NUMERO: 982 DATA: 26/05/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Macario Ban

MATERIA: Metodi Numerici e Statistici + Eserc.

Prof. Adami_Gasparini_Falletta

Massimo Macario Ban

METODI NUMERICI e STATISTICI

Prof: Adami - Fallotta - Gasparini

Generalmente hanno ∞^n soluzioni a causa delle n costanti arbitrarie però vale il

TEOREMA DI ESISTENZA E UNICITÀ DI CAUCHY

Servono $n-1$ condizioni iniziali per poter ottenere 1 sola soluzione

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ \dot{x}(t_0) = x_{1,0} \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1,0} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ devono essere date tutte allo stesso t_0

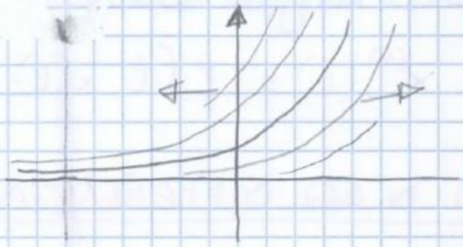
$\rightarrow$ 1 sola soluzione

MODELLO DI MALTHUS

$\dot{x} = \alpha x \quad (\alpha > 0)$ equazione lineare omogenea

$\Rightarrow$ l'integrale generale è $x(t) = C e^{\alpha t}$

Modello utilizzato nel eco per l'indice di crescita della popolazione



OSSERVAZIONE

$x(t) = C \cdot e^{\alpha t}$

effettuo una traslazione di t_0 a destra (ininfluente se sinistra o destra)

$\tilde{x}(t-t_0) = C \cdot e^{\alpha(t-t_0)} = C e^{-\alpha t_0} \cdot e^{\alpha t} = C' e^{\alpha t}$

$\Rightarrow$ Sistema invariante a traslazioni orizzontali (temporali)

Risolvo ora il problema di Cauchy per trovare 1 soluzione particolare

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ x(t) = C \cdot e^{\alpha t} \xrightarrow{t=0} x(0) = C \Rightarrow C = x_0 \end{cases}$$

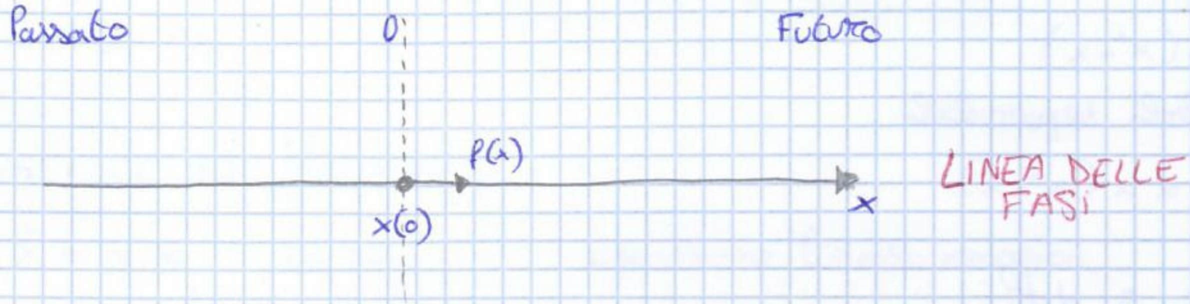
$\Rightarrow$ Soluzione particolare $x(t) = x_0 \cdot e^{\alpha t}$

STUDIO QUALITATIVO DI 1 eq. DIFFERENZIALE

Poiché in poche occasioni le eq. possono essere risolte, è importante saper fare almeno uno studio qualitativo.

Prendo EQ. DIFFERENZIALI DEL 1° ORDINE AUTONOME

$\dot{x} = f(x)$ $\quad$ ($\neq \dot{x} = f(x,t)$ eq. diff. del 1° ordine)

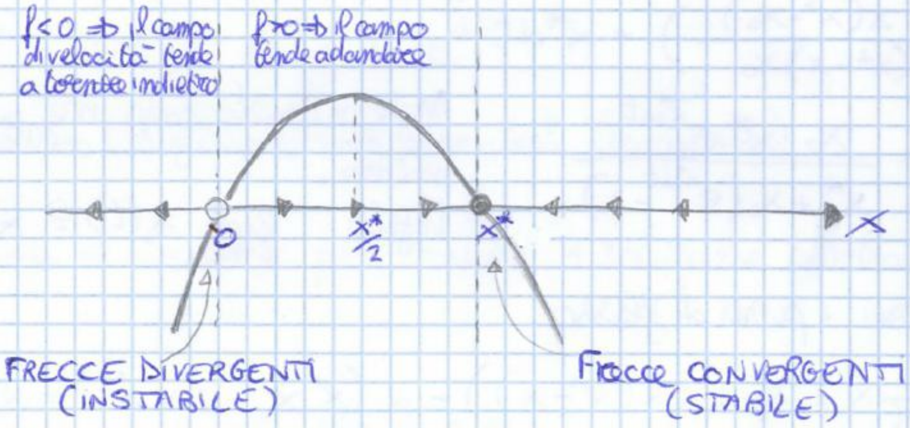


Ogni punto della linea lo chiamo STATO DEL SISTEMA; per ogni punto esiste un valore $f(x)$ detta "VELOCITÀ DI FASE NELLO STATO x"; l'insieme delle velocità sulla linea delle fasi si chiama "CAMPO DI VELOCITÀ"

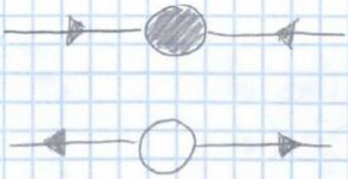
STATO DI EQUILIBRIO $\rightarrow$ $x \,/\, f(x) = 0$

Prendendo l'eq di Verhulst

$\dot{x} = \underbrace{\alpha x (x^* - x)}_{\text{PARABOLA}}$



PUNTI DI EQUILIBRIO
- STABILE
- INSTABILE



ESERCIZIO

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{x} & (x>0) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

• Soluzione quantitativa (variabili separabili)

- Soluzioni costanti $\sqrt{x} = 0 \quad x = 0 \quad x(t) = 0$
- Soluzioni complete

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{x}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int dt$$

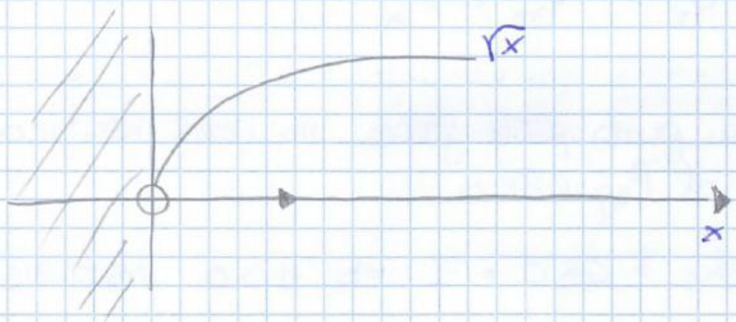
$$\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = t + c$$

$$2\sqrt{x} = t + c \Rightarrow x(t) = \left(\frac{t+c}{2}\right)^2$$

$\Rightarrow$ CAUCHY $\quad x(0) = 0 \Rightarrow 0 = \left(\frac{0+c}{2}\right)^2 \Rightarrow c = 0$

$\Rightarrow x(t) = \frac{t^2}{4}$

• Soluzione qualitativa

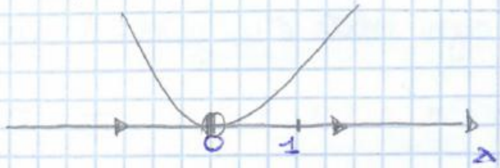


BLOW UP (asintoti verticali)

Prendo una differenziale del tipo

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Studio qualitativo



Studio quantitativo (variabili separabili)

Soluzioni costanti $\quad x^2 = 0 \quad x = 0 \quad x(t) = 0$

Soluzioni complete

$$\frac{dx}{dt} = x^2$$

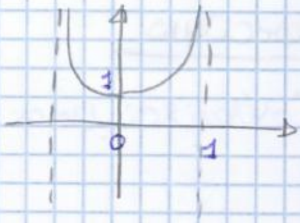
$$\int \frac{dx}{x^2} = \int dt$$

$$-\frac{1}{x} = t + c \implies x(t) = -\frac{1}{t+c}$$

CAUCHY $\quad x(0) = 1 \quad 1 = -\frac{1}{0+c} \implies c = -1$

$$\implies x(t) = \frac{1}{1-t}$$

$x(t) = \frac{1}{1-t}$ Presenta un ASINTOTO VERTICALE sul grafico t-x



Cosa significa

All'istante 0 ho messo la pallina in 1: il campo di velocità cresce e la pallina si muove verso destra talmente veloce che arriva al tempo 1 all'∞
$\implies$ arriva all'∞ in tempo finito $\implies$ BLOW UP (esplosione)

BIFORCAZIONI

Prendo un'equazione del tipo

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \omega_0, \gamma > 0$$

OSCILLATORE ARMONICO SMORZATO

che è un'equazione del 2° ordine lineare omogenea a coeff. costanti

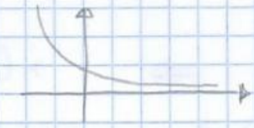
$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

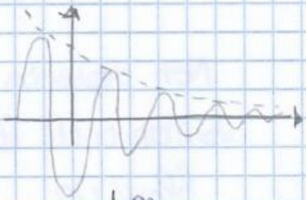
$$\Rightarrow x(t) = e^{-\gamma t}\left(c_1 e^{\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\,t} + c_2 e^{-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\,t}\right)$$

Ho così 3 possibilità

- $\gamma > \omega_0 \Rightarrow$ somma di 2 exp decrescenti



- $\gamma = \omega_0$
- $\gamma < \omega_0 \Rightarrow \quad \lambda_{12} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ soluzioni complesse



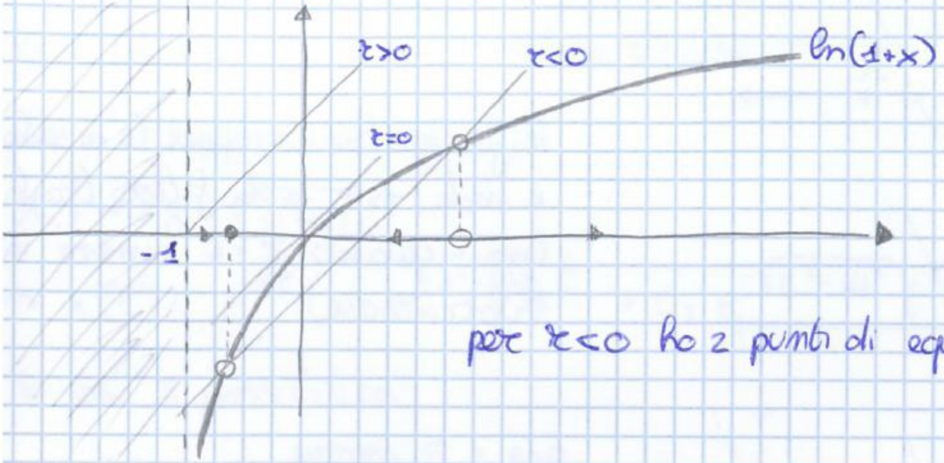
andamento oscillante

$\Rightarrow$ Al variare dei parametri possono presentarsi differenze qualitative nelle soluzioni

esercizio

$$\dot{x} = r + x - \ln(1+x)$$

Devo disegnare $f(x) = r + x - \ln(1+x)$ eq. trascendente $\Rightarrow$ $\begin{cases} y = r + x \\ y = \ln(1+x) \end{cases}$



per $r<0$ ho 2 punti di equilibrio

Le condizioni geometriche per passare da 2 intersez a 1 doppia è la TANGENZA

$$\begin{cases} 1)\ r_c + x^* = \log(1+x^*) \\ 2)\ 1 = \dfrac{1}{1+x^*} \end{cases}$$ derivo

Sistema di 2 eq che mi permette di valutare i valori critici

$$\begin{cases} r_c = 0 \\ x^* = 0 \end{cases}$$

Vado ora a LINEARIZZARE $f(x,r) = r + x - \ln(1+x)$ nell'intorno dei valori critici $(0,0)$

$$f(r,x) = f(0,0) + \left(\frac{\partial f}{\partial r}(0,0)\cdot r + \frac{\partial f}{\partial r}(0,0)\cdot x\right) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(0,0)\, r^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\, x^2\right) =$$

$$= 0 + r + 0 + \frac{1}{2}x^2 = r + \frac{1}{2}x^2$$

$\Rightarrow$ Tutte le biforcazioni tangenti sono localmente determinate da $f(x) \sim r + c x^2$

esercizio

$$\dot n = n\,(G\cdot N_0 - K - \alpha G n) \qquad \text{con } n > 0$$

Modello ricavato da

$n(t)$ = n di fotoni all'istante t prodotti da una radiazione incidente un atomo

$$\dot n(t) = \underbrace{G\cdot \overset{n\ \text{atomi}}{N}}_{\text{cost}}\, n - \underbrace{K n}_{\text{fotoni persi}}$$

