 12990 & -7500 & 0 & 0 \\ -22500 & 12990 & 26830 & -5490 & -4330 & -7500 \\ 12990 & -7500 & -5490 & 20490 & -7500 & -12990 \\ 0 & 0 & -4330 & -7500 & 4330 & 7500 \\ 0 & 0 & -7500 & -12990 & 7500 & 12990 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = -3000 \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_6 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -14549 \\ 8400 \\ 22949 \\ 6149 \\ -8400 \\ -14549 \end{Bmatrix}$$

Per trovare  $U_3$  e  $U_4$  si risolve negli spostamenti (3<sup>a</sup> e 4<sup>a</sup> riga) e si ottiene:

$$26830 U_3 - 5490 U_4 = 22949$$

$$-5490 U_3 + 20490 U_4 = -3000 + 6149$$

da cui

$$U_3 = 0.938 \text{ mm}$$

$$U_4 = 0.405 \text{ mm}$$

Per ricavare le reazioni vincolari risolvo la 1<sup>a</sup>, la 2<sup>a</sup>, la 5<sup>a</sup> e la 6<sup>a</sup> riga:

$$F_1 = -22500 U_3 + 12990 U_4 + 14549 = -1300 \text{ N}$$

$$F_2 = 12990 U_3 - 7500 U_4 - 8400 = 750 \text{ N}$$

$$F_5 = -4330 U_3 - 7500 U_4 + 8400 = 1300 \text{ N}$$

$$F_6 = -7500 U_3 - 12990 U_4 + 14549 = 2250 \text{ N}$$

Si può verificare l'equilibrio della struttura in quanto  $F_1 + 0 + F_5 = 0$  e  $F_2 - F + F_6 = 0$

Gli sforzi nelle aste valgono:

$$N_I = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = 1500 \text{ N}$$

$$N_{II} = \sqrt{F_5^2 + F_6^2} = 2598 \text{ N}$$

da cui si ricavano le tensioni:

$$\sigma_I = N_I / A = 12,5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{II} = N_{II} / A = 21,6 \text{ MPa}$$

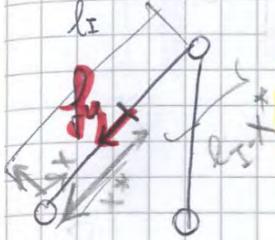
Sostituendo i valori numerici

$$[K]_{xyz} = \begin{bmatrix} 14142 & 14142 & -14142 & -14142 & 0 & 0 \\ 14142 & 14142 & -14142 & -14142 & 0 & 0 \\ -14142 & -14142 & 14142 & 14142 & 0 & 0 \\ -14142 & -14142 & 14142 & 34142 & 0 & -20000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -20000 & 0 & 20000 \end{bmatrix}$$

Data la scrittura di rigidezza:  $[k]\{s\} = \{f\} + \{f_e\}$

considerando che  $U_1=0, U_2=0, U_3=0$  (per la simmetria),  $U_5=0, U_6=0, F_4=2000$  N diventa:

$$\begin{bmatrix} 14142 & 14142 & -14142 & -14142 & 0 & 0 \\ 14142 & 14142 & -14142 & -14142 & 0 & 0 \\ -14142 & -14142 & 14142 & 14142 & 0 & 0 \\ -14142 & -14142 & 14142 & 34142 & 0 & -20000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -20000 & 0 & 20000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ 2000 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{e1} \\ F_{e2} \\ F_{e3} \\ F_{e4} \\ F_{e5} \\ F_{e6} \end{bmatrix}$$



Per ricavare i carichi nodali equivalenti si consideri che  $\{F_e\} = [R]^T \{f_e\}$

$$\{f_e\} = \frac{f_u}{l_1} \begin{bmatrix} l_1 - x^* \\ x^* \end{bmatrix} = \frac{f_u}{l_1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot l_1 \\ \frac{1}{2} \cdot l_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} f_u \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nel sistema di riferimento globale:

$$\{F_e\} = \frac{1}{2} f_u \cdot \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \vartheta & \sin \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} f_u \cdot \begin{bmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{bmatrix}$$

$$\{F_e\} = \{f_e\} \begin{bmatrix} \cos \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & 0 \\ 0 & \cos \vartheta \\ 0 & \sin \vartheta \end{bmatrix}$$

Per l'asta I ( $f_u = -2000$  N)

$$\{F_e\} = \frac{1}{2} f_u \cdot \begin{bmatrix} \cos \vartheta_1 \\ \sin \vartheta_1 \\ \cos \vartheta_1 \\ \sin \vartheta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -707 \\ -707 \\ -707 \\ -707 \end{bmatrix}$$

Si ottiene quindi:

$$\begin{bmatrix} 14142 & 14142 & -14142 & -14142 & 0 & 0 \\ 14142 & 14142 & -14142 & -14142 & 0 & 0 \\ -14142 & -14142 & 14142 & 14142 & 0 & 0 \\ -14142 & -14142 & 14142 & 34142 & 0 & -20000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -20000 & 0 & 20000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ 2000 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -707 \\ -707 \\ -707 \\ -707 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Per trovare  $u_4$  si risolve negli spostamenti (4ª riga) e si ottiene:

$$34142 U_4 = 2000 - 707$$

da cui:

$$U_4 = 0,038 \text{ mm}$$

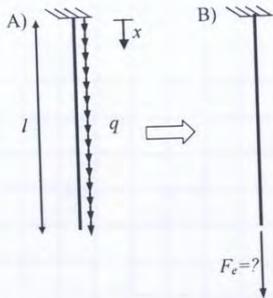
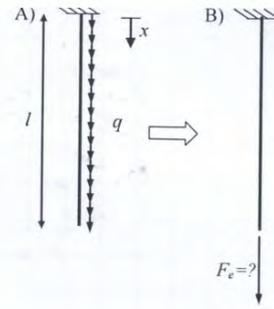
Per ricavare le reazioni vincolari risolvo la 1ª, la 2ª, la 3ª, la 5ª e la 6ª riga:

$$\begin{aligned} F_1 &= -14142 U_4 + 707 = 171 \text{ N} \\ F_2 &= -14142 U_4 + 707 = 171 \text{ N} \\ F_3 &= 14142 U_4 + 707 = 1243 \text{ N} \\ F_5 &= 0 \text{ N} \\ F_6 &= -20000 U_4 = -757 \text{ N} \end{aligned}$$

Si può verificare l'equilibrio della struttura in quanto:

$$F_1 + F_3 + F_5 + 2000\sqrt{2}/2 = 0 \text{ e } F_2 - 2000\sqrt{2}/2 + 2000 + F_6 = 0$$

**2. soluzione** Una asta di sezione circolare e appesa al soffitto ed è caricata unicamente dal proprio peso riconducibile ad un carico distribuito  $q$ . Sapendo che l'asta è in acciaio, **determinare il carico nodale equivalente  $F_e$  da adottare per calcolare lo stato di tensione con il metodo degli elementi finiti (calcolo matriciale).** Commentare inoltre **il grado di approssimazione generato da tale approccio diagrammando lo stato di tensione all'interno dell'asta.**  
 Dati:  $E=2 \cdot 10^5$  MPa,  $l=5$ m, diametro  $D=10$ mm, densità  $\rho=7800$  kg/m<sup>3</sup>



$$A = \pi \cdot \frac{D^2}{4} = \pi \cdot \frac{10^2}{4} = 78.54 \text{ mm}^2 \text{ area asta}$$

$$m = \rho \cdot A \cdot l = 7800 \cdot 10^{-9} \cdot 78.54 \cdot 5000 = 3.1 \text{ kg massa dell'asta}$$

$$F_p = m \cdot g = 3.1 \cdot 9.81 = 30 \text{ N forza peso}$$

$$q = \frac{F_p}{l} = \frac{30}{5} = 6 \text{ N/m carico per unità di lunghezza sull'asta}$$

A) Calcolo della tensione nell'asta in modo esatto:

$$R = q \cdot l = F_p = 30 \text{ N reazione vincolare}$$

$$N = R - q \cdot x = 30 - 6 \cdot x \text{ sforzo normale (variabile linearmente con } x)$$

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{30 - 6 \cdot x}{78.54} \text{ MPa tensione nell'asta (variabile linearmente con } x)$$

$$\sigma_{\max} = \sigma(x=0) = \frac{30}{78.54} = 0.38 \text{ MPa tensione massima (per } x=0 \text{ cioè nella sezione vincolata)}$$

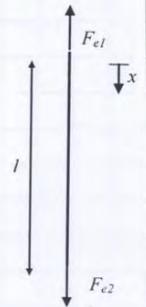
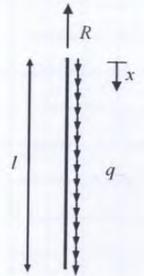
B) Calcolo della tensione nell'asta a partire dai carichi nodali equivalenti

Il vettore dei carichi nodali equivalenti a un carico distribuito è pari a:

$$\{f_e\} = \begin{Bmatrix} F_{e1} \\ F_{e2} \end{Bmatrix} = \frac{ql}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{6 \cdot 5}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = 15 \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \text{ N}$$

$$N = F_{e1} = 15 \text{ N sforzo normale (costante con } x)$$

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{15}{78.54} = 0.19 \text{ MPa tensione nell'asta costante con } x$$



La tensione nell'asta si può calcolare anche a partire dagli spostamenti nodali dovuti ai carichi nodali equivalenti:

$$\frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{e1} \\ F_{e2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{e1} \\ F_{e2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R \\ 0 \end{Bmatrix}$$

