NUMERO: 985

DATA: 11/06/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Di Paolo

MATERIA: Fisica I + Eserc.

Prof. Scalerandi

FISICA I

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 302

Coordinate polari

$$\vec{r} = f(|\vec{r}|, \theta)$$

DERIVATA DI UN VETTORE

La derivata ci dice come varia la grandezza fisica

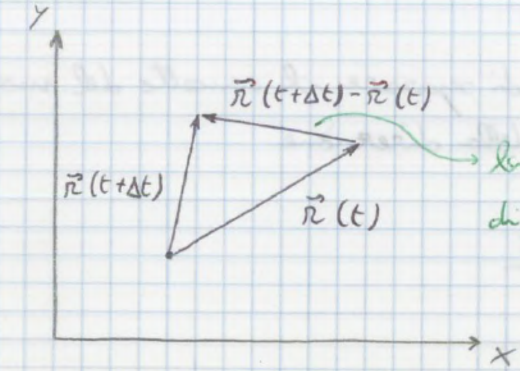
$a = f(t)$ $\quad \frac{da}{dt} > 0 \Rightarrow a$ è CRESCENTE

→ $\vec{r}$ può variare in:
- modulo
- direzione

$$\boxed{\frac{da}{dt} \equiv \dot{a}}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{a(t+\Delta t) - a(t)}{\Delta t}$$ DEF. GENERALE

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$ DEF. PER UN VETTORE



bisogna fare il lim di quest vettore

NB: la derivata di un vettore è + semplice xké si tratta di fare una ⊖ tra vettori

CONCETTO DI DIFFERENZIALE, GRANDEZZAZIONE, VARIAZIONE

a , da , Δa , $\frac{da}{dt}$

a = valore della grandezza

$\frac{da}{dt}$ = derivata

Δa = variazione della grandezza a tra uno stato iniziale e finale in un intervallo FINITO

da = differenziale (variazione di a tra uno stato iniziale e finale in un intervallo INFINITESIMO)

Esempi

1) $v_m \triangleq \frac{\Delta s}{\Delta t}$ $\quad [v_m] = \frac{[L]}{[T]} \Rightarrow \frac{m}{s}$

2) $a_m \triangleq \frac{\Delta v}{\Delta t}$ $\quad [a_m] = \frac{[L]}{[T][T]} \Rightarrow \frac{m}{s^2}$

RELAZIONE BIUNIVOCA → Grandezza <=> Analisi Dimensionale

↳ Facendo un esperimento ottengo una certa unità di misura e da questa so a cosa corrisponde

Esempi

1) $\gamma = \sqrt{\frac{g}{l}}$ $\quad l$ = lung. pendolo

g = acc. gravità

$$[\gamma] = \sqrt{\frac{[g]}{[l]}} = \sqrt{\frac{\cancel{[L]}}{[T]^2 \cancel{[L]}}} = \frac{1}{[T]} \Rightarrow \frac{1}{s}$$

Una grandezza può essere:

a) FONDAMENTALE o DERIVATA

b) SCALARE, VETTORE, TENSORE

↳ NB: non lo useremo

- Scalare → basta dare solo il MODULO
- Vettore → abbiamo bisogno di MODULO e DIREZIONE
- Tensore → abbiamo bisogno di + di 2 info

c) CONFRONTO tra 2 misure → c'è un ERRORE SISTEMATICO

⇓

GRANDEZZA = valore ± errore

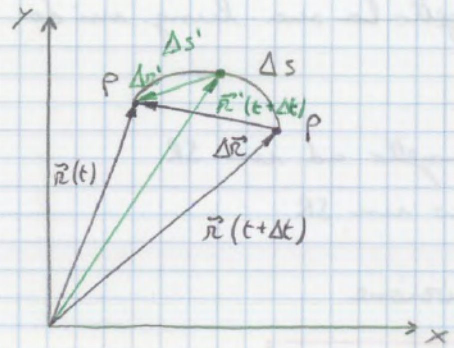
v_m = SCALARE = $\frac{\Delta s}{\Delta T}$

v_m = VETTORE = $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta T}$

qste 2 definizioni di velocità sono ≠ tra loro => qste 2 def. in FISICA non le userò mai

IMP: $\vec{r} = \vec{r}(t)$ è detta LEGGE ORARIA

VETTORE VELOCITÀ



Prendo un intervallo di tempo grande, poi ne prendo la metà, poi ancora la metà e così via.

=> nel limite di $\Delta t \to 0$ => $|\Delta \vec{r}| \xrightarrow{\text{tende}} \Delta s$

=> • $|\Delta \vec{r}| \xrightarrow{\text{tende}} \Delta s$

• $\Delta \vec{r} \xrightarrow{\text{tende}}$ tg alla traiettoria

=> notiamo che conviene lavorare NO con grandezze finite, ma con grandezze INFINITESIME in modo da risolvere il problema dell'ambiguità della velocità

$$\boxed{\vec{v} \triangleq \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}}$$

qst vettore avrà:

- MODULO: $\left| \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right|$

  ↳ ma siccome ora $|\Delta \vec{r}| = |\Delta s|$ possiamo anche scrivere $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$

- DIREZIONE: tg alla TRAIETTORIA

Esplicitiamo meglio

$$\vec{v} \triangleq \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}}$$

Trattandosi di derivata, il vettore $\vec{v}$ FISICAMENTE mi descrive come varia il $\Delta \vec{r}$ nel t

$$\boxed{\vec{v} = \frac{3}{2}t^2\vec{u}_x + \operatorname{sen} t\,\vec{u}_y}$$

- $\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t)dt = \left(\frac{t^3}{2} + C_1\right)\vec{u}_x + (-\cos t + C_2)\vec{u}_y$

C.I. $t=0 \Rightarrow \vec{r} = 1\vec{u}_x + 0\vec{u}_y$

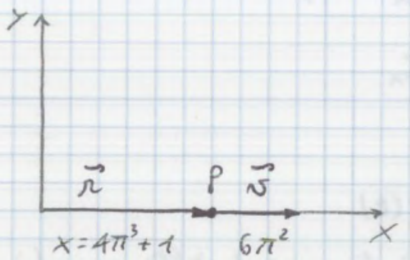
$\hookrightarrow \vec{r} = C_1\vec{u}_x + (-1+C_2)\vec{u}_y \Rightarrow C_1 = 1,\ C_2 = 1$

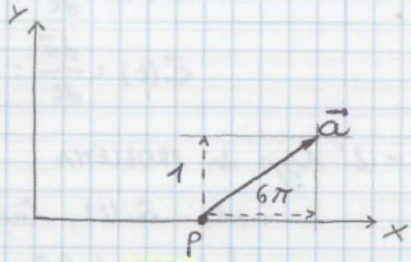
$$\boxed{\vec{r}(t) = \left(\frac{t^3}{2} + 1\right)\vec{u}_x + (-\cos t + 1)\vec{u}_y}$$

Con qste 2 formule sappiamo i valori di $\vec{v}$ e $\vec{r}$ $\forall t$

- Per $t = 2\pi$

- $\vec{a}(t) = 6\pi\vec{u}_x + 1\vec{u}_y$
- $\vec{v}(t) = 6\pi^2\vec{u}_x$
- $\vec{r}(t) = (4\pi^3+1)\vec{u}_x$





PROBLEMA FONDAMENTALE DELLA CINEMATICA

NOTA $\vec{a}$, TROVARE $\vec{r}$

$\vec{a}$ può dipendere:

- dal TEMPO
- da $\vec{r}$ (ovvero dalla POSIZIONE)

$\Rightarrow$ in realtà $\vec{a} = \vec{a}(\vec{r}\,;t)$

Soluzione

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{a}(\vec{r}\,;t) \quad \text{EQ. DIFFERENZIALE}$$

$\hookrightarrow$ RISOLVERLA

Significato Fisico

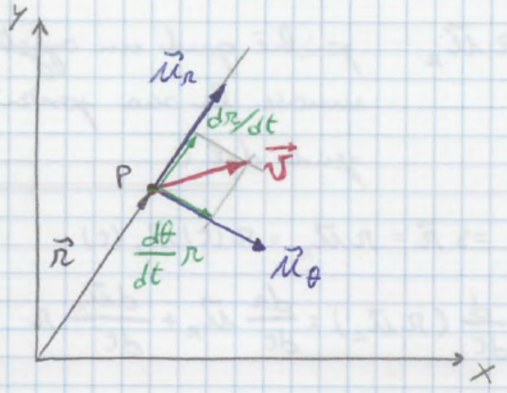
A) VELOCITÀ

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

IN CONCLUSIONE

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + \frac{d\vec{u}_r}{dt} r = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + \frac{d\theta}{dt} r \vec{u}_\theta$$

Ora possiamo capire il SIGNIFICATO FISICO



X, Y = S.R. CARTESIANO

$\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$ = S.R. POLARE

$v_r = \frac{dr}{dt}$ COMPONENTE RADIALE → è legata alla VARIAZIONE DI MODULO

$v_\theta = \frac{d\theta}{dt} r$ COMPONENTE ANGOLARE → è legata alla VARIAZIONE di r in DIREZIONE (RUOTA $\vec{v}$)

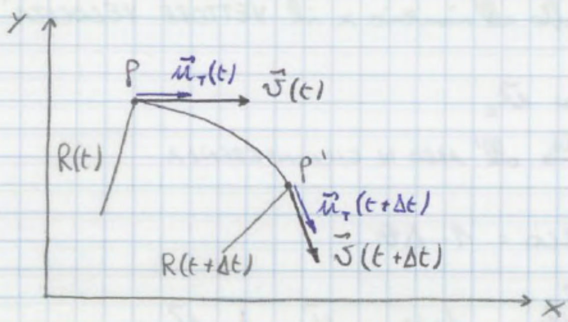
$$\boxed{\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + \frac{d\theta}{dt} r \vec{u}_\theta}$$ COORDINATE POLARI

$$\boxed{\vec{v} = v\vec{u}_T}$$ COORDINATE TANGENZIALI

B) ACCELERAZIONE

a) $\vec{a} \triangleq \frac{d\vec{v}}{dt}$

b) $\vec{a} = \frac{d(v\vec{u}_T)}{dt}$



• Sia il modulo che la direzione della vel. cambiano nel t

$\Rightarrow$ $v = v(t)$

$\vec{u}_T = \vec{u}_T(t)$ TG. ALLA TRAIETTORIA

IN CONCLUSIONE

$$\vec{a} = \frac{d(v\vec{u}_T)}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{d\vec{u}_T}{dt}v = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{v}{R}\vec{u}_n v$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T - \frac{v^2}{R}\vec{u}_n}$$

NB: il segno − ci ricorda che quel versore ($\Delta\vec{u}_T$) è verso il CENTRO DI CURVATURA

$\vec{a}_T = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T$ ACC. TGZIALE → legata alla VARIAZIONE DI MODULO

$\vec{a}_c = -\frac{v^2}{R}\vec{u}_n$ ACC. CENTRIPETA → xKè è diretta verso il centro di curvatura ed è legata alla VARIAZIONE DELLA DIREZIONE

↳ se DIR. di $\vec{v}$ = cost ⇒ TRAIETTORIA RETTILINEA ($R = \infty$)

⇒ $|\vec{a}_c| = 0$

c) Possiamo ricavare l'accelerazione anche in COORDINATE POLARI

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\vec{u}_r + \frac{d\theta}{dt}r\vec{u}_\theta\right) =$$

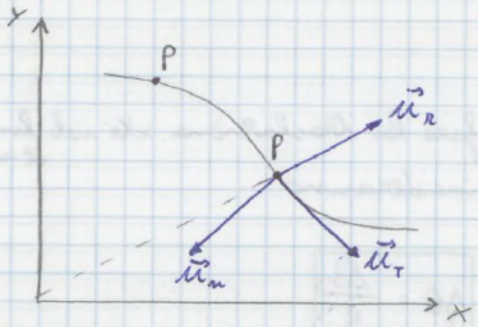
$$= \frac{d^2r}{dt^2}\vec{u}_r + \frac{dr}{dt}\underbrace{\frac{d\vec{u}_r}{dt}}_{\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u}_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\underbrace{\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}}_{-\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_r}$$

↳ verso opposto a $\vec{u}_r$

$$\boxed{\vec{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\vec{u}_r + \left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]\vec{u}_\theta}$$

COORDINATE POLARI

Differenza tra COORDINATE POLARI e INTRINSECHE



$\vec{u}_r$ ha la stessa direzione del vettore posizione $\vec{r}(t)$

MOTO A 1D

↳ C'è il PRINCIPIO DI GALILEO o di INDIPENDEZA DEI MOTI

$$\vec{a}(t) \rightarrow \vec{r}(t)$$

dove $\vec{a}(t) = a_x(t)\vec{u}_x + a_y(t)\vec{u}_y$

$\Rightarrow \vec{r}(t) = x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y$ dove x e y sono INDIPENDENTI tra loro, ovvero:

$$x(t) = \int v_x(t)\,dt$$

$$v_x(t) = \int a_x(t)\,dt$$

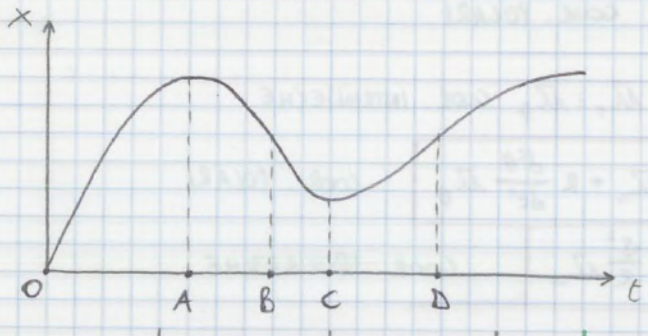
Un moto a 2D possiamo vederlo come la SOVRAPPOSIZIONE di 2 moti a 1D nello stesso tempo

MOTI IMPORTANTI A 1D

Abbiamo:

- $x(t)$ = distanza dall'origine
- $|\vec{v}| = \frac{dx}{dt}$
- $|\vec{a}| = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$

→ un altro vantaggio è che possiamo disegnare dei grafici



Spezzo il grafico in intervalli e ∀ di essi ricavo delle informazioni

	x	v	a
OA	CRESCENTE	>0 (decresce)	<0
A	MAX	$=0$ (decresce)	<0
AB	DECRESCE	<0 (decresce)	<0
B	FLESSO DECR.	<0	$=0$
BC	DECRESCE	<0 (cresce)	>0
C	MIN	$=0$ (cresce)	>0

- $f''(x) > 0 \Rightarrow$ fz. CONVESSA ∪
- $f''(x) < 0 \Rightarrow$ fz. CONCAVA ∩
- $f''(x) = 0 \Rightarrow$ FLESSO

- CONVESSA → $f'(x)$ CRESCE
- CONCAVA → $f'(x)$ DECRESCE

3) MOTO ARMONICO

Il MOTO ARMONICO lungo un asse rettilineo è un moto vario la cui legge oraria è definita dalla (*)

$a = -\omega^2 x$

↳ • segno opposto alla posizione x
• a è proporzionale a x

↳ $a = kx$

IMP: a NON DIPENDE da t ma da x

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x}$$ EQ. DIFF.