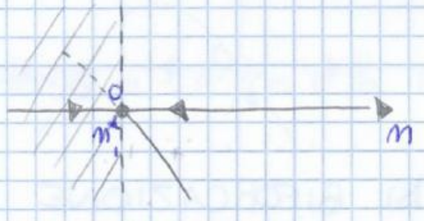
Dove ho che $N(t) = N_0 - \alpha n$ poiché il numero di atomi che danno fotoni si riduce (1 atomo colpito da 1 fotone e basta)

$$\Rightarrow \dot n(t) = G n\,(N_0 - \alpha n) - K n = (G N_0 - K)\, n - \alpha G n^2 = n\,(G N_0 - K - \alpha G n) \quad n>0$$

$$\dot n = n\,(G N_0 - K - \alpha G n)$$

$$\begin{cases} n_1^* = 0 \\ n_2^* = \dfrac{G N_0 - K}{\alpha G} \\ n > 0 \end{cases}$$

se $\dfrac{G N_0 - K}{\alpha G} < 0$



se $\dfrac{G N_0 - K}{\alpha G} > 0$

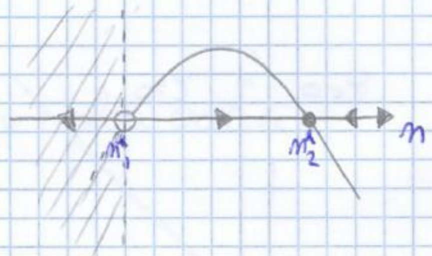
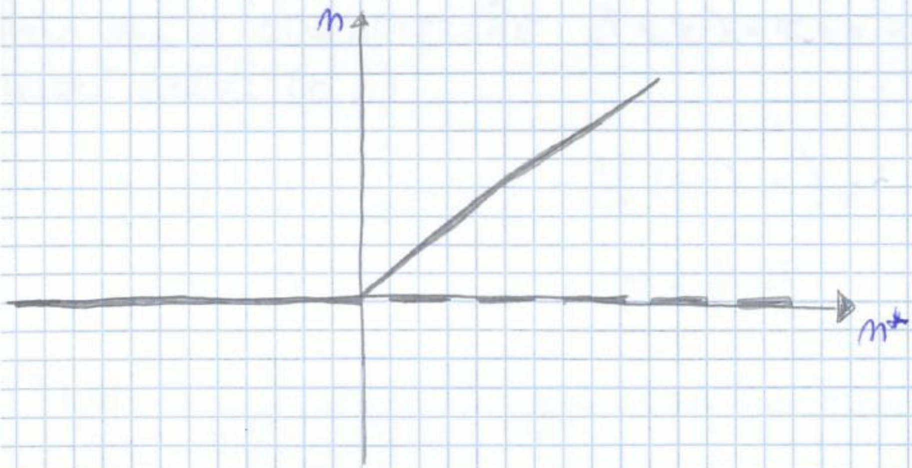


Diagramma di biforcazione:



esercizio

Scrivi il diagramma di biforcazione del prototipo

$$\dot{x} = r x + x^3 - x^5 = x\left(r + x^2 - x^4\right)$$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

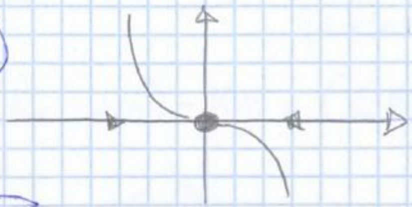
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$r<0$ $\quad \dot{x} = x(r + x^2 - x^4) \quad \begin{cases} x_0^* = 0 \\ r + x^2 - x^4 = 0 \end{cases} \quad x^2 = t$

$t^2 - t - r = 0$

$t = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4r}}{2} \quad \Rightarrow 1 + 4r > 0 \quad r > -\frac{1}{4}$

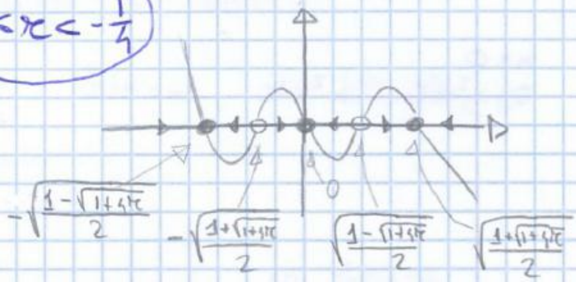
$r < -\frac{1}{4}$



$x_0^* = 0$

$r + x^2 - x^4 = 0$ mai perchè $\Delta < 0$

$0 < r < -\frac{1}{4}$



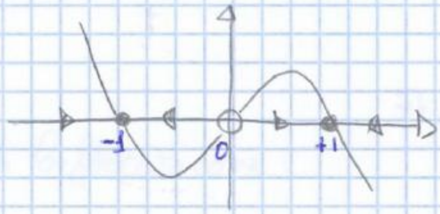
$x_0^* = 0$

$r + x^2 - x^4 = 0 \Rightarrow t_{12}^* = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4r}}{2}$ con $\Delta > 0$

$x_{12}^* = \pm\sqrt{t_1^*}$

$x_{34}^* = \pm\sqrt{t_2^*}$

$r = 0$

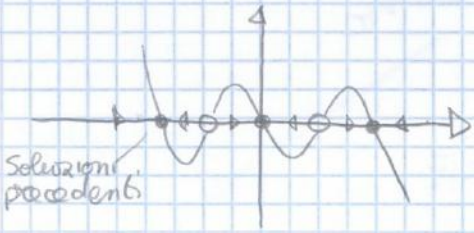


$\dot{x} = x^3 - x^5 = x^3(1 - x^2)$

$x_0^* = 0$

$1 - x^2 = 0 \qquad x_{12}^* = \pm 1$

$r>0$



$\dot{x} = r x + x^3 - x^5$

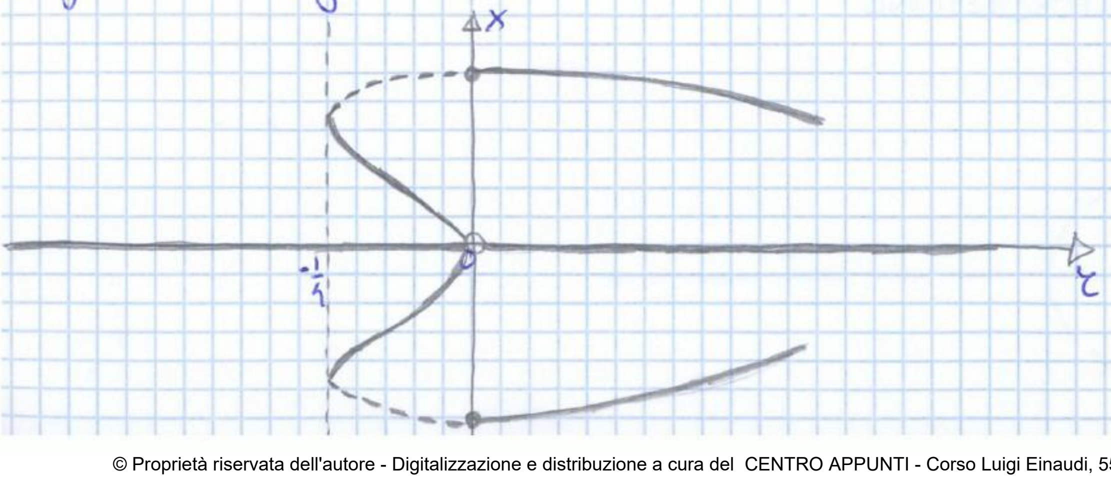
$x_0^* = 0$

$t = x^2 \Rightarrow t = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4r}}{2} \qquad 1 + 4r > 0 \ \forall r$

$x_{12}^* = \pm\sqrt{t_1^*}$

$x_{34}^* = \pm\sqrt{t_2^*}$

Diagramma di biforcazione



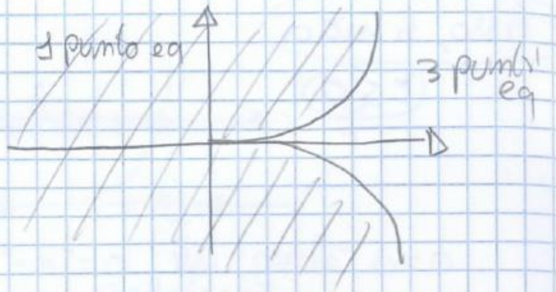
La biforcazione avviene per il massimo della funzione

$f(x) = \tau x - x^3 + h$

$f'(x) = \tau - 3x^2 = 0 \qquad x = \pm\sqrt{\frac{\tau}{3}} \qquad max = +\sqrt{\frac{\tau}{3}}$

$sup = f(max) = f\left(\sqrt{\frac{\tau}{3}}\right) = \frac{2\tau^{3/2}}{3^{3/2}} + h$

Da questa ricavo il DIAGRAMMA DI STABILITÀ



esempio MODELLO LUCCIOLE

$\dot{\theta} = \omega$ La lucciola maschio illumina con questa equazione quando non è disturbata

Se disturbo con stimoli esterni essa tende a illuminare seguendo lo stimolo esterno

$\Rightarrow \dot{\theta} = \omega + A\,\mathrm{sen}(\Theta - \theta)$ Dove Θ è lo stimolo esterno
$\Theta = \Omega$ stimolo esterno

L'oscillazione delle lucciole tende a mettersi in fase con quella dello stimolo esterno.

Introduciamo una variabile $\dot{\varphi} = \dot{\Theta} - \dot{\theta} = \Omega - \omega - A\,\mathrm{sen}\varphi$

$$\frac{\dot{\varphi}}{A} = \frac{\Omega - \omega}{A}$$

Introduco τ = tempo riscalato = At

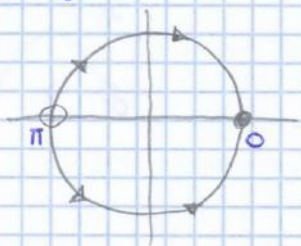
$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \mu - \mathrm{sen}\varphi \qquad \text{dove } \mu = \frac{\Omega - \omega}{A}$$

$$\dot{\varphi} = \mu - \mathrm{sen}\varphi$$

Studio le biforcazioni sulla circonferenza:

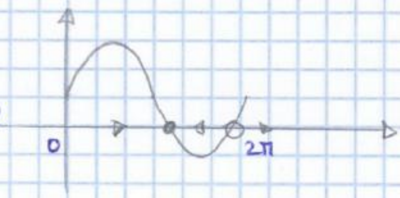
$\mu = 0 \Rightarrow \dot{\varphi} = -\mathrm{sen}\,\varphi$

Se $\mu = 0$ le lucciole si mettono in fase con lo stimolo esterno



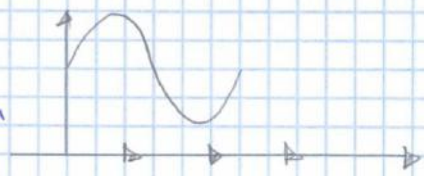
$0 < \mu < 1 \Rightarrow \dot{\varphi} = \mu - \mathrm{sen}\varphi$

Le lucciole non si mettono in fase ma riescono a oscillare attorno a una costante



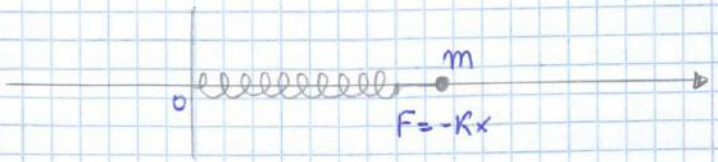
$\mu > \ \Rightarrow \dot{\varphi} = \mu - \mathrm{sen}\varphi$

Le lucciole aumentano la propria fase ma non raggiungono un equilibrio e non oscillano con lo stimolo esterno.



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 180

OSCILLATORE ARMONICO



Equazione $\quad m\ddot{x}(t) + Kx(t) = 0$

Moltiplico entrambi i membri per la velocità:

$$m\ddot{x}(t)\dot{x}(t) + Kx(t)\dot{x}(t) = 0$$

con $\quad \dot{x}(t)\cdot\ddot{x}(t) = \frac{d}{dt}(\dot{x}(t))^2 \cdot \frac{1}{2}$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2}[\dot{x}(t)]^2 + \frac{K}{2}[x(t)]^2\right] = 0 \quad \forall t$$

Se $\frac{d}{dt}(\cdot\cdot) = 0$ Esisterà una quantità E /

$$\frac{m}{2}[\dot{x}(t)]^2 + \frac{K}{2}[x(t)]^2 = cost = E \qquad \text{ENERGIA MECCANICA}$$

In altre parole definiamo una funzione $\mathcal{E} : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ che associa ad ogni $(x,y) \longrightarrow \mathcal{E}(x,y) = \frac{m}{2}y^2 + \frac{K}{2}x^2 \qquad y = \dot{x}$

Si dice ENERGIA MECCANICA $E = T + V$

Dove $\begin{cases} T = \frac{m}{2}\dot{x}^2 & \text{ENERGIA CINETICA} \\ V = \frac{K}{2}x^2 & \text{ENERGIA POTENZIALE} \end{cases}$

Dunque ho che $\quad m\ddot{x} + Kx = 0$

$$\Big\downarrow \text{integro}$$

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Kx^2 = E$$

L'equazione non è in forma normale $\quad x^{(n)} = f(t, x, \dot{x} \dots x^{n-1})$

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2E - Kx^2}{m}}$$

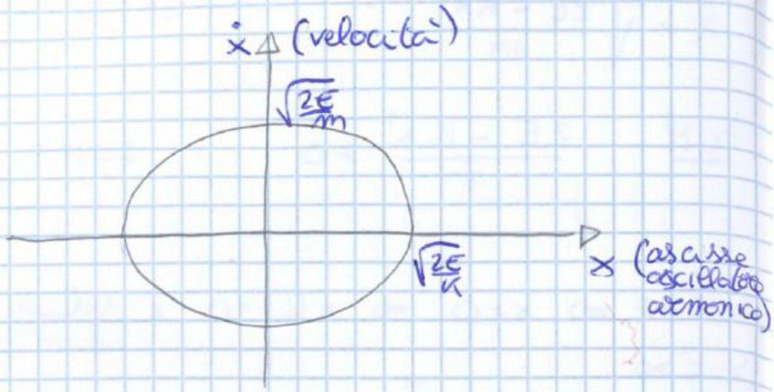
Prendo l'equazione positiva per $\dot{x} > 0$ in quanto non si possono avere valori negativi poichè E è data dalla somma di valori positivi

OSSERVAZIONE

Fissato $E > 0$

$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} K x^2 = E$

Descrive un' ellisse nel piano $(\dot{x}, x)$



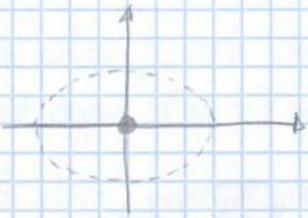
$$\frac{(\dot{x})^2}{\frac{2E}{m}} + \frac{(x)^2}{\frac{2E}{K}} = 1$$

$\Rightarrow$ semiassi $\sqrt{\frac{2E}{m}}, \sqrt{\frac{2E}{K}}$

$\Rightarrow$ il piano $(\dot{x}, x)$ si chiama Piano delle fasi: ogni soluzione può essere rappresentata come una curva nel piano delle fasi (traiettoria di fase)

Definiamo $\vec{v} = (\dot{x}, \ddot{x}) = (\dot{x}, -\frac{K}{m} x)$ poiché $\ddot{x} = -\frac{K}{m} x$ per eq. oscillatore

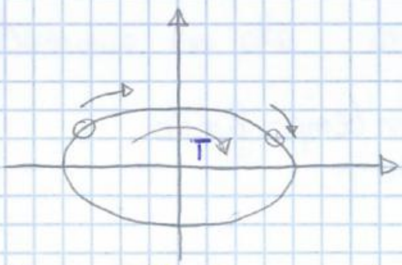
Al variare di E varia l'ellisse trovata prima



per $E = 0$ la traiettoria si riduce

È possibile che per $E \neq$ due curve si intersechino?