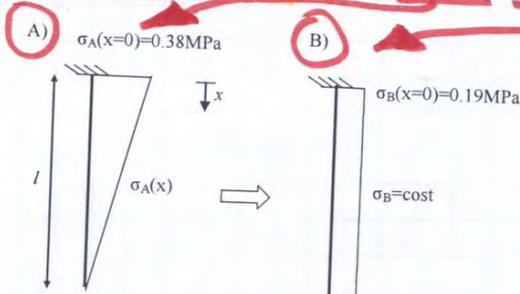
$$u_2 = \frac{F_{e2} \cdot l}{E \cdot A} \quad u_1 = 0$$

$$\{\sigma\} = [E]\{\epsilon\} = [E][b]\{s\} = [E] \cdot \begin{bmatrix} -1/l & 1/l \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$\sigma = \frac{E}{l} \cdot (u_2 - u_1) = \frac{E}{l} \cdot \left( \frac{F_{e2} \cdot l}{E \cdot A} \right) = \frac{F_{e2}}{A} = \frac{15}{78.54} = 0.19 \text{ MPa}$$

*Non ci sono forze orizzontali  
 => basta 0 u o v*

Diagramma dell'andamento delle tensioni nei due casi: A) caso esatto, b) caso con i carichi nodali equivalenti



Si procede adesso all'assemblaggio:  $\{F\}_{TOT} = [K]_{TOT} \{U\}_{TOT}$  prevedendo una matrice di rigidità complessiva di dimensioni pari al numero di gradi di libertà della struttura intera:  $9 \times 9$ .  
 Sommando la matrice di corrispondenza:

$$[K]_{TOT} = \begin{bmatrix} EI \frac{12}{8l^3} s^2 & -EI \frac{12}{8l^3} cs & -EI \frac{6}{4l^2} s & -EI \frac{12}{8l^3} s^2 & EI \frac{12}{8l^3} cs & -EI \frac{6}{4l^2} s & 0 & 0 & 0 \\ -EI \frac{12}{8l^3} cs & EI \frac{12}{8l^3} c^2 & EI \frac{6}{4l^2} c & EI \frac{12}{8l^3} cs & -EI \frac{12}{8l^3} c^2 & EI \frac{6}{4l^2} c & 0 & 0 & 0 \\ -EI \frac{6}{4l^2} s & EI \frac{6}{4l^2} c & EI \frac{4}{2l} & EI \frac{6}{4l^2} s & -EI \frac{6}{4l^2} c & EI \frac{2}{2l} & 0 & 0 & 0 \\ -EI \frac{12}{8l^3} s^2 & EI \frac{12}{8l^3} cs & EI \frac{6}{4l^2} s & EI \frac{12}{8l^3} s^2 + EI \frac{12}{l^3} s^2 & -EI \frac{12}{8l^3} cs - EI \frac{12}{l^3} cs & EI \frac{6}{4l^2} s - EI \frac{6}{l^2} s & -EI \frac{12}{l^3} s^2 & EI \frac{12}{l^3} cs & -EI \frac{6}{l^2} s \\ EI \frac{12}{8l^3} cs & -EI \frac{12}{8l^3} c^2 & -EI \frac{6}{4l^2} c & -EI \frac{12}{8l^3} cs - EI \frac{12}{l^3} cs & EI \frac{12}{8l^3} c^2 + EI \frac{12}{l^3} c^2 & -EI \frac{6}{4l^2} c + EI \frac{6}{l^2} c & EI \frac{12}{l^3} cs & -EI \frac{12}{l^3} c^2 & EI \frac{6}{l^2} c \\ -EI \frac{6}{4l^2} s & EI \frac{6}{4l^2} c & EI \frac{4}{2l} & EI \frac{6}{4l^2} s & -EI \frac{6}{4l^2} c & EI \frac{2}{2l} & EI \frac{6}{l^2} s & -EI \frac{6}{l^2} c & EI \frac{2}{l} \\ 0 & 0 & 0 & -EI \frac{12}{l^3} s^2 & EI \frac{12}{l^3} cs & EI \frac{6}{l^2} s & EI \frac{12}{l^3} s^2 & -EI \frac{12}{l^3} cs & EI \frac{6}{l^2} s \\ 0 & 0 & 0 & EI \frac{12}{l^3} cs & -EI \frac{12}{l^3} c^2 & -EI \frac{6}{l^2} c & -EI \frac{12}{l^3} cs & EI \frac{12}{l^3} c^2 & -EI \frac{6}{l^2} c \\ 0 & 0 & 0 & -EI \frac{6}{l^2} s & EI \frac{6}{l^2} c & EI \frac{2}{l} & EI \frac{6}{l^2} s & -EI \frac{6}{l^2} c & EI \frac{4}{l} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_{x,1} \\ F_{y,1} \\ M_1 \\ F_{x,2} \\ F_{y,2} \\ M_2 \\ F_{x,3} \\ F_{y,3} \\ M_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{x,3} \\ F_{y,3} \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EI \frac{12}{8l^3} s^2 & -EI \frac{12}{8l^3} cs & -EI \frac{6}{4l^2} s & -EI \frac{12}{8l^3} s^2 & EI \frac{12}{8l^3} cs & -EI \frac{6}{4l^2} s & 0 & 0 & 0 \\ -EI \frac{12}{8l^3} cs & EI \frac{12}{8l^3} c^2 & EI \frac{6}{4l^2} c & EI \frac{12}{8l^3} cs & -EI \frac{12}{8l^3} c^2 & EI \frac{6}{4l^2} c & 0 & 0 & 0 \\ -EI \frac{6}{4l^2} s & EI \frac{6}{4l^2} c & EI \frac{4}{2l} & EI \frac{6}{4l^2} s & -EI \frac{6}{4l^2} c & EI \frac{2}{2l} & 0 & 0 & 0 \\ -EI \frac{12}{8l^3} s^2 & EI \frac{12}{8l^3} cs & EI \frac{6}{4l^2} s & EI \frac{12}{8l^3} s^2 + EI \frac{12}{l^3} s^2 & -EI \frac{12}{8l^3} cs - EI \frac{12}{l^3} cs & EI \frac{6}{4l^2} s - EI \frac{6}{l^2} s & -EI \frac{12}{l^3} s^2 & EI \frac{12}{l^3} cs & -EI \frac{6}{l^2} s \\ EI \frac{12}{8l^3} cs & -EI \frac{12}{8l^3} c^2 & -EI \frac{6}{4l^2} c & -EI \frac{12}{8l^3} cs - EI \frac{12}{l^3} cs & EI \frac{12}{8l^3} c^2 + EI \frac{12}{l^3} c^2 & -EI \frac{6}{4l^2} c + EI \frac{6}{l^2} c & EI \frac{12}{l^3} cs & -EI \frac{12}{l^3} c^2 & EI \frac{6}{l^2} c \\ -EI \frac{6}{4l^2} s & EI \frac{6}{4l^2} c & EI \frac{4}{2l} & EI \frac{6}{4l^2} s & -EI \frac{6}{4l^2} c & EI \frac{2}{2l} & EI \frac{6}{l^2} s & -EI \frac{6}{l^2} c & EI \frac{2}{l} \\ 0 & 0 & 0 & -EI \frac{12}{l^3} s^2 & EI \frac{12}{l^3} cs & EI \frac{6}{l^2} s & EI \frac{12}{l^3} s^2 & -EI \frac{12}{l^3} cs & EI \frac{6}{l^2} s \\ 0 & 0 & 0 & EI \frac{12}{l^3} cs & -EI \frac{12}{l^3} c^2 & -EI \frac{6}{l^2} c & -EI \frac{12}{l^3} cs & EI \frac{12}{l^3} c^2 & -EI \frac{6}{l^2} c \\ 0 & 0 & 0 & -EI \frac{6}{l^2} s & EI \frac{6}{l^2} c & EI \frac{2}{l} & EI \frac{6}{l^2} s & -EI \frac{6}{l^2} c & EI \frac{4}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{x,1} \\ U_{y,1} \\ \alpha_1 \\ U_{x,2} \\ U_{y,2} \\ \alpha_2 \\ U_{x,3} \\ U_{y,3} \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

Si calcolano adesso per l'elemento 1 i carichi nodali equivalenti ruotati nel sistema di riferimento globale:

$$\{F_{e,1}\}_{GLOBAL} = [R]^T \{f_{e,1}\}_{LOC} = \begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{2l}{2} \sin \theta \\ \frac{2l}{2} \cos \theta \\ \frac{4l^2}{12} \\ \frac{2l}{2} \sin \theta \\ \frac{2l}{2} \cos \theta \\ \frac{4l^2}{12} \end{bmatrix} = q \begin{bmatrix} F_{e,1} \\ F_{e,2} \\ F_{e,3} \\ F_{e,4} \\ F_{e,5} \\ F_{e,6} \end{bmatrix}$$

Si considerino i vincoli cioè  $U_1=0, U_2=0, U_3=0, U_4=0, U_5=0, U_6=0, F_1=0, F_2=0, F_3=0, F_4=0, F_5=0, F_6=0$ . successivamente si risolve il problema agli spostamenti, ricordando di applicare il carico nodale equivalente dovuto alla distribuzione di taglio.

