



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 968

DATA: 08/05/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Tortorici

MATERIA: Meccanica delle Macchine

Prof. Eula

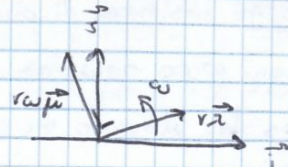
Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

DERIVATA DI UN VETTORE ROTANTE

$$\frac{d(\vec{r}_i)}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_i$$



Per ottenere il vettore derivata:

- ruota di 90° il vettore di partenza nel senso di $\vec{\omega}$
- moltiplica il modulo del vettore di partenza per ω .

MOTO PIANO GENERICO

FORMULA FONDAMENTALE DELLA CINEMATICA:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B} = \vec{v}_B + \vec{\omega} \wedge (\vec{A}-\vec{B})$$

TEOREMA DI RIVALS:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B_T} + \vec{a}_{A/B_N} = \vec{a}_B + \left[\vec{\omega} \wedge (\vec{A}-\vec{B}) \right]_T - \left[\omega^2 (\vec{A}-\vec{B}) \right]_N$$

CASI PARTICOLARI:

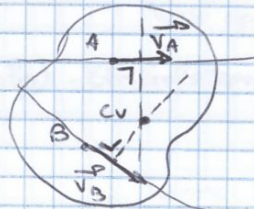
- traslazione: $\omega = 0 \Rightarrow \vec{v}_A = \vec{v}_B$
 $\dot{\omega} = 0 \Rightarrow \vec{a}_A = \vec{a}_B$
- rotazione: $v_B = 0 \Rightarrow \vec{v}_A = \vec{\omega} \wedge (\vec{A}-\vec{B})$
 $a_B = 0 \Rightarrow \vec{a}_A = \vec{a}_{A/T} + \vec{a}_N$

CENTRO DELLE VELOCITÀ

Punto tale che $v_{cv} = 0$ ma $a_{cv} \neq 0$

Come si trova:

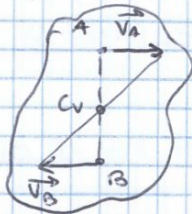
- $\vec{v}_A \neq \vec{v}_B$:



si traccia la \perp alle direzioni di v_A e v_B : dove si incrociano c'è C_v .

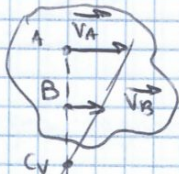
- $\vec{v}_A \parallel \vec{v}_B$:

① \vec{v}_A e \vec{v}_B discordi:



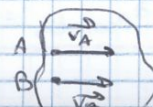
C_v è sulla retta congiungente A e B all'intersezione con la retta congiungente \vec{v}_A e \vec{v}_B .

② \vec{v}_A e \vec{v}_B concordi:



C_v è all'intersezione fra la retta passante per AB e quella congiungente le due velocità. È fuori dalla distanza AB.

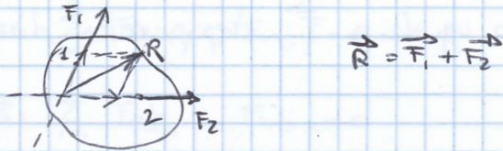
③ $\vec{v}_A = \vec{v}_B$: il corpo trasla e $C_v = \infty$



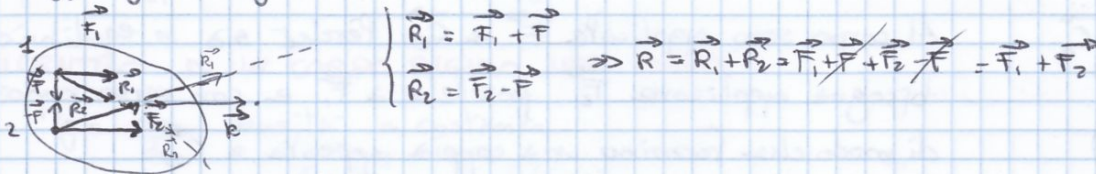
FORZA: vettore applicato di cui vanno specificati: modulo, direzione e verso e punto di applicazione.
 Nei corpi rigidi vale il **principio di trasmissibilità** di una forza, cioè essa può essere trasportata lungo la sua retta d'azione.

COMPOSIZIONE DI FORZE:

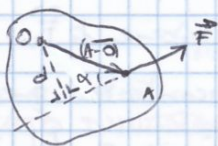
- non //: si usa la regola del parallelogramma:



- //: aggiungo e tolgo \vec{F} :



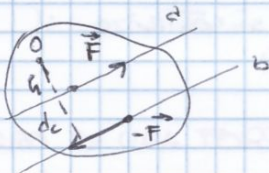
MOMENTO DI UNA FORZA:



$$\vec{M}_O = (\vec{A}-\vec{O}) \wedge \vec{F} = r \sin \alpha = F \cdot d \Rightarrow M = dF$$

$d = \text{braccio} \quad d \perp F$

COPPIA DI FORZE:



allo

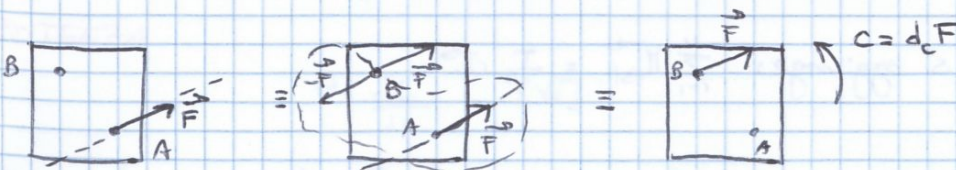
Le due forze devono avere direzione parallela, stesso modulo e versi opposti.

$$\vec{M}_O = -Fh_1 + F(h_1 + d) \Rightarrow M = C = Fd$$

SISTEMI EQUIVALENTI $\begin{cases} \rightarrow \text{hanno uguale risultante} \\ \rightarrow \text{hanno uguale momento risultante} \end{cases}$

SISTEMI IN EQUILIBRIO $\begin{cases} \rightarrow \text{hanno risultante nulla: } \vec{R} = 0 \\ \rightarrow \text{hanno momento risultante nullo: } \vec{M}_R = 0 \end{cases}$

TRASPORTO DI UNA FORZA FUORI DALLA SUA RETTA D'AZIONE:



Bisogna aggiungere un momento di trasporto.