No per l'esistenza e unicità: se due linee si intersecassero in un punto, la pallina messa nel punto dovrebbe scegliere quale traiettoria seguire



Prendendo due palline sulla stessa curva

$x_1(0) = x_2(T)$

$\Rightarrow x_1(T) = x_2(t + T)$

le due palline seguono lo stesso campo di velocità

Se $x_1(t)$ è una soluzione dell'oscillatore con energia E, ogni altra soluzione con energia E si scrive come $x_2(t) = x_1(t - T)$ per un opportuno valore T

Esercizio ... ! (rifatto dopo meglio)

$$F = m(x^2-2x-1)e^{-x}$$

Prendiamo $F = m\ddot{x}$

$$m\ddot{x} = m\underbrace{(x^2-2x-1)e^{-x}}_{g(x)}$$

Moltiplichiamo entrambi i membri per $\dot{x}$

$$\ddot{x}\dot{x} = g(x)\dot{x}$$

$$\ddot{x}\dot{x} - g(x)\dot{x} = 0$$

Integro e metto la derivata (chiamo $V(x)$ qualsiasi primitiva di $g(x)$)

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\dot{x}^2}{2} + V(x)\right] = 0$$

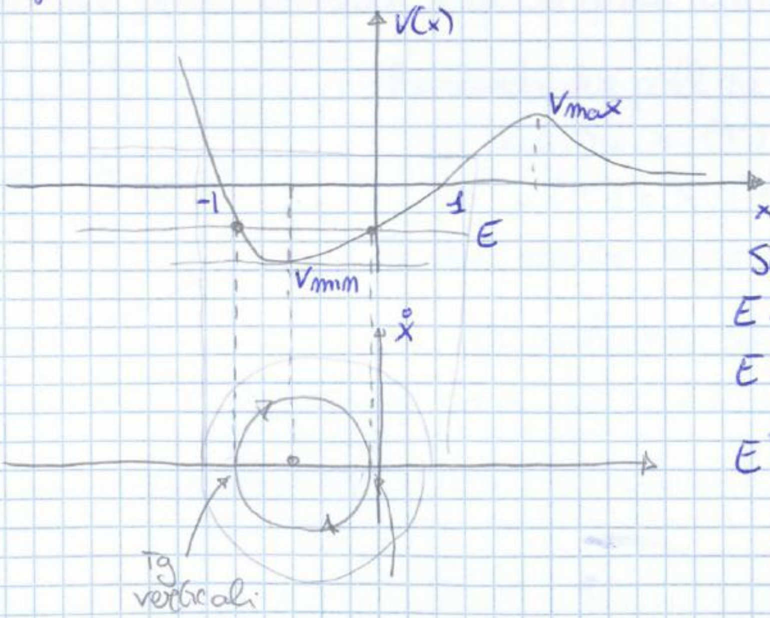
Cerchiamo $V(x) = \int g(x)\,dx = \int (x^2-2x-1)e^{-x}\,dx = (x^2-1)e^{-x} + c$

Scegliamo arbitrariamente $c = 0$

$$V(x) = e^{-x}(x^2-1)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\frac{\dot{x}^2}{2} + e^{-x}(x^2-1)\right] = 0 \qquad E = \frac{\dot{x}^2}{2} + e^{-x}(x^2-1) = \text{cost} \quad E \text{ è conservativa}$$

Disegnamo $V(x)$



Sul piano delle fasi:

$E < V_{min} \rightarrow$ 0 traiettorie di fase

$E = V_{min} \rightarrow$ 1 traiettoria di fase (un punto)

$E > V_{min} \rightarrow$ 1 traiettoria di fase (una circonf.)

La circonf. ha un'equazione del tipo

$$\dot{x} = \sqrt{2(E - V(x))}$$

Dove la parte di sotto la disegno per simmetria

esercizio guida

Disegna le traiettorie di fase del campo delle forze

$$F(x) = (x^2-2x-1)e^{-x}$$

CAMPO CONSERVATIVO: non compare esplicitamente il tempo e nemmeno $\dot{x}$, termine legato all'attrito

Per questi campi ho che

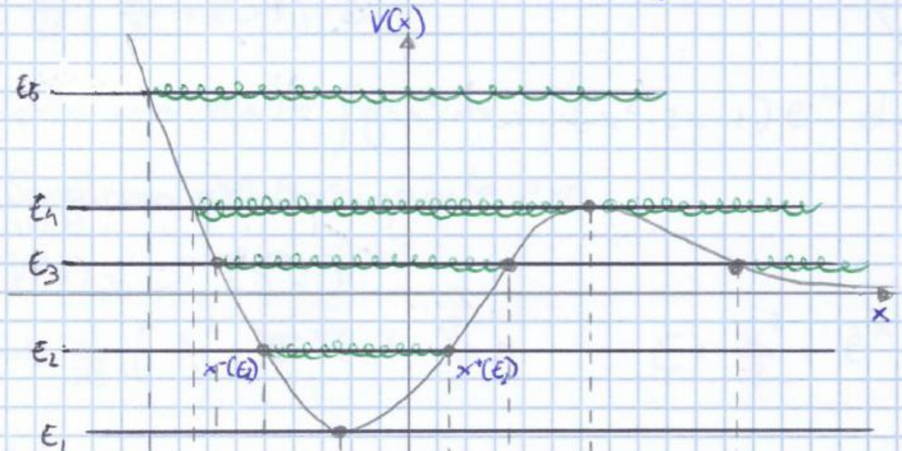
$$V(x) = -\int f(x)\,dx$$

Dunque scrivendo la relazione $F = m\ddot{x}$ (considero m unitaria)

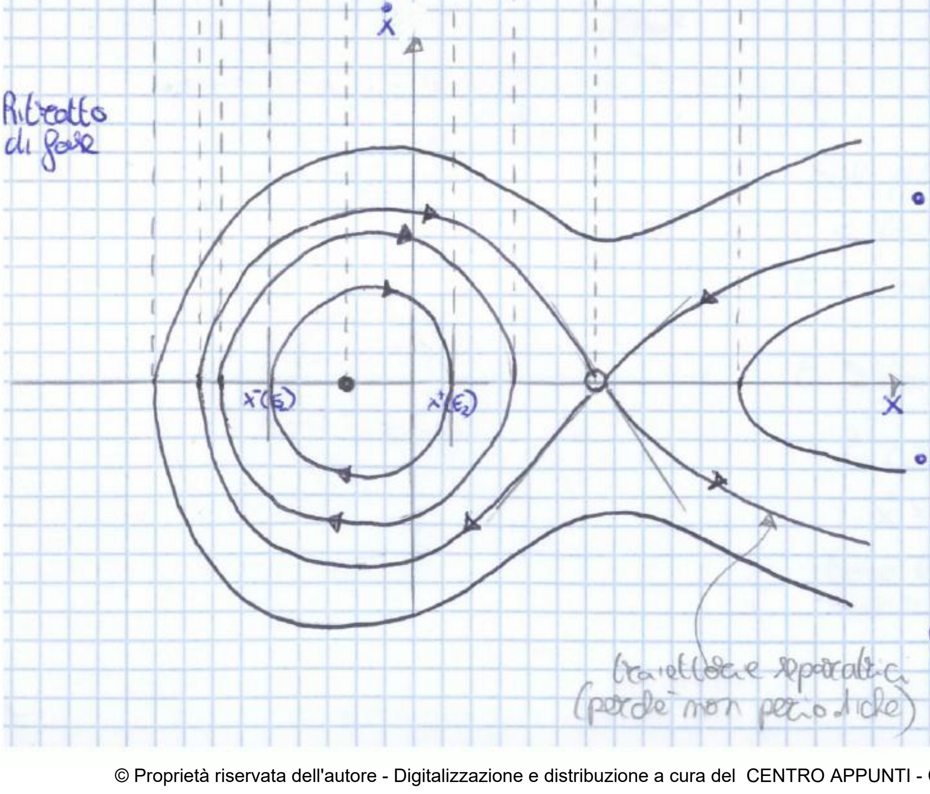
$$V(x) = -\int (x^2-2x-1)e^{-x}\,dx = (x^2-1)e^{-x} + c$$

il $+c$ mi fa ottenere tutte le traslazioni: posso imporre a scelta $c=0$

Inizio lo studio qualitativo con il grafico di $V(x)$



Ritratto di fase



PIANO DELLE FASI

Interseco il potenziale con dei successivi livelli energetici (rette orizzontali)

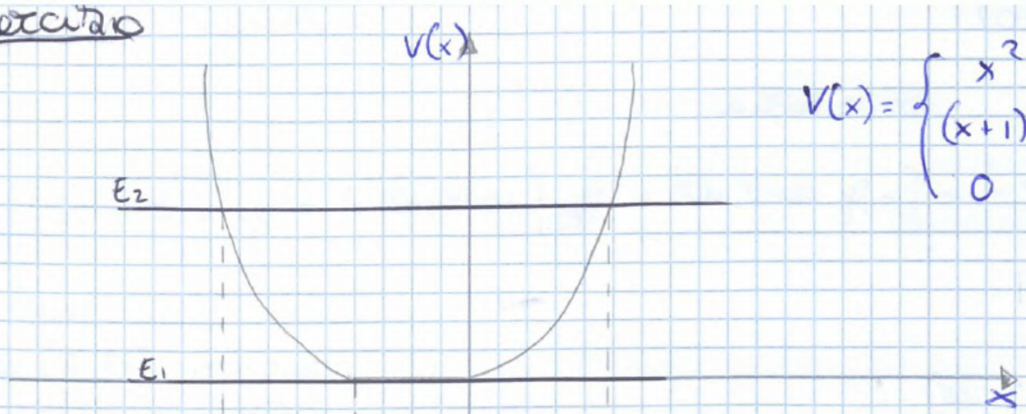
- E_1: i punti stazionari del potenziale corrispondono a dei punti di equilibrio (i MIN STABILI, i MAX INSTABILI)
- E_2: Se il potenziale è limitato nella parte sottostante, la proiezione di $x^-(E)$ e $x^+(E)$ genera delle circonferenze percorse ↻ nei cui estremi la TANGENTE È VERTICALE. (arriva nei punti $x^\pm(E)$ in tempo finito). La parte inferiore della circonf. si può fare per simmetria
- E_3: interseca $V(x)$ in due punti in cui il potenziale è limitato ed è come nel caso di E_2, e poi interseca $V(x)$ in un punto in cui non è più limitato e genera dei grafici simili a quelli delle radici che non generano più un MOTO PERIODICO come nelle circonferenze (poiché la pallina arriva in $x^\pm(E)$ è un moto periodico)
- E_4: interseca il massimo del $V(x)$: questo è un punto di equilibrio instabile e nella sua proiezione sul piano delle fasi le tangenti NON SONO VERTICALI: ciò significa che la pallina arriva al punto $x^+(E)$ in tempo ∞ e che dunque il moto non è periodico
- E_5: la regione accessibile $[x^-(E_5), +\infty]$

NUMERO ORBITE

Quante orbite ha E_4?