Dobbiamo trovare una fz. che derivata 2 volte mi da la fz. stessa e qst non può che essere una fz. trigonometrica

C.I. $t = 0$ → $x = A$, $v = 0$

$$\boxed{x = K\cos(\omega t + \varphi)} \quad (*)$$

$$\boxed{v = -K\omega\,\text{sen}(\omega t + \varphi)}$$

$$\boxed{a = -K\omega^2\cos(\omega t + \varphi)}$$

Troviamo K e φ

$t = 0$:
- $v = 0 \Rightarrow v = -K\omega\,\text{sen}\,\varphi \rightarrow -K\omega\,\text{sen}\,\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$
- $x = A \Rightarrow x = K\cos\varphi \longrightarrow K\underbrace{\cos\varphi}_{1} = A \Rightarrow K = A$

IN CONCLUSIONE: il mio moto ha:

$\varphi = 0$	FASE
$K = A$	AMPIEZZA
ω	PULSAZIONE

→ Essendo una fz. trigonometrica il moto armonico è un MOTO PERIODICO.
Per determinare il PERIODO consideriamo 2 tempi:

• $t = t_0$
• $t = t_0 + T$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t_0) = x(t_0+T) \\ v(t_0) = v(t_0+T) \\ a(t_0) = a(t_0+T) \end{cases} \text{ sono } = \text{ x def.}$$

T = PERIODO

$$\Rightarrow \quad A\cos(\omega t_0 + \varphi) = A\cos(\omega t_0 + \omega T + \varphi) \longrightarrow \omega T = 2\pi \Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

OSSERVAZIONI

Cosa significa ACCELERA o DECELERA?

↳ Non useremo mai qsti termini, ma diremo che:

$a > 0 \rightarrow$ asse x positivo $\Rightarrow \frac{dv}{dt} > 0 \rightarrow$ mi dice solo se v CRESCE o DECRESCE

$a < 0 \rightarrow$ asse x negativo

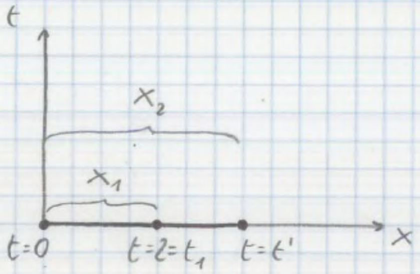
↳ NB: v crescente non vuol dire che $|\vec{v}|$ cresce

Esempio 1D

Particella parte da ferma con $a = 3 \frac{m}{s^2}$, dopo 2 s inizia a frenare con una $a = -3(t-2)$. Dove si ferma la particella?

$[0,2] \rightarrow a = 3 \frac{m}{s^2}$

$[2,t'] \rightarrow a = -3(t-2)$



↳ NB: scelgo arbitrariamente che la particella parta da $t=0$

$t=2 \rightarrow v_1$ (che non conosco)

$t=t' \rightarrow v=0$ (xkè la particella si ferma)

• $[0,2] \rightarrow$ MOTO RETT. UNIF. ACC.

C.I. $t=0 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ v_0 = 0 \end{cases}$ lo dice il problema

$v = at$

$x = \frac{1}{2}at^2$

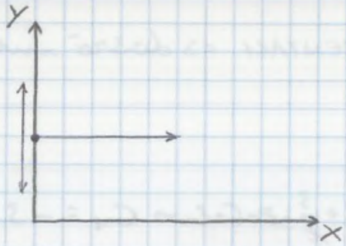
• $t = 2 = t_1$

$v_1 = at_1 = 3 \cdot 2 = 6 \frac{m}{s}$

$x_1 = \frac{1}{2}at_1^2 = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot 3 \cdot \cancel{2^2} = 6\ m$

• $[2, t']$

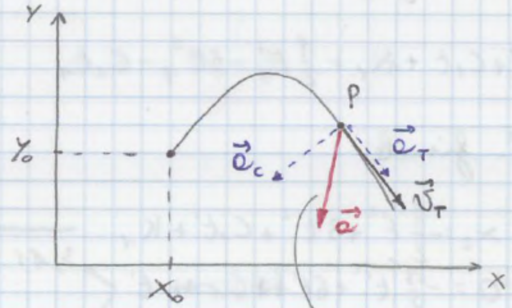
C.I. $t = t_1 \Rightarrow \begin{cases} v = v_1 = 6 \frac{m}{s} \\ x = x_1 = 6\ m \end{cases}$



$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x} t \\ y = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a t^2 \\ v_y = v_{0y} + a t \end{cases}$$

Traiettoria

$$\begin{cases} t = \dfrac{x - x_0}{v_{0x}} \\ y = y_0 + \dfrac{v_{0y}}{v_x}(x - x_0) + \dfrac{1}{2} a \dfrac{(x - x_0)^2}{v_x^2} \end{cases} \rightarrow \text{la mia traiettorie è una PARABOLA}$$



→ NON HA direzione lungo x

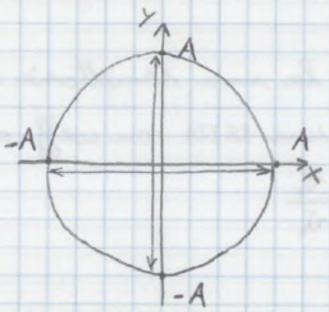
- $\vec{v} = v_0 \vec{u}_x + (v_{0y} + at)\vec{u}_y$
  - ↳ $\vec{v} = \vec{v}(t)$
- $\vec{r} = \vec{r}(t)$
- $\vec{a} = 0\vec{u}_x + a\vec{u}_y$

3) MOTO CIRCOLARE

↳ Sovrapposizione di 2 MOTI ARMONICI con stessa A e ω, ma sfasati di $\frac{\pi}{2}$

$x(t) = A \cos \omega t$

$y(t) = A \underbrace{\operatorname{sen} \omega t}_{\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})}$



Traiettoria

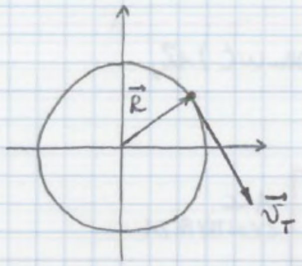
$x^2 + y^2 = A^2$

↳ Traiettoria circolare di Raggio A e centro nell'origine

$\vec{v}_T = R\omega \vec{u}_T$

↳ NB: x motivi di praticità utilizziamo una notazione vettoriale per ω

↳ Introduciamo il vettore ω xke:



$\vec{v}_T \perp \vec{R}$ => se io trovo un 3° vettore $\perp$ al piano della circonferenza posso usare la REGOLA DELLA MANO DESTRA

Pollice $\equiv \vec{R}$

Indice $\equiv \vec{\omega}$ (uscente)

Medio $\equiv \vec{v}_T$

$\vec{R} \wedge \vec{\omega}$ mi da: $\wedge$ = prodotto vettoriale

$|\vec{R} \wedge \vec{\omega}| = R\omega$

DIREZIONE $\perp$ a $\vec{R}$, $\perp$ a $\vec{\omega}$ } stessa DIREZIONE di $\vec{v}_T$

=> $\boxed{\vec{v}_T = \vec{R} \wedge \vec{\omega}}$ → Con la MANO DX noto che $\vec{R} \wedge \vec{\omega}$ mi da un vettore $\perp$ a $\vec{R}$ e $\vec{\omega}$ che giace sullo stesso piano

2) MOTO CIRCOLARE UNIF. ACC.

$$\text{C.I.} \begin{cases} t = 0 \\ \theta = \theta_0 \\ \omega = \omega_0 \end{cases} \qquad \boxed{\alpha = cost}$$

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{\omega = \omega_0 + \alpha t} \\ \boxed{\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2} \end{array}\right\} \text{COOR. POLARI}$$

In qst moto abbiamo:

- $\vec{v}_T = \vec{R} \wedge \vec{\omega}$
- $|\vec{a}_c| = \frac{|\vec{v}_T|^2}{R}$ → qsta vale x tutti i moti a 2D
- $\vec{a}_T = \vec{R} \wedge \vec{\alpha}$

$$\vec{a}_T = \frac{d\vec{v}_T}{dt} = \frac{d(\vec{R} \wedge \vec{\omega})}{dt} = \cancelto{0}{\frac{d\vec{R}}{dt}} \wedge \vec{\omega} + \vec{R} \wedge \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt}}_{\vec{\alpha}}$$

↳ $\vec{a}_T = \vec{R} \wedge \vec{\alpha}$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{F}_x = m\vec{a}_x \\ \vec{F}_y = m\vec{a}_y\end{array}\right\}$$ COOR. CARTESIANE

d) COOR. INTRINSECHE

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_c = \frac{dv}{dt}\vec{u}_\tau - \frac{v^2}{R}\vec{u}_n$$

$$F = m(\vec{a}_\tau + \vec{a}_c)$$

$F_\tau = m\vec{a}_\tau \rightarrow$ modifico il MODULO DELLA VELOCITÀ

$F_c = m\vec{a}_c \rightarrow$ " la DIREZIONE DELLA VELOCITÀ

$$\vec{F} = F_\tau\vec{u}_\tau + F_c\vec{u}_n$$

e) Classificazione delle forze

- FORZE REALI o FISICHE
- FORZE APPARENTI (legate al sistema di riferimento)

f) Concetto di RISULTANTE

↳ Compare quando ho + cause → su un pt. agiscono + FORZE

$$\boxed{\vec{R} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i}$$

g) CASO PARTICOLARE

Se $\vec{F} = cost \Rightarrow \vec{a} = cost$

↳ • cost in MODULO e DIREZIONE
• Possiamo avere solo MOTO RETTILINEO

Esempi

1) Ho un oggetto fermo con $m = 1\,Kg$ su cui è applicata una $\vec{F} = 3\vec{u}_x + 2t\,\vec{u}_y$.
Trovare la traiettoria.

$$a = \frac{F}{m} = \frac{3\vec{u}_x + 2t\,\vec{u}_y}{1} = 3\vec{u}_x + 2t\,\vec{u}_y$$

Scegliamo le C.I. $t = 0 \Rightarrow \begin{cases}\vec{v} = 0 \\ \vec{r} = 0\end{cases}$

a) UGUALE vuol dire:

- stesso MODULO
- stessa DIREZIONE

b) A su B → $\vec{F}$ è applicata in B

B su A → $-\vec{F}$ " " A

c) Concetto di A e B

↳ è importante dire che ci sono 2 corpi xké ci dice che le <u>forze sono sempre a coppie</u> e sono sempre necessarie 2 masse:

- una SORGENTE di forza
- una che riceve la forza (SONDA)

<u>Perché si usano $\vec{F}$ e $-\vec{F}$?</u>

Queste 2 forze produrranno 2 accelerazioni $\vec{a}_A$ e $\vec{a}_B$

$\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB} \cancel{\Rightarrow} \vec{a}_B = -\vec{a}_A$

↳ xké x il PRINCIPIO II $\quad m_A \vec{a}_A = -m_B \vec{a}_B$

$$\downarrow$$

$$\vec{a}_B = -\frac{m_A}{m_B}\vec{a}_A$$

$\Rightarrow \vec{a}_B$ e $\vec{a}_A$ hanno:

- stessa DIREZIONE
- verso OPPOSTO
- MODULO ≠

<u>CASO PARTICOLARE</u>

Se $m_A \ll m_B \Rightarrow \frac{m_A}{m_B} \simeq 0 \rightarrow \vec{a}_B \xrightarrow{\text{tende}} 0$

b) QUANTITA' DI MOTO

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$$

$$\vec{J} = \Delta\vec{p} = \vec{p}_{fin} - \vec{p}_{iniz}$$

↳ ≡ con la variazione della quantità di moto in un Δt FINITO

Se vale x quantità finite varrà anche x quantità INFINITESIME

$$d\vec{J} = d\vec{p}$$

↳ $\vec{F}\,dt = d\vec{p} \rightarrow \boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$ => la $\vec{F}$ è quel vettore che descrive la variazione di $\vec{p}$ nel t