EQUILIBRIO DINAMICO:

$$G \begin{cases} \sum_{i=1}^N \vec{F}_{est,i} + \vec{F}_{ing} = 0 \\ \sum_{i=1}^N \vec{M}_{est,i} + \vec{M}_{ing} = 0 \end{cases} \rightarrow \text{equazioni cardinali della dinamica}$$

Equazioni scalari dell'equilibrio dinamico riferite a un punto qualsiasi:

$$P \begin{cases} \uparrow: \sum_{i=1}^N F_{est,i,y} + F_{ing,y} = 0 \\ \rightarrow: \sum_{i=1}^N F_{est,i,x} + F_{ing,x} = 0 \\ P^{\uparrow}: \sum_{i=1}^N M_{est,i} + M_{ing} + b_{in} F_{ing} = 0 \end{cases}$$

BARICENTRO DI UN CORPO RIGIDO NEL PIANO

H_p: $\rho = \frac{dm}{dv}$ densità = costante

$$x_G = \frac{\int x dm}{M} = \frac{\int (\rho dv) x}{M}$$

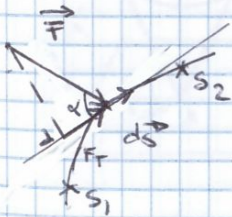
$$y_G = \frac{\int y dm}{M} = \frac{\int (\rho dv) y}{M}$$

MOMENTO D'INERZIA

H_p: $\rho = \frac{dm}{dv} = \text{costante}$

$$I_0 = \int r^2 dm = \int (\rho dv) r^2$$

LAVORO DI UNA FORZA



$$L = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{s_1}^{s_2} F_T ds \quad [J]$$

con $F_T = F \cos \alpha$

LAVORO DI UNA COPPIA

$$L_c = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta$$

POTENZA

$$P = \frac{dL}{dt} \quad [W]$$

Per una forza: $P_F = \vec{F}_t \frac{ds}{dt} = F_t v$

Per una coppia: $P_c = M \frac{d\theta}{dt} = M \omega$

$$\Rightarrow P_{tot} = F_t v + M \omega$$

TERNA PRINCIPALE D'INERZIA

- 1) è una terna di simmetria; lungo un asse si ha un momento d'inerzia massimo e lungo un altro quello minimo.
- 2) se è fissata in G è una terna centrale: se è $[\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}]$ si ha:

$$\vec{K}_G = I_x \vec{i} + I_y \vec{j} + I_z \vec{k}$$

con:

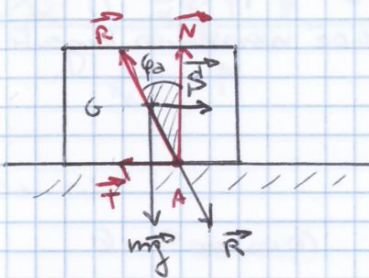
$$\begin{cases} p = \vec{\omega} \cdot \vec{i} \\ q = \vec{\omega} \cdot \vec{j} \\ r = \vec{\omega} \cdot \vec{k} \end{cases}$$

e $I_x, I_y, I_z =$ momenti d'inerzia riferiti agli assi

ATTRITO

- opposto a direzione moto
- forze incognite
- fenomeno non lineare

ATTRITO STATICO: $\vec{v} = 0$



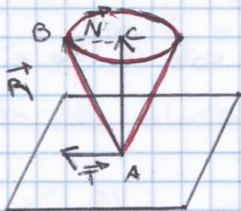
A (punto di applicazione di \vec{R}) NON è allineato con G!

$$T \leq f_a N$$

$f_a \rightarrow$ coeff. d'attrito di aderenza

$\varphi_a \rightarrow$ angolo di aderenza

Cono di attrito di aderenza:



$$T_{lim} = f_a N$$

In $\triangle ABC$: $T_{lim} = \tan \varphi_a \cdot N$

Quindi:

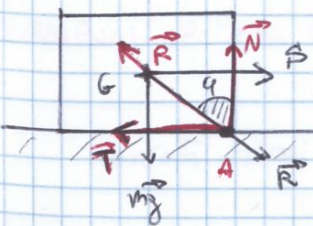
$$f_a = \tan \varphi_a \Rightarrow \varphi_a = \arctan(f_a)$$

ATTRITO DI STRISCIAMENTO: $\vec{v} \neq 0$

$v =$ costante $\Rightarrow S = T$

$$T = f N$$

$f \neq f_a \rightarrow$ coeff. d'attrito di strisciamento

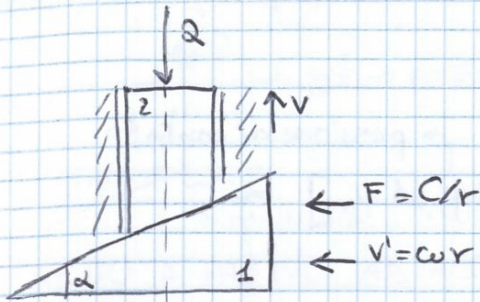


Cono di attrito di strisciamento:



$$\Rightarrow \tan \varphi = f \Rightarrow \varphi = \arctan(f)$$

Cunei equivalenti:



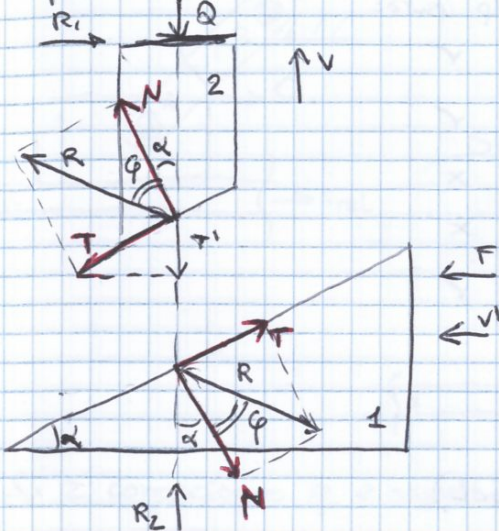
1 → madre vite

2 → vite

r → raggio medio della vite

• C e ω sono riferiti alla madre vite, Q e v alla vite.

Separiamo:



• L'angolo α (inclinazione del filetto) è anche l'angolo tra N e l'asse.

• T è lungo l'elica e il suo verso è quello tale per cui la sua proiezione T' sull'asse è opposta a v.

Equilibrio:

$$1: \begin{cases} \uparrow: R_2 - R \cos(\alpha + \varphi) = 0 \\ \rightarrow: R \sin(\alpha + \varphi) - F = 0 \end{cases}$$

$$2: \begin{cases} \uparrow: -Q + R \cos(\alpha + \varphi) = 0 \\ \rightarrow: R_1 - R \sin(\alpha + \varphi) = 0 \end{cases}$$

Da cui:

$$Q = R \cos(\alpha + \varphi)$$

$$F = R \sin(\alpha + \varphi)$$

$$\Rightarrow \frac{F}{Q} = \tan(\alpha + \varphi)$$

Quindi:

$$F = \frac{C}{r} = Q \tan(\alpha + \varphi) \Rightarrow C = rQ \tan(\alpha + \varphi)$$

Rapporto delle velocità:



$$\Rightarrow v = v' \tan \alpha$$

Rendimento:

$$\eta = \frac{P_u}{P_e} = \frac{Qv}{Cw} = \frac{Qv}{Fv'} = \frac{v}{v'} \cdot \frac{Q}{F} = \frac{\tan \alpha}{\tan(\alpha + \varphi)} = \eta$$

→ dipende da geometria e dai materiali (tramite φ)

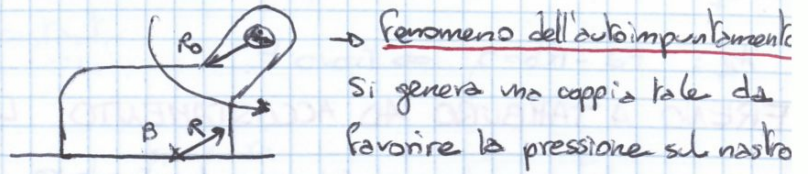
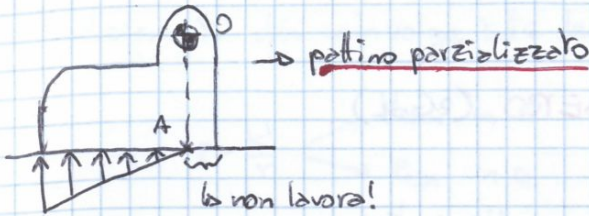
POSSIBILI IPOTESI DEI CONTATTI ESTESI

contatti estesi → pressione uniforme
 → ipotesi dell'usura (o di Reye)

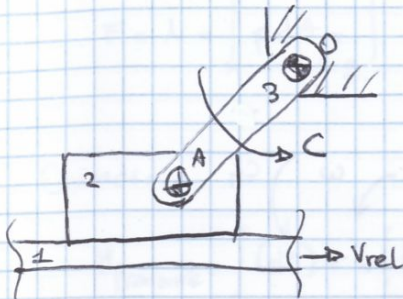
IPOTESI DELL'USURA (O DI REYE)

Il volume di materiale asportato nell'unità di tempo per attrito è proporzionale al lavoro fatto dalle forze d'attrito nella stessa unità di tempo.