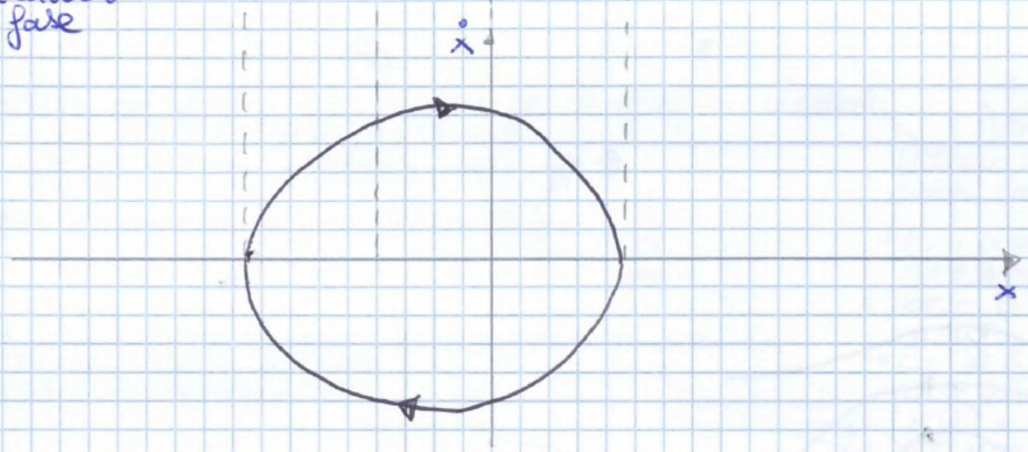
5 orbite: devi contare ogni punto stazionario presente + ogni ramo presente a quel livello.

esercizio



$$V(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ (x+1)^2 & x \leq -1 \\ 0 & -1 < x < 1 \end{cases}$$

Ritratto di fase



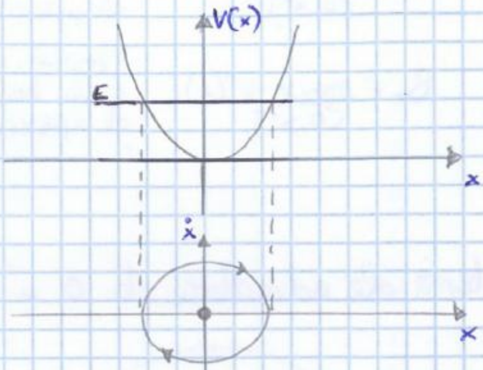
BIFORCAZIONI PER SISTEMI CONSERVATIVI

esempio

$$V(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\lambda$$

$$\frac{x^2}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \lambda\right) = 0$$

$\lambda \leq 0$

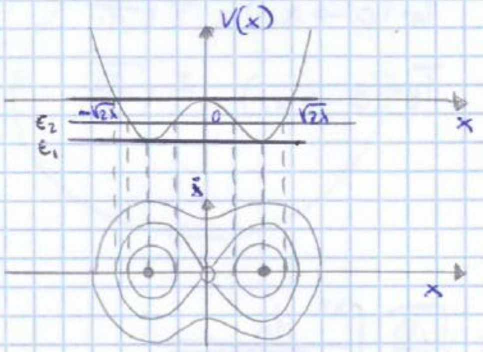


- $x^* = 0$

$\frac{x^2}{2} = \lambda$ $\cancel{\exists}$

Eq stabile: $x^* = 0$

$\lambda > 0$



- $x^* = 0$

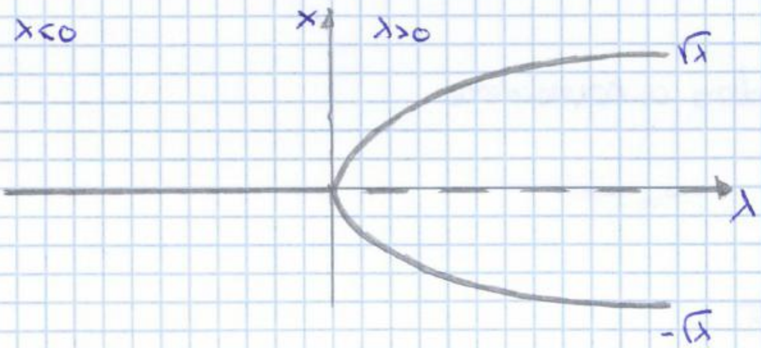
$\frac{x^2}{2} = \lambda$ • $x^* = \pm\sqrt{2\lambda}$

Eq stabile: x^* dei minimi

$x^3 - x\lambda = 0$

$x(x^2 - \lambda) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\lambda}$

Diagramma di biforcazione



Considerando il campo delle forze

$F(x) = -V'(x) = -x^3 + \lambda x$ Biforcazione a forchetta supercritica

Dunque per tutte le biforcazioni principali:

BIFORCAZIONE TANGENTE

$V(x) = -\frac{x^3}{3} - \lambda x$ Poiché $f(x) = x^2 + R$

$F(x) = x^2 + \lambda$ la considero come un campo di forze

$V(x) = -\int F(x)\,dx = -\frac{x^3}{3} - \lambda x$

BIFORCAZIONE DI SCAMBIO

$V(x) = -\lambda \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ Poiché $f(x) = r x - x^2$

$F(x) = \lambda x - x^2$

$V(x) = -\int F(x)\,dx = -\lambda \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

BIFORCAZIONE A FORCHETTA

SUPERCRITICA $V(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\lambda$ Poiché $f(x) = -x^3 + rx$

$F(x) = -x^3 + \lambda x$

$V(x) = -\int F(x)\,dx = \frac{x^4}{4} - \lambda \frac{x^2}{2}$

SOTTOCRITICA $V(x) = -\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\lambda$ Poiché $f(x) = -x^3 - rx$

$F(x) = -x^3 - \lambda x$

$V(x) = -\int F(x)\,dx = -\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\lambda$

OSCILLATORE SMORZATO

Equazione $m\ddot{x} = -Kx - \underbrace{b}_{\text{coefficiente di smorzamento}}\dot{x}$ con $\dot{x} > 0$

In assenza di attrito si conservava

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} K x^2$$

Sia $x(t)$ un moto

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} m\, 2\dot{x}\ddot{x} + \frac{1}{2} K\, 2x\dot{x} =$$

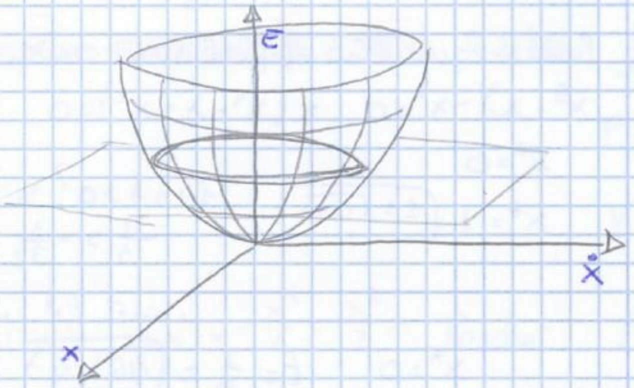
$$= \dot{x}(m\ddot{x} + Kx) =$$ da eq moto

$$= \dot{x}(-Kx - b\dot{x} + Kx) = -b\dot{x}^2 \overset{?}{=} 0 \iff \dot{x} = 0$$

L'energia si conserva solo se il coeff. smorzam. non c'è

Consideriamo il grafico della funzione $E(x, \dot{x})$ ← $z(x,y)$

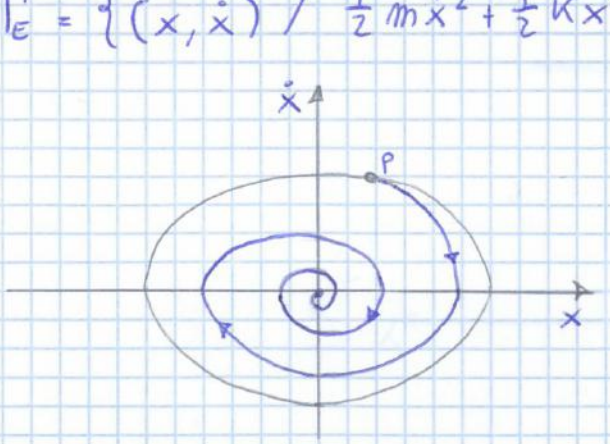
$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} K x^2$$ ⟸ PARABOLOIDE



Per ricavare le traiettorie di fase sul piano $(x, \dot{x})$ taglio con dei livelli di energia costante e considero la proiezione sul piano $(x, \dot{x})$ ⟹ le proiezioni sono delle ellissi

Le traiettorie sono le curve di livello della funzione E, dette Γ_E

$$\Gamma_E = \left\{ (x, \dot{x}) \;/\; \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} K x^2 = E \right\}$$



Se metto il sistema in P e c'è attrito, il sistema non evolve lungo la linea energetica cost dell'ellisse, ma tende ad andare lungo un'energia minore poiché essa viene dissipata per attrito ⟹ CADUTA A SPIRALE

Fisicamente la caduta a spirale rappresenta il fatto che l'oscillazione è sempre meno ampia finché non si ferma.

Lo zero è un punto di equilibrio, tuttavia vicino ad esso le traiettorie sono diverse da quelle viste, poiché non sono né curve chiuse (stabile) né a croce

REPULSORE ARMONICO

Equazione $m\ddot{x} = +Kx$ (oscillatore era $m\ddot{x} = -Kx$; non vi è 1 forza di richiamo ma una di allontanamento)

$\omega = \sqrt{K/m}$

$\Rightarrow \ddot{x} = \omega^2 x$

Soluzioni dell'equazione

$\lambda^2 = \omega^2 \Rightarrow \lambda = \pm\omega$

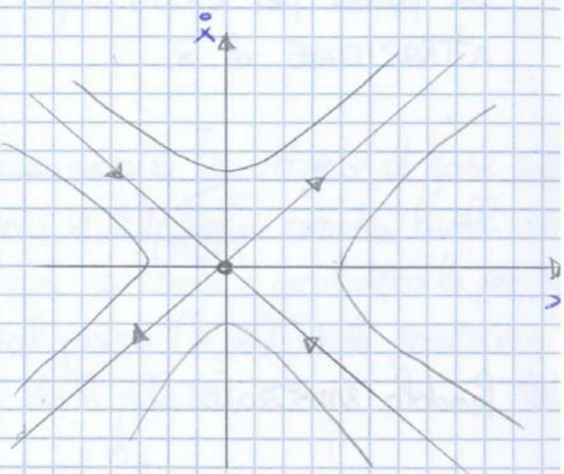
$\Rightarrow x(t) = A e^{\omega t} + B e^{-\omega t}$

$\dot{x}(t) = A\omega e^{\omega t} - B\omega e^{-\omega t}$

Casistica

- $A, B = 0 \Rightarrow x(t) = 0$
- $A = 0;\ B \neq 0 \Rightarrow x(t) = B e^{-\omega t}$
  $\dot{x}(t) = -B\omega e^{-\omega t} \Rightarrow \dot{x} = -\omega x$
- $A \neq 0;\ B = 0 \Rightarrow x(t) = A e^{\omega t}$
  $\dot{x}(t) = A\omega e^{\omega t} \Rightarrow \dot{x} = \omega x$

rette



- Altre soluzioni

$\frac{\dot{x}}{\omega} = A e^{\omega t} - B e^{-\omega t}$

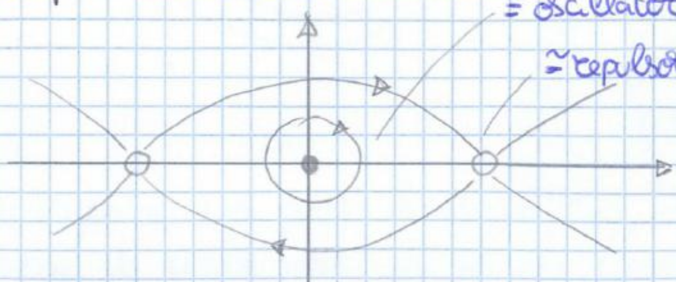
$$\begin{cases} \left(\frac{\dot{x}}{\omega}\right)^2 = (A e^{\omega t} - B e^{-\omega t})^2 = A^2 e^{2\omega t} + B^2 e^{-2\omega t} - 2AB \\ x^2 = (A e^{\omega t} + B e^{-\omega t})^2 = A^2 e^{2\omega t} + B^2 e^{-2\omega t} + 2AB \end{cases}$$

$\underset{\text{risolvo}}{\Rightarrow} \left(\frac{\dot{x}}{\omega}\right)^2 - x^2 = -4AB$ iperboli

Nel pendolo avevo

$\simeq$ oscillatore (non ellissi)
$\simeq$ repulsore (non iperboli)

← ciò che cambia da pendolo a oscillatore è che il modello del pendolo non è lineare



Chiamo $X = x - \bar{x}$ e $Y = y - \bar{y}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{X} = \frac{\partial g_1}{\partial x}\Big|_{\bar{x},\bar{y}} X + \frac{\partial g_1}{\partial y}\Big|_{\bar{x},\bar{y}} Y \\ \dot{Y} = \frac{\partial g_2}{\partial x}\Big|_{\bar{x},\bar{y}} X + \frac{\partial g_2}{\partial y}\Big|_{\bar{x},\bar{y}} Y \end{cases}$$

Cambiando il nome delle dello derivate parziali abbiamo ottenuto un SISTEMA LINEARE

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}$$

Sistema risolubile esattamente
(vale solo per un I del punto di equilibrio però)

Vale anche in questo caso il Th. di esistenza e unicità di Cauchy con date due condizioni iniziali $x(0), y(0)$

Inoltre, visto che il sistema è lineare, vale il PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE:

"Se $(x_1(t), y_1(t))$ è soluzione con dato iniziale $(x_1(0), y_1(0))$ e $(x_2(t), y_2(t))$ è soluzione anch'essa con dato iniziale $(x_2(0), y_2(0))$, allora
$\Rightarrow \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow (\lambda x_1(t) + \mu x_2(t), \lambda y_1(t) + \mu y_2(t))$ è ancora soluzione con dato iniziale $(\lambda x_1(0) + \mu x_2(0), \lambda y_1(0) + \mu y_2(0))$"

Voglio ora disegnare il ritratto di fase in un intorno del punto di equilibrio

$$\dot{U} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{U} = AU$$

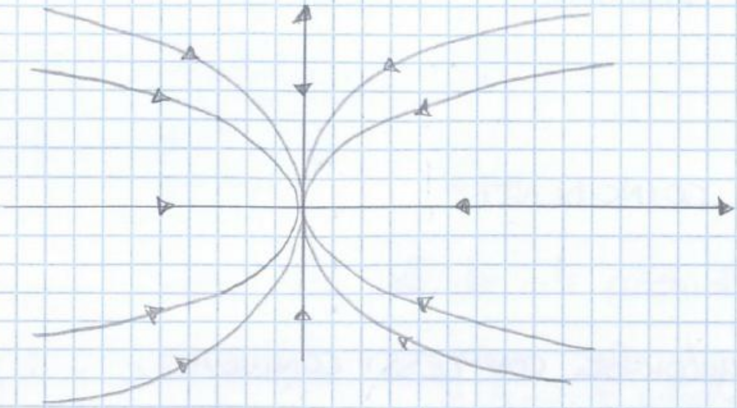
Sistema risolubile
$\Rightarrow$ dipende dai coefficienti di A e dalla sua ANALISI SPETTRALE