$$\begin{bmatrix} H_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ 0 \\ 0 \\ H_3 \\ V_3 \\ M_3 \end{bmatrix} + q \begin{bmatrix} 2l \\ 2l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EI \frac{12}{8l^3} s^2 & -EI \frac{12}{8l^3} cs & -EI \frac{6}{4l^2} s & -EI \frac{12}{8l^3} s^2 & EI \frac{12}{8l^3} cs & -EI \frac{6}{4l^2} s & 0 & 0 & 0 \\ -EI \frac{12}{8l^3} cs & EI \frac{12}{8l^3} c^2 & EI \frac{6}{4l^2} c & EI \frac{12}{8l^3} cs & -EI \frac{12}{8l^3} c^2 & EI \frac{6}{4l^2} c & 0 & 0 & 0 \\ -EI \frac{6}{4l^2} s & EI \frac{6}{4l^2} c & EI \frac{4}{2l} & EI \frac{6}{4l^2} s & -EI \frac{6}{4l^2} c & EI \frac{2}{2l} & 0 & 0 & 0 \\ -EI \frac{12}{8l^3} s^2 & EI \frac{12}{8l^3} cs & EI \frac{6}{4l^2} s & EI \frac{12}{8l^3} s^2 + EI \frac{12}{l^3} s^2 & -EI \frac{12}{8l^3} cs - EI \frac{12}{l^3} cs & EI \frac{6}{4l^2} s - EI \frac{6}{l^2} s & -EI \frac{12}{l^3} s^2 & EI \frac{12}{l^3} cs & -EI \frac{6}{l^2} s \\ EI \frac{12}{8l^3} cs & -EI \frac{12}{8l^3} c^2 & -EI \frac{6}{4l^2} c & -EI \frac{12}{8l^3} cs - EI \frac{12}{l^3} cs & EI \frac{12}{8l^3} c^2 + EI \frac{12}{l^3} c^2 & -EI \frac{6}{4l^2} c + EI \frac{6}{l^2} c & EI \frac{12}{l^3} cs & -EI \frac{12}{l^3} c^2 & EI \frac{6}{l^2} c \\ -EI \frac{6}{4l^2} s & EI \frac{6}{4l^2} c & EI \frac{4}{2l} & EI \frac{6}{4l^2} s & -EI \frac{6}{4l^2} c & EI \frac{2}{2l} & EI \frac{6}{l^2} s & -EI \frac{6}{l^2} c & EI \frac{2}{l} \\ 0 & 0 & 0 & -EI \frac{12}{l^3} s^2 & EI \frac{12}{l^3} cs & EI \frac{6}{l^2} s & EI \frac{12}{l^3} s^2 & -EI \frac{12}{l^3} cs & EI \frac{6}{l^2} s \\ 0 & 0 & 0 & EI \frac{12}{l^3} cs & -EI \frac{12}{l^3} c^2 & -EI \frac{6}{l^2} c & -EI \frac{12}{l^3} cs & EI \frac{12}{l^3} c^2 & -EI \frac{6}{l^2} c \\ 0 & 0 & 0 & -EI \frac{6}{l^2} s & EI \frac{6}{l^2} c & EI \frac{2}{l} & EI \frac{6}{l^2} s & -EI \frac{6}{l^2} c & EI \frac{4}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_{x,2} \\ U_{y,2} \\ \alpha_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

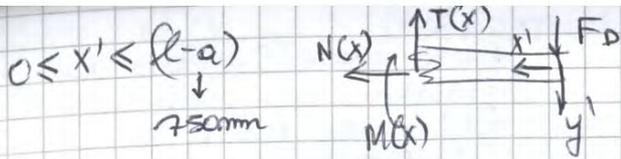
Le equazioni con spostamenti incogniti sono:

$$\begin{bmatrix} EI \frac{12}{8l^3} s^2 + EI \frac{12}{l^3} s^2 & -EI \frac{12}{8l^3} cs - EI \frac{12}{l^3} cs & EI \frac{6}{4l^2} s - EI \frac{6}{l^2} s \\ -EI \frac{12}{8l^3} cs - EI \frac{12}{l^3} cs & EI \frac{12}{8l^3} c^2 + EI \frac{12}{l^3} c^2 & -EI \frac{6}{4l^2} c + EI \frac{6}{l^2} c \\ EI \frac{6}{4l^2} s - EI \frac{6}{l^2} s & -EI \frac{6}{4l^2} c + EI \frac{6}{l^2} c & EI \frac{4}{2l} + EI \frac{4}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{x,2} \\ U_{y,2} \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + q \begin{bmatrix} -2l \\ 2l \\ 4l^2 \\ 2l \\ 2l \\ 12 \end{bmatrix}$$

Le equazioni con le reazioni vincolari incognite sono:

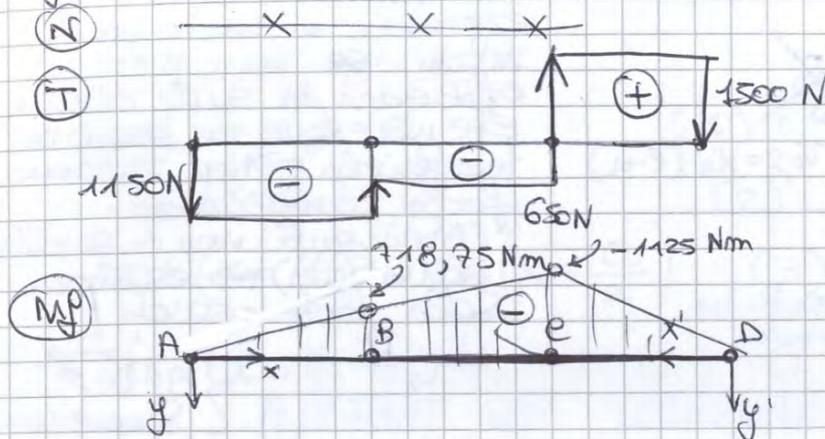
$$\begin{bmatrix} -EI \frac{12}{8l^3} s^2 & EI \frac{12}{8l^3} cs & -EI \frac{6}{4l^2} s \\ EI \frac{12}{8l^3} cs & -EI \frac{12}{8l^3} c^2 & EI \frac{6}{4l^2} c \\ EI \frac{6}{4l^2} s & -EI \frac{6}{4l^2} c & EI \frac{2}{2l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{x,2} \\ U_{y,2} \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{x,1} \\ F_{y,1} \\ M_1 \end{bmatrix} + q \begin{bmatrix} 2l \\ 2l \\ 4l^2 \\ 2l \\ 2l \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -EI \frac{12}{l^3} s^2 & EI \frac{12}{l^3} cs & EI \frac{6}{l^2} s \\ EI \frac{12}{l^3} cs & -EI \frac{12}{l^3} c^2 & -EI \frac{6}{l^2} c \\ -EI \frac{6}{l^2} s & EI \frac{6}{l^2} c & EI \frac{2}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{x,2} \\ U_{y,2} \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{x,3} \\ F_{y,3} \\ M_3 \end{bmatrix}$$



$T(x) = F_D = 1500 \text{ N}$   
 $N(x) = 0$   
 $M(x) = -F_D x'$  (lineare)  
 $M(0) = 0$   
 $M(l-a) = -1125 \text{ Nm}$

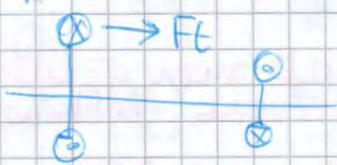
Diagrammi



c'è flessione su (xy), ma  
 su (zx)  
 le fibre tese si trovano  
 in alto

$M^D = F_D \frac{d_1}{2} = M^B = F_D \frac{d_2}{2} = 60000 \text{ Nm}$   
 $= 60 \text{ Nm}$

Se ci fosse stata anche una forza tangenziale



allora ho  $N_f$  anche su (zx)

Se me la avesse chiesto...

e è il punto più sollecitato  $\Rightarrow$  studio la sezione in c

Studio le tensioni distribuite  $\Rightarrow$  le  $\sigma$ , le  $\tau$

ed eventualmente confrontare la

tensione equivalente con quella di snervamento

### 1.3 lo spostamento dell'estremo D

METODO ①

Utilizzo il metodo della sovrapposizione degli effetti:

Si trasforma una struttura complessa in struttura elementare in modo semplice (v. cui componenti li trovo in tabella)

Somma i risultati per ottenere quelli della struttura completa. Certo usiamo perché utilizzeremo nella realtà i CALCOLI - R

METODO ②

Prendo il diagramma di  $M_f$  e lo integro due volte su tutta la struttura tenendo conto che in presenza di una discontinuità devo spezzare la doppia integrazione in quel punto

(Nel nostro caso 6 integrazioni, 6 costanti di integrazione, 6 condizioni al contorno)

$$BC \quad \frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{M}{EI} = -\frac{(-F/2)x + Fx - Fa/2}{EI}$$

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{1}{EI} \left( \frac{(-F/2)x^2 + Fx^2}{2} - \frac{Fa}{2}x + e_3 \right)$$

$$V_{Be} = -\frac{1}{EI} \left( \frac{(-F/2)x^3 + Fx^3}{6} - \frac{Fa}{4}x^2 + e_3x + e_4 \right)$$