$d\vec{p}$ è legato alla variazione di:

- m
- $\vec{v}$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + \frac{d\vec{v}}{dt}m$$

Se $m = \text{cost} \Rightarrow \vec{F} = \frac{d\vec{v}}{dt}m = m\vec{a}$ PRINCIPIO II

c) CONSERVAZIONE DELLA QUANTITA' DI MOTO

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Se $\vec{F} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{p} = \text{cost}} \rightarrow m\vec{v} = \text{cost} \Rightarrow \vec{v} = \text{cost}$ PRINCIPIO I

3) Effetto di una F legata ad uno spostamento

$\boxed{dW = \vec{F}\cdot d\vec{r}}$ LAVORO INFINITESIMO

↓

$\boxed{W = \int \vec{F}\,d\vec{r}}$ LAVORO (descrive l'effetto di una F lungo una traiettoria)

$$W = \int m\vec{a}\cdot d\vec{r} = \int m\frac{d\vec{v}}{dt}d\vec{r} = \int_{v_i}^{v_f} m\vec{v}\,d\vec{v} = \int_{v_i}^{v_f} m v\,dv$$

$\vec{v} \parallel d\vec{v} \Rightarrow \vec{v}\,d\vec{v} = v\,dv$

Se $m = \text{cost} \Rightarrow W = m\int_{v_i}^{v_f} v\,dv \rightarrow W = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2)$

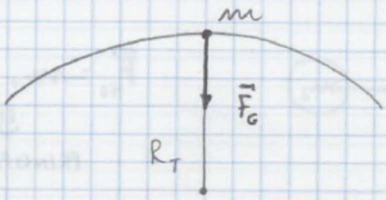
dove $\boxed{\frac{1}{2}mv^2 = K}$ ENERGIA CINETICA $\rightarrow \boxed{W = \Delta K}$

f) CASO PARTICOLARE

↳ m_1 è la Terra ($m_1 = M_T$)

m_2 è la massa di un oggetto sulla superficie

$$\vec{F}_G = -G \frac{M_T m_2}{R_T^2} \vec{u}_r$$



In qst caso parliamo di **FORZA PESO**

$$\vec{P} = -m \underbrace{\left(G \frac{M_T}{R_T^2} \right)}_{\approx 9{,}81 \frac{m}{s^2}} \vec{u}_r$$

$$\boxed{\vec{P} = -m \vec{g}}$$

$\vec{P} = - m \vec{g}$

→ vettore con DIREZIONE ⊥ alla sup. della terra

↳ ci ricorda che ha VERSO diretto verso il centro della terra

FORZA ELETTROSTATICA

a) ORIGINE

↳ Date 2 cariche elettriche q_1 e q_2, esercitano una forza elettrostatica ATTRATIVA / REPULSIVA

b) MODULO

↳ • ∝ al ⊗ delle cariche
• inversamente ∝ al quadrato della distanza
• costante di proporzionalità $\frac{1}{4\pi\varepsilon}$ ε = COST DIELETTRICA

c) DIREZIONE

↳ Sempre lungo la retta congiungente le cariche elettriche

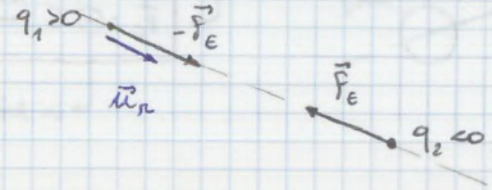
d) VERSO

↳ Attrattiva o Repulsiva

↳ q_1 e q_2 SEGNO OPPOSTO

e) PT. APPLICAZIONE

↳ centro di massa delle cariche



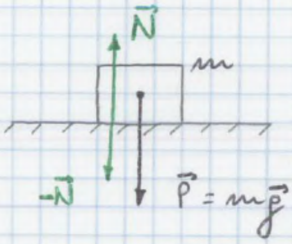
$$\boxed{\vec{F}_E = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon r^2} \vec{u}_r}$$

$q_1 \cdot q_2 > 0$ → REPULSIVA

$q_1 \cdot q_2 < 0$ → ATTRATTIVA

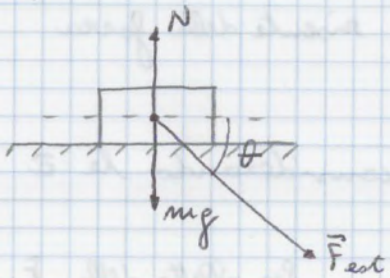
f) CASO PARTICOLARE

$\vec{a} = 0$ => si parla di FORZA NORMALE



$\vec{N}$ = NORMALE → è = alla risultante delle forze attive agenti su m ⊥ alla superficie

Esempio



$\vec{F}_x = \vec{F}_{est} \cdot \cos\theta$

$\vec{F}_y = \vec{F}_{est} \operatorname{sen}\theta$

- Lungo x

$F_x = m a_x$

- Lungo y

$N - mg - F_y = 0$

↳ ∄ $\vec{a}$ xké c'è il piano che blocca m

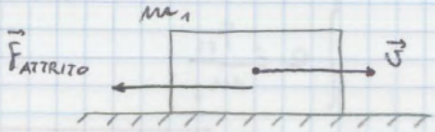
FORZA DI ATTRITO

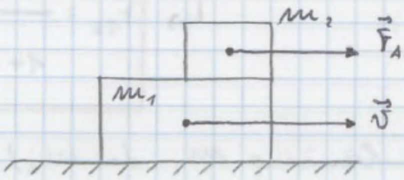
a) ORIGINE

↳ E' legato al moto di una sup. rispetto ad un' altra

b) DIREZIONE e VERSO

↳ opposti rispetto al possibile moto di m_1 rispetto a m_2





m_2 rispetto a m_1 viaggia verso sx => $\vec{F}_A$ sarà verso dx xké si oppone al moto di m_2

c) MODULO

↳ Abbiamo ≠ tipi di attriti:

Il tutto è fermo => $\boxed{\vec{v}_{rel} = 0}$

$$|\vec{F}_{AS}| = \sum F_{\parallel} = F_1 \cos\theta$$

$$F_1 \cos\theta \le \mu_s |\vec{N}| \rightarrow 3t\cos\theta \le \mu_s (mg + 3t \sin\theta)$$

$$3t\cos\theta - \mu_s 3t \sin\theta \le \mu_s mg$$

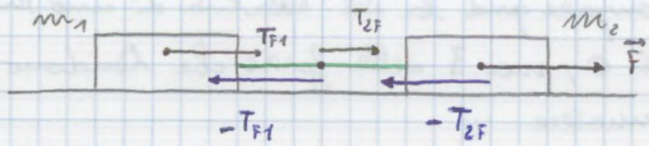
$$3t(\cos\theta - \mu_s \sin\theta) \le \mu_s mg$$

$[0, t_1]$

$$t_1 = \frac{\mu_s mg}{3(\cos\theta - \mu_s \sin\theta)}$$

FORZE DI TENSIONE

↳ Compaiono tutte le volte che abbiamo 2 masse legate dalla fune tesa avente una certa massa



T_{2F} = forza che m_2 applica sulla fune

T_{F1} = forza che la fune applica su m_1

$$\begin{cases} m_2) & F - T_{2F} = m_2 a_2 \\ \text{fune}) & T_{2F} - T_{F1} = m_F a_F \\ m_1) & T_{F1} = m_1 a_1 \end{cases}$$

CONDIZIONI GENERALI DI UNA FUNE

CASI PARTICOLARI

a) La fune è <u>INESTENSIBILE</u> (distanza tra m_1 e m_2 = cost)

↳ $a_1 = a_2 = a_F$

xkè i moti devono essere =

b) $m_F = 0$ => $T_{2F} - T_{F1} = 0 \rightarrow \boxed{T_{2F} = T_{F1} = T}$

posso identificare le F agenti sulla fune solo con un forza T

FORZE ELASTICHE

a) ORIGINE

↳ La causa è la presenza di una molla

↳ qualsiasi cosa deformabile con $m = 0$

FORZA CENTRIPETA

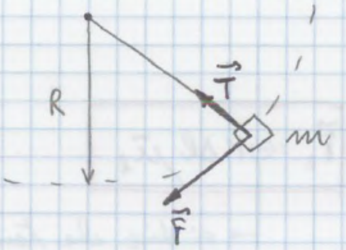
Esempi

1

$$\vec{F} = m\vec{a} = m(a_T \vec{u}_T + a_c \vec{u}_c)$$

$F_T = m a_T \rightarrow$ variazione in MODULO

$F_c = m a_c \rightarrow$ variazione in DIREZIONE



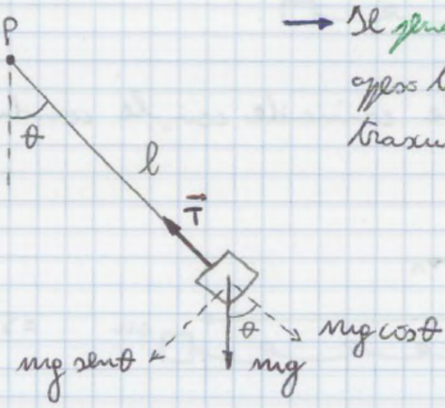
$$\vec{R} = \vec{F} + \vec{T}$$

Se $|\vec{F}| = cost \Rightarrow \alpha = cost \rightarrow$ MOTO CIRCOLARE UNIF. ACC.

$$\begin{cases} \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega = \omega_0 + \alpha t \end{cases}$$

2 PENDOLO

$\rightarrow$ Il pendolo è costituito da un pt. materiale appeso tramite un filo inestensibile di m trascurabile



$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{T}$$

$F_T = -mg\,\text{sen}\theta$

$F_c = T - mg\cos\theta$

$$-mg\,\text{sen}\theta = m a_T = m\alpha l \longrightarrow \alpha = -\frac{g}{l}\text{sen}\theta$$

$$T - mg\cos\theta = m a_c = m\omega^2 l$$

Che tipo di moto abbiamo?

Partiamo da $\alpha = -\frac{g}{l}\text{sen}\theta$ dove $\theta = \theta(t)$

Se θ è piccolo $\Rightarrow \text{sen}\theta \simeq \theta \rightarrow \alpha = -\frac{g}{l}\theta$ ma $\alpha = \frac{d\theta^2}{dt^2}$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta \rightarrow \boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta}$$

ω = PULSAZIONE

CONSEGUENZA

Se γ è CHIUSA $\Rightarrow$ $\boxed{W = 0}$

• CONCETTO DI ENERGIA POTENZIALE

↳ Posso definire $\forall$ pt. dello spazio un'energia detta ENERGIA POTENZIALE definita in modo che

$$\boxed{W_{AB} = -\Delta E_{AB}}$$

NB: posso farlo $\Leftrightarrow$ la traiettoria è CONSERVATIVA

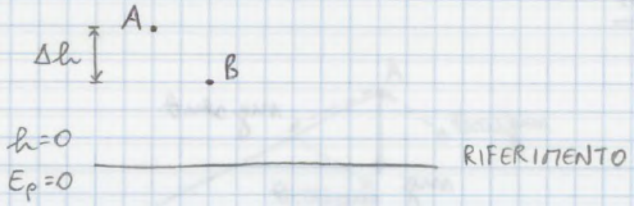
Nasce un problema di costante additiva arbitraria

$$\begin{cases} E_A = E_1 & \text{al pt. A corrisponde un'energia 1} \\ E_B = E_2 & \text{" B " " 2} \\ W_{AB} = -(E_2 - E_1) \end{cases}$$

ma se

$$\begin{cases} E_A = E_1 + K \\ E_B = E_2 + K \\ W_{AB} = -(E_2 - E_1) \end{cases}$$

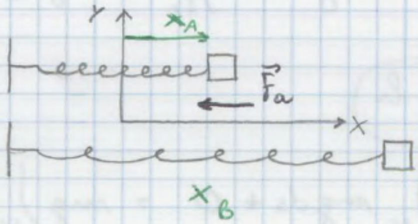
$\Rightarrow$ Fisso la costante scegliendo un riferimento $\rightarrow$ pt. nel quale $E_p = 0$



$$W_{AB} = mg(h_A - h_B) = -(\underbrace{mgh_B}_{E_B} - \underbrace{mgh_A}_{E_A})$$

$\Rightarrow$ $\boxed{E_p = mgh}$

- LEGATE CON LA FORZA ELASTICA



$$W_{AB} = \int \vec{F}\, d\vec{s} = \int_{x_A}^{x_B} -Kx\, dx = -\left(\frac{1}{2}Kx_B^2 - \frac{1}{2}Kx_A^2\right) \Rightarrow \boxed{E_p = \frac{1}{2}Kx^2}$$

ma $W_{AB}^{c} = -\Delta E_{AB}$

Sostituendo all'interno di

$\boxed{W_{AB} = \Delta K}$ TEOREMA ENERGIA-LAVORO

ottengo $W_{AB}^{NC} - \Delta E_{AB} = \Delta K$

$W_{AB}^{NC} - E_B + E_A = K_B - K_A$

Porto a dx tutti gli stati iniziali

$$\boxed{K_A + E_A + W_{AB}^{NC} = K_B + E_B}$$

dove

$K_A + E_A$ = ENERGIA MECCANICA INIZIALE del corpo

$K_B + E_B$ = " " FINALE "

W_{AB}^{NC} = " SCAMBIATA

• CASI PARTICOLARI

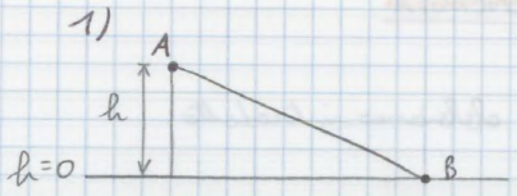
a) TEOREMA DI CONSERVAZIONE DELL' ENERGIA MECCANICA

$W = 0 \Rightarrow \boxed{K_A + E_A = K_B + E_B}$

Se $F^{NC} = 0 \Rightarrow$ da A a B scambio **K** con **E** e viceversa

Esempi:

1)



$A \to \begin{cases} t = 0 \\ v = 0 \end{cases}$

$B \to \begin{cases} t = t_1 \\ v = v_1 \end{cases}$

$A \to \begin{cases} K_A = 0 \\ E_A = mgh \end{cases}$

$B \to \begin{cases} K_B = \frac{1}{2} m v_1^2 \\ E_B = 0 \quad (h = 0) \end{cases}$

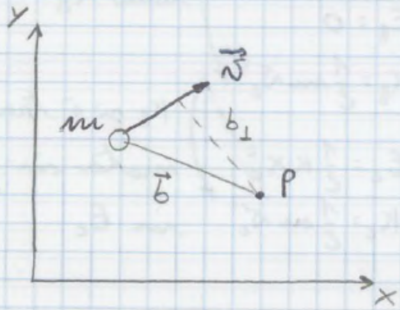
IN CONCLUSIONE: vediamo che tutta E_A si è trasformata in K_B

$$mgh = \frac{1}{2} m v_1^2$$

MOMENTO ANGOLARE

↳ Ci sono 2 momenti angolari ⇒ la cosa principale * definirlo è stabilire un POLO arbitrario.