L'analisi spettrale si fa con la ricerca degli Autovalori e Autovettori

RICERCA AUTOVALORI

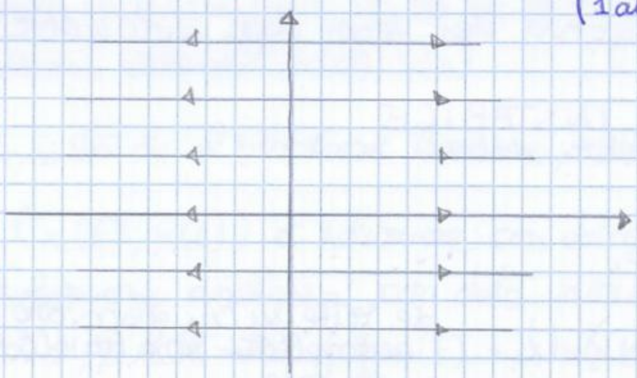
$$\det(A - \lambda I) = 0 < \begin{matrix} \lambda_1 \rightarrow \text{autovalore 1} \\ \lambda_2 \rightarrow \text{autovalore 2} \end{matrix}$$

II) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ NODO STABILE
(autovalori distinti <0)



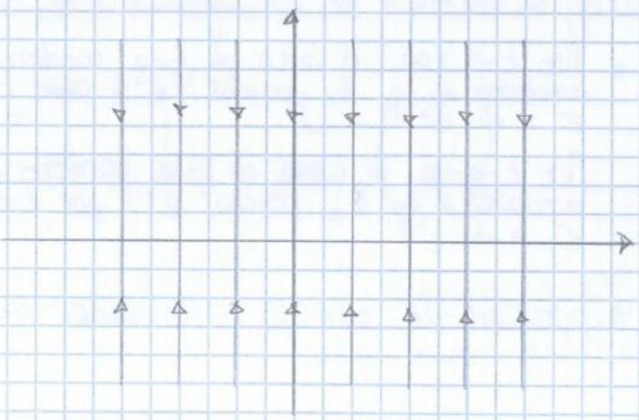
III) $0 = \lambda_2 < \lambda_2$

(1 autovalore $=0$ e 1 autovalore >0)



IV) $0 = \lambda_2 > \lambda_1$

(1 autovalore $=0$ e 1 autovalore <0)



VII) $\lambda_1 = \lambda' + i\lambda''$ $\quad \lambda_2 = \lambda' - i\lambda''$ FUOCO (autovettori complessi coniugati)

Se gli autovalori sono complessi, anche gli autovettori lo sono

$$\xi = \xi' + i\xi'' \Rightarrow A\xi = \lambda_1 \xi \Rightarrow \xi(t) = e^{\lambda_1 t}\xi$$
$$\eta = \xi' - i\xi'' \Rightarrow A\eta = \lambda_2 \eta \Rightarrow \eta(t) = e^{\lambda_2 t}\eta$$

Siccome

$$\eta(t) = \bar{\xi}(t) = e^{\bar{\lambda}_1 t}\bar{\xi}$$

Sommandoli e sottraendoli troviamo altre soluzioni: facendolo opportunamente rimane solo la parte reale. Analogamente anche la parte immaginaria è soluzione ed è anche essa reale

$$u(t) = \mathrm{Re}\,\xi(t) \qquad v(t) = \mathrm{Im}\,\xi(t)$$

$\Rightarrow$ sono una coppia linearmente indipendente di soluzioni reali

$$u(t) = \mathrm{Re}\left(e^{\lambda_1 t}\xi\right) = \mathrm{Re}\left(e^{\lambda' t} e^{i\lambda'' t}(\xi' + i\xi'')\right) =$$
$$= \mathrm{Re}\left(e^{\lambda' t}(\cos(\lambda'' t) + i\,\mathrm{sen}(\lambda'' t))\right)(\xi' + i\xi'') =$$
$$= e^{\lambda' t}\left(\cos(\lambda'' t)\xi' - \mathrm{sen}(\lambda'' t)\xi''\right) =$$
$$= e^{\lambda' t}\left(\cos(\lambda'' t)\cdot u(0) - \mathrm{sen}(\lambda'' t)\,v(0)\right)$$

e in modo analogo

$$v(t) = \mathrm{Im}\left(e^{\bar{\lambda}_1 t}\bar{\xi}\right) = e^{\lambda' t}\left(\cos(\lambda'' t)\,v(0) + \mathrm{sen}(\lambda'' t)\,u(0)\right)$$

Dove le condizioni iniziali:

$$u(0) = \mathrm{Re}\,\xi(0) = \mathrm{Re}\,\xi = \xi'$$
$$v(0) = \mathrm{Im}\,\xi(0) = \mathrm{Im}\,\xi = \xi''$$

<u>CASO PARTICOLARE</u> $\lambda' = 0$

$u(t) = \cos(\lambda'' t)\cdot\xi' - \mathrm{sen}(\lambda'' t)\xi''$ coppia di oscillatori armonici

$v(t) = \cos(\lambda'' t)\,\xi'' + \mathrm{sen}(\lambda'' t)\,\xi'$ coppia di oscillatori armonici

il moto generico è dato da una combinazione lineare

$$\begin{cases} X(0) = \alpha\, u(0) + \beta\, v(0) \\ X(t) = \alpha\, u(t) + \beta\, v(t) \end{cases}$$

ANALISI AUTOVALORI

Per riassumere l'analisi degli autovalori:

$$\det(A-\lambda I)=0$$

$$\det\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \underbrace{(a+d)}_{\text{TRACCIA}}\lambda + \underbrace{(-bc+ad)}_{\text{DETERMINANTE}} \text{ della matrice}$$

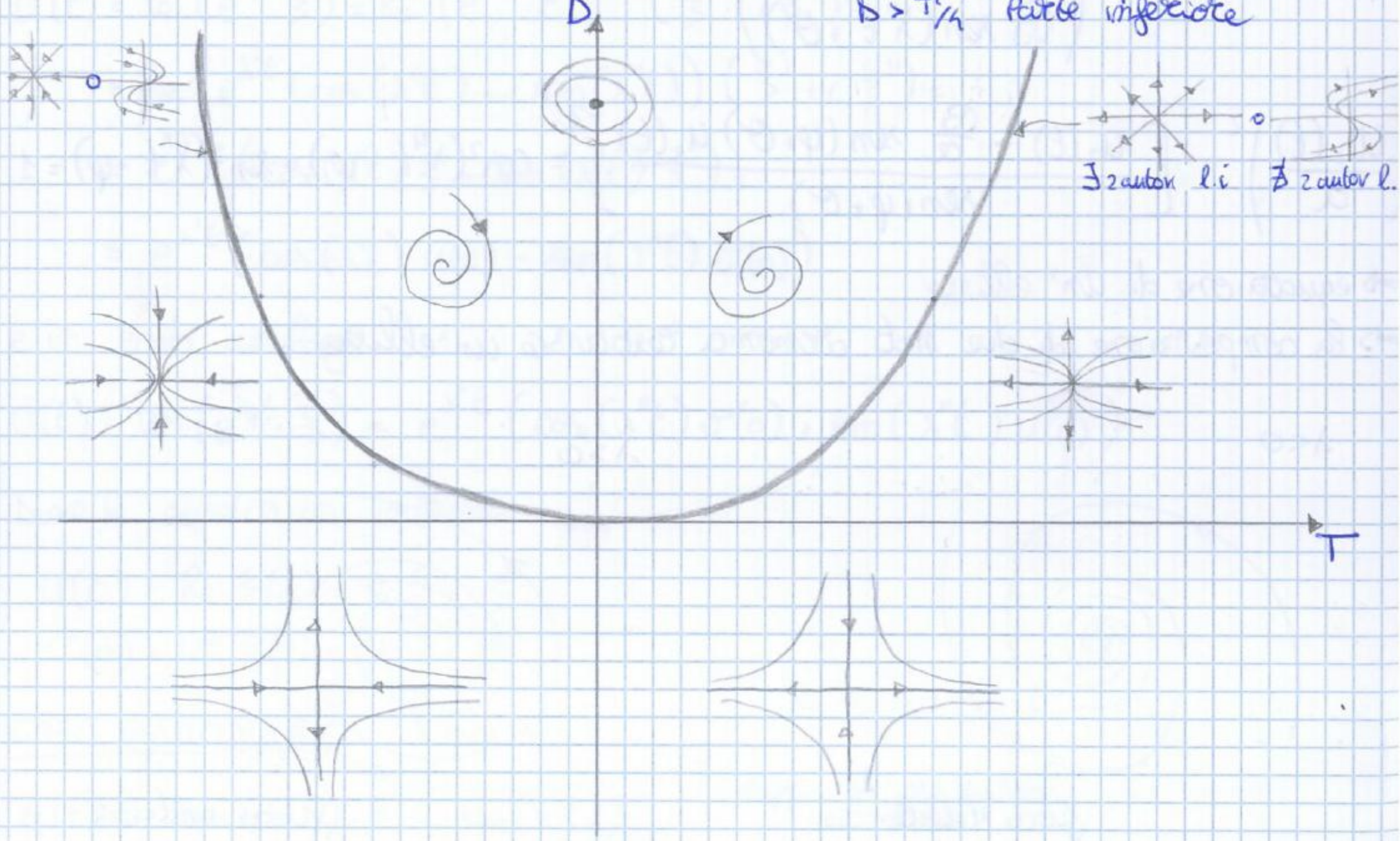
$$\Rightarrow \lambda^2 - T\lambda + D = 0$$

$$\lambda = \frac{T \pm \sqrt{T^2-4D}}{2}$$ — Analisi del discriminante

$$\Delta = T^2 - 4D$$

$T^2 - 4D = 0$ $\qquad D = \frac{T^2}{4} \Rightarrow$ Parabola

$D < T^2/4$ Parte superiore
$D > T^2/4$ Parte inferiore



Dal grafico capisco che CENTRO, NODO D. e STELLA sono configurazioni fragili: una piccola variazione degli elementi della matrice può cambiarne la natura (poiché la loro configurazione sta su una retta, non su una parte di piano). Invece SELLE, NODI e FUOCHI sono configurazioni robuste: bisogna perturbarli di una certa quantità per cambiare la loro natura

OSCILLATORE CON SMORZAMENTO QUADRATICO

$$\ddot{x} + \omega^2 x + b \dot{x}^2 (\text{segno}\, \dot{x}) = 0$$

forza > 0 se $v < 0$ e viceversa: così ho una forza frenante

$$E = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{K}{2} x^2$$

$K = m\omega^2$

$$\frac{dE}{dt} = m \dot{x}\ddot{x} + K x \dot{x} =$$

$$= \dot{x} (m \ddot{x} + m \omega^2 x) =$$

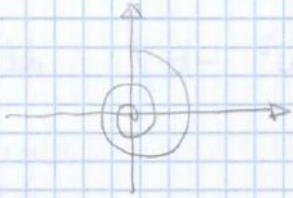
SOST MODELLO

$$= m \dot{x} \left(\cancel{-\omega^2 x} - b \dot{x}^2 (\text{segno}\, \dot{x}) \cancel{+ \omega^2 x} \right) =$$

$$= m \dot{x} \left(-b \dot{x}^2 (\text{segno}\, \dot{x}) \right)$$

$$= -m\, b\, \dot{x}^3 (\text{segno}\, \dot{x})$$

il loro prodotto è sempre > 0 $\Rightarrow$ PERDITA DI ENERGIA (attrito)



Vediamo la linearizzazione

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 x + b y^3 (\text{segno}\, y) \end{cases}$$

$\Downarrow$ linearizzo

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 x \end{cases}$$

$\Leftarrow$ caso in cui la linearizzazione non dà il risultato corretto nel punto di equilibrio

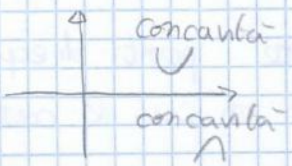
OSSERVAZIONE

$\Rightarrow$ Se nel sistema linearizzato il punto di equilibrio è ROBUSTO (ossia SELLE, NODI e FUOCHI) allora nel sistema non lineare la natura del punto di equilibrio è la medesima. Il contrario non è detto: se il sistema linearizzato nel punto di equilibrio è FRAGILE (CENTRO, NODO DEGENERE, STELL allora nel sistema di partenza non lineare la natura del punto di equilibri potrebbe essere diversa

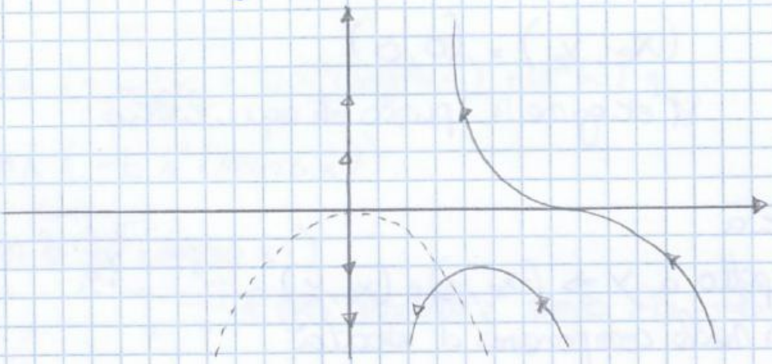
$$y'' = \frac{\partial y'}{\partial y} \cdot \frac{\partial x'}{\partial x} =$$
$$= -\frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} - 1 =$$
$$= \frac{y}{x^2} + 1 + \frac{y}{x^2} - 1 = \frac{2y}{x^2}$$

Dove la concavità è verso l'alto?

$$\frac{2y}{x^2} > 0 \Rightarrow y > 0$$



Possibile ritratto di fase



• Valuto se è possibile trovare l'eq delle curve dello spazio delle fasi

Derivata prima: $y' = -\frac{y}{x} - x$ eq diff. lineare del 1° ordine non omogenea

Eq omogenea associata

$$y' = -\frac{y}{x} \Rightarrow y_{om}(x) = \frac{a}{x}$$

$$y = c x^2 \Rightarrow 2 c x = -\frac{c x^2}{x} - x$$
$$2c = -(c+1) \Rightarrow c = -\frac{1}{3}$$