Geometrie particolari:



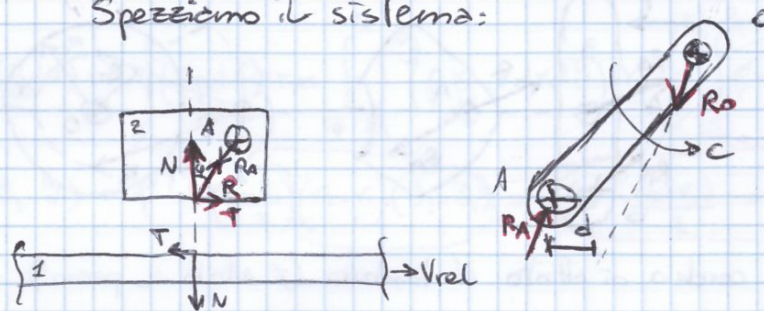
FRENO A PATTINO AD ACCOSTAMENTO LIBERO (2 GdL)



- 1 → nastro
- 2 → pattino
- 3 → leva

Vale ipotesi dell'usura

Spezziamo il sistema:



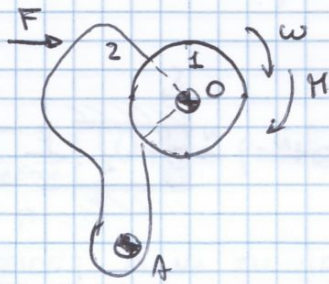
Su 2 conosciamo φ e sappiamo che R deve passare per A (1° regola degli equilibri). Troviamo la direzione di R_A e la riportiamo su 3: R_A e R_O generano una coppia opposta a C.

$0)^\pm: C - R_A d = 0$

$|R_A| = |R_O| = |R|$

$R = \frac{N}{\cos \varphi} = \frac{T}{\sin \varphi}$

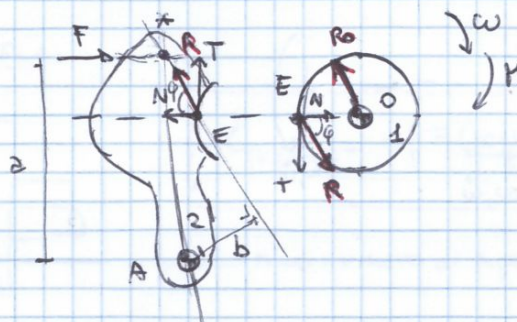
FRENO A TAMBURO AD ACCOSTAMENTO RIGIDO (1 GdL)



Ceppo esterno:

- 1 → tamburo
- 2 → leva

Spezziamo il sistema:



- Non usiamo l'ipotesi dell'usura!! Ipotizziamo che N e T siano applicate alla periferia del tamburo, nella zona media di contatto (punto E).
- R_O e R formano una coppia opposta a M (2° regola degli equilibri).
- Il ceppo segue la terza regola degli equilibri: costruiamo il triangolo delle forze.

$\vec{F} + \vec{R} + \vec{R}_A = 0$



(ω è costante perché il sistema viene studiato istante per istante).
 Introduciamo K' che coinvolge tutte le costanti:

$$p = \frac{K'}{r} \begin{cases} p_{\max} \text{ in } r_i \\ p_{\min} \text{ in } r_e \end{cases} \quad r_i < r < r_e$$

Quindi:

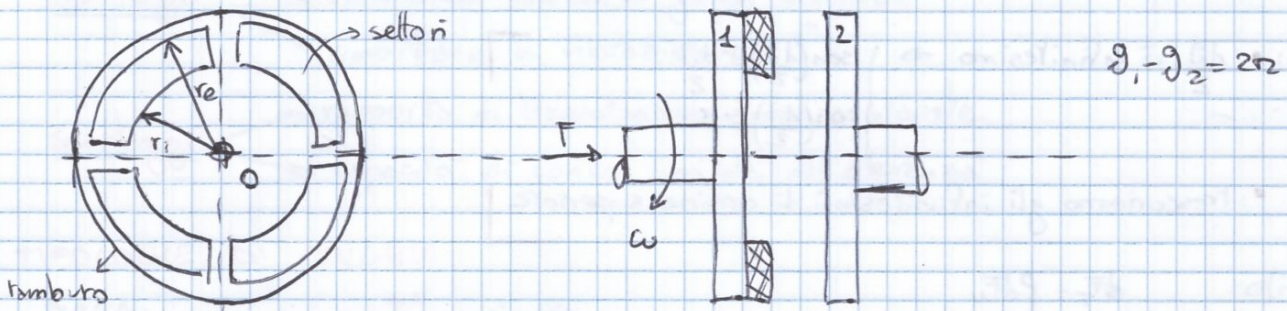
$$F = N = \int_A p dA = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \int_{r_i}^{r_e} \underbrace{\left[\frac{K'}{r} \right]}_{\substack{\text{coefficiente} \\ p}} \cdot \underbrace{[rd\vartheta dr]}_{\substack{\text{area} \\ dA}} = K'(r_e - r_i)(\vartheta_2 - \vartheta_1) = F$$

Quindi:

$$M_{\text{prestante}} = \int_A (dT) \cdot r = \int_A (p dN) \cdot r = \int_A (p p dA) \cdot r = \int_{r_i}^{r_e} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \left(p \frac{K'}{r} \cdot r dr d\vartheta \right) \cdot r = \int_{r_i}^{r_e} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} p K' r dr d\vartheta =$$

$$= p K' \frac{(r_e^2 - r_i^2)}{2} (\vartheta_2 - \vartheta_1) = p \underbrace{K' \frac{(r_e + r_i)}{2}}_F (r_e - r_i) (\vartheta_2 - \vartheta_1) = p F \frac{(r_e + r_i)}{2} = M_{\text{prestante}}$$

FRIZIONE PIANA

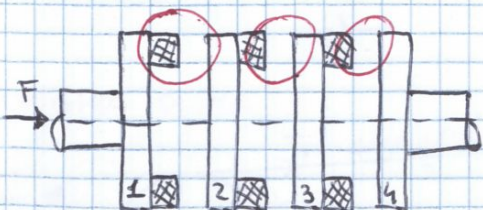


Per l'ipotesi di Reye: $p = \frac{K'}{r}$

$$F = K' 2\pi (r_e - r_i)$$

$$C_{\text{frizione}} = \int_A (dT) r = p 2\pi K' \frac{(r_e^2 - r_i^2)}{2} = p F \frac{(r_e + r_i)}{2} \rightarrow \text{coppia trasmessa dalla frizione in fase di slittamento}$$