↳ pt. qualunque rispetto al quale calcolo il mom. angolare



P = polo

Dopo il polo stabiliamo il BRACCIO: vettore che unisce il polo alla massa m

⇒ ora posso definire il MOMENTO ANGOLARE $\vec{L}$

$$\boxed{\vec{L} = \vec{b} \wedge \vec{P}}$$

$\vec{P}$ = quantità di moto

PROPRIETÀ:

a) MODULO

In un $\wedge$ posso ⊗ un componente $\perp$ all'altro

$$|\vec{L}| = b_\perp |\vec{P}|$$

$b_\perp$ = distanza tra il polo e la retta di $\vec{v}$

b) DIREZIONE

$\perp$ a $\vec{b}$ e $\vec{v}$ × la MANO DX (ortogonale al piano individuato dai 2 vettori)

c) VERSO

↳ REGOLA MANO DX

CASO PARTICOLARE

a) $\boxed{\vec{L} = 0}$

Se

$\vec{L} = \vec{b} \wedge m\vec{v}$

$\left.\begin{array}{l} \vec{b} = 0 \ (m \equiv P) \\ \vec{v} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{b} \parallel \vec{v}$

$$|\vec{L}| = m r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

Se MOTO CIRCOLARE

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d\theta}{dt} = \omega \\ r = R \end{array}\right\} \Rightarrow |\vec{L}| = m R^2 \omega$$ stessa formula di prima

e) ci chiediamo cosa è $\frac{d\vec{L}}{dt}$

→ x farlo usiamo POLO ≡ O

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge m\vec{v}) = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{v}} \wedge m\vec{v} + \vec{r} \wedge m \underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}}_{\vec{a}}$$

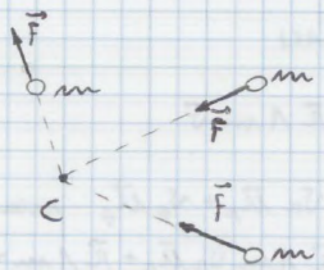
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{v} \wedge m\vec{v} + \vec{r} \wedge \underbrace{m\vec{a}}_{\vec{F}}$$ ma $\vec{v} \wedge \vec{v} = 0$

NB: vediamo che $\vec{r} \wedge \vec{F}$ è un braccio. forza e lo chiamiamo M = MOMENTO DELLA FORZA

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}}$$ ⇒ $\vec{M}$ fa cambiare il momento angolare

FORZE CENTRALI

Hanno la proprietà legata al fatto che le rette di azione delle forze si intersecano tutte nello stesso pt. C



Esse sono importanti xké:

a) Sia la F. GRAVITAZIONALE che ELETTROSTATICA sono F. CENTRALI

b) è una F. CONSERVATIVA

IN CONCLUSIONE:

$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta \longrightarrow$ $\boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{|\vec{L}|}{2m} = cost}$ VELOCITÀ ANGOLARE → II LEGGE DI KEPLERO

MOTI RELATIVI

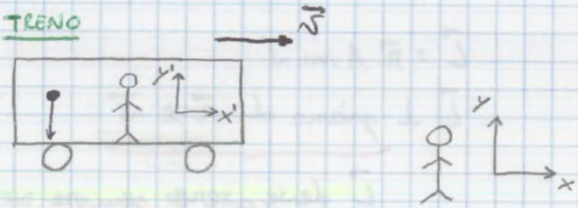
• PREMESSA

↳ Parlare di moti in cui il SR cambia => 1) La traiettoria in ogni nuovo sistema S'R' sarà la stessa?
2) La forza sarà la stessa?

Esempi

1)

TRENO



Abbiamo 2 SR

● = sasso che cade

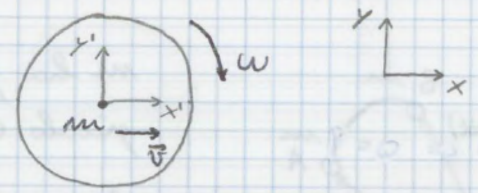
A livello fisico il sasso che cade è sottoposto solo a $\vec{g}$ lungo Y

=> • Lungo Y → MOTO UNIF. ACC.
• Lungo X → $\vec{F} = 0$, $\vec{v} = cost$ → MOTO RETT. UNIF.

Nel SR abbiamo una traiettoria PARABOLICA
Nel S'R' abbiamo una traiettoria RETTILINEA

2)

GIOSTRA



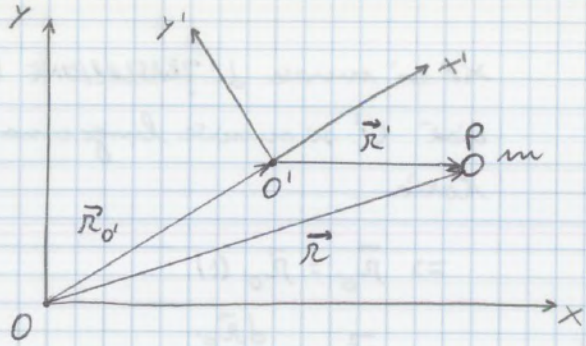
Io sono al centro di una giostra e lancio una palla a XY

SR → vede arrivare la palla con MOTO RETT. UNIF. => $\vec{F} = 0$ → $\vec{v} = cost$
S'R' → vedo la palla che si allontana sempre + ∀ mio giro, quindi vedo una traiettoria CURVA

↳ ciò è possibile <=> $\vec{F} \neq 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 302

• EQUAZIONI



Abbiamo una certa massa m che si muove lungo una traiettoria il cui moto viene osservato da una terna cartesiana con centro in O e da una con centro in O'. Vogliamo ricavare una relazione tra $\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}$ misurate da un osservatore solidale con O e con O'.

a) VETTORE POSIZIONE (SR)

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_{O'}}$$

$$\vec{r} = X\vec{u}_x + Y\vec{u}_y + Z\vec{u}_z$$
$$\vec{r}_{O'} = X_{O'}\vec{u}_x + Y_{O'}\vec{u}_y + Z_{O'}\vec{u}_z$$
$$\vec{r}\,' = X'\vec{u}_{x'} + Y'\vec{u}_{y'} + Z'\vec{u}_{z'}$$

b) VELOCITA' (SR)

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}\,' + \vec{r}_{O'}) = \frac{d}{dt}(X'\vec{u}_{x'} + Y'\vec{u}_{y'} + Z'\vec{u}_{z'}) + \vec{v}_{O'} =$$

$$= \left(\frac{dX'}{dt}\vec{u}_{x'} + \frac{dY'}{dt}\vec{u}_{y'} + \frac{dZ'}{dt}\vec{u}_{z'}\right) + \left(\frac{d\vec{u}_{x'}}{dt}X' + \frac{d\vec{u}_{y'}}{dt}Y' + \frac{d\vec{u}_{z'}}{dt}Z'\right) + \vec{v}_{O'} =$$

$$= \overset{\vec{v}\,'}{\vec{v}_{S'R'}} + (X'\cdot\vec{\omega}\wedge\vec{u}_{x'} + Y'\cdot\vec{\omega}\wedge\vec{u}_{y'} + Z'\cdot\vec{\omega}\wedge\vec{u}_{z'}) + \vec{v}_{O'} =$$

$$= \vec{v}\,' + \vec{\omega}\wedge\underbrace{(X'\vec{u}_{x'} + Y'\vec{u}_{y'} + Z'\vec{u}_{z'})}_{\vec{r}\,'} + \vec{v}_{O'}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{v}\,' + \omega\wedge\vec{r}\,'}$$

$\vec{v}_{O'}$ = vel. con cui O' si muove rispetto ad O

NB: nel sistema S'R' i versori NON CAMBIANO nel t xkè muovendosi solidali al sistema non cambiano direzione rispetto al sistema stesso

dove $\boxed{\dfrac{d\vec{r}\,'}{dt} = \vec{v}\,' + \omega\wedge\vec{r}\,'}$

c) ACCELERAZIONE (SR)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v}_{O'} + \vec{v}\,' + \vec{\omega}\wedge\vec{r}\,') =$$

$$= \frac{d\vec{v}_{O'}}{dt} + \frac{d\vec{v}\,'}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{r}\,' + \frac{d\vec{r}\,'}{dt}\wedge\vec{\omega}$$

FORZE APPARENTI

Notiamo che:

- nei 2 sistemi di riferimento le acc. sono $\neq$
- $\vec{F} = m\vec{a}$ in SR
- $\vec{F}' = m\vec{a}'$ in S'R'

$\Rightarrow \vec{F} \neq \vec{F}'$

$SR \Rightarrow \vec{F} = \vec{F}_{FISICHE}$

$S'R' \Rightarrow \vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_{APPARENTI}$

A cosa è legata la FORZA APPARENTE?

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{Tr} + \vec{a}_{Cor}}$$

$$\downarrow$$

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_{Tr} - \vec{a}_{Cor}$$

$$\vec{F}' = m\vec{a}' = m(\vec{a} - \vec{a}_{Tr} - \vec{a}_{Cor})$$

$$\downarrow$$

$$\vec{F}' = \underbrace{m\vec{a}}_{\vec{F}} \underbrace{- m\vec{a}_{Tr} - m\vec{a}_{Cor}}_{\vec{F}_{APPARENTI}}$$

↳ NB: sono legate solo a S'R'

i) $\vec{F}_{CENTRIFUGA} = -m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') \rightarrow$ IMP: ha senso esterno

ii) $\vec{F}_{CORIOLIS} = -m(2\vec{\omega} \wedge \vec{v}')$

- CASO PARTICOLARE

Se in S'R'
- $\vec{\omega} = 0$ (assi fissi)
- $\vec{v}_{O'} = cost$ (O' si muove di moto RETT. UNIF.)