Condizioni al contorno

$$V_{AB}(x=0) = 0 \quad (1)$$

$$V_{Be}(x=a) = 0 \quad (2)$$

$$V_{AB}(x=\frac{a}{2}) = V_{Be}(x=\frac{a}{2}) \quad (3)$$

$$\alpha_{AB}(x=\frac{a}{2}) = \alpha_{Be}(x=\frac{a}{2}) \quad (4)$$

$$(1) \Rightarrow e_2 = 0$$

$$(4) \quad -\frac{F}{2 \cdot 2} \left(\frac{a}{2}\right)^2 + e_1 = -\frac{F}{2 \cdot 2} \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{F}{2} \left(\frac{a}{2}\right)^2 - F \left(\frac{a}{2}\right)^2 + e_3$$

$$e_1 = -\frac{1}{2 \cdot 4} Fa^2 + e_3 = -\frac{1}{8} Fa^2 + e_3$$

$$(3) \quad e_1 \left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{Fa}{4} \left(\frac{a}{2}\right)^2 + e_3 \left(\frac{a}{2}\right) + e_4 + \frac{F}{6} \left(\frac{a}{2}\right)^3$$

$$e_1 = \frac{2}{a} \left[ -\frac{Fa}{16} a^3 + e_3 \frac{a}{2} + e_4 + \frac{F a^3}{48} \right]$$

$$= -\frac{Fa^2}{8} + e_3 + e_4 \frac{2}{a} + \frac{Fa^2}{24}$$

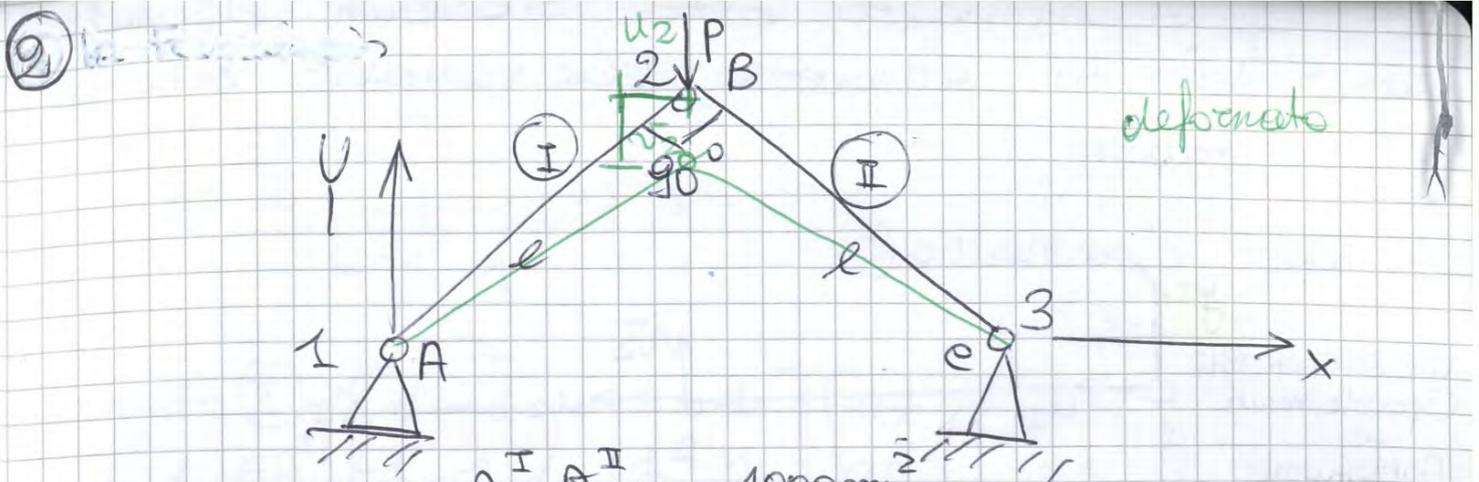
$$\Rightarrow -\frac{Fa^2}{8} + \frac{Fa^2}{24} + e_3 + e_4 \frac{2}{a} = -\frac{1}{8} Fa^2 + e_3$$

$$e_4 = \frac{a}{2} \left[ -\frac{Fa^2}{24} \right] = -\frac{Fa^3}{48}$$

$$(2) \quad -\frac{1}{EI} \left( \frac{-F a^3}{2 \cdot 6} + \frac{F a^3}{6} - \frac{F a^3}{4} + e_3 a - \frac{F a^3}{48} \right) = 0$$

$$\Rightarrow e_3 = \frac{1}{a} \left( -\frac{-4+8-12-1}{48} Fa^3 \right) = Fa^2 \left( \frac{9}{48} \right) = \frac{3}{16} Fa^2$$

$$\Rightarrow e_1 = -\frac{1}{8} Fa^2 + \frac{3}{16} Fa^2 = \frac{-2+3}{16} Fa^2 = \frac{1}{16} Fa^2$$



$A^I = 10 \text{ cm}^2$   
 $A^{II} = 20 \text{ cm}^2$   
 $l = 4 \text{ m} = 1000 \text{ mm}$   
 $P = 200 \text{ kN} = 200\,000 \text{ N}$

$A^I - A^{II} = -10000 \text{ mm}^2$   
 $A^I + A^{II} = 30000 \text{ mm}^2$   
 $A^{II} - A^I = 10000 \text{ mm}^2$

$\text{m}^2 \quad \text{dm}^2 \quad \text{cm}^2 \quad \text{mm}^2$   
 $10 \quad 00$

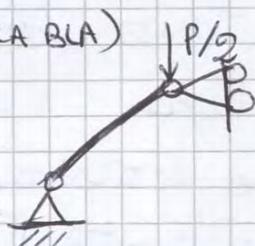
Acciaio:  $E = 210 \text{ GPa} = 210\,000 \text{ MPa}$

coef. di Poiss.  $\nu = 0,3$

tens. snerv.  $\sigma_s = 360 \text{ MPa}$

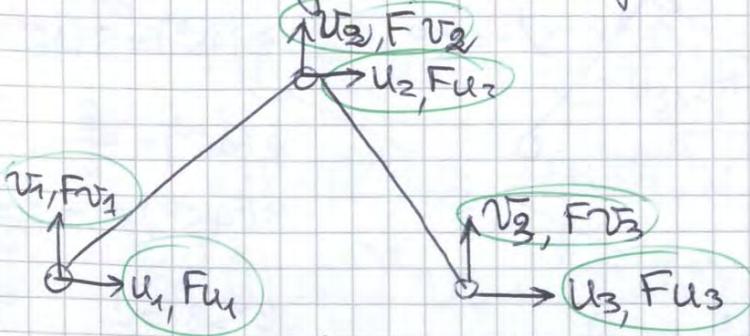
2.1 Definire un modello ad elementi finiti della struttura e scrivere la matrice di rigidezza.

- L'elemento è un'elemento ASTA perché ... (BLA BLA)
- È simmetrica  $\Rightarrow$  potrà studiare metà struttura
- $g_e: h = 6 - 6 = 0$
- Ci sono 3 modi di essere e è caratterizzato da 2 gradi di libertà, uno di traslazione lungo x, uno di trasloz. lungo y



$C^1$  nel sistema di R locale,  $1^0$  nel sistema di R globale

Full moto agisce una forza per le direzioni:



Sebbene queste sono travi e quindi non ci sono forze di taglio, le sezioni perché sarà più comodo scrivere le moine.

Sommando il contributo orizzontale e quello verticale la risultante sarà allineata all'elemento cioè sarà una Risultante ASSIALE

Elemento I

$$\frac{1}{2} \frac{EA'}{l} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \end{Bmatrix} \text{ I}$$

Elemento II

$$\frac{1}{2} \frac{EA''}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \end{Bmatrix} \text{ II}$$

Assemblaggio

dove  $F_{x2 \text{ I}} + F_{x2 \text{ II}} = F_{x2}$   
 $F_{y2 \text{ I}} + F_{y2 \text{ II}} = F_{y2}$

$F_{x2} = P = -200 \text{ kN}$

$\frac{1}{2} \frac{E}{l}$   
 Non dimenticate!

$$\begin{bmatrix} A' & A' & -A' & -A' & 0 & 0 \\ A' & A' & -A' & -A' & 0 & 0 \\ -A' & -A' & A'+A'' & A'-A'' & A'' & A'' \\ -A' & -A' & A'-A'' & A'+A'' & A'' & -A'' \\ 0 & 0 & -A'' & A'' & A' & -A'' \\ 0 & 0 & A'' & -A'' & -A'' & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \end{Bmatrix}$$

Matrice di Rigidezza Globale

Non è zero perché non ho il Corollario

Alora

$$(A'+A'')u_2 + (A'-A'')v_2 = 0 \Rightarrow u_2 = \frac{A'-A''}{A'+A''} v_2$$

$$(A'-A'')u_2 + (A'+A'')v_2 = -200000$$

$$\frac{E}{2l} \left[ \frac{(A'-A'')^2}{A'+A''} v_2 + (A'+A'')v_2 \right] = -200000$$

$$v_2 = \frac{2l}{E} \left( -200000 \frac{A'+A''}{(A'-A'')^2 + (A'+A'')^2} \right) = \frac{200000 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{80000000} = -7.5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

$$\Rightarrow v_2 = \frac{200000 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \cdot 2}{80000000} = -7.5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

$$F_{x1} = -\frac{EA^I}{2l} u_2 - \frac{EA^I}{2l} v_2 = \frac{EA^I}{2l} (-u_2 - v_2) = 105000(-0,47) = 49350 \text{ N}$$

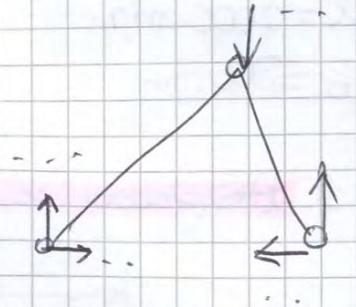
$$F_{y1} = 49350 \text{ N}$$

$$F_{x3} = -\frac{EA^{II}}{2l} u_2 + \frac{EA^{II}}{2l} v_2 = \frac{EA^{II}}{2l} (-u_2 + v_2) = 210'000 \cdot (-0,95) = 199'500$$

$$F_{y3} = \frac{EA^{II}}{2l} u_2 - \frac{EA^{II}}{2l} v_2 = 000$$

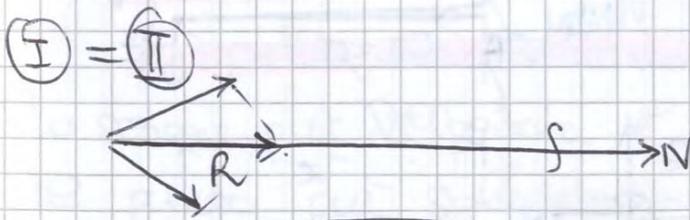
$$\{S\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,24 \\ -0,71 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 000 \\ 000 \\ 0 \\ -200 \\ 000 \\ 000 \end{Bmatrix}$$