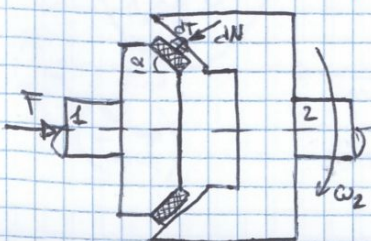
FRIZIONE PIANA MULTIPLA:



$$C_{\text{frizione}} = n p F \frac{(r_e + r_i)}{2}$$

$n \rightarrow$ numero di superfici di contatto

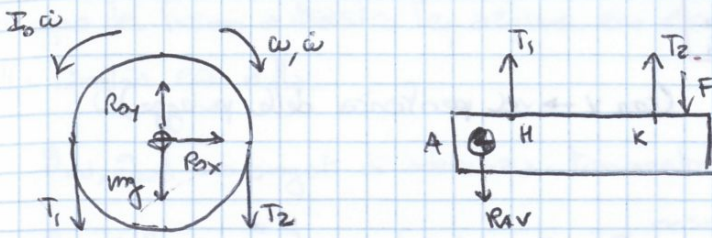
FRIZIONE CONICA



per l'ipotesi dell'usura: $p = \frac{K'}{r}$

$$C_{\text{frizione}} = \frac{F}{\sin \alpha} \cdot F \frac{(r_e + r_i)}{2}$$

con $F > P$



$T_1 > T_2$
 Non c'è momento frenante perché sono le due tensioni che lo formano

$$O_2: (T_2 - T_1) \frac{d}{2} - I_0 \dot{\omega} = 0$$

$$\uparrow: T_1 + T_2 - F - R_{Ay} = 0$$

FLESSIBILI

- CINGHIE
 - PIANA
 - DENTATA
 - TRAPEZIA
- FUMI
- CATENE

Vantaggi

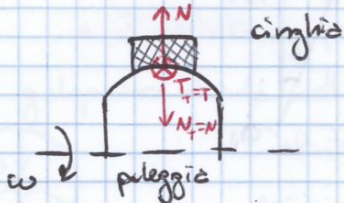
- trasmettono con l'aderenza → innesti di sicurezza
- trasmettono anche su grandi distanze
- smorzano le vibrazioni

Svantaggi

- rapporto di trasmissione non costante
- capacità di carico limitata dall'aderenza

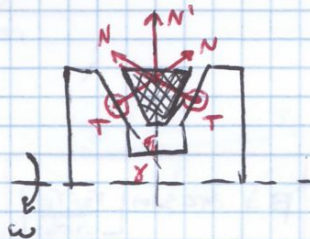
TIPOLOGIE DI CINGHIA

PIANA:



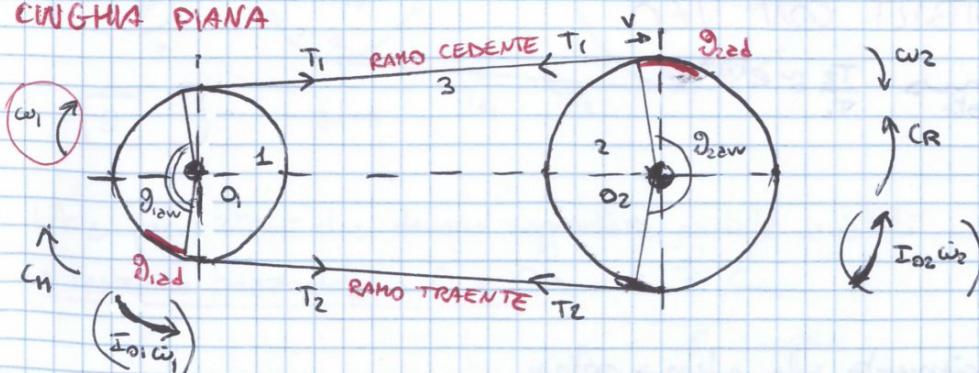
$$T = \mu N$$

TRAPEZIA:



$$T = \frac{E}{\sin \gamma} \cdot N$$

CINGHIA PIANA



- 1 → puleggia motrice
- 2 → puleggia condotta
- 3 → cinghia

Nel caso del freno a disastro l'equazione era esatta e non approssimata perché la velocità della cinghia era nulla.

$\vartheta_{ad}, \vartheta_{2ad}$ → angoli di aderenza: trasmettono il moto

$\vartheta_1^*, \vartheta_2^*$ → angoli di strisciamento
 ↳ nasce strisciamento
 ↳ si genera una variazione di tensione nella cinghia: $T_2 \neq T_1$

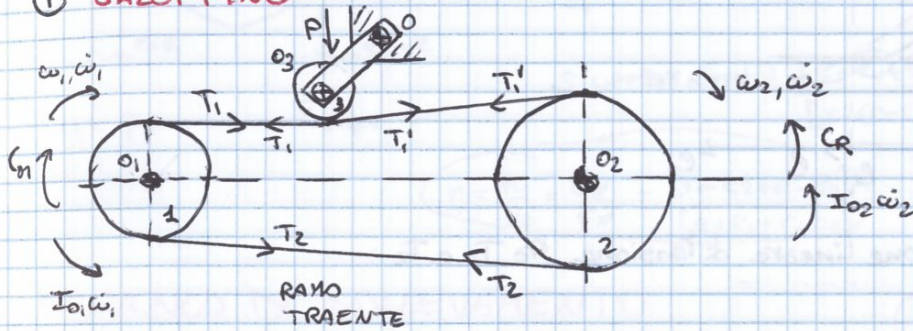
$\vartheta_{aw} = \vartheta_{ad} + \vartheta^*$

ADERENZA TOTALE (caso ideale): $\vartheta_{aw} = \vartheta_{ad}$ (coeff. d'attrito f_a)

STRISCIAMENTO TOTALE (perdita trasmissione moto): $\vartheta_{aw} = \vartheta^*$ (coeff. d'attrito f)

MODI PER TENSIONARE UNA CIINGHIA

1 GALOPPINO

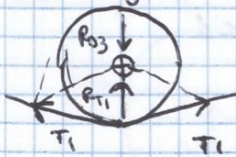


- 1 → pleggia motrice
- 2 → pleggia condotta
- 3 → galoppino

Il galoppino si monta sul ramo cedente.

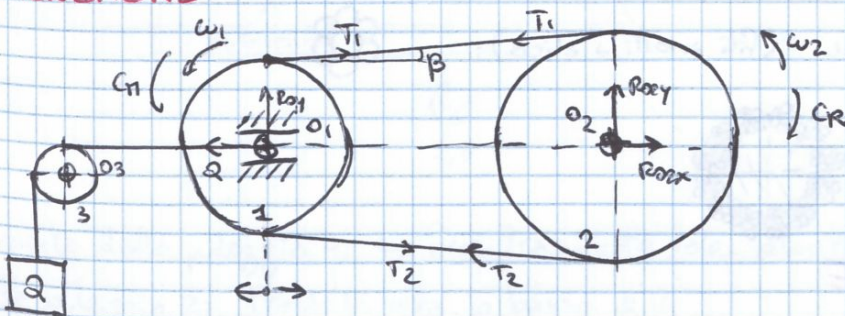
- $T_1 = T_1'$ se:
- $\cancel{}$ coppie esterne applicate sul galoppino;
 - $\cancel{}$ inerzie sul galoppino;
 - $\cancel{}$ attrito al perno in O_3 .