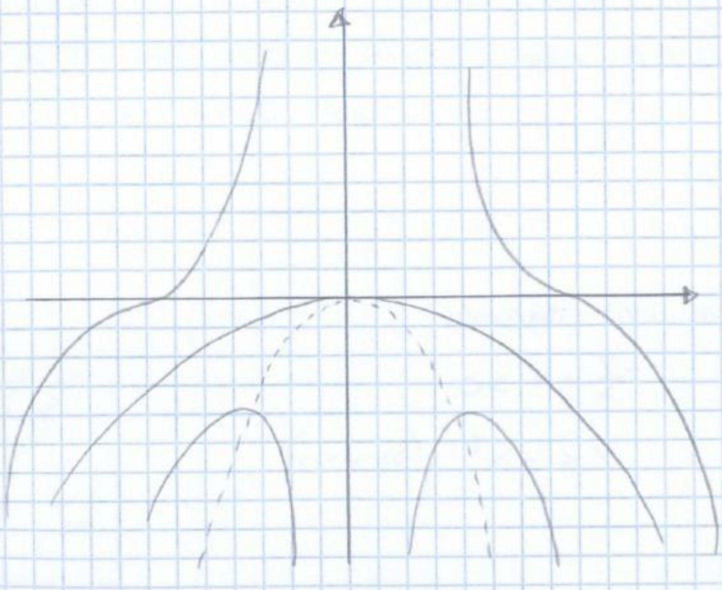
$$y_{GEN}(x) = \frac{a}{x} - \frac{x^3}{3}$$ CURVE DELLO SPAZIO DI FASE

Che infatti è concorde con i grafici trovati prima

$a > 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} y(x) = +\infty$

$a < 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} y(x) = -\infty$

$a = 0 \Rightarrow y(x) = -\frac{x^3}{3}$ SEPARATRICE



MODELLO DI LOTKA-VOLTERRA (Preda - Predatore)

Umberto D'Ancona: biologo marino che studia le popolazioni di pesci nel nord dell'adriatico tramite il pescato venduto nelle pescherie: vi sono dei pesci predatori (detti SELACI) che, nel periodo di guerra, quando i pescatori non possono più lavorare, nel giro di pochi anni aumentano. Simultaneamente, però, le prede però non aumentano proporzionalmente con i selaci, ma anzi, secondo D'Ancona, addirittura diminuiscono.
Il suocero di D'Ancona è Volterra (matematico) che capisce che il modello che determina la vita dei pesci non è lineare poiché, se diminuiscono i pescatori e aumentano i predatori e le prede non proporzionalmente, è un classico caso di non linearità.

$x(t)$ = pop. prede
$y(t)$ = pop predatori

$\dot{x}(t) \leftarrow$ variazione del numero di prede: non hanno un problema di cibo poiché il plancton si presuppone essere infinito

$$\dot{x}(t) = \underbrace{a}_{\text{TASSO DI CRESCITA}} x \quad \leftarrow \text{crescita exp} \qquad a>0$$

$$a = \beta - \delta$$

β: natalità
δ: mortalità

$\dot{y}(t) \leftarrow$ variazione del numero di predatori: influenzato dalle prede, poiché se esse muoiono causano la morte anche dei predatori

$$\dot{y}(t) = -cy \qquad c>0$$

Le popolazioni però interagiscono tra loro $\Rightarrow$ la morte delle prede dipende dai numeri di incontri possibili tra prede e predatori $\Rightarrow$ proporzionale all'incontro

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = -cy + dxy \end{cases}$$

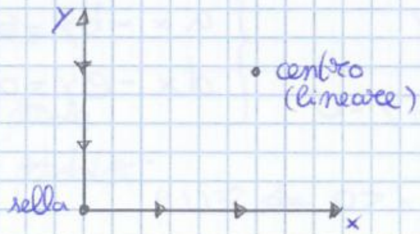
il $-xy$ porta alla morte delle prede

Il modello non lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = -ey + dxy \end{cases}$$

Presenta come soluzioni banali

- No predatori $y(t) = 0 \ \forall t \Rightarrow$ la seconda equazione diventa $\dot{x} = ax$
  $\Rightarrow x(t) = e^{at} x_0$ (le prede aumentano)
- No prede $y(t) = 0 \ \forall t \Rightarrow$ la seconda equazione diventa $\dot{y} = -ex$
  $\Rightarrow y(t) = e^{-ct} y_0$ (i predatori si estinguono)



• Traiettorie di fase per conservazione di E

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a-by) \\ \dot{y} = y(-e+dx) \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}/x = (a-by) \\ \dot{y}/y = (-e+dx) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}/x\,(-e+dx) = (a-by)(-e+dx) \\ \dot{y}/y\,(a-by) = (-e+dx)(a-by) \end{cases}$$ confronto

$$\frac{\dot{x}}{x}(-e+dx) = \dot{y}/y\,(a-by)$$

$$\dot{x}\left(-\frac{e}{x}+d\right) = \dot{y}\left(\frac{a}{y}-b\right)$$

$$\left(-\frac{c}{x}+d\right)\dot{x} + \left(b-\frac{a}{y}\right)\dot{y} = 0$$ $\Leftarrow$ la considero come derivata $\Rightarrow$ faccio l'integrale

$$\frac{d}{dt}\left(-c\log x + dx + by - a\log y\right) = 0$$ COST: similitudine con l'oscillatore armonico con l'energia meccanica (anche se questa non è un'energia)

$$E(x,y) = dx - c\log x + by - a\log y = \text{COST}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 180

In un anno (periodo di osservazione di d'Ancona) le popolazione attraversano molte volte il ciclo periodico ($T << 1$ anno) $\Rightarrow$ i valori trovati da d'Ancona sono proporzionali alla media delle due popolazioni lungo un ciclo

Calcoliamo questa media

Calcolo preventivo

$$\int_0^T \frac{\dot{x}(t)}{x(t)}\,dt = \Big[\log(x(t))\Big]_0^T = \log x(T) - \log x(0) = 0$$ poiché $x(T) = x(0)$ perché è 1 periodo

Dalla prima eq:

$$\frac{\dot{x}}{x} = a - by$$

$$\left\langle \frac{\dot{x}}{x} \right\rangle = \langle a - by \rangle = a - b\langle y \rangle$$

$$= \frac{\int_0^T \frac{\dot{x}}{x}\,dt}{T} = 0$$ ← media ← x il calcolo preventivo

$\Rightarrow a - b\langle y \rangle = 0 \quad \Rightarrow \langle y \rangle = \frac{a}{b}$

Analogamente dalla seconda eq:

$$\langle x \rangle = \frac{c}{d}$$

$\Rightarrow$ D'Ancona quando va in pescheria trova le coordinate del punto di eq.

Se inserisco nel modello LA PESCA che uccide tanto i selaci quanto le prede
$\Rightarrow$ aumento il TASSO DI MORTALITÀ: vengono coinvolti i coefficienti a e c

$$\begin{cases} a \to a - \varepsilon & \leftarrow a \text{ diminuisce} \\ c \to c + \varepsilon & \leftarrow c \text{ aumenta} \end{cases}$$

Nel sistema con la pesca il nuovo modello è con

$$\begin{cases} x' = \dfrac{c + \varepsilon}{d} & \leftarrow \text{PREDE AUMENTANO} \\ y' = \dfrac{a - \varepsilon}{b} & \leftarrow \text{SELACI DIMINUISCONO} \end{cases}$$

Ho dimostrato il contrario di quanto presupponeva d'Ancona

METODI STATISTICI

Gasparini

ESPERIMENTO ALEATORIO

Un esperimento si dice Aleatorio se è un esperimento il cui esito non è prevedibile con certezza $\Rightarrow$ STOCASTICO, non deterministico (non basato su modelli matematici che predicono esattamente il sistema)
$\Rightarrow$ serve la probabilità

S = insieme dei possibili esiti (o risultati) dell'esperimento

esempio

Lancio di un dado $\quad S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Lancio di 2 tetraedri $\quad S = \{(i,j)\, ;\, i,j = 1,2,3,4\} =$
$= \{(1,1)\ (1,2)\ (1,3)\ (1,4)\ (2,1)\ (2,2)\ (2,3)\ (2,4)$
$(3,1)\ (3,2)\ (3,3)\ (3,4)\ (4,1)\ (4,2)\ (4,3)\ (4,4)$

Corsa di 7 cavalli numerati $\quad S = \{$insieme delle possibili classifiche$\} = \{7!\}$

Un evento è un sottoinsieme di S, denotato con $E, A, B \dots$ ed è suscettibile di descrizione verbale

esempio

Lancio di un dado
A = "esce un numero pari" $= \{2, 4, 6\}$
E = "esce l'uno" $= \{1\}$
B = "esce al massimo 3" $= \{1, 2, 3\}$

Lancio di 2 tetraedri
A = "la somma dei punteggi è pari" =
$= \{(1,1)\ (1,3)\ (2,2)\ (2,4)\ (3,1)\ (3,3)\ (4,2)\ (4,4)\}$

Corsa di 7 cavalli numerati
A = "il 6 si piazza tra i primi 3"
B = "il 6 vince"
$\Rightarrow$ in questo caso $B \subseteq A \subseteq S \Rightarrow B$ implica A

Sugli insiemi rimangono definite le operazioni logiche di unione ($\cup$), intersezione ($\cap$), negazione (^{c}) e implicazione

PROBABILITÀ

La probabilità si dà agli eventi: concetto difficile da definire

DEFINIZIONE ASSIOMATICA DI KOLMOGOROV

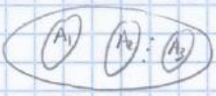
P è una funzione d'insieme (definita sugli eventi) che gode di certi assiomi:

I) $0 \le P(E) \le 1$ La probabilità di un evento E è un numero tra 0 e 1 ($E \subseteq S$

II) $P(S) = 1$ La probabilità di tutti i possibili esiti è = 1

III) Se $A_i \cap A_j = \emptyset$ (disgiunti) $\forall A_i \neq A_j \Rightarrow P(\cup A_i) = \sum P(A_i)$

$\Downarrow$



N.B. I) La probabilità è definita sugli eventi ⇒ a volte non tutti i sottoinsiemi di S possono avere probabilità, quindi non tutti i sottoinsiemi di S possono essere considerati eventi

II) l'assioma III vale solo per una collezione finita $A_1, A_2 \dots A_n$ oppure numerabile (non un numero infinito di eventi)

__esempio__

DADO EQUO — simmetrico, non abbiamo motivo di aspettarci che la probabilità di un evento sia maggiore di altri ⇒ DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ UNIFORME

$P(x) = \frac{1}{6} \quad \forall x \in S$ con $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$P(A) = P(\{1\}) = \frac{1}{6}$

valido per il III assioma

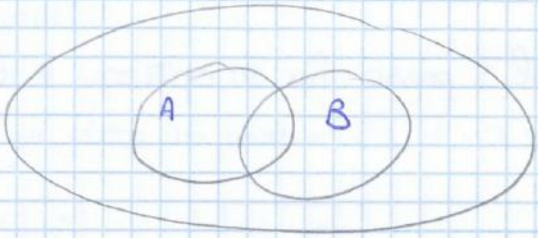
$P(B) = P(\{2,4,6\}) = P(\{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}) = P\{2\} + P\{4\} + P\{6\} =$

$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

DADO NON EQUO $P(x) \neq$ cost: non è facile assegnare probabilità se non conosciamo i dettagli, questo perché non vale il III assioma

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 180

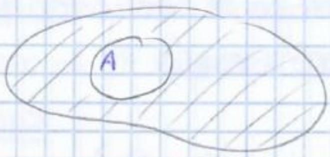
TEOREMA DELLA PROBABILITÀ TOTALE



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

perché non è detto che abbiano intersezione nulla

Per quanto riguarda la negazione, invece ho che



$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

esempio

Tetraedri equi

B = "I due numeri devono essere massimo 3" $\Rightarrow P(B) = \frac{1}{4}$

B^c = "Almeno uno dei due numeri deve essere maggiore di 3"

occhio alle negazioni logiche

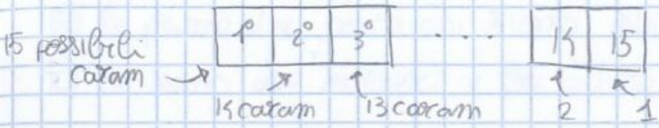
$\Rightarrow P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 75\%$

PERMUTAZIONI

Le disposizioni senza ripetizioni di n elementi, n alla volta, si chiama permutazione di n elementi

<u>esempio</u>

Quanti modi ho di dare 15 caramelle diverse per 15 persone



$$N = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$$

$N = n!$ Permutazioni (disposiz. senza ripetizioni) di n oggetti

COMBINAZIONI

Un sottoinsieme lungo r preso da un insieme di n elementi si chiama combinazione di n elementi r alla volta

<u>esempio</u>

Gli studenti (su 70) devono andare in laboratorio in squadre da 13: quante squadre sono possibili?

$$\frac{\#\text{ disposizioni senza ripetizioni}}{13!} = \text{n. di combinazioni di 70, 13 alla volta}$$

$$N = \frac{70!}{(70-13)!\,70!} = \binom{70}{13}$$

$$d = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$ Combinazioni di n elementi, r alla volta

esercizio TARGHE

In un certo paese le targhe sono di 5 caratteri che sono estratti o da 20 lettere o da 10 numeri. Possono esserci ripetizioni di lettere e numeri.

1) Calcolare il numero di targhe distinte possibili
2) Scelta a caso una targa tra le possibili, calcolare la probabilità che
   A) non ci siano ripetizioni nella targa
   B) le prime due posizioni siano numeri e le ultime tre lettere
   C) ci siano due numeri e tre lettere in posizione qualsiasi

• 1) Problema di calcolo, non di probabilità

modi per riempirle: 30 modi, 30 modi, 30 modi ...