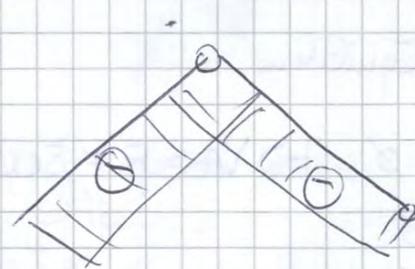
### 2.3. Calcolare Forze Nodali e Caratt. di Sollecitazione

...



$$R = \sqrt{F_{x1}^2 + F_{x2}^2} = 000$$

$$N = -R \quad \Rightarrow \quad \textcircled{N}$$



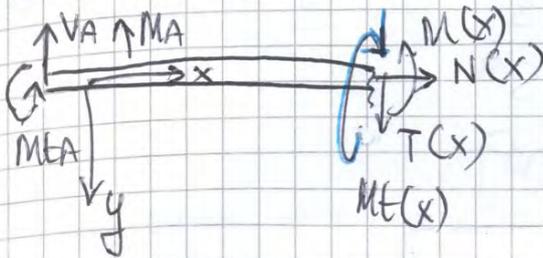
### 2.4 Calcolare tensioni nodali e CS

$$\sigma_I = \frac{N}{A^I} = \dots ; \sigma_{II} = \frac{N}{A^{II}} = \dots$$

CS =  $\sigma_s$  Tensione di Svernamento

$$\frac{10 \text{ MAX}(\sigma_I, \sigma_{II})}{\dots} = \frac{360}{\dots} = \dots$$

Caratt. di Sollecitazione



$$N(x) = 0$$

$$T(x) = VA = 500 \text{ N}$$

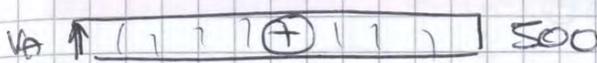
$$M(x) = -MA + VA \cdot x \quad \rightarrow \quad M(0) = -MA = -500 \text{ Nm}$$

$$M_t(x) = M_{TA} = 150 \text{ Nm} \quad \rightarrow \quad M_t(e) = 0 \text{ Nm}$$

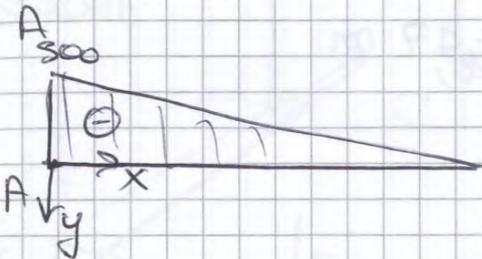
(N)



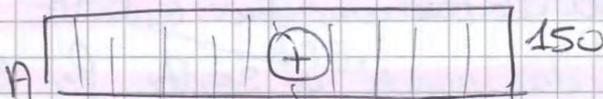
(T)



(Mf)

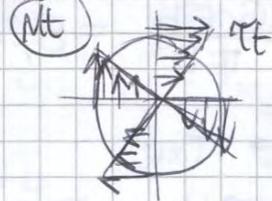
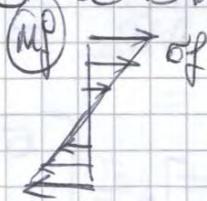
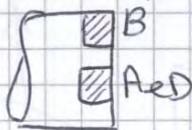


(Mt)



3.2 Date le dimensioni geometriche in figura, dimensionale il  $D_{MIN}$  della trave offese sia garantito  $\sigma_s = 4$  rispetto allo smorzamento del materiale

- la sezione più sollecitata è la sezione (A)
- il punto più sollecitato è Binfalli



Il punto più sollecitato è B infatti  $f_{MP}$  implica molto

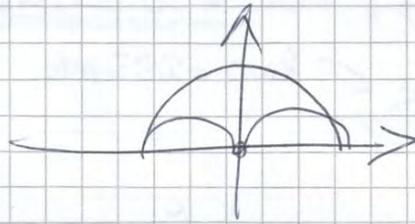
$$\sigma_f^{MAX} = \frac{M_f}{I} \frac{D}{2} = \frac{Fl}{\frac{\pi}{4} \left(\frac{D}{2}\right)^4} \cdot \frac{D}{2} = \frac{Fl}{\pi} \cdot \frac{16}{D^3} = \frac{32 Fl}{\pi D^3}$$

$$\tau_{tor}^{MAX} = \frac{M_t}{I_p} \frac{D}{2} = \frac{F \cdot b}{\frac{\pi}{2} \left(\frac{D}{2}\right)^4} \cdot \frac{D}{2} = \frac{Fb}{\pi} \cdot \frac{16}{D^3} = \frac{16 Fb}{\pi D^3}$$

Perché  $\sigma_s = \frac{\sigma_s}{\sigma_s} \Rightarrow \sigma_{eq} = \frac{\sigma_s}{\sigma_s}$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_f^{MAX^2} + 3 \tau_{tor}^{MAX^2}} = \sqrt{\left(\frac{32 Fl}{\pi D^3}\right)^2 + 3 \left(\frac{16 Fb}{\pi D^3}\right)^2} = \frac{\sigma_s}{\sigma_s}$$

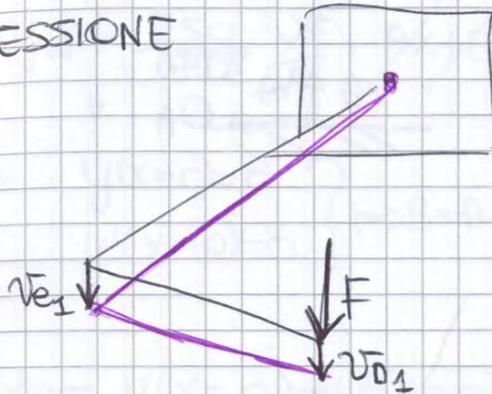
$$[B]_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \uparrow_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \uparrow_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Stesse cose per A e e...

34 Calcolare infine la freccia nel punto di applicazione del carico F supponendo che il braccio sia rigido e accettando l'ipotesi di piccole deformazioni

FLESSIONE



Hp: BRACCIO RIGIDO



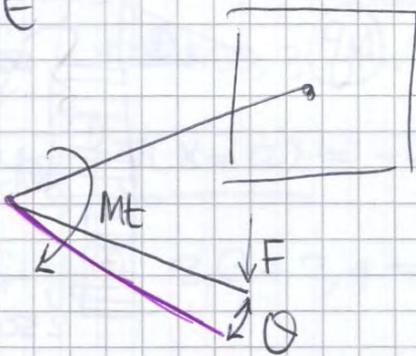
$$v_{E1} = v_{D1}$$

$v_{E1}$  è il caso di una trave incastriata all'ozca

$$v_{D1} = v_{E1} = \frac{FL^3}{3EI} = \frac{FL^3}{3E} \cdot \frac{4}{\pi} \left(\frac{2}{D}\right)^4 =$$

$$= \frac{FL^3}{3\pi E D^4} = 4,05 \text{ mm}$$

TORSIONE

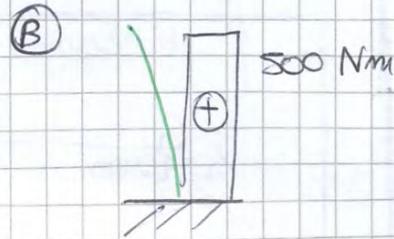
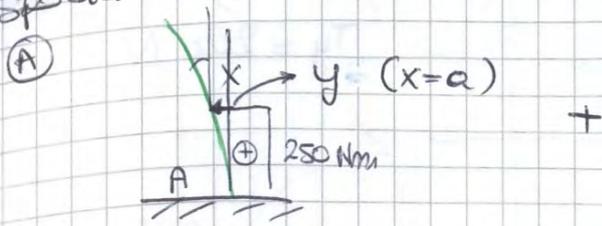


$$\theta = \frac{Mt \cdot l}{GI_p} = \frac{500 \cdot 300 \cdot 1000}{7800 \cdot 3,919 \cdot 10^5} = 4,91 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$v_{D2} = \theta b$$

$$v_{DTOT} = v_{D1} \pm v_{D2} = 88,45 \text{ mm}$$

esempio lo spostamento orizzontale di e new ipotesi di piccoli spostamenti



$$y'' = -\frac{M(x)}{EI_z} = -\frac{250}{EI_z}$$

$$y' = -\frac{250}{EI_z}x + A$$

$$y = -\frac{250}{EI_z} \frac{x^2}{2} + Ax + B$$

c.c.  $\left. \begin{array}{l} y(x=0)=0 \\ y'(x=0)=0 \end{array} \right\} \Rightarrow B=A=0$

$$y'' = -\frac{500 \text{ Nm}}{EI_z}$$

$$y' = -\frac{500x}{EI_z} + e$$

$$y = -\frac{500}{2EI_z}x^2 + ex + d$$

$\therefore \left. \begin{array}{l} y(x=0)=0 \\ y'(x=0)=0 \end{array} \right\} \Rightarrow e=d=0$