$\Rightarrow \vec{a}_{Tr} = \vec{a}_{Cor} = 0 \Rightarrow a = a' \rightarrow \boxed{\vec{F} = \vec{F}'}$

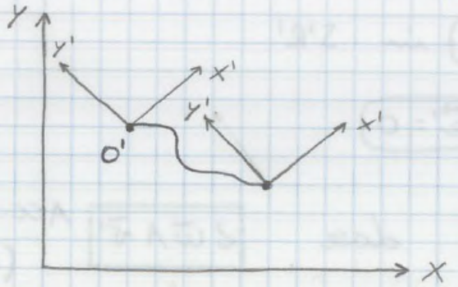
↓

in qst caso si dice che SR e S'R' sono INERZIALI

→ un sistema di riferimento INERZIALE è un SR in cui è valido il II PRINCIPIO DELLA DINAMICA
↳ in qsti SR l'accelerazione dei corpi è dovuta a FORZE REALI

Esempi

1) S'R' non ruota $\Rightarrow$ O' si muove lungo una traiettoria



$\boxed{\vec{\omega} = 0} \Rightarrow \begin{cases} \vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{O'} \\ \vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{O'} \end{cases}$

$\vec{v}_{O'} = \vec{v}_{O'}(t)$

$\vec{F}_{APPARENTE} = -K\Delta l = -m\,\underbrace{\omega^2 R}$

posso scriverla come $\omega \wedge (\omega \wedge R)$

$\Rightarrow F_{APPARENTE} = -m\,|\vec{a}_{tr}|$

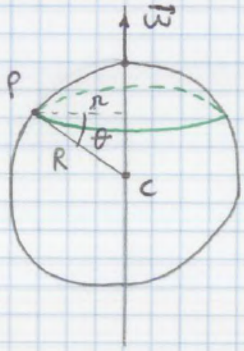
3) CADUTA DI UN GRAVE

IMP: la Terra è un sistema di riferimento NON INERZIALE xké $\omega \neq 0$

$T = 24\ h$

$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

S'R'



- Posso identificare un raggio r $\perp$ all'asse
- P ruota con la Terra con un raggio r

$r = R\cos\theta$

S'R' (Terra)

$\vec{v}' = 0$

SR (le stelle)

- $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} = \vec{\omega} \wedge \vec{R}$

$|\vec{v}| = \omega R \cos\theta$

↳ DIREZIONE tg alla traiettoria (MANO DX)

$\Rightarrow$ quind $\theta = 45°$

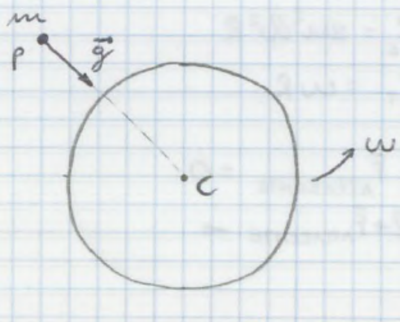
↓

$|\vec{v}| = 500\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left[\dfrac{m}{s}\right]$

$\left[\begin{array}{l} \vec{\omega} = \text{pollice} \\ \vec{R} = \text{indice} \\ \vec{v} = \text{medio} \end{array}\right]$

- $\vec{a}_c = \omega^2 r = 3 \cdot 10^{-2} \cos\theta\ \dfrac{m}{s^2}$

- Se P cade



Se m cade sentirà un'acc. $\vec{g}$ verso C, mentre la Terra ruota

SR

vedo m che cade da P a C

$\vec{a} = \vec{g}$

S'R'

io ruoto assieme alla terra $\Rightarrow$ vedrò m che cadrà in un pt. lontano da me

$\vec{a}' = \underset{(\vec{g})}{\vec{a}} - \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}')$

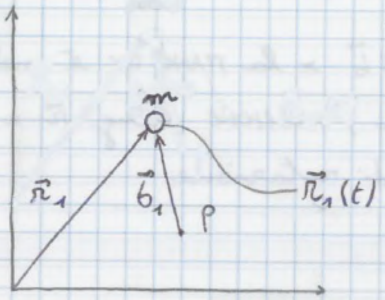
DINAMICA DEI SISTEMI DI PARTICELLE (PUNTI)

DEFINIZIONI

SISTEMI DI PARTICELLE: insieme di N masse puntiformi con distanze fra loro variabili

- Dal pt. di vista della CINEMATICA

$\vec{F}_1 = m\vec{a}_1$ $\quad$ $\vec{F}_1$ = F totale che agisce sulla massa m_1



m possiede:
- $\vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1$
- se definisco un POLO $\Rightarrow$ $\vec{L}_1 = \vec{b}_1 \wedge \vec{p}_1$
- $K_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$

$\hookrightarrow$ valgono x tutte le masse

$\Rightarrow$ diremo che una generica massa m_i avrà una certa $\vec{a}_i$, $\vec{v}_i$, $\vec{p}_i$, $\vec{L}_i$, $\vec{r}_i$, K_i e sulla massa agirà una $\vec{F}_i$

$\vec{F}_i$: F totale che agisce sulla massa i-esima

$\hookrightarrow$ tutte queste forze vengono distinte in 2 categorie:

- FORZE INTERNE

$\boxed{\vec{F}_{ij}^{int}}$ è la F di m_j su m_i che x il PRINCIPIO AZIONE-REAZIONE avrà $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$ che è la F di m_i su m_j

- FORZE ESTERNE

$\boxed{\vec{F}_i^{est}}$ generano una reazione esterna al sistema (NON CI INTERESSANO)

Studiamo un PUNTO MATERIALE matematico che rappresenta alcune proprietà del sistema

PUNTO MATERIALE:

$$M = \sum m_i$$

$$\vec{R}_{CM} \triangleq \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{R}_i}{M} \quad \text{(media pesata delle posizioni)}$$

=> Se il baricentro è un pt. => gode di tutte le proprietà di un pt: $\vec{v}_{CM}$, $\vec{a}_{CM}$, $\vec{P}_{CM}$, $\vec{L}_{CM}$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{R}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sum m_i \vec{R}_i}{M}\right) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{R}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i$$

$$\boxed{\vec{v}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i}$$

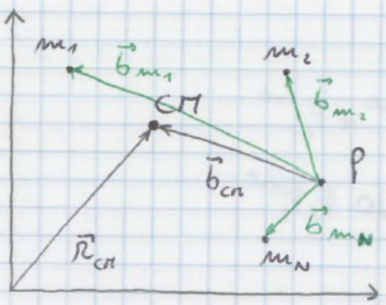
$$\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i$$

$$\boxed{\vec{a}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i}$$

$$\vec{P}_{CM} = \sum m_i \vec{v}_{CM} = \cancel{M}\frac{1}{\cancel{M}}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i$$

$$\boxed{\vec{P}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i}$$ → NB: $\vec{P}_{CM} = \vec{P}$ totale del sistema

$$\boxed{\vec{L}_{CM} = \sum \vec{b}_{CM} \wedge m_i \vec{v}_i}$$ → NB: Non è + = ad $\vec{L}$ del sistema xkè ∀ particella il braccio è ≠



- Dal pt. di vista della DINAMICA

$$\vec{a}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i$$

$$\hookrightarrow M\vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N}\left(\overbrace{\vec{F}_i^{int}}^{\text{si elidono a 2 a 2}} + \vec{F}_i^{est}\right)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 302

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \frac{d\vec{b}_i}{dt} \wedge m_i \vec{v}_i + \vec{b}_i \wedge m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} - \frac{d\vec{r}_P}{dt}\right) \wedge m_i \vec{v}_i + \vec{b}_i \wedge m_i \vec{a}_i =$$

$$= (\vec{v}_i - \vec{v}_P) \wedge m_i \vec{v}_i + \vec{b}_i \wedge \vec{F}_i = \underbrace{\vec{v}_i \wedge m_i \vec{v}_i}_{0} - \vec{v}_P \wedge m_i \vec{v}_i + \vec{M}_i$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{M}_i - \vec{v}_P \wedge m_i \vec{v}_i}$$

- Se considero il SISTEMA

$$\vec{P} = \sum \vec{P}_i \Rightarrow \text{derivo} \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \frac{d\vec{P}_i}{dt} = \sum \vec{F}_i \longrightarrow \boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_i^{est}}$$

I EQ. CARDINALE

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i \Rightarrow \text{derivo} \quad \sum \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum \vec{M}_i - \sum \vec{v}_P \wedge m_i \vec{v}_i = \sum \vec{M}_i^{est} - \vec{v}_P \wedge \sum m_i \vec{v}_i$$

dove $\sum m_i \vec{v}_i = \vec{P}$

$\hookrightarrow \equiv \vec{P}_{CM}$

$\hookrightarrow \vec{P}_{CM} = M \vec{v}_{CM}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum \vec{M}_i^{est} - \vec{v}_P \wedge M \vec{v}_{CM}}$$

II EQ. CARDINALE

CASO PARTICOLARE

$\vec{v}_P \wedge M \vec{v}_{CM} = 0$

$\hookrightarrow$ si verifica quando:

- $\vec{v}_P = 0$ (POLO FISSO)
- $\vec{v}_{CM} = 0$ (ORIGINE $\equiv$ CM)
- $\vec{v}_P \parallel \vec{v}_{CM}$ (POLO $\equiv$ CM)

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum \vec{M}_i^{est}$$

$\hookrightarrow$ NB: essendo il polo un pt. preso a piacere noi lo sceglieremo in modo da realizzare uno dei 3 casi

Se $\sum \vec{M}_i^{est} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{L} = \text{cost}}$

• MOMENTO ANGOLARE $\vec{L}$

Scelgo $\boxed{\text{POLO} \equiv CM}$

$$\vec{L}' = \sum \vec{L}_i' = \sum \vec{r}_i' \wedge m_i \vec{v}_i' = \sum \vec{r}_i' \wedge m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_{CM}) =$$
$$= \underbrace{\sum \vec{r}_i' \wedge m_i \vec{v}_i}_{\vec{L}_i} - \underbrace{\sum m_i \vec{r}_i'}_{0} \wedge \vec{v}_{CM}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L}' = \sum \vec{L}_i \qquad \vec{L}' = \vec{L}_i$$

RIEPILOGO

SR

$\vec{F} = \sum \vec{F}_i \qquad \vec{P} \neq 0 \qquad * \vec{F} = \dfrac{d\vec{P}}{dt}$

$\vec{M} = \sum \vec{M}_i \qquad \vec{L} \neq 0 \qquad \vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$

S'R'

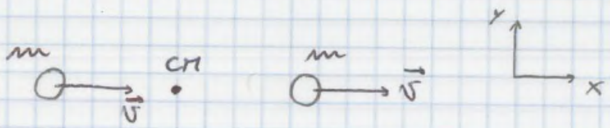
ORIGINE $\equiv CM \Rightarrow \vec{P} = 0$, $\vec{F}' \neq \vec{F}_i$

$*$ POLO $\equiv CM \Rightarrow \vec{M}' = \vec{M}_i$, $\vec{L}' = \vec{L}_i$

NB: ognuno dei 2 sistemi di riferimento ha dei vantaggi e svantaggi $\Rightarrow$ x risolvere un problema sceglierò le condizioni + vantaggiose (*) da entrambi i sistemi

Esempi

1)



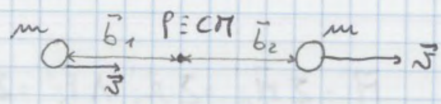
qnd le 2 m sono = il baricentro si trova nel centro geometrico

• $\vec{P}_1 = \vec{P}_2 = m\vec{v}$

$\hookrightarrow \vec{P} = 2m\vec{v}$ oppure $\vec{P} = M\vec{v}_{CM} = 2m\vec{v}$

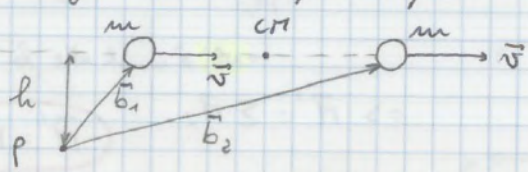
• $\vec{L}_i$

$\hookrightarrow$ se POLO $\equiv CM$



$\vec{v} \parallel \vec{b} \Rightarrow \vec{L}_1 = \vec{L}_2 \rightarrow \vec{L} = 0$

$\hookrightarrow$ se scelgo un POLO qualunque



$\vec{L}_1 = \vec{b}_1 \wedge m\vec{v}$

$|\vec{L}_1| = h_1 m v = |\vec{L}_2|$

$\hookrightarrow$ NB: x il modulo ci serve $b_\perp$

③ $\vec{R}_{CM} \wedge \sum m_i \vec{v}_i' = 0 \quad (\vec{v}_{CM}' = 0)$

④ $\sum \vec{r}_i' \wedge m_i \vec{v}_i' = \vec{L}'$

$(\vec{b}) \quad (\vec{P})$

$\downarrow \quad \downarrow$

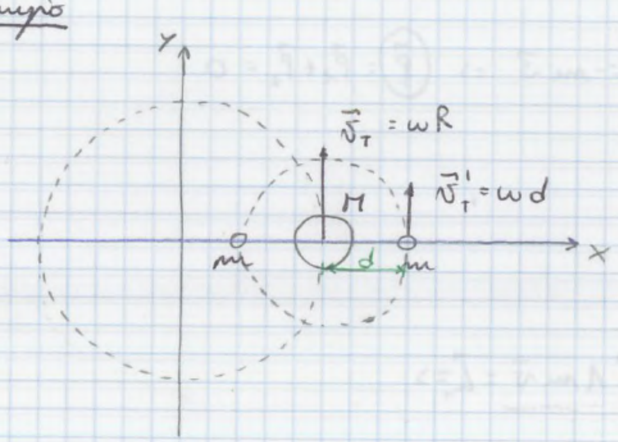
POLO $\equiv O'$ S'R' $= \vec{L}'_{POLO \equiv CM}$

$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{L} = \vec{L}_{CM} + \vec{L}'}$

$\vec{L}, \vec{L}_{CM} \rightarrow$ in SR rispetto a O

$\vec{L}' \rightarrow$ in S'R' rispetto a CM

Esempio



le ω sono =

in S'R' in cui $O' \equiv M$

↳ m ha un MOTO CIRCOLARE UNIFORME

$$\vec{v}' = \vec{\omega} \wedge \vec{d}$$

in SR

↳ $\vec{v} \neq \vec{v}'$ xké SR non è un sistema fisso

$$\vec{v} = \vec{v}_{Tr} + \vec{v}'$$

- Considerando il SISTEMA

CM $\equiv$ M

$M_{TOT} = M + 2m$

$\vec{L}_{CM} = \vec{b}_{CM} \wedge M_{TOT} \vec{v}_{CM} = \vec{R} \wedge (M + 2m) \vec{v}_{CM} \; (\equiv \vec{v}_T)$

↳ $|\vec{L}_{CM}| = (M + 2m) R v_T = M_{TOT} R^2 \omega$

in S'R' (POLO $\equiv$ CM)

$\vec{L}' = \vec{d} \wedge m \vec{v}_T' + \vec{d} \wedge m \vec{v}_T' + \underset{(\vec{d}=0)}{0} \wedge M \underset{(\vec{v}_{CM}=0)}{0}$