Se $T_1 = T_1'$ il galoppino ricade nella 1° regola degli equilibri e il sistema è simmetrico.



L'attrito al perno sposta P_{03} e rende il sistema dsimmetrico.

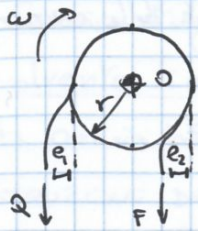
2 TENDITORE



Utile per sistemi che devono sopportare carichi variabili

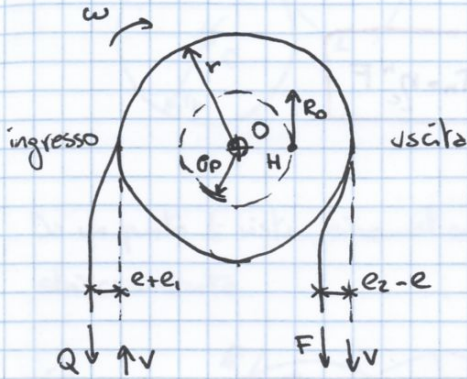
- La reazione orizzontale in O_1 e Q se:
- $\cancel{}$ C_{est}
 - $\cancel{}$ inerzie
 - $\cancel{}$ attrito al perno su 3

RIGIDEZZA ANELASTICA: e_1, e_2 [mm]



Dipende dal verso di rotazione!
Il sistema non è più simmetrico!

CASO GENERALE:



C'è rigidità della fine (sia elastica che anelastica) e attrito al perno.

$e_2 > e_1$

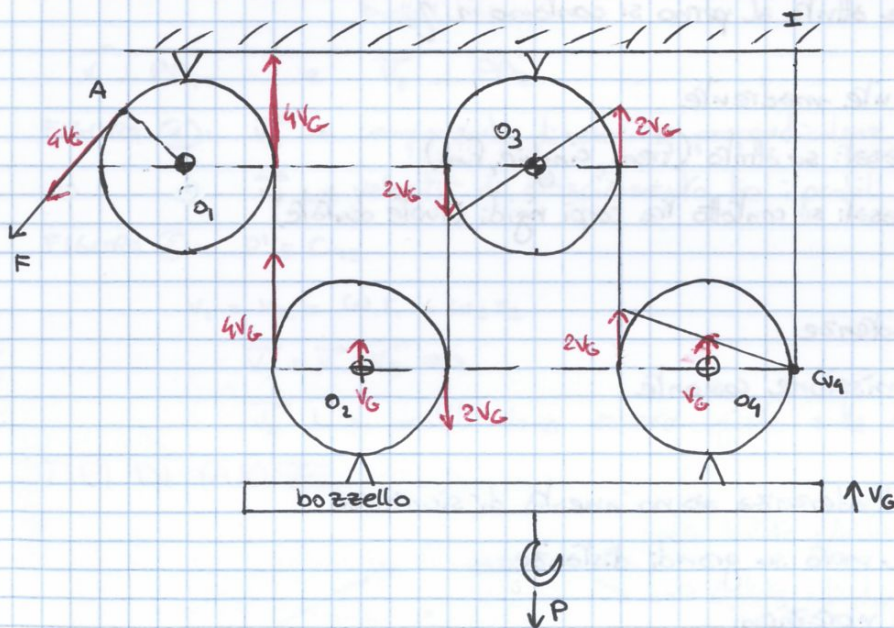
$\sum M_O = -Q[e_1 + \rho(r)] + F[r - (e_2 - e_1) + \rho(r)] = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow F = Q \frac{[e_1 + e_1 + \rho(r) + r]}{[r - (e_2 - e_1) + \rho(r)]}$

$\eta = \frac{P}{P_e} = \frac{Q}{F} = \frac{[r - e_2 + e_1 - \rho(r)]}{[e_1 + e_1 + r + \rho(r)]}$

PARANCO DI SOLLEVAMENTO

ANALISI CINEMATICA:



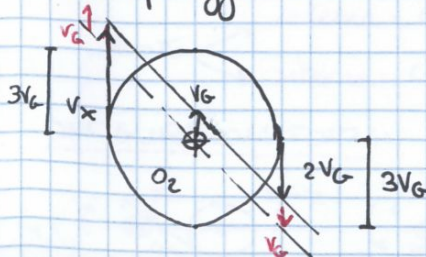
O_1 e O_3 sono cerniere fisse, quindi: $O_1 \equiv C_{v1}$ e $O_3 \equiv C_{v3}$
 O_2 e O_4 sono fissate al bozzello, quindi si muovono con v_G .

La puleggia 4 è connessa a un tratto di fine fissa: ipotizzando l'aderenza, si ha che il punto di contatto tra fine e puleggia è C_{v4} .

C'è distribuzione triangolare di velocità: trovo la velocità

in uscita dalla puleggia 4. La fine trasmette tale velocità alla puleggia 3. E così via.

Nella puleggia 2: Traslo la retta in basso di v_G .



Otengo:

$v_x = 3v_G + v_G = 4v_G$

Quindi: $v_A = 4v_G$.

In generale:

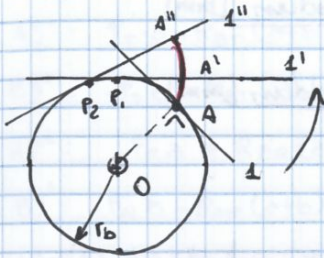
$v_A = n v_G$ $n \rightarrow$ rami di fine collegati al bozzello

PROFILO DEI DENTI

Per favorire l'ingranamento il profilo dei denti è costruito ad evolvente di cerchio.

L'evolvente di cerchio è una curva i cui centri di curvatura stanno tutti su una circonferenza detta cerchio base (è la curva evoluta).

COSTRUZIONE DELL'EVOLVENTE DI CERCHIO:



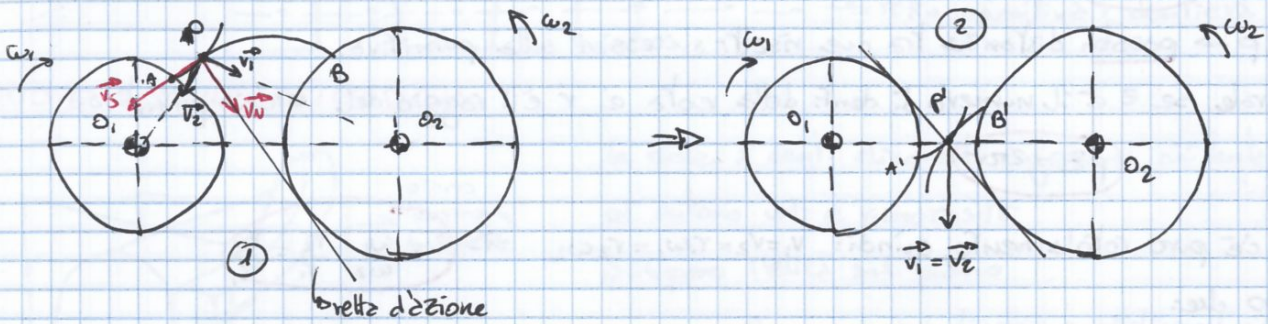
Si abbia la retta t tangente alla circonferenza in A : se si fa ruotare t sul cerchio senza strisciare, il percorso effettuato da A è un profilo ad evolvente di cerchio.