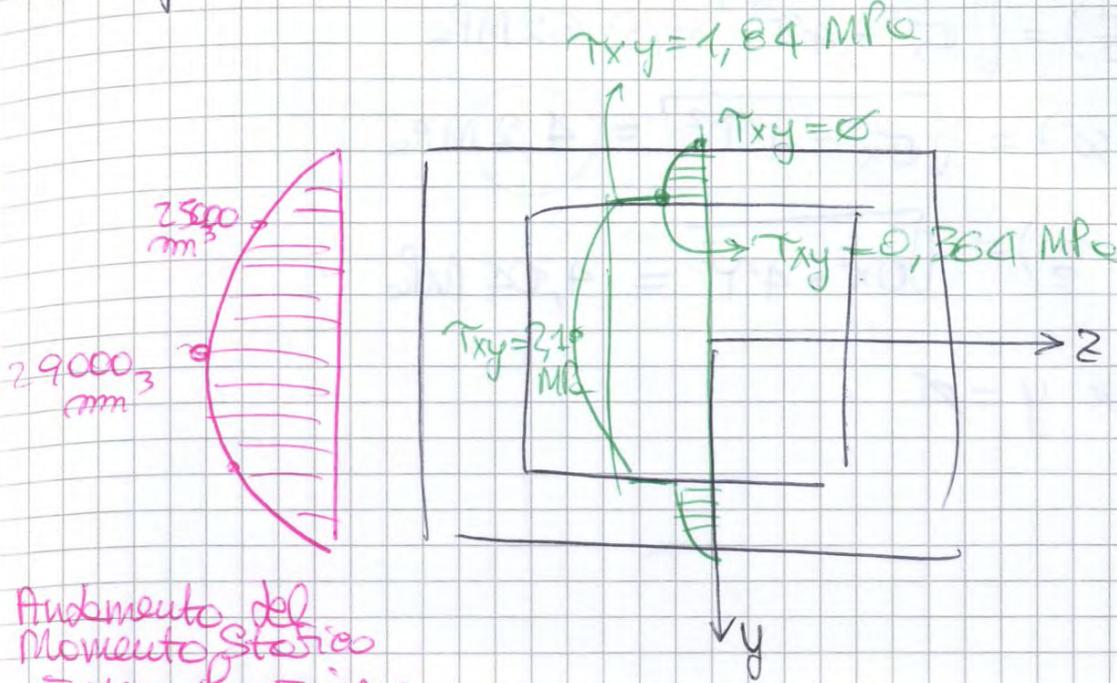
$$f_{\text{max}}^1 = y_A = y(x=a) + y'(x=a) \cdot a = 1,2 + 2,4 = 3,6 \text{ mm} ?$$

$$I_z = \frac{l^4}{12} = 520833,33 \text{ mm}^4$$

$$f_{\text{max}}^2 = y_B = y(\bar{x}=a) = -\frac{500}{EI_z} \frac{a^2}{2} = 2,4 \text{ mm}$$

$$y_{\text{TOT}} = y_A + y_B = 3,6 + 2,4 = 6 \text{ mm}$$

$$S_{z_2}(y=\emptyset) = 29000 \text{ mm}^3 \quad \Rightarrow \quad \tau_{xy}(y=\emptyset) = 2,1 \text{ MPa}$$



Andamento del Momento Statico è una funzione continua

ma nella 1ª campata vi è una essente maggiore rispetto alla 2ª camp

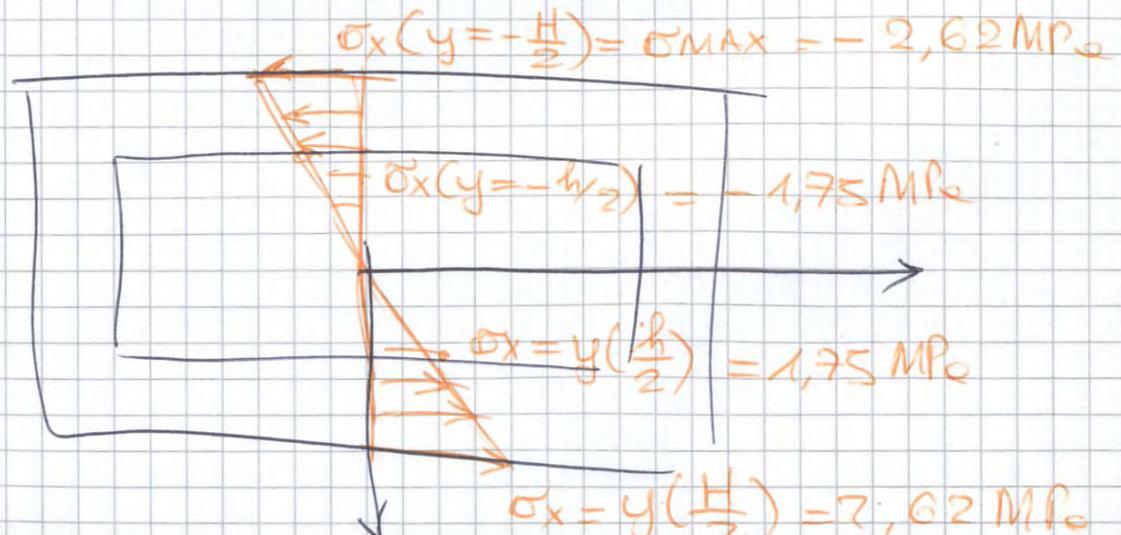
la pendenza della 2ª camp è inferiore

## 2. Andamento $\sigma_x$ dovuto a $M_x$

$$\sigma_x = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} \cdot y - \frac{M_y}{I_y} \cdot z$$

$y$  coordinata variabile  $-\frac{H}{2} < y < \frac{H}{2}$

l'andamento delle  $\sigma_{xx}$  è lineare



## CALCOLO MATRICIALE

### 1. Analisi del sistema

#### 1.1 Scelta dell'elemento

Il tipo di vincolo non porta a nessuna conclusione sulla scelta dell'elemento: non tutti gli elementi incastrati lavorano necessariamente come delle travi, così come non tutti gli elementi incernierati lavorano come delle aste.

**Dipende dal tipo di carico.**

#### TRAVE INFLESSA

Ciascun nodo è caratterizzato da due gradi di libertà, uno di traslazione lungo l'asse X ed uno di rotazione attorno all'asse Y.

Il carico esterno produce una flessione e un taglio nel piano XY

Gli elementi sarebbero delle travi anche se fossero collegate all'esterno con delle cerniere, perché **il carico produrrebbe comunque un taglio e un momento flettente**

#### ASTA

L'asta, per definizione, è in grado di sopportare solo **carichi di tipo assiale.**

**Non ci sono carichi concentrati di taglio o flessione pura lungo l'asse** (potrebbero essere considerati solo attraverso elementi trave).

*Dei carichi presenti ai nodi, non possono esserci momenti flettenti concentrati in quanto non possono essere trasmessi dai vincoli cerniera a cui convergono gli elementi*

*Ogni elemento è compreso tra due cerniere, quindi qualsiasi forza risultante si abbia, essa dovrà necessariamente passare lungo l'asse. Qualsiasi sua componente ortogonale all'asse produrrebbe infatti un momento flettente che non potrebbe essere equilibrato dall'elemento così vincolato*

#### ASTA+TRAVE

Il sistema è costituito da una trave ed un'asta. I sistemi di riferimento locali dei due elementi trave coincidono a meno della posizione dell'origine con il sistema di riferimento globale. Il sistema di riferimento locale dell'asta è invece ruotato di un angolo  $\beta$  rispetto al sistema di riferimento globale.

L'asta, per definizione, è in grado di sopportare solo carichi di tipo assiale. **I carichi assiali definiti nel sistema di riferimento locale dell'asta devono essere scomposti in componenti nel sistema di riferimento globale della struttura. Poiché l'annullamento anche di una sola di tali componenti porterebbe automaticamente all'annullamento del carico assiale a cui l'asta è soggetta, la trave orizzontale della struttura deve essere analizzata tenendo conto in contemporanea sia del comportamento assiale che di quello flessionale.**

#### 1.2 Simmetria

Si può studiare solo metà struttura aggiungendo gli opportuni vincoli di simmetria e considerando un carico dimezzato e un'Area di sezione dimezzata.

## 2. Calcolo delle proprietà della sezione

Conviene considerare tutte le grandezze in un sistema coerente. Utilizzando i mm per le lunghezze e i N per le forze si ottengono le pressioni/tensioni in MPa (N/mm<sup>2</sup>).

$$J = b h^3 / 12$$

$$A = b h$$

## 3. Creazione delle matrici di rigidezza locali e globali

### 3.1 Schema

L'operazione di assemblaggio risulta più semplice se si tiene presente uno **schema** in cui venga riportata la **corrispondenza tra la numerazione dei gradi di libertà dei nodi di ciascun elemento nel proprio sistema di riferimento locale (Trave I, Trave II, Asta) e la numerazione degli stessi gradi di libertà nel sistema di riferimento globale a livello di struttura complessiva:**

	Nodo 1			Nodo 2			Nodo 3			Nodo 4	
G.d.l.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
<b>Struttura</b>	$u_1$	$v_1$	$\varphi_1$	$u_2$	$v_2$	$\varphi_2$	$u_3$	$v_3$	$\varphi_3$	$u_4$	$v_4$
<i>Trave I</i>	$u_1$	$v_1$	$\varphi_1$	$u_2$	$v_2$	$\varphi_2$	0	0	0	0	0
<i>Trave II</i>	0	0	0	$u_1$	$v_1$	$\varphi_1$	$u_2$	$v_2$	$\varphi_2$	0	0
<i>Asta</i>	0	0	0	$u_1$	$v_1$	0	0	0	0	$u_2$	$v_2$

### 3.2 Matrici di rigidezza

- **Matrice di rigidezza della I** (poi della II, poi della III ecc) **TRAVE nel piano in coordinale locali** definita dai nodi 1 e 2

OSS: se non ci sono alcuni gradi di libertà non inserisco la riga e la colonna corrispondenti.