↳ $|\vec{L}'| = 2 m d v' = 2 m d^2 \omega$

$|\vec{L}_{TOT}| = |\vec{L}_{CM}| + |\vec{L}'| = M_{TOT} R^2 \omega + 2 m d^2 \omega$

$dW = \sum dW_i$

$\hookrightarrow = \sum \vec{F}_i^{est} \cdot d\vec{r}_i + \sum \vec{F}_i^{int} \cdot d\vec{r}_i$

Abbiamo visto che $\vec{F}_{ij}^{int}$ implica $\vec{F}_{ji}^{int} = -\vec{F}_{ij}^{int}$

$\hookrightarrow \begin{cases} dW_{ij} = \vec{F}_{ij}^{int}\, d\vec{r}_i \\ dW_{ji} = -\vec{F}_{ij}^{int}\, d\vec{r}_j \end{cases}$ > le 2 F agiscono su particelle ≠

$\hookrightarrow \Rightarrow$ quindi le ⊕ NON OTTENGO + 0

$$dW_{ij} + dW_{ji} = \vec{F}_{ij}^{int} (d\vec{r}_i - d\vec{r}_j)$$

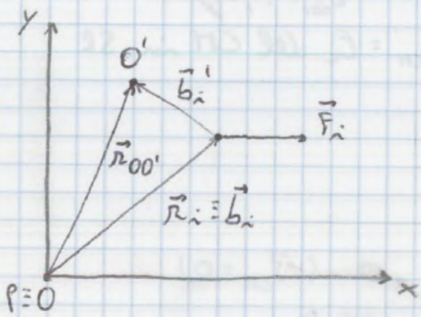
Se la distanza tra m_i e m_j è COST $\Rightarrow d\vec{r}_i = d\vec{r}_j \rightarrow d\vec{r}_i - d\vec{r}_j = 0$

IN GENERE

$d\vec{r}_i \neq d\vec{r}_j \Rightarrow dW^{int} \neq 0$ (producono un lavoro xkè la distanza tra le particelle cambia nel t)

LEGARE $\vec{M}$, $\vec{R}^{est}$

POLO ≡ O



$\vec{M}_o = \sum \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i$
$(\vec{b}_i)$

Se poi consideriamo un POLO O'

⇓

$\vec{M}_{o'} = \sum \vec{b}_i' \wedge \vec{F}_i$

$\Rightarrow$ avremo che: $\vec{r}_i = \vec{r}_{OO'} + \vec{b}_i'$

$$\Rightarrow \vec{M}_o = \sum (\vec{r}_{OO'} + \vec{b}_i') \wedge \vec{F}_i = \sum \vec{r}_{OO'} \wedge \vec{F}_i + \underbrace{\sum \vec{b}_i' \wedge \vec{F}_i}_{\vec{M}_{o'}} = \vec{r}_{OO'} \wedge \left(\sum \vec{F}_i\right) + \vec{M}_{o'}$$

le $\vec{F}_i^{int}$ si annullano $\Rightarrow \sum \vec{F}_i = \vec{R}^{est}$

$$\boxed{\vec{M}_o = \vec{r}_{OO'} \wedge \vec{R}^{est} + \vec{M}_{o'}}$$

Da questa deduciamo che:

1) $\vec{M}_o \neq \vec{M}_{o'}$

2) $\vec{M}_o$ e $\vec{R}^{est}$ sono VETTORI INDIPENDENTI

→ Ora consideriamo che le particelle hanno tutte la stessa traiettoria
=> ∀ particella ha la stessa $\vec{v}_i$ e $\vec{a}_i$ (PURA TRASLAZIONE)

↳ $F_i = m_i a_i = m_i a$

$$\Rightarrow \vec{R}_c = \frac{\sum R_i m_i a}{\sum m_i a} = \frac{\cancel{a} \sum \vec{R}_i m_i}{\cancel{a} \sum m_i} = \vec{R}_{cm} \longrightarrow \vec{R}_c \equiv \vec{R}_{cm}$$

RIEPILOGO

• SINGOLI PUNTI

$$\vec{F}_i^{int} + \vec{F}^{est} = m_i a_i = \frac{d\vec{P}_i}{dt}$$ 3·N eq. per N particelle

• SISTEMA

$$\vec{P} = \sum \vec{P}_i$$
$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i = \sum \vec{b}_i \wedge m_i \vec{v}_i$$
$$\sum \vec{F}_i^{est} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \text{(ha 3 eq.)}$$
$$\sum \vec{M}_i^{est} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \text{(PT. FISSO) (ha 3 eq.)}$$

} 6 eq. => minori info

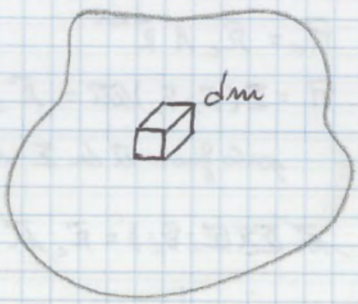
• CENTRO DI MASSA

$$\vec{P} = \vec{P}_{cm} \Rightarrow \sum \vec{F}_i^{est} = M\vec{a}_{cm}$$
$$\vec{L} = \vec{L}_{cm} + \vec{L}' \neq \vec{L}_{cm}$$
$$\vec{K} = \vec{K}_{cm} + \vec{K}' \Rightarrow \vec{K} \neq \vec{K}_{cm}$$

DINAMICA DEL CORPO RIGIDO

1) DEFINIZIONI

CORPO RIGIDO: sistema di masse INFINITESIME (dm), CONTINUO e RIGIDO (distanza tra le masse COSTANTE)



IMP: valgono tutte le eq. della DINAMICA DEI SISTEMI

↳ NB: nel CORPO RIGIDO invece di sommare le particelle INTEGRO (xké sono particelle infinitesime)

Inoltre gli assi devono essere $\perp$ tra loro

$\hookrightarrow \vec{u}_{x'} \cdot \vec{u}_{y'} = 0$

$\vec{u}_{x'} \cdot \vec{u}_{z'} = 0$

$\vec{u}_{y'} \cdot \vec{u}_{z'} = 0$

$\Rightarrow |\vec{u}_{x'}| = 1 \rightarrow \alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2 = 1$

$\beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2 = 1$

$\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2 = 1$

$\Rightarrow \vec{u}_{x'} \cdot \vec{u}_{y'} = 0 \rightarrow \alpha_x \beta_x + \alpha_y \beta_y + \alpha_z \beta_z = 0$

$\alpha_x \gamma_x + \alpha_y \gamma_y + \alpha_z \gamma_z = 0$

$\beta_x \gamma_x + \beta_y \gamma_y + \beta_z \gamma_z = 0$

IN CONCLUSIONE

$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ devono soddisfare 6 CONDIZIONI $\Rightarrow$ 3 VALORI INDIPENDENTI

CORPO RIGIDO $\rightarrow$ 6 G.D.L.

$\hookrightarrow$ 3 dalle COORD. di CM $\rightarrow$ legate al concetto di TRASLAZIONE

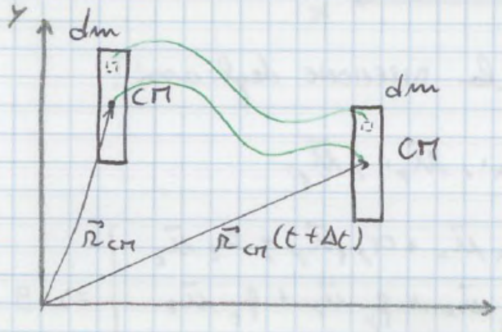
3 dall' ORIENTAZIONE DEGLI ASSI $\rightarrow$ legate al concetto di ROTAZIONE

$\rightarrow$ TRASLAZIONE e ROTAZIONE individuano i moti del corpo rigido

2) TIPI DI MOTO

a) PURA TRASLAZIONE

$\hookrightarrow$ CM si muove lungo una traiettoria, ma gli assi del corpo mantengono una direzione COST

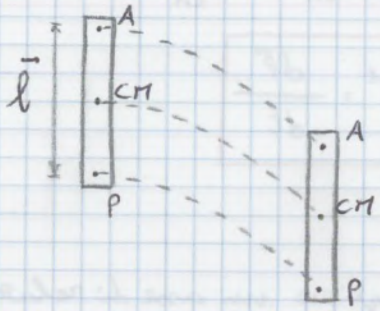


CONDIZIONE NECESSARIA x essere TRASLAZIONE è che se io guardo una qualunque massa dm essa dovrà percorre una traiettoria // a quella del CM

2) $\gamma \perp$ alla lavagna e passante x CM $\Rightarrow \forall$ dm non descrive + una PURA ROTAZIONE

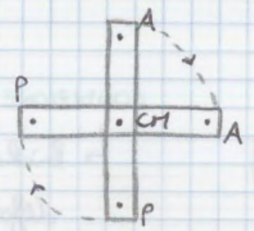
→ Facciamo 2 passaggi:

i) Sposto CM con TRASLAZIONE



NB: abbiamo TRASLATO CM lungo una TRAIETTORIA CIRCOLARE

ii) ROTAZIONE PURA attorno a γ



- Vediamo le VELOCITA'

i) TRASLAZIONE

$\vec{\omega}$ = vel. angolare

$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_P = 0 \quad (r_P = 0)$

$\vec{v}_A = \vec{\omega} \wedge \vec{l} \neq 0$

$\vec{v}_{CM} = \vec{\omega} \wedge \frac{\vec{l}}{2}$

ii) ROTAZIONE PURA

↳ vel. angolare $\vec{\omega}'$

Stesso Δt, stesso angolo del caso a)

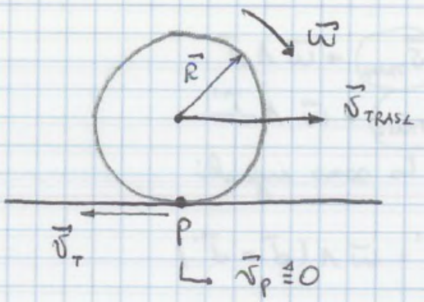
$\Delta\theta = \frac{\pi}{2}$

iii) ROTO-TRASLAZIONE

$\vec{v}_{TRASL.} = \vec{v}_{CM} \neq 0$ CM → Traiettoria circolare con vel. Ω

$\vec{v}_{CM} = \Omega \wedge \frac{\vec{l}}{2}$

d) MOTO DI PURO ROTOLAMENTO



P = pt. fisso

Quindi abbiamo:

- TRASLAZIONE
  - $\vec{v}_{TRASL} \equiv \vec{v}_{CM}$
- ROTAZIONE attorno a γ per CM
  - $\vec{\omega}$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{TRASL} + \vec{\omega} \wedge \vec{R} \rightarrow \underset{(0)}{|\vec{v}_P|} = |\vec{v}_{TRASL}| - \omega R$$

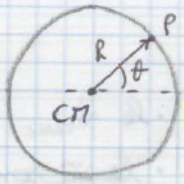
$$\boxed{\vec{v}_{TRASL} = \omega R = |\vec{v}_T|}$$

TRAIETTORIA DI P ∈ AL CORPO RIGIDO

Se abbiamo PURA ROTAZIONE → abbiamo una CIRCONFERENZA

" ROTO-TRASLAZIONE → ?

conviene prendere asse γ : CM



$x'_P = R\cos\theta$

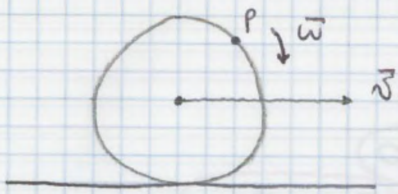
$y'_P = R \operatorname{sen}\theta$

$\theta = f(\omega)$

$x = x_{CM} + x'$

$y = y_{CM} + y'$

Esempio (ROTOLAMENTO)



$|\vec{v}_{TRASL}| = \omega R$

$x = x_{CM} + R\cos\theta$

$x_{CM} = v_{TRASL} \cdot t$

$y_{CM} = R$

$\theta = \omega t$

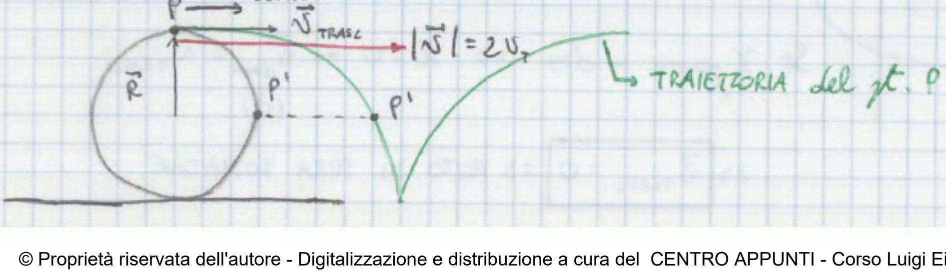
$v_{TRASL} = cost$

$\omega = cost$

$$\begin{cases} x = v_{TRASL} \cdot t + R\cos(\omega t) \\ y = R \operatorname{sen}(\omega t) + R \end{cases}$$

→ è una CICLOIDE

- Vediamo la VELOCITA'



$L'' = I\omega$ → DIREZIONE // a γ come $\vec{\omega}$

=> possiamo scriverlo come un VERSORE · DIREZIONE

$$\boxed{\vec{L}'' = I \cdot \vec{\omega}}$$

$L^{\perp} = \int dL^{\perp} = \int dm\, b \cos\theta\, v_T\, \vec{u}_T$ (NON LO CALCOLIAMO)