⇒ DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONE $\#n.\text{targhe} = 30^5$

• 2) "Scelta a caso una targa" ⇒ meccanismo aleatorio ⇒ probabilità. È giustificato il fatto di pensare a probabilità uniformi poiché ciascuna targa (esito) ha una probabili

$$P(s) = \frac{1}{\#S} = \frac{1}{30^5} \leftarrow \#CP$$

- $P(A) = P$("non ci siano ripetizioni")

30, 29, 28 ... per non avere ripetizioni

⇒ DISPOSIZIONI SENZA RIPETIZIONE $\#CF = \frac{30!}{(30-5)!} = 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26$

$$P(A) = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26}{30^5} = 0{,}7037 = 70{,}37\%$$

- $P(B) = P$("primi 2 posti numeri e ultimi 3 lettere")

N N L L L
10 10 20 20 20

$$\#CF = 10 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20 = 10^2 \cdot 20^3$$

$$P(B) = \frac{10^2 \cdot 20^3}{30^5} = 0{,}0329 = 3{,}29\%$$

- $P(C) = P$("2 numeri e 3 lettere in posizioni qualsiasi")

N N L L L $10^2\, 20^3$
N L N L L $10^2\, 20^3$
N L L N L ....
N L L L N
L N N L L
...

la probabilità di ciascun caso è $P(B)$. Bisogna valutare il numero di possibili targhe
⇒ modo di scegliere 5 elementi 2 alla volta (numeri)

$\binom{5}{2}$ identico è fare 5 elementi 3 alla volta (lettere) $\binom{5}{3}$

$$\Rightarrow \#CF = 10^2 20^3 \binom{5}{2}$$

$$P(C) = \frac{5!}{2!(5-2)!} \cdot \frac{10^2 \cdot 20^3}{30^5} = 10 \cdot \frac{10^2 \cdot 20^3}{30^5} = 0{,}329 = 32{,}9\%$$

esempio

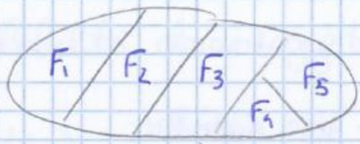
Cena organizzata per soli padri e il minore dei figli maschi. Jones ha 2 figli: probabilità che entrambi siano maschi e che non vada solo alla cena

Per semplicità suppongo $P(M) = P(F) = 1/2$

$P(MM) = P(MF) = P(FM) = P(FF) = 1/4$

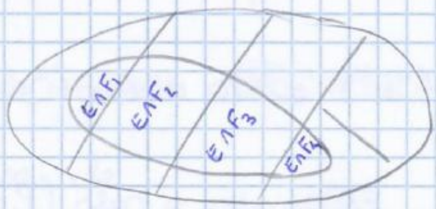
$P(MM \mid \text{almeno un maschio}) = P(MM \mid \{MF, FM, MM\}) = \frac{1/4}{3/4} = 1/3$

PARTIZIONE DI S



Se $F_1, F_2 \dots F_m$ sono DISGIUNTI ($F_i \cap F_j = \emptyset \ \forall i \neq j$) e ricoprono S (cioè $\cup F_i =$
allora $\{F_1, F_2 \dots F_m\}$ si chiama PARTIZIONE di S

Preso un evento E, esso può essere scomposto seguendo la partizione



$E = (E \cap F_1) \cup (E \cap F_2) \cup (E \cap F_3) \cup (E \cap F_4) =$
$= \bigcup_i (E \cap F_i)$

→ Se ogni pezzetto è DISGIUNTO allora P può essere scritta come somma

$$P(E) = \sum_i P(E \cap F_i)$$ FORMULA DELLA PARTIZIONE

$$P(E \mid F_i) = \frac{P(E \cap F_i)}{P(F_i)}$$

$$P(F_i)\,P(E \mid F_i) = P(E \cap F_i)$$

$$P(E) = \sum_i P(F_i)\,P(E \mid F_i)$$

esempio TEST MEDICO DIAGNOSTICO

Un'analisi del sangue è efficace al 99% nell'individuare una certa malattia quando essa è presente

M = "è malata"
+ = "il test è positivo" $\Rightarrow P(+ | M) = 99\% = 0{,}99$ (SENSIBILITÀ)

Ci possono essere anche dei "falsi positivi" con probabilità dell'1%.

M^c = "non è malata"
− = "il test è negativo" $\Rightarrow P(- | M) = 1\% = 0{,}01$ (SPECIFICITÀ)

La probabilità che un individuo sia malato (PREVALENZA) è dello 0,5%.

$\Rightarrow P(M) = 0{,}005$

Calcolare la probabilità che un soggetto sia malato, condizionata dal fatto che il test sia +

Applicando Bayes $P(M|+) = \dfrac{P(M) \cdot P(+|M)}{P(M)\, P(+|M) + P(M^c) \cdot P(+|M_c)} = \dfrac{0{,}99 \cdot 0{,}005}{0{,}99 \cdot 0{,}005 + 0{,}01 \cdot 0{,}995} = 0{,}33$

La probabilità che una persona sia malata e facendo il test risulti positivo è del 99%, ma la probabilità che una persona sia malata essendo positiva al test è del 33%.
$\Rightarrow$ Questo perché la prevalenza è bassa

INDIPENDENZA STOCASTICA

Può darsi che

$P(E) = P(E|F) = \dfrac{P(E \cap F)}{P(E)}$ INDIPENDENZA STOCASTICA

Allora ho che

$\Rightarrow P(E \cap F) = p(E) \cdot p(F)$

(mentre in generale avevo $P(E \cap F) = p(F) \cdot p(E|F) = p(E) \cdot p(F|E)$)

VARIABILI ALEATORIE

esempio

Lancio di un dado equo

SUCCESSO = "esce il 6" $\Rightarrow P(Suc) = 1/6$

INSUCCESSO = "non esce il 6" $\Rightarrow P(insuc) = 5/6$

Se chiamo X = numero di successi, con un solo lancio ho 2 possibilità: $X=1$ per il successo; $X=0$ per l'insuccesso

$\Rightarrow X$ si dice variabile aleatoria

$P(X=0) = 5/6$

$P(X=1) = 1/6$

esempio

5 lanci di un dado equo (prove indipendenti)

X = n. successi $\Rightarrow X = \underset{\text{insuccesso}}{0}, \underbrace{1, 2, 3, 4, 5}_{\text{successi}}$

è come se avessi $\forall$ lancio $X = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 0, & 2 \\ 0, & 3 \\ 0, & 4 \\ 0, & 5 \end{pmatrix}$ ← 1° lancio, o succ o insu e via via per gli altri

0 successi tra tutti i lanci

$P(X=0) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^5$

1 SUCCESSO

$P(X=1) = P(SIIII \cup ISIII \cup IISII \cup IIISI \cup IIIIS) =$

$= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 + \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^4 = 5 \cdot \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^4$

$P(X=2) = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3$ SSIII, SISII, SIISI ... modi in cui 2 elementi possono disporsi su 5 $\Rightarrow \binom{5}{2}$

$P(X=3) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2$

$P(X=4) = \binom{5}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)$

$P(X=5) = \left(\frac{1}{6}\right)^5$

$\Downarrow$

SCHEMA DI BERNOULLI

Sistema con n prove BINARIE (2 alternative - successo o insuccesso), ciascuna con le stesse probabilità (EQUE) e INDIPENDENTI

Se chiamo X = n. di successi su n. prove Bernoulliane, ciascuna avente probabilità di successo p

$\Rightarrow P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ DISTRIBUZIONE BINOMIALE (funzione di massa)

In generale una VARIABILE ALEATORIA è un aspetto numerico di interesse di un certo esperimento aleatorio, e viene indicata con la lettera LATINA MAIUSCOLA X. Se i valori che X può assumere sono un insieme finito o numerabile, allora X si dice variabile aleatoria discreta con una funzione di massa di probabilità

$$p(x_i) = P(X = x_i) \quad X \text{ binomiale nei parametri } n \text{ e } p$$

Se $n = 1 \Rightarrow X$ è binaria e può assumere solo i valori 0, 1 nel caso di insuccesso e successo e ha una funzione di massa semplice

K	$P(X=K)$
0	$1-p$
1	p

N.B. X è una variabile aleatoria mentre x_i sono numeri

Se consideriamo due aspetti numerici di interesse X e Y, abbiamo la funzione di massa di probabilità CONGIUNTA

$$p(x_i, y_j) = P(X = x_i \cap Y = y_j)$$

esempio

Lancio a caso (INDIPENDENZA) due tetraedri, uno equo e l'altro no.

Se X = punteggio del primo
Y = punteggio del secondo

allora ho che $P(x=1) = P(x=2) = P(x=3) = P(x=4) = 1/4$

$P(y=1) = 2/5 \qquad P(y=2) = P(y=3) = P(y=4) = 1/5$

• Calcola la fmp. congiunta di (x, y)

$$p(x_i, y_j) = p(x = i \cap y = j) \overset{\text{per indipendenza stocastica}}{=} P(x=i) \cdot P(y=j)$$

$x \backslash y$	1	2	3	4	p_x
1	$\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{20}$ 2	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$ 3	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$ 4	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$ 5	$1/4$
2	$\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{20}$ 3	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$ 4	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$ 5	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$ 6	$1/4$
3	$\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{20}$ 4	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$ 5	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$ 6	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$ 7	$1/4$
4	$\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{20}$ 5	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$ 6	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$ 7	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$ 8	$1/4$
p_y	$2/5$	$1/5$	$1/5$	$1/5$	

L'interno della tabella contiene la f.m.p.

I margini formano le probabilità marginali p_x e p_y

In mezzo segno il punteggio totale che mi serve per il prossimo punto.

Il valore atteso gode delle seguenti proprietà:

- se X è una costante a, cioè una variabile aleatoria degenere

$$P(X=a)=1 \quad \text{allora} \quad E(x)=E(a)=a$$

- se $Y=g(x)$ è una funzione

$$E(y)=E(g(x))=\sum g(x)\cdot p(x)$$

In particolare, se $g(x)=a+bx$ lineare $\Rightarrow E(y)=a+b\,E(x)$

DIM

$$E(g(x))=E(a+bx)=\sum g(x)\cdot p(x)=$$

$$=\sum(a+bx)\cdot p(x)=a\underbrace{\sum p(x)}_{=1}+b\cdot\underbrace{\sum x\,p(x)}_{=E(x)}=a+b\,E(x)$$

QDE

- somma dei valori attesi è il valore atteso della somma

$$E(x+y)=E(x)+E(y)$$

esempio

Riprendendo l'esempio del lancio dei due tetraedri uno equo e l'altro no.

$E(x)=2,5$

$E(y)=11/5=2,2$

$> E(x)+E(y)=4,7$

$$E(z)=2\cdot\frac{2}{20}+3\cdot\frac{3}{20}+4\cdot\frac{4}{20}+5\cdot\frac{5}{20}+6\cdot\frac{3}{20}+7\cdot\frac{2}{20}+8\cdot\frac{1}{20}=$$

$$=0,2+0,45+0,8+1,25+0,9+0,7+0,4=4,7 \Rightarrow E(z)=E(x)+E(y)$$

ALGEBRA DEI VALORI ATTESI

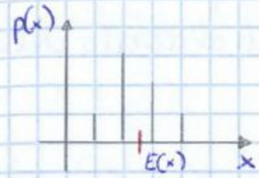
Si definisce SCARTO $g(x)=X-E(x)=x-\mu_x$ media: valore atteso di x

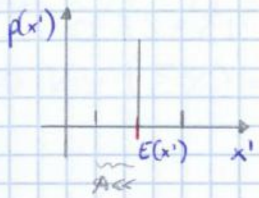
Il valore atteso dello scarto

$$E(x-\mu_x)=E(x)-E(\mu_x)=\mu_x-\mu_x=0 \Rightarrow E(x-\mu_x)=0$$

la media degli scarti è $=0$

VARIANZA





Il valore atteso $E(x) = E(x')$ con una differente f m p

$\Rightarrow x'$ è più incerto perchè le sue probabilità sono più disperse

Un'informazione della variabilità di una V.A. con valore atteso μ_x è dato da

$$Var(x) = E(x-\mu_x)^2$$

VARIANZA
Media del quadrato dello scarto

devo mettere il quadrato xkè sennò viene 0

PROPRIETÀ

- $Var(x) = E(x^2) - (E(x))^2$

  poichè $var(x) = E(x-\mu_x)^2 = E(x^2+\mu_x^2-2X\mu_x) = E(x^2)+E(\mu_x^2)-2E(X\mu_x) =$
  $= E(x^2)+\mu_x^2-2\mu_x E(x) = E(x^2)-\mu_x^2 = E(x^2)-(E(x))^2$

- $Var(a+bx) = b^2 var(x)$

- $Var(X+Y) = Var(X)+Var(Y)+2\,cov(X,Y)$

  dove definisco $Cov(x,y) = E((x-\mu_x)(y-\mu_y))$

  COVARIANZA
  Media del prodotto degli scarti
  $Cov(x,y) = 0$ se x,y INDIPENDENTI

  poichè $var(X+Y) = E((x-\mu_x)+(y-\mu_y))^2 =$
  $= E((x-\mu_x)^2+(y-\mu_y)^2) + 2E((x-\mu_x)(y-\mu_y))$
  $= var(x)+var(y)+2cov(x,y)$

esercizio

$$Var(x-y) = var(x)+var(-y)+2cov(x,-y) =$$
$$= var(x)+(-1)^2 var(y) - 2cov(x,y) =$$
$$= var(x)+var(y)-2cov(x,y)$$

esercizio

Calcola la varianza di una V.A. binomiale X di parametri n e p considerando X come la somma di Bernoulliane indipendenti

$$X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$ dove ciascun Y_i sono indipendenti

$$Var(Y_1 + Y_2) = Var(Y_1) + Var(Y_2) + \underbrace{\cancel{2\,cov(Y_1, Y_2)}}_{=0 \text{ perché } Y_1 \text{ e } Y_2 \text{ indipendenti}}$$

$$\Rightarrow Var\left(\sum Y_i\right) = \sum Var(Y_i)$$

esercizio

Due capre e una Ferrari sono disposte a caso dietro 3 porte - il giocatore sceglie una porta a caso: il conduttore (che sa dov'è la Ferrari) apre una delle altre due porte in cui c'è una capra