OSS: I numeri sono variabili e indicano il nodo,

i numeri romani indicano il numero della trave (posso metterne uno solo fuori in basso alla parentesi)

OSS: Area e lunghezza variano da trave a trave, E generalmente è il medesimo

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{EJ}{l^3} & 6\frac{EJ}{l^2} & 0 & -12\frac{EJ}{l^3} & 6\frac{EJ}{l^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6\frac{EJ}{l^2} & 4\frac{EJ}{l} & 0 & -6\frac{EJ}{l^2} & 2\frac{EJ}{l} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 2\frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -12\frac{EJ}{l^3} & -6\frac{EJ}{l^2} & 0 & 24\frac{EJ}{l^3} & 0 & 0 & -12\frac{EJ}{l^3} & 6\frac{EJ}{l^2} \\ 0 & 6\frac{EJ}{l^2} & 2\frac{EJ}{l} & 0 & 0 & 8\frac{EJ}{l} & 0 & -6\frac{EJ}{l^2} & 2\frac{EJ}{l} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12\frac{EJ}{l^3} & -6\frac{EJ}{l^2} & 0 & 12\frac{EJ}{l^3} & -6\frac{EJ}{l^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6\frac{EJ}{l^2} & 2\frac{EJ}{l} & 0 & -6\frac{EJ}{l^2} & 4\frac{EJ}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{z1} \\ F_{x1} \\ M_1 \\ F_{z2} \\ F_{x2} \\ M_2 \\ F_{z3} \\ F_{x3} \\ M_3 \end{bmatrix}$$

- **Matrice di rigidità della I (poi della II, poi della III ecc) ASTA (ruotata) nel piano in coordinale globali** definita dai nodi 2 e 4:

$$\frac{EA'}{l} \begin{bmatrix} \cos^2 \beta & \cos \beta \sin \beta & -\cos^2 \beta & -\cos \beta \sin \beta \\ \cos \beta \sin \beta & \sin^2 \beta & -\cos \beta \sin \beta & -\sin^2 \beta \\ -\cos^2 \beta & -\cos \beta \sin \beta & \cos^2 \beta & \cos \beta \sin \beta \\ -\cos \beta \sin \beta & -\sin^2 \beta & \cos \beta \sin \beta & \sin^2 \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{z2} \\ F_{x2} \\ F_{z4} \\ F_{x4} \end{bmatrix}$$

Questa è  $[k]_{xz}$

ATTENZIONE AL **SEGNO DI  $\beta$**  : devo portare x su X! La rotazione oraria è positiva, quella antioraria negativa!

- **Matrice di rigidità della TRAVE (ruotata) nel piano in coordinate globali:**

$$[K]_{xz} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} c^2 + \frac{12EI_z}{l^3} s^2 & \frac{EA}{l} cs - \frac{12EI_z}{l^3} cs & -\frac{6EI_z}{l^2} s & -\frac{EA}{l} c^2 - \frac{12EI_z}{l^3} s^2 & -\frac{EA}{l} cs + \frac{12EI_z}{l^3} cs & -\frac{6EI_z}{l^2} s \\ \frac{EA}{l} cs - \frac{12EI_z}{l^3} cs & \frac{EA}{l} s^2 + \frac{12EI_z}{l^3} c^2 & \frac{6EI_z}{l^2} c & -\frac{EA}{l} cs + \frac{12EI_z}{l^3} cs & -\frac{EA}{l} s^2 - \frac{12EI_z}{l^3} c^2 & \frac{6EI_z}{l^2} c \\ -\frac{6EI_z}{l^2} s & \frac{6EI_z}{l^2} c & \frac{4EI_z}{l} & \frac{6EI_z}{l^2} s & -\frac{6EI_z}{l^2} c & \frac{2EI_z}{l} \\ -\frac{EA}{l} c^2 - \frac{12EI_z}{l^3} s^2 & -\frac{EA}{l} cs + \frac{12EI_z}{l^3} cs & \frac{6EI_z}{l^2} s & \frac{EA}{l} c^2 + \frac{12EI_z}{l^3} s^2 & \frac{EA}{l} cs - \frac{12EI_z}{l^3} cs & \frac{6EI_z}{l^2} s \\ \frac{EA}{l} cs + \frac{12EI_z}{l^3} cs & -\frac{EA}{l} s^2 - \frac{12EI_z}{l^3} c^2 & -\frac{6EI_z}{l^2} c & -\frac{EA}{l} cs + \frac{12EI_z}{l^3} cs & -\frac{EA}{l} s^2 + \frac{12EI_z}{l^3} c^2 & -\frac{6EI_z}{l^2} c \\ -\frac{6EI_z}{l^2} s & \frac{6EI_z}{l^2} c & \frac{2EI_z}{l} & \frac{6EI_z}{l^2} s & -\frac{6EI_z}{l^2} c & \frac{4EI_z}{l} \end{bmatrix}$$

#### 4. Assemblaggio della matrice di rigidità (globale) completa

$$\begin{bmatrix} 22500 & -12990 & -22500 & 12990 & 0 & 0 \\ -12990 & 7500 & 12990 & -7500 & 0 & 0 \\ -22500 & 12990 & 26830 & -5490 & -4330 & -7500 \\ 12990 & -7500 & -5490 & 20490 & -7500 & -12990 \\ 0 & 0 & -4330 & -7500 & 4330 & 7500 \\ 0 & 0 & -7500 & -12990 & 7500 & 12990 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_3 \\ U_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \\ -3000 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{e1} \\ F_{e2} \\ F_{e3} \\ F_{e4} \\ F_{e5} \\ F_{e6} \end{bmatrix}$$

**4.3 Se la struttura è soggetta a carichi concentrati ( non su un vincolo) o distribuiti sull'asta**

Per ricavare i carichi nodali equivalenti si consideri che:

$$\{F_e\} = [R]^T \{f_e\}$$

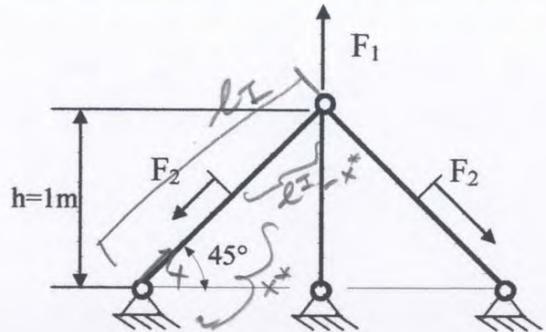
$$\{f_e\} = \frac{f_u}{l_l} \begin{Bmatrix} l_l - x^* \\ x^* \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} f_u \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Nel sistema di riferimento globale:

$$\{F_e\} = \{f_e\} \cdot [R]^T = \{f_e\} \cdot \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \vartheta & \sin \vartheta \end{bmatrix}^T$$

$$\{F_e\}' = \frac{1}{2} f_u \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_l \\ \sin \vartheta_l \\ \cos \vartheta_l \\ \sin \vartheta_l \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -707 \\ -707 \\ -707 \\ -707 \end{Bmatrix}$$

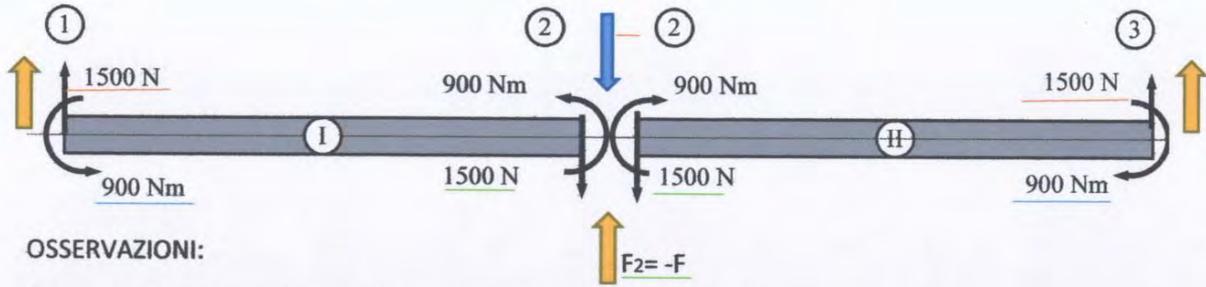
**È solo sull'asta I allora coinvolge solo questa!!!**



$$[R] = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 & 0 \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ 0 & 0 & -\sin \vartheta & \cos \vartheta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si ottiene quindi:

$$\begin{bmatrix} 14142 & 14142 & -14142 & -14142 & 0 & 0 \\ 14142 & 14142 & -14142 & -14142 & 0 & 0 \\ -14142 & -14142 & 14142 & 14142 & 0 & 0 \\ -14142 & -14142 & 14142 & 34142 & 0 & -20000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -20000 & 0 & 20000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ 2000 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -707 \\ -707 \\ -707 \\ -707 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



OSSERVAZIONI:

L'impostazione e la soluzione di equazioni di equilibrio alla traslazione e alla rotazione permette di verificare l'equilibrio della struttura.

- 6 I momenti agli incastri o nei nodi delle travi sono uguali ed opposti per l'equilibrio alla rotazione, inoltre ogni forza e momento agli incastri (per esempio  $F_3^I$  ed  $M_3^I$ ) sono pari alle reazioni vincolari (per esempio  $F_3$  ed  $M_3$ ).
- 7 La risultante delle forze in una direzione è nulla se non ci sono forze esterne applicate dirette in tale direzione.
- 8 La somma delle reazioni vincolari in una direzione è caratterizzata dallo stesso modulo della forza esterna applicata in tale direzione, ma verso opposto in modo da rispettare l'equilibrio.
- 9 Le forze  $F_2^I$  e  $F_2^{II}$  sono invece uguali in modulo e concordi in modo da uguagliare la forza concentrata  $F_2 = -F$  sul nodo 2.