PROPRIETÀ:

$$\widehat{P_1A} = \overline{P_1A'}$$

$$\widehat{P_2A} = \overline{P_2A''}$$

Da un punto di vista cinematico: profili a evolvente di cerchio sono profili coniugati e presentano strisciamento.



$$\vec{v}_1 \perp \overline{PO_1} \quad \text{e} \quad \vec{v}_2 \perp \overline{PO_2}$$

FIGURA ①: \vec{v}_N → componente di velocità perpendicolare ai profili dei denti
 \vec{v}_S → velocità di strisciamento tra i profili

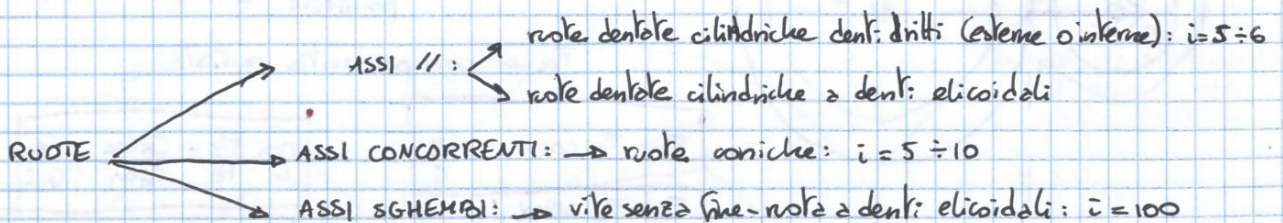
FIGURA ②: $P' \equiv C_{12}$

$$v_1 = v_2 = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$$

$$\vec{v}_S = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = 0$$

$\vec{v}_N \perp$ ai profili deve essere uguale sulle due ruote

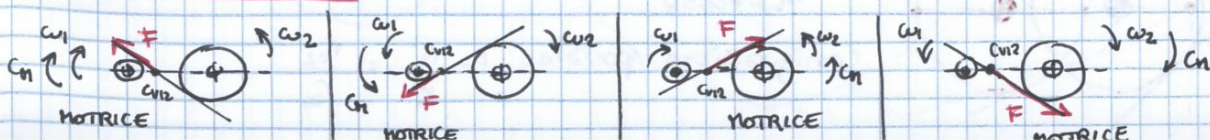
TIPICI DI RUOTE



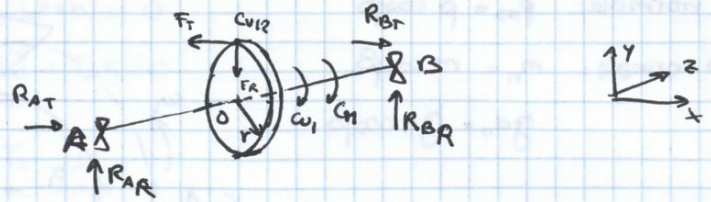
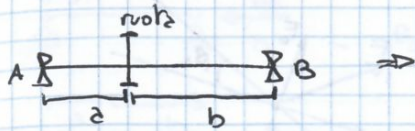
RUOTE

- esterne: C_{12} interno a O_1, O_2 interasse → ω_1, ω_2 discordi
- interne: C_{12} esterno a O_1, O_2 interasse → ω_1, ω_2 concordi

CONFIGURAZIONI FORZA:



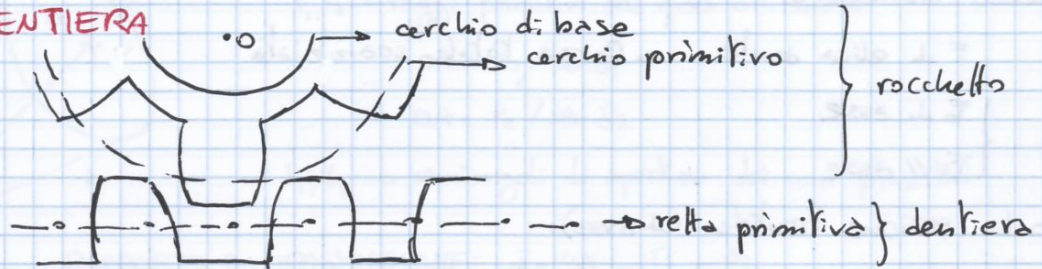
AZIONI SUI SUPPORTI:



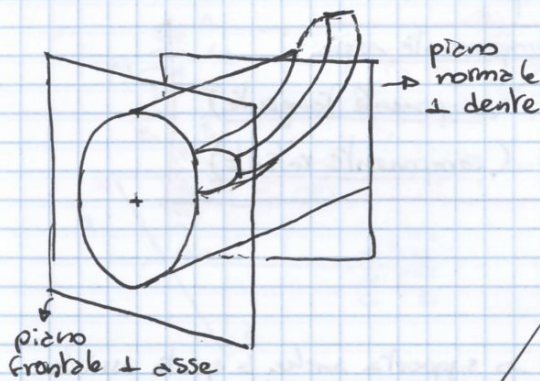
Ruota cilindrica a denti dritti (dente // asse):

$$\begin{cases} \text{A}^{\uparrow}: F_T \cdot a - R_{Bx}(a+b) = 0 \\ \text{B}^{\uparrow}: -F_T b + R_{Ax}(a+b) = 0 \\ \text{A}^{\rightarrow}: -F_T a + R_{Bx}(a+b) = 0 \\ \text{B}^{\rightarrow}: F_T b - R_{Ax}(a+b) = 0 \end{cases}$$