↳ NB: cambiando la posizione di dm cambia la DIREZIONE di $dL^{\perp}$ => NON potrò lavorare con i moduli, ma con i VETTORI

↳ qst integrale è molto difficile, ma ha un vantaggio: il SEGNO dipende da dm (xkè cambia θ) e quindi l'integrale può anche essere 0

=> si prospettano 2 CASI:

1) MOTO SENZA PRECESSIONE

$\vec{L}^{\perp} = 0$ => $\vec{L} = I\vec{\omega}$

↳ ha un grande vantaggio dal pt. di vista della DINAMICA xkè:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt}}_{\vec{\alpha}} \rightarrow \boxed{\vec{M} = I\vec{\alpha}}$$

$\vec{\alpha}$ = ACC. ANGOLARE

Se $\vec{M} = 0$ => $\vec{L}$ = cost

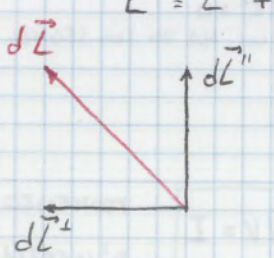
↳ $\vec{\alpha} = 0$ => $\vec{\omega}$ = cost

↳ $\vec{L}$ cost in DIREZIONE

2) MOTO CON PRECESSIONE

PRECESSIONE: rotazione di $\vec{L}$

$\vec{L} = \vec{L}'' + \vec{L}^{\perp}$



=> vediamo che $\vec{L}$ $\not\parallel$ γ

Mettiamoci in una condizione in cui $\vec{\omega}$ = cost

↓

mentre il CORPO RIGIDO ruota, anche $L^{\perp}$ ruota e quindi cambia DIREZIONE => anche $\vec{L}$ cambia DIREZIONE

MOMENTO D'INERZIA

$$\boxed{I = \int \rho R^2 dV}$$

• PROPRIETÀ:

1) Dipende dalla scelta di γ (xkè cambia R)
2) ρ e V sono proprietà del corpo, R è una proprietà dell'asse → >è R => >> è I
3) $I > 0$ (SEMPRE)
4) Se CORPO RIGIDO ≡ PUNTO => $I = \int \rho R^2 V$ ⟶ $\boxed{I = \int m R^2}$
5) SIGNIFICATO FISICO

↳ $\boxed{\vec{M} = I\vec{\alpha}}$ questa ricorda molto la $\vec{F} = m\vec{a}$ => I avrà lo stesso significato fisico della FORZA, ossero:

È la RESISTENZA DEL CORPO a variare la vel. angolare

- A parità di $\vec{M}$ se $I\uparrow \Rightarrow \vec{\alpha}\downarrow \Rightarrow \frac{d\vec{\omega}}{dt}\downarrow$
- A parità di $\vec{\alpha}$ se $I\uparrow \Rightarrow \vec{M}\uparrow$

• CALCOLO

↳ È possibile <=> il corpo rigido ha una forma semplice
Se la forma è complessa:

- somma di forme semplici => $I = \sum I_i$ (grazie alla proprietà dell'integrale)
- forma complessa ⟶ I viene misurato (usiamo tabelle)

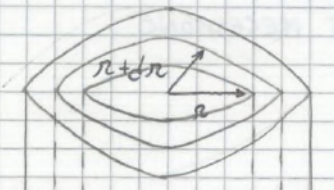
__Esempio__

ROTAZIONE DI UN CILINDRO PIENO di raggio R, lungo L, ASSE γ ≡ ASSE CILINDRO

$$I = \int \rho R^2 dV$$

Scelgo il dV + GRANDE POSSIBILE ed in modo che ∀ P ∈ dV ho lo stesso R

Se prendo un cilindro interno



$$dV = CIL_{ext} - CIL_{int} = \pi(r+dr)^2 L - \pi r^2 L =$$

$$= \cancel{\pi r^2 L} + 2\pi r\, dr\, L + \cancel{\pi (dr)^2 L} - \cancel{\pi r^2 L} \longrightarrow dV = 2\pi r\, dr\, L$$

← TRASCURABILE xkè infinitesimo

c) $\vec{L}$ dipende da γ

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

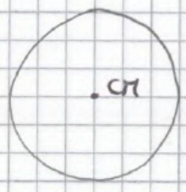
$$\vec{L}_\gamma = I_\gamma \vec{\omega} = (I_{CM} + MR^2)\vec{\omega} = \underbrace{I_{CM}\vec{\omega}}_{\vec{L}_{CM}} + \underbrace{MR^2\vec{\omega}}$$

↳ $MR\underbrace{\vec{\omega}R}_{\vec{v}_{CM}} \Rightarrow MR\vec{v}_{CM} = \vec{R} \wedge M\vec{v}_{CM}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{L}_\gamma = \vec{L}_{CM} + \vec{R} \wedge M\vec{v}_{CM}}$$ I KÖNIG

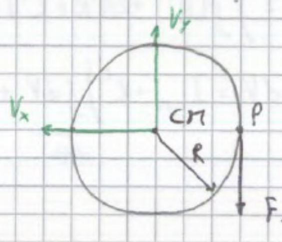
Esempi

1)



→ CM è inchiodato sul piano ⇒ come faccio a farlo ruotare?

i) applico una F_1 tg al disco in P



$M = RF_1$

$RF_1 = I_{CM}\vec{\alpha}$

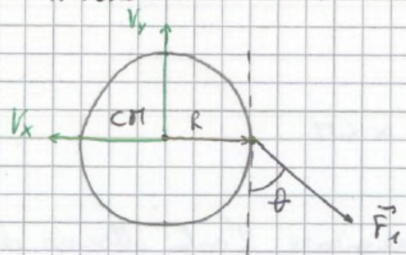
$I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$

V = vincolo (xkè CM è inchiodato) ed ha 2 componenti xkè è applicato in un pt. e NO su un piano (in cui è possibile definire una NORMALE $\vec{N}$)

$\vec{R} = \vec{F} + \vec{V}$ → $-F_1 + V_y = 0$; $V_x = 0$

VINCOLO → braccio nullo

ii) F_1 inclinata in P



$F_{1y} = F_1 \cos\theta$ $\perp \vec{R}$

$F_{1x} = F_1 \operatorname{sen}\theta$ $// \vec{R}$

$M = F_1 \cos\theta \cdot R = I_{CM}\vec{\alpha}$

$\vec{R} = 0$ → $R_x = 0$; $R_y = 0$

iii) Applichiamo un momento

$M = I\vec{\alpha}$

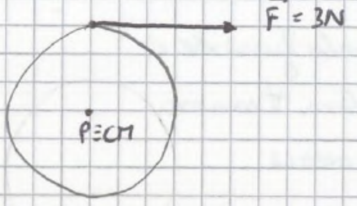
$\vec{R} = \vec{V}$ (xkè un momento è = ad una COPPIA ⇒ la $\vec{R}$ è nulla)

↳ $\vec{R} = \vec{V} = 0$

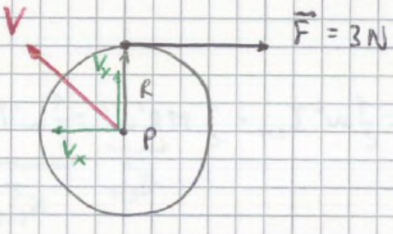
Esempi

1) Disco fermo su un piano orizzontale senza attrito e vincolato in un pt. $P \equiv CM$. $M = 1\,Kg$, $R = 60\,cm$, $I_\gamma = \frac{1}{2} MR^2$. Quanto vale θ dopo $4\,s$?

IMP: chiedersi SEMPRE:
- che moto è
- dove passa l'ASSE



Faccio passare γ x CM ⊥ alla lavagna ⇒ avrò ROTAZIONE PURA



$$\vec{R}_x = F + V_x$$
$$\vec{R}_y = V_y$$

$$P \equiv CM \Rightarrow \vec{a}_{cm} = 0$$

$$\vec{R} = M\vec{a}_{cm} = 0 \Rightarrow F + V_x = 0$$
$$V_y = 0$$

$\vec{M} = \vec{R} \wedge \vec{F} \rightarrow |\vec{M}| = R \cdot F$ ma so anche che $\vec{M} = I_\gamma \vec{\alpha} \rightarrow RF = I_\gamma \alpha$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{R \cdot F}{\frac{1}{2} MR^2} = 60 \quad s^{-2}$$

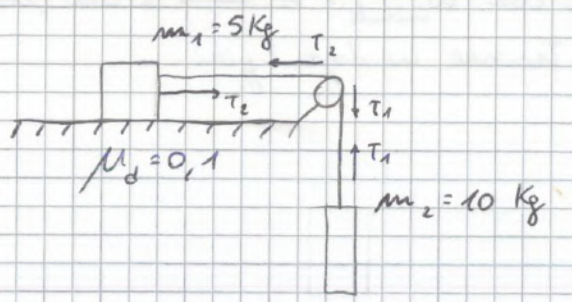
$\alpha = 60\ s^{-2} \Rightarrow \boxed{\alpha = COST} \Rightarrow$ MOTO CIRC. UNIF. ACC.

- $\omega = \omega_0 + \alpha t$
- $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

C.I. $t = 0 \Rightarrow \begin{cases} \omega_0 = 0 \\ \theta_0 = 0 \end{cases}$ xké posso scegliere come C.I. l'ORIGINE

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega = \alpha t \\ \theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \omega = 60 \cdot 4 = 240\ s \\ \theta = \frac{1}{2} 60 \cdot 4^2 = 480 \end{cases}$$

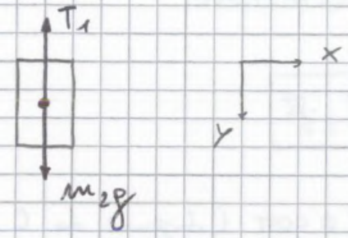
3)



$I_{CARRUCOLA} = 10\ Kg\ m^2$

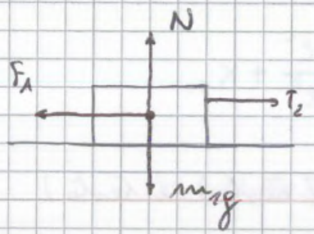
→ Trovare la vel. di m_1 quando m_2 è scesa di 15 cm

m_2



• $m_2 g - T_1 = m_2 a$

m_1

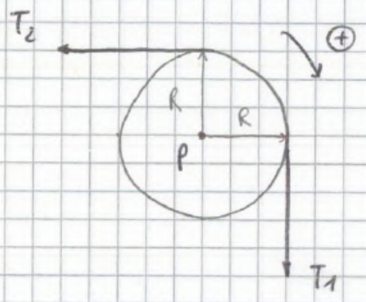


$N = m_1 g$

$F_A = \mu_d N = \mu_d m_1 g$

• $T_2 - \mu_d \cancel{m_1} m_1 g = m_1 a$

CARRUCOLA



Faccio passare γ x P

$\vec{T} \perp \vec{R}$

$M_1 = T_1 \cdot R$

$M_2 = -T_2 \cdot R$ → $M_{TOT} = M_1 + M_2 = (T_1 - T_2) \cdot R$

$\boxed{\vec{M} = I_\gamma \cdot \vec{\alpha}}$ ⇒ • $(T_1 - T_2) R = I_{CARR}\, \vec{\alpha}$ → $T_1 - T_2 = I_{CARR} \dfrac{\alpha}{R}$

⇒ Trovo $T_1, T_2, \vec{\alpha}$ dalle 3 eq. e poi applico la CINEMATICA al corpo + semplice (m_2)

$\vec{a} = cost$ ⇒ MOTO RETT. UNIF. ACC.