- A = "scegliere la porta con la Ferrari senza cambiare scelta dopo che il cond ha aperto la porta"

$$P(A) = 1/3$$

- B = "scegliere la porta con la Ferrari se il giocatore cambia scegliendo la terza porta (non quella aperta dal conduttore)"

$$P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - P\left(\text{"Ferrari fosse dietro la porta 1 da subito"}\right) = 1 - \frac{1}{3} = 2/3$$

Se X è una variabile aleatoria con densità $f(x)$ e $g(x)$ è una funzione, ho che il valore atteso di $g(X)$ è

$$E(g(x)) = \int_{\mathbb{R}} g(x) \cdot f(x)\, dx$$ VALORE ATTESO

in particolare, se $g(x) = x \rightarrow E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\, dx$

esempio

Calcoliamo il valore atteso di X nell'esempio precedente

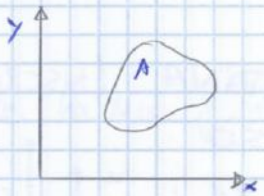
$$E(x) = \int_0^3 x f(x)\, dx = \int_0^3 x \left(\tfrac{2}{3} - \tfrac{3}{9}x\right) dx = \left[\frac{2}{3}\frac{x^2}{2} - \frac{3}{9}\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{1}{3}$$ ASCISSA DEL BARICENTRO DEL TRIANGOLO

Definisco allo stesso modo

$$Var(x) = \int_{\mathbb{R}} (x - E(x))^2\, dx$$ VARIANZA

e valgono le proprietà scritte per le V.A. discrete

Se (x, y) è un vettore aleatorio continuo (regolare), allora esiste una densità bivariata congiunta $f(x,y)$ /



$$P((x,y) \in A) = \iint_A f(x,y)\, dx\, dy$$

Se x e y sono indipendenti

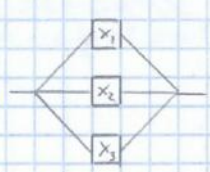
$$f(x,y) = f_x(x) \cdot f_y(y)$$ probabilità marginali

Se x_1 e x_2 due V.A. indipendenti e ciascuna con la stessa legge di X:

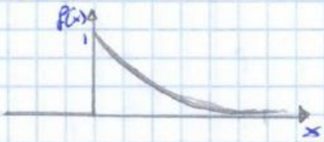
$$E(x_1 + x_2) = E(x_1) + E(x_2)$$
$$Var(x_1 + x_2) = Var(x_1) + Var(x_2)$$

esempio

3 elementi in // indipendenti ma ciascuno con la stessa densità $f(x)$ di tempo di funzionamento



$$f(x) = \begin{cases} 0 & se\ x < 0 \\ e^{-x} & se\ x \geq 0 \end{cases}$$



Calcolare la probabilità che il sistema duri più di un'ora

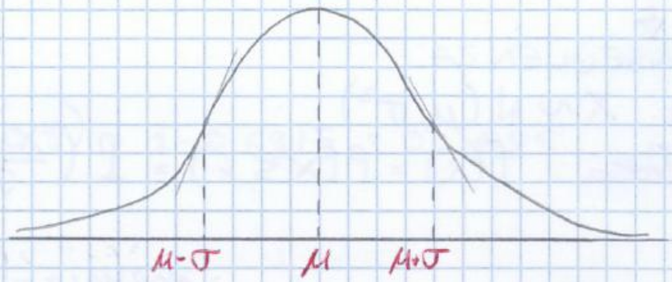
$$P(S>1) = 1 - P(S \leq 1) = 1 - P(\text{"tutti e 3 si rompono entro l'ora"}) =$$
$$= 1 - P(x_1 \leq 1 \cap x_2 \leq 1 \cap x_3 \leq 1) = 1 - P(x_1 \leq 1) P(x_2 \leq 1) \cdot P(x_3 \leq 1) =$$
$$= 1 - (P(x \leq 1))^3$$

$$P(x \leq 1) = \int_0^1 e^{-x}\, dx = [-e^{-x}]_0^1 = 1 - \frac{1}{e} \Rightarrow P(S>1) = 1 - \left(1 - \frac{1}{e}\right)^3$$

VARIABILI ALEATORIE GAUSSIANE

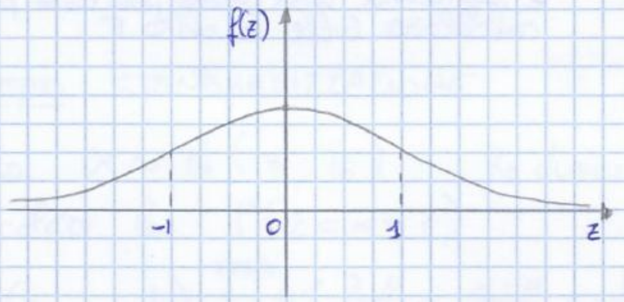
Una variabile aleatoria X si dice normale (o gaussiana) con parametri μ e σ^2, scritta come $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, se ha densità

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right)}$$



$f(x)$ è simmetrica rispetto a μ con 2 punti di flesso posti ad una distanza σ da μ ⇒ flessi in $x = \mu \pm \sigma$

Nel caso specifico di $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$ ⇒ la gaussiana si dice NORMALE STANDARD



$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{z}{2}}$$ NORMALE STANDARD

$$Z \sim N(0, 1)$$

Ricerco la sua funzione di ripartizione

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right)} dx$$

Mi pongo nel caso della normale standard per semplificare
⇒

$$\Phi(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

FUNZIONE DI RIPARTIZIONE chiamata storicamente $\Phi(\xi)$

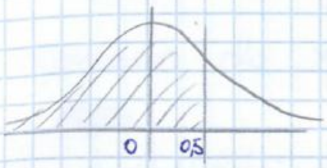
⇒ non esprimibile tramite funzioni elementari
per il loro calcolo si usano metodi approssimati

Proprietà della normale
- $E(x) = \mu$
- $Var(x) = \sigma^2$

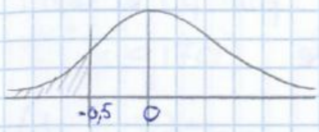
esempio CALCOLO DA TAB

Leggere da tabella $P(X < +0,5)$ e $P(X > -0,5)$ e $P(-0,5 < X < +0,5)$

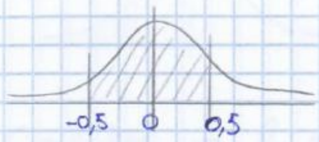
Nella tabella sono riportati solo i valori + perché è simmetrica



$$\Phi(0,5) = 0,6915$$



$$\Phi(-0,5) = 1 - \Phi(0,5) = 1 - 0,6915 = 0,3085$$



$$\Phi(-0,5 < x < 0,5) = \Phi(0,5) - \Phi(-0,5) = 0,6915 - 0,3085 = 0,383$$

esempio STANDARDIZZAZIONE

Data $X \sim N(3, 16)$ ho dunque $\mu = 3$, $\sigma^2 = 16$

Calcolare la $P(2 < x < 7)$

$$P(a < x < b) \overset{\text{STAND.}}{=} P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < \overset{\text{NORM. STAND.}}{Z} < \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P(2 < x < 7) = P\left(\frac{2-3}{4} < \frac{x-3}{4} < \frac{7-3}{4}\right) = P(-0,25 < z < 1) =$$

$$= \Phi(1) - \Phi(-0,25) = \Phi(1) - (1 - \Phi(0,25))$$

esempio

In una certa popolazione, l'altezza X di un maschio segue una distribuzione normale

$$X \sim N(\mu = 175, \sigma^2 = 8^2)$$

Supponiamo che $x_1 \dots x_5$ siano iid (campione casuale di 5 elementi)

Calcolare

- La probabilità che un singolo maschio sia più basso di 170 cm

$$P(x < 170) = P\left(\frac{x-175}{8} < \frac{170-175}{8}\right) =$$

$$= P(z < -0{,}625) = 1 - P(z < 0{,}625) =$$

$$= 1 - 0{,}73 \simeq 0{,}27 = 27\%$$

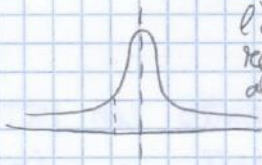
- Considerando la media aritmetica $\bar{x} = \sum_{i=1}^{5} \frac{x_i}{5}$ come una nuova distribuzione, calcolare la probabilità che $\bar{x}$ sia più basso di 170 cm

$\bar{X}$ è una combinazione lineare di normali, dunque normale essa stessa, ma devo valutare di che parametri

$$E(\bar{x}) = E\left(\frac{\sum x_i}{5}\right) = \frac{1}{5} E\left(\sum x_i\right) = \frac{1}{5}(5 \cdot 175) = 175$$

$$Var(\bar{x}) = Var\left(\frac{\sum x_i}{5}\right) = \frac{1}{5^2} \sum Var(x_i) = \frac{1}{25}(5 \cdot 8^2) = \frac{8^2}{5}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{X} \sim N\left(175, \frac{8^2}{\sqrt{5}}\right) = N(175, 3{,}57^2)$$



l'andamento si restringe attorno al valore atteso

$$P(\bar{x} < 170) = P\left(\frac{\bar{x}-175}{3{,}57} < \frac{170-175}{3{,}57}\right) =$$

$$= P(z < -1{,}397) = 1 - P(z < 1{,}397) =$$

$$= 1 - 0{,}929 = 0{,}081$$ ← facendo la media la probabilità diminuisce

Generalizzando

$$E(\bar{x}) = E(x)$$

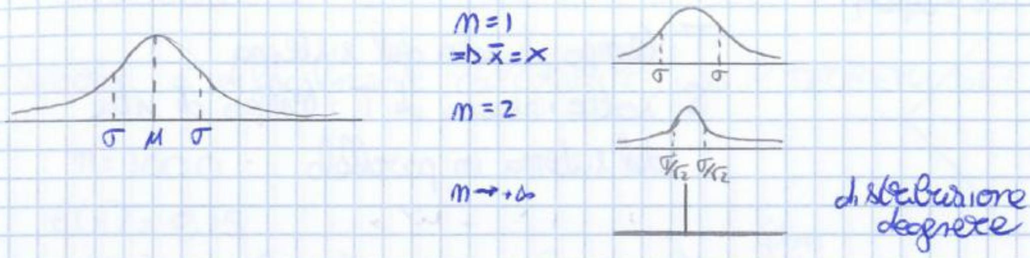
$$Var(\bar{x}) = \frac{Var(x)}{n}$$

TEOREMA DEL LIMITE CENTRALE

Se $x_1, x_2 \dots x_n$ iid / $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\Rightarrow$ $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

Se la distribuzione di partenza non è normale, le cose sono più complicate

Con la normale ho che



Per qualsiasi distribuzione, si nota che dopo un determinato n la distribuzione diventa $\simeq$ Normale

$\Rightarrow$ TEOREMA DEL LIMITE CENTRALE

Per qualsiasi distribuzione avente valore atteso μ e varianza σ^2, la distribuzione della media campionaria $\bar{X}$ è, per n grande, approssimabile da una normale

$$\Rightarrow \quad \bar{X} \underset{n \text{ grande}}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

esempio

$X_1, \dots X_n$ iid / $X \sim$ Bernoulliana (p)

$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n}$ (proporzione di successi)

$$\begin{cases} \mu = p \\ \sigma^2 = p(1-p) \end{cases}$$

Per il TH del limite centrale

$$\bar{X} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

- Si campionino 1000 persone e si calcola la probabilità che almeno 160 abbiano il lobo attaccato

$n = 1000 \qquad K = 160 \qquad p = 0,15$

$$P(x \geq 160) = 1 - P(x < 160) = 1 - P(x \leq 159) = 1 - \sum_{K=0}^{159} \binom{1000}{K} 0,15^K (1-0,15)^{1000-K}$$

Siccome è difficilmente calcolabile, uso il TEOREMA DEL LIMITE CENTRALE

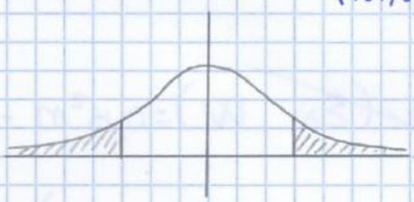
$n = 1000$

$E(x) = 0,15$

$var(x) = p(1-p) = 0,15(1-0,15) = 0,1275$

$\Rightarrow X \sim N(1000 \times 0,15,\ 1000 \times 0,1275) = N(150,\ 127,5)$

$$P(x \geq 160) = P\left(\frac{x-150}{\sqrt{127,5}} \geq \frac{160-150}{\sqrt{127,5}}\right) = P(z \geq 0,8856) =$$



$= 1 - P(z < 0,8856) =$

$= 1 - 0,8106 \cong 19\%$

esercizio

Un astronomo vuole stimare la distanza d di una stella lontana con media $\bar{x}$ di n misurazioni, ciascuna di deviazione 2 anni luce. Quante misurazioni deve fare per avere il 95% di probabilità che la sua stima sia accurata di $\pm 0,5$ anni luce?

d = distanza incognita

$x_1 \dots x_n$ iid in cui $\begin{cases} E(x_i) = d \\ var(x_i) = 2^2 \end{cases} \Rightarrow \bar{x}_n = \frac{\sum x_i}{n} \sim N\left(d, \frac{2^2}{n}\right)$

$$P(|\bar{x}_n - d| < 0,5) = P(-0,5 < \bar{x}_n - d < 0,5) \approx 0,95$$

Standardizzo

$$P\left(-\frac{0,5}{\frac{2}{\sqrt{n}}} < \frac{\bar{x}_n - d}{\frac{2}{\sqrt{n}}} < \frac{0,5}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\right) = 1 - 2\left(1 - P\left(z < \frac{\sqrt{n}}{4}\right)\right) = 2P\left(z < \frac{\sqrt{n}}{4}\right) - 1 =$$

$$= P\left(z < \frac{\sqrt{n}}{4}\right) = \frac{1 + 0,95}{2} = 0,97$$

$\frac{\sqrt{n}}{4} = 1,96 \qquad n = 62$ misurazioni

Massimo Macario Ban

METODI NUMERICI e STATISTICI

Prof: Adami - Falletta - Gasparini