ROCCHETTO - DENTIERA

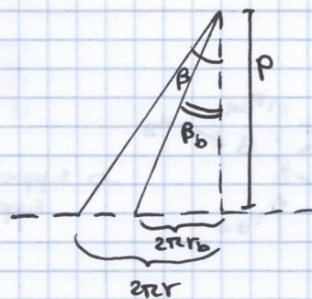


RUOTE A DENTI ELICOIDALI



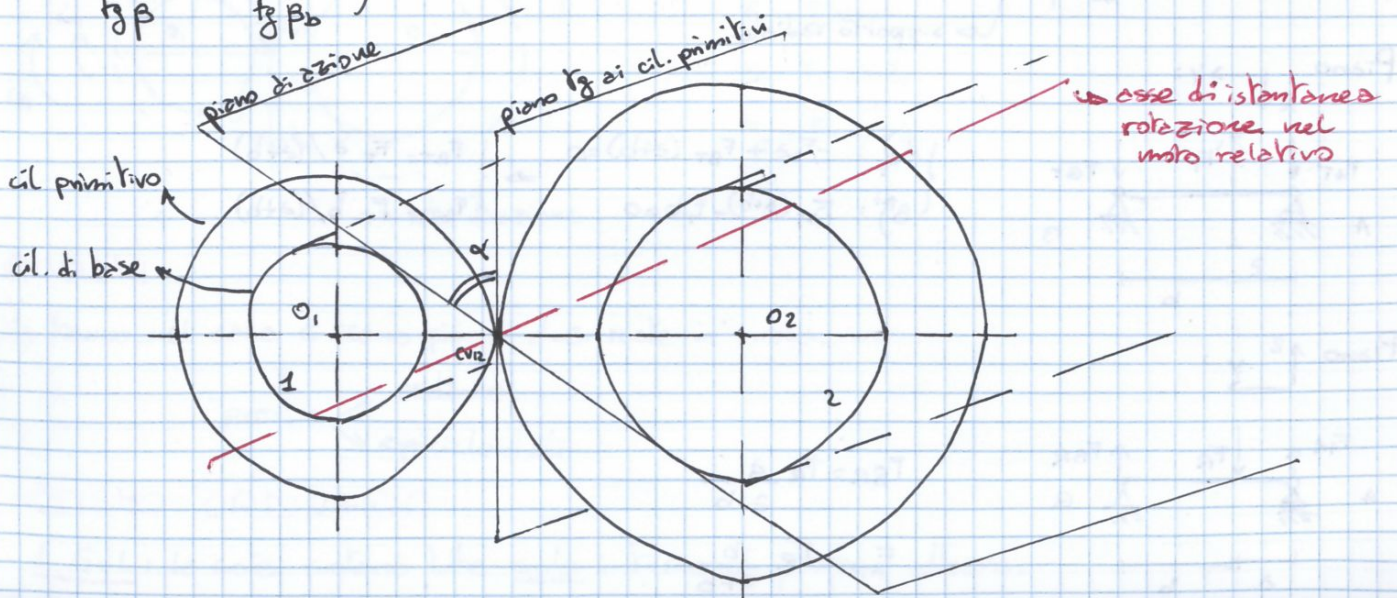
Le ruote a denti elicoidali ingranano più lentamente ed evitano urti e rumorosità.

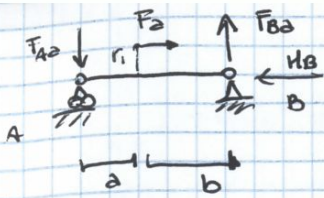
Sviluppo l'elica sul piano



- β → angolo di inclinazione dell'elica sul cil. primitivo
- r → raggio primitivo
- β_b → angolo di inclinazione dell'elica sul cil. di base
- r_b → raggio di base
- α → angolo di pressione

$$\left. \begin{aligned} r_b &= r \cos \alpha \\ p &= \frac{2\pi r}{\tan \beta} = \frac{2\pi r_b}{\tan \beta_b} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{2\pi r \cos \alpha}{\tan \beta_b} = \frac{2\pi r}{\tan \beta} \Rightarrow \tan \beta_b = \tan \beta \cos \alpha$$





$$\sum M_A: F_b r_1 - F_{b2} (a+b) = 0$$

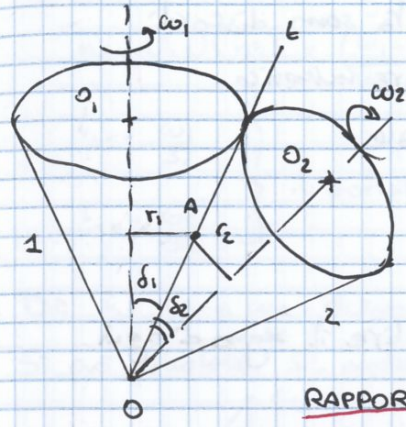
$$\sum M_B: -F_{a2} (a+b) + F_a r_1 = 0$$

$$F_{b2} = F_b \frac{r_1}{a+b}$$

$$F_{a2} = F_a \frac{r_1}{a+b}$$

$$F_a = H_b$$

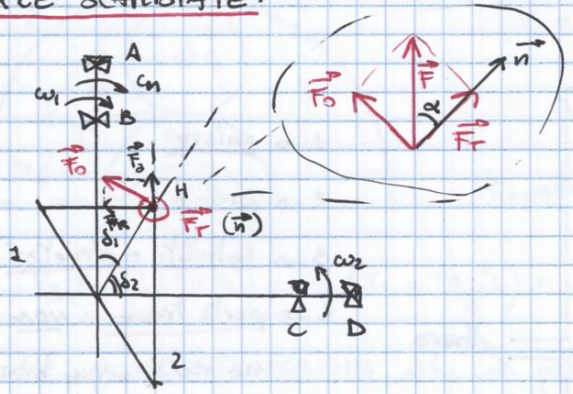
RUOTE CONICHE



1,2 → coni primitivi
 t → asse di istantanea rotazione nel moto relativo: $\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$
 r_1, r_2 → raggi primitivi alle quote del dente
 $OA = r_1 / \sin \delta_1$
 $OA = r_2 / \sin \delta_2$
 δ_1, δ_2 → semianghi di apertura dei coni primitivi

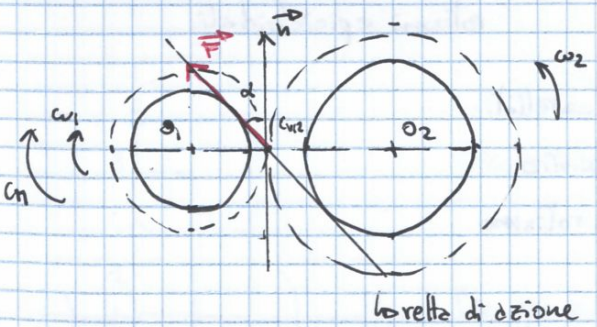
RAPPORTO DI TRASMISSIONE: $i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1}$

FORZE SCAMBIATE:



H → punto di contatto
 n → normale al piano degli assi
 F → forza totale scambiata e piano d'azione
 alpha → angolo di pressione
 Ft → componente tangenziale (⊥ assi)
 Fo → componente e piano assi
 Fa → componente assiale
 Fr → componente radiale

Piano frontale:



$$F_t = F \cos \alpha = \frac{C_n}{r_1}$$

$$F_o = F \sin \alpha$$

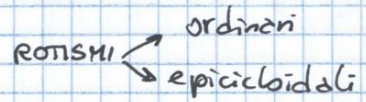
$$F_a = F_o \sin \delta_1$$

$$F_r = F_o \cos \delta_1$$

linea di azione

ROTISMI

Si hanno nel caso e sono più di due ruote in presa.



ROTISMO ORDINARIO

1 GdL: le ruote rotano tutte sob intorno al proprio albero.

ω_1	} velocità assolute	$\omega_1^* = \omega_1 - \Omega$	} velocità relative al portafreno
ω_2		$\omega_2^* = \omega_2 - \Omega$	
ω_3		$\omega_3^* = \omega_3 - \Omega$	
$-\Omega$		$\Omega^* = \Omega - \Omega = 0$	

Quindi:

$i_{1,2} = \frac{\omega_1 - \Omega}{\omega_2 - \Omega} \rightarrow$ **FORMULA DI WILLIS**

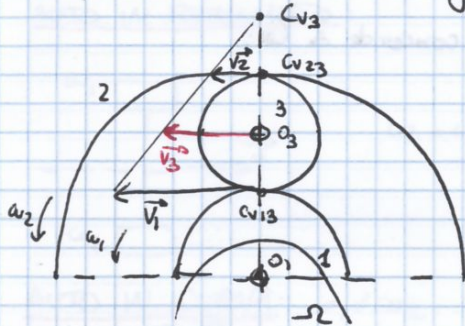
Inoltre:

$$i_{1,2} = (i_{1,3})(i_{3,2}) = \left(\frac{\omega_1 - \Omega}{\omega_3 - \Omega}\right) \left(\frac{\omega_3 - \Omega}{\omega_2 - \Omega}\right) = \left(-\frac{r_3}{r_1}\right) \left(\frac{r_2}{r_3}\right) = -\frac{r_2}{r_1} = \left(-\frac{z_3}{z_1}\right) \left(\frac{z_2}{z_3}\right) = -\frac{z_2}{z_1}$$

$i_{1,4} = \frac{\omega_1}{\Omega}$
 $i_{2,4} = \frac{\omega_2}{\Omega}$ } il portafreno non ha denti, quindi $i_{1,4}$ e $i_{2,4}$ sono calcolabili solo come rapporto di velocità.