## 6. Calcolo delle tensioni e coefficienti di sicurezza

### TRAVE

Per esempio:

$$\sigma_{\max,2} = \pm(M_2^I + M_2^{II}) / W = \dots \text{ MPa}$$

*per il rettangolo*  
dove  $W = bh^2/6$

$$\tau_{\max,2} = 3/2 (F_2^I + F_2^{II}) / A = \dots \text{ MPa}$$

$$CS_2 = R_{p02} / \sigma_{\max,2} \text{ oppure } CS = \sigma_{\text{di snervamento}} / \sigma_{\max,2}$$

[oss: ricordo che  $\sigma_{\max,2}$  è la maggiore in modulo ed è >0]

### ASTA

$$\sigma_{\max} = F_{\text{asta}} / A_{\text{asta}}$$

#### 6.1 A partire dagli spostamenti nodali (come nel metodo agli elementi finiti):

La relazione tra tensione e spostamenti nodali per l'elemento asta è pari a:

$$\{\sigma\} = [E]\{\epsilon\} = [E][b]\{s\} = [E] \cdot \begin{bmatrix} -1/L & 1/L \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$\sigma = \frac{E}{L} \cdot (u_2 - u_1) = \frac{200000}{\sqrt{2} \cdot 1000} \cdot \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot (-1 + 3.84) = 71 \text{ MPa}$$

#### 6.2 A partire dalle reazioni vincolari (come nel metodo classico):

## Spiegazione Matrice di rigidità della trave nel piano in coordinale globali:

Matrice di rotazione per la trave nel piano:

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & & & \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ & & & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice di rigidità della trave nel piano in coordinale globali:

$$[k]_{xyz} = [R]^T [k]_{xyz} [R]$$

$$[R]^T [k]_{xyz} = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & & & \\ s & c & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & c & -s & 0 \\ & & & s & c & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 & -EA & 0 & 0 \\ \frac{12EI_z}{l^3} & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 \\ \frac{6EI_z}{l^2} & 4EI_z & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 2EI_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -EA & 0 & 0 & EA & 0 & 0 \\ \frac{12EI_z}{l^3} & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 \\ \frac{6EI_z}{l^2} & 2EI_z & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 4EI_z & 0 \end{bmatrix}$$

$$[k]_{xyz} = [R]^T [k]_{xyz} [R] =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} c^2 + \frac{12EI_z}{l^3} s^2 & \frac{EA}{l} cs - \frac{12EI_z}{l^3} cs & -\frac{6EI_z}{l^2} s & -\frac{EA}{l} c^2 - \frac{12EI_z}{l^3} s^2 & \frac{EA}{l} cs + \frac{12EI_z}{l^3} cs & -\frac{6EI_z}{l^2} s \\ \frac{EA}{l} cs - \frac{12EI_z}{l^3} cs & \frac{EA}{l} s^2 + \frac{12EI_z}{l^3} c^2 & \frac{6EI_z}{l^2} c & -\frac{EA}{l} cs + \frac{12EI_z}{l^3} cs & \frac{EA}{l} s^2 - \frac{12EI_z}{l^3} c^2 & \frac{6EI_z}{l^2} c \\ -\frac{6EI_z}{l^2} s & \frac{6EI_z}{l^2} c & \frac{4EI_z}{l} & \frac{6EI_z}{l^2} s & -\frac{6EI_z}{l^2} c & \frac{2EI_z}{l} \\ -\frac{EA}{l} c^2 - \frac{12EI_z}{l^3} s^2 & \frac{EA}{l} cs + \frac{12EI_z}{l^3} cs & \frac{6EI_z}{l^2} s & \frac{EA}{l} c^2 + \frac{12EI_z}{l^3} s^2 & \frac{EA}{l} cs - \frac{12EI_z}{l^3} cs & \frac{6EI_z}{l^2} s \\ \frac{EA}{l} cs + \frac{12EI_z}{l^3} cs & \frac{EA}{l} s^2 - \frac{12EI_z}{l^3} c^2 & -\frac{6EI_z}{l^2} c & -\frac{EA}{l} cs - \frac{12EI_z}{l^3} cs & \frac{EA}{l} s^2 + \frac{12EI_z}{l^3} c^2 & -\frac{6EI_z}{l^2} c \\ -\frac{6EI_z}{l^2} s & \frac{6EI_z}{l^2} c & \frac{2EI_z}{l} & \frac{6EI_z}{l^2} s & -\frac{6EI_z}{l^2} c & \frac{4EI_z}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s & 0 & & & \\ -s & c & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & c & -s & 0 \\ & & & s & c & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

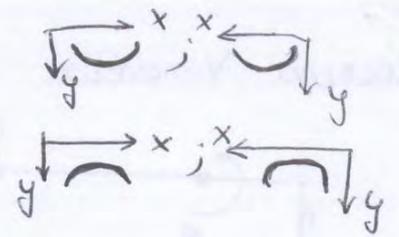
$$[K]_{xyz} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} c^2 + \frac{12EI_z}{l^3} s^2 & \frac{EA}{l} cs - \frac{12EI_z}{l^3} cs & -\frac{6EI_z}{l^2} s & -\frac{EA}{l} c^2 - \frac{12EI_z}{l^3} s^2 & \frac{EA}{l} cs + \frac{12EI_z}{l^3} cs & -\frac{6EI_z}{l^2} s \\ \frac{EA}{l} cs - \frac{12EI_z}{l^3} cs & \frac{EA}{l} s^2 + \frac{12EI_z}{l^3} c^2 & \frac{6EI_z}{l^2} c & -\frac{EA}{l} cs + \frac{12EI_z}{l^3} cs & \frac{EA}{l} s^2 - \frac{12EI_z}{l^3} c^2 & \frac{6EI_z}{l^2} c \\ -\frac{6EI_z}{l^2} s & \frac{6EI_z}{l^2} c & \frac{4EI_z}{l} & \frac{6EI_z}{l^2} s & -\frac{6EI_z}{l^2} c & \frac{2EI_z}{l} \\ -\frac{EA}{l} c^2 - \frac{12EI_z}{l^3} s^2 & \frac{EA}{l} cs + \frac{12EI_z}{l^3} cs & \frac{6EI_z}{l^2} s & \frac{EA}{l} c^2 + \frac{12EI_z}{l^3} s^2 & \frac{EA}{l} cs - \frac{12EI_z}{l^3} cs & \frac{6EI_z}{l^2} s \\ \frac{EA}{l} cs + \frac{12EI_z}{l^3} cs & \frac{EA}{l} s^2 - \frac{12EI_z}{l^3} c^2 & -\frac{6EI_z}{l^2} c & -\frac{EA}{l} cs - \frac{12EI_z}{l^3} cs & \frac{EA}{l} s^2 + \frac{12EI_z}{l^3} c^2 & -\frac{6EI_z}{l^2} c \\ -\frac{6EI_z}{l^2} s & \frac{6EI_z}{l^2} c & \frac{2EI_z}{l} & \frac{6EI_z}{l^2} s & -\frac{6EI_z}{l^2} c & \frac{4EI_z}{l} \end{bmatrix}$$

• CONCAVITÀ PARABOLA

$$q = - \frac{dM^2(x)}{dx^2}$$

Se  $q > 0 \Rightarrow \frac{dM^2(x)}{dx^2} < 0 \Rightarrow$

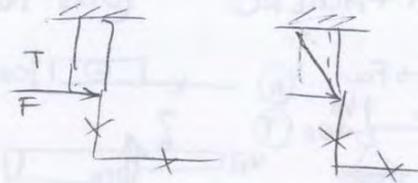
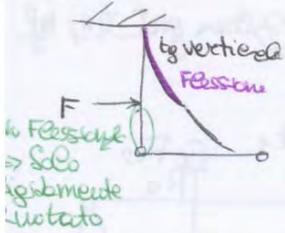
Se  $q < 0 \Rightarrow \frac{dM^2(x)}{dx^2} > 0 \Rightarrow$



• RISOLUZIONE QUALITATIVA

Strutt. LINEARE ISOSTATICA }  $\Rightarrow$  Vale il PR. di SOVRAPPOSIZIONE degli EFFETTI

- Immagino le forze applicate ognuna separatamente
- Nell'incastro si sceglie sb Tele up
- Deformata



3. Geometria delle Aree

	$x_B = \frac{l}{2} + \text{distanza}$	$y_B$	$A = l \cdot e$	$S_x = y_B A$	$S_y = x_B A$	$x_G = \frac{\text{Relaz. } S_{xi}}{\text{Relazione } A_i}$	$J_{xB}$	$J_{yB}$	$J_{xByB}$
1							RETT: $\frac{bh^3}{12}$	RETT: $\frac{b^3h}{12}$	Nulla se identifi
2						$y_G = \frac{\text{Relaz. } S_{yi}}{\text{Relaz. } A_i}$	CERCHIO $\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi^4}{4}$	lesse & Sim oppure TAB
...							TAB		

$f = y_B - y_G$	$e = x_B - x_G$	$J_{xG}$	$J_{yG}$	$J_{xGyG}$	$J_{xG}^{TOT} = \text{Relaz. } J_{xG} > 0$
		$J_{xB} + f^2 A + \cancel{J_{xG}}$	$J_{yB} + e^2 A + \cancel{J_{yG}}$	$J_{xByB} + e f A + \cancel{J_{xGyG}}$	$J_{yG}^{TOT} = \text{Relaz. } J_{yG} > 0$
					$J_{xGyG}^{TOT} = \text{Relaz. } J_{xGyG}$

$\text{tg } 2\alpha = \frac{-2J_{xGyG}^{TOT}}{J_{xG}^{TOT} - J_{yG}^{TOT}} \Rightarrow 2\alpha = \text{arctg}(\dots) \Rightarrow \alpha = \frac{2\alpha}{2}$

Calcolatrice  $\Rightarrow$  u.m. RADIANTI  $\rightarrow$  GRADI

$J_{\xi} = I_{MAX} = \frac{1}{2} (J_{xG}^{TOT} + J_{yG}^{TOT}) + \frac{1}{2} \sqrt{(J_{xG}^{TOT} - J_{yG}^{TOT})^2 + 4J_{xGyG}^{TOT}^2}$

$J_{\eta} = I_{MIN} = \dots$

$J_{\xi\eta} = 0$

$R(\xi, \eta)$  è il Sist. di Rif. Principale di Inerzia per cui  $I_{MAX}$  e  $I_{MIN}$  e  $I_{centrifugo}$  nullo