• $v = v_0 + at$

• $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

C.I. $t = t_1$ ⇒ $v_1 = a t_1$, $x_1 = \frac{1}{2} a t_1^2$ → $v_1 = a t_1$, $h = \frac{1}{2} a t_1^2$ ⇒ trovo v_1 e t_1

IMPULSO DI MOMENTO

$$\vec{R}^{est} = 0 \implies \vec{J} = \int \vec{R}^{est}\, dt$$

$$\Delta \vec{P} = \vec{J} = \int \vec{R}^{est}\, dt$$

IMPULSO ANGOLARE o IMPULSO DEL MOMENTO

$$\vec{J}_M \triangleq \int \vec{M}\, dt$$

$$\hookrightarrow \vec{J} = \int I \vec{\alpha}\, dt = \int I \frac{d\vec{\omega}}{dt} dt = \int I\, d\vec{\omega} = I \int d\vec{\omega} = I \Delta\vec{\omega} = I\vec{\omega}_f - I\vec{\omega}_i = \Delta \vec{L}$$

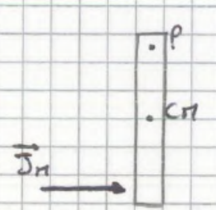
$$\implies \boxed{\vec{J}_M = \Delta \vec{L}}$$

$$\text{Se } \Delta t \xrightarrow{\text{tende}} 0 \implies \vec{J}_M = \int \vec{M}\, dt = \vec{M}_{medio}\, \Delta t \to \boxed{\vec{J}_M = \vec{M}_{medio}\, \Delta t}$$

$$\text{Se } \vec{M} = cost \implies \vec{M} \int dt = \vec{M}\, dt \to \boxed{\vec{J}_M = \vec{M}\, \Delta t}$$

Esempio

ASTA VINCOLATA in P a cui viene applicato un impulso J_M per una certa durata Δt. Dopo l'impulso l'asta fa un giro in 5 s. Trovare J_M e F_{media}



m = noto

L = noto

$I_{cm} = \frac{1}{12} M L^2$

① $[0, \Delta t]$

② $[\Delta t, t_{finale}]$

②

Il moto dell'asta sarà di PURA ROTAZIONE attorno a P $\implies$ sarà un MOTO CIRC. UNIF. (xké $\nexists$ forze)

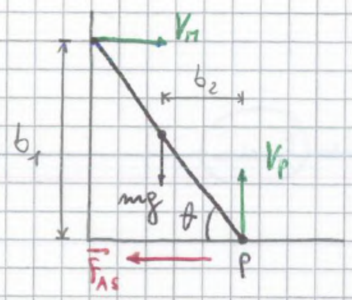
$$\theta = \omega_1 t \qquad \begin{matrix} \theta = 2\pi \ (1 \text{ giro}) \\ t = 5\,s \end{matrix} \implies \omega_1 = \frac{2\pi}{5} \frac{rad}{s}$$

$$I_f = \frac{1}{12} m L^2 + m \left(\frac{L}{2}\right)^2$$

①

$$J_M = \Delta L = L_f - L_i = I_f \omega_1 - 0 \implies \text{trovo } J_M$$

3) Aggiungo l'attrito μ_s all'Es. 2)



$\boxed{\vec{R}=0} \rightarrow R_x = V_M - F_{AS} = 0$

$\quad \rightarrow R_y = V_P - mg = 0$

$b_1 = L \operatorname{sen}\theta$

$b_2 = \frac{L}{2}\cos\theta$

$\boxed{\vec{M}=0} \rightarrow V_M b_1 - mg b_2 = 0 \rightarrow V_M = \frac{mg\, b_2}{b_1} = \frac{mg}{2}\operatorname{cotg}\theta$

$\boxed{F_{AS} \leq F_{AS}^{MAX}}$

$\quad \rightarrow \boxed{|\vec{F}_{AS}|^{MAX} = \mu_s |\vec{N}|}$

$\Rightarrow \frac{mg}{2}\operatorname{cotg}\theta \leq \mu_s V_P$

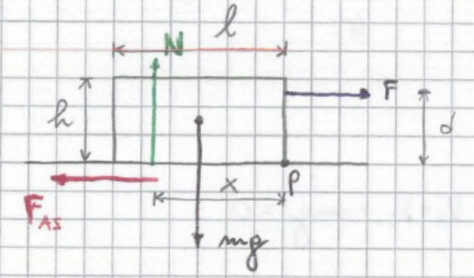
$\downarrow$

$\frac{\cancel{mg}}{2}\operatorname{cotg}\theta \leq \mu_s \cancel{mg} \rightarrow \operatorname{cotg}\theta \leq 2\mu_s$

$\Downarrow$

$\theta = \dots$

4)



μ_s = nota

F = nota

- Quale è il d max per cui si ha equilibrio?

IMP: quando ho una superficie estesa di contatto non so mai dove è applicata la NORMALE N $\Rightarrow$ disegno N in un pt. di applicazione a caso

$$\begin{cases} N - mg = 0 \\ F - F_{AS} = 0 \\ Fd + Nx - mg\frac{l}{2} = 0 \end{cases}$$

$\boxed{F_{AS} \leq F_{AS}^{MAX}} \longrightarrow F_{AS} \leq \mu_s mg$

2) CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE

↳ Studieremo il caso di POLO FISSO o $\vec{v}_P \parallel \vec{v}_{CM}$

↳ qst xké avremo:

$$\boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

Se $\vec{M} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \longrightarrow \vec{L} = \text{cost} \longrightarrow \vec{L}_i = \vec{L}_f$

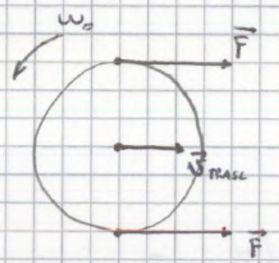
↳ $\Rightarrow I_\gamma \vec{\omega} = \text{cost}$

a) $I_\gamma = \text{cost} \Rightarrow \vec{\omega} = \text{cost} \longrightarrow \vec{\omega}_i = \vec{\omega}_f$

b) $I_\gamma \neq \text{cost} \Rightarrow \vec{\omega} \neq \text{cost} \longrightarrow$ Se $I_\gamma \uparrow$ $\omega \downarrow$

Esempi

1)



$\gamma \times CM$

$\vec{R}^{est} = 2\vec{F} \Rightarrow \vec{R}^{est} \neq 0 \longrightarrow \vec{P} \neq \text{cost}$

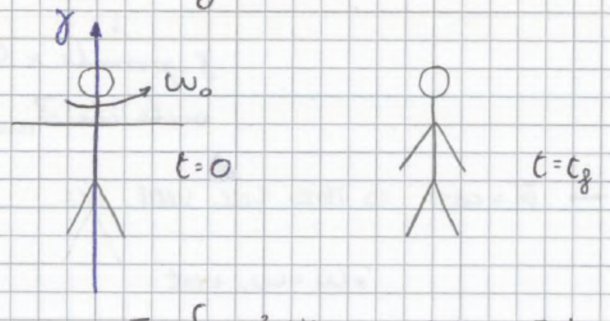
$2\vec{F} = m\vec{a}_{CM}$

↳ $\vec{a}_{CM} = \text{cost}$

$$\underbrace{\vec{v}_{TRASL} \equiv \vec{v}_{CM}}_{\text{xké } \gamma \times CM} = \vec{v}^{\,0}_{TRASL} + \vec{a}_{CM} t$$

$M = FR - FR = 0 \Rightarrow L = \text{cost} \longrightarrow I_{CM} = \text{cost} \Rightarrow \omega = \text{cost} \longrightarrow \omega = \omega_0$

2) PATTINATORE sul ghiaccio che ruota su se stesso con braccia larghe



$\vec{R}^{est} = 0 \Rightarrow \vec{v}_{TRASL} = 0$

$\vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{cost}$

Siccome $I = \int \rho R^2 dV$ se $R \downarrow \Rightarrow I \downarrow$. Quindi se le braccia si avvicinano al corpo (e quindi all'asse) $\Rightarrow R \downarrow$

Da $t = 0$ e $t = t_f \longrightarrow I \downarrow \Rightarrow \omega \uparrow$

3) URTO ELASTICO

$$K_i = K_f$$

$$\gamma \times CM \rightarrow K = \frac{1}{2} I_\gamma \omega^2 + \frac{1}{2} m \vec{v}_{CM}^{\,2}$$

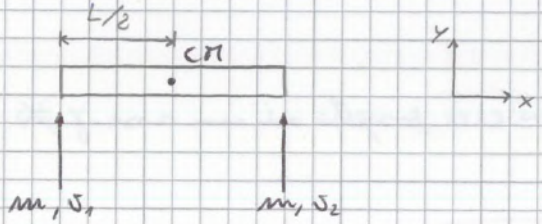
4) URTO COMPLETAMENTE ANAELASTICO

↳ Dopo l'urto i 2 oggetti formano un <u>CORPO UNICO</u> e quindi avranno la stessa

- $\vec{v}_{TRASL}$
- $\vec{\omega}$

<u>Esempi</u>

1) 2 particelle urtano una sbarra ($M = 4m$, lung. L) ai 2 estremi



• URTO COMPL. ANAELASTICO

$$\vec{V} = 0 \Rightarrow \gamma \times CM \perp \text{ alla lavagna}$$

$$\hookrightarrow \vec{P} = \text{cost} \Rightarrow \vec{P}_i = \vec{P}_f$$

DOPO URTO $\quad m v_1 + m v_2 = (4m + m + m) v_f$

$$v_f = \underbrace{v_{CM} = v_{TRASL}}_{\gamma \times CM}$$

$$\vec{L} = \text{cost} \Rightarrow \vec{L}_i = \vec{L}_f$$

$$-\frac{L}{2} m v_1 + \frac{L}{2} m v_2 = I_{TOT}\, \omega$$

$$\hookrightarrow I_{TOT} = \frac{1}{12} 4m L^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

↳ STEINER

CASI PARTICOLARI

a) $\vec{v}_1 = -\vec{v}_2 \Rightarrow \vec{v}_{TRASL} = 0$

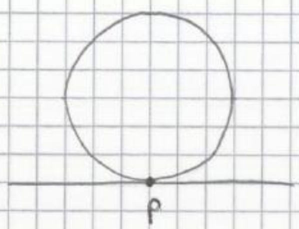
b) $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 \Rightarrow \omega = 0$

ROTOLAMENTO

↳ È un moto di ROTO-TRASLAZIONE => abbiamo:

- ω
- $\vec{v}_{TRASL}$

Un'altra proprietà è che → ∃ SEMPRE 1 ed 1 solo pt. di contatto con la superficie



P deve essere istantaneamente fermo

↳ se scelgo $\gamma \times P$

$\vec{v}_P = \vec{v}_{TRASL} + \vec{\omega} \wedge \vec{R}$

(0)

↳ $\vec{v}_{TRASL} = -\vec{\omega} \wedge \vec{R}$

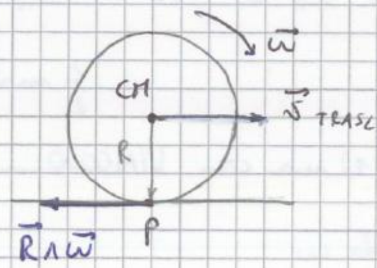
↓ in MODULO

=> $\boxed{v_{TRASL} = \omega R \rightarrow a_{TRASL} = \alpha R}$

↳ NB: v_{TRASL} e ω sono NON INDIPENDENTI

NB: deve agire una forza per tenere fermo il pt. P

↳ ATTRITO STATICO



- Vediamo l'E. CINETICA

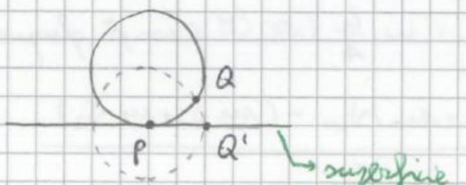
$$\boxed{K = K_{ROT} + K_{TRASL}} = \frac{1}{2} I_{CM}\, \omega^2 + \frac{1}{2} m\, v_{TRASL}^2 = \frac{1}{2} I_{CM}\, \omega^2 + \frac{1}{2} m\, \omega^2 R^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\left(I_{CM} + mR^2\right)}\, \omega^2$$

↳ x STEINER è I_{CM} con $\gamma \times P$

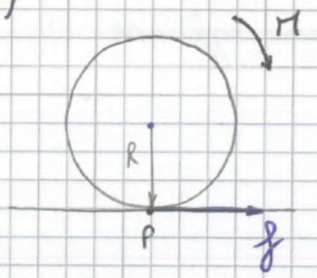
=> $\boxed{K = \frac{1}{2} I_{CM}\, \omega^2}$ → come abbiamo già visto, possiamo vederlo come una ROTAZIONE PURA attorno a P

ROTAZIONE PURA vuol dire che se prendo un pt. ≠ da P descriverebbe una circonferenza



NB: essendoci una superficie, il pt. Q non può descrivere una traiettoria circolare (+ché si bloccherebbe sulla superficie) => l'asse γ si sposta da P in Q' e quindi parliamo di ASSE γ ISTANTANEO (che si muove con la v_{TRASL})

b)



Il corpo RUOTA ma non trasla

↳ $|\vec{R}| = 0 \Rightarrow v_{CM} \equiv v_{TRASL} = 0$

↳ sarà di nuovo necessario avere ATTRITO

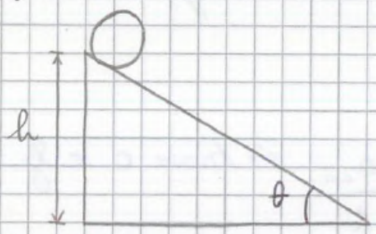
↳ è verso dx xké M farebbe muovere P in senso orario

$$\begin{cases} |\vec{R}| = f = m a_{CM} \\ M - fR = I_{CM}\,\alpha = I_{CM}\,\dfrac{a_{CM}}{R} \end{cases} \longrightarrow \boxed{f \leq \mu_s m g}$$

NB: ora f favorisce il moto, mentre prima si si opponeva

Esempi

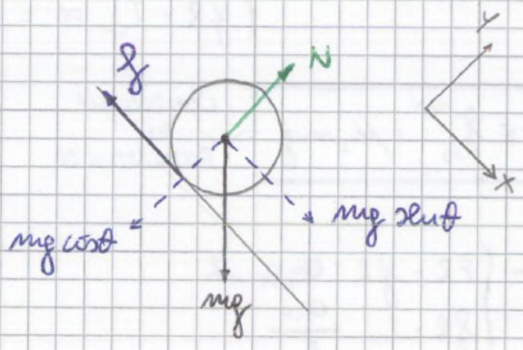
1)



DISCO $\rightarrow I_{CM} = \frac{1}{2} m R^2$

a) Trovare μ_s sapendo che il disco rotola

b) Trovare v al termine del piano inclinato



a)

y) $N - mg\cos\theta = 0 \rightarrow N = mg\cos\theta$

$f^{MAX} = \mu_s N = \mu_s mg\cos\theta$

x) $mg\,\text{sen}\,\theta - f = m a_{CM}$

$\gamma \times CM$

↳ $fR = I_{CM}\,\alpha = I_{CM}\,\dfrac{a_{CM}}{R}$

$\Rightarrow$ Trovo a_{CM} e f e poi impongo che $f \leq \mu_s mg\cos\theta$