Da $i_{1,2}$, ω_1 e ω_2 ricavo Ω e da esso ω_3 .

Si può calcolare Ω anche grazie a un procedimento cinematico su 3:



$$v_1 = \omega_1 r_1 ; \quad v_2 = \omega_2 r_2$$

$$v_3 = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2}{2}$$

$$r_2 = 2r_3 + r_1 \Rightarrow r_3 = \frac{r_2 - r_1}{2}$$

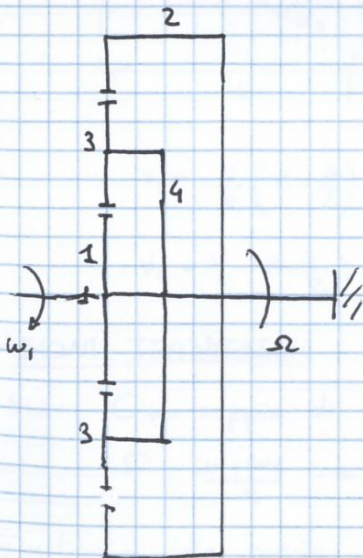
Rispetto a O_1 ho:

$$v_3 = \Omega (r_1 + r_3) = \Omega \left(r_1 + \frac{r_2 - r_1}{2}\right) = \Omega \left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right) = \frac{\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2}{2}$$

Da cui possiamo ricavare Ω . Si procede analogamente anche se \vec{v}_1 e \vec{v}_2 hanno versi opposti.

RIDUTTORE EPICICLOIDALE

Si ha quando una delle velocità ω_1 o ω_2 è nulla. Per esempio: $\omega_2 = 0$.



$$i_{1,0} = \frac{\omega_1}{\Omega}$$

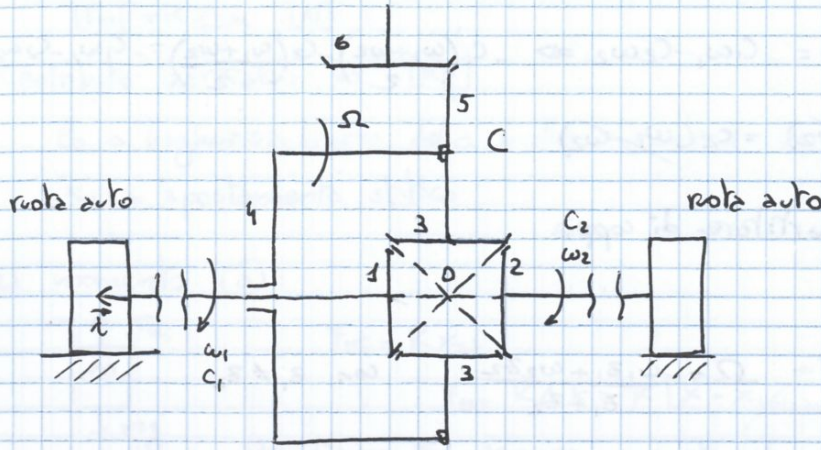
Faccio riferimento al rotismo epicicloidale corrispondente:

$$i_{1,2} = \frac{\omega_1 - \Omega}{\omega_2 - \Omega} = -\frac{z_2}{z_1}$$

Da qui ricaviamo $\frac{\omega_1}{\Omega}$ imponendo $\omega_2 = 0$.

N.B.: le formule non sono assolute, ma dipendono da caso a caso.

DIFFERENZIALE AUTOMOBILISTICO



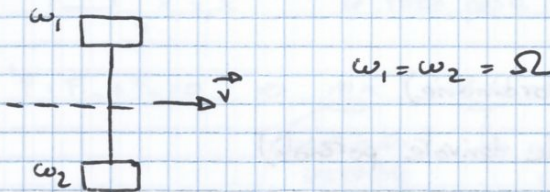
- 1,2 → solari
- 3 → satelliti
- 4 → porta freno
- 5,6 → ruote coniche (collegamento all'albero che genera il moto)

RAPPORTO DI TRASMISSIONE:

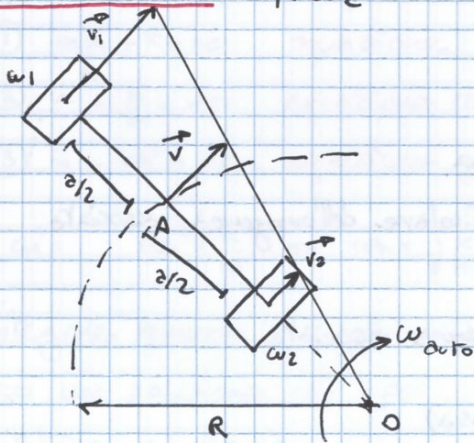
$$i_{1,2} = \frac{\omega_1 - \Omega}{\omega_2 - \Omega} = -\frac{z_2}{z_1} = -1 \quad \text{perché } r_1 = r_2 \Rightarrow z_1 = z_2$$

$$\Omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

AUTO IN RETTILINEO:



AUTO IN CURVA: $\omega_1 \neq \omega_2$



↔ carreggiata della macchina

$$v_1 = \omega_{\text{auto}} \left[R + \frac{a}{2} \right]$$

$$v_2 = \omega_{\text{auto}} \left[R - \frac{a}{2} \right]$$

$$v = \omega_{\text{auto}} [R]$$

Quindi, se $r \rightarrow$ raggio rota:

$$v_1 = \frac{v}{R} \left(R + \frac{a}{2} \right) \Rightarrow \omega_1 = \frac{v_1}{r}$$

$$v_2 = \frac{v}{R} \left(R - \frac{a}{2} \right) \Rightarrow \omega_2 = \frac{v_2}{r}$$

AZIONI TRASMESSE:

Sia: $C \rightarrow$ coppie di reazione sul telaio (porta freno)

$$\Omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \rightarrow \text{velocità del portafreno}$$

Equilibrio delle coppie: $C_1 + C_2 + C = 0$

Equilibrio delle potenze: $C_1 \omega_1 + C_2 \omega_2 + C \Omega = 0$

- Contributo elastico:

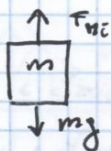
$$|F_m| = K \Delta x \quad [N]$$

- Contributo inerziale: m [kg]

$l_0 \rightarrow$ lunghezza libera della molla (prima di montare m)

$x_{st} \rightarrow$ spostamento statico

- * Nel momento (a):



$$F_{ni} = K x_{st}$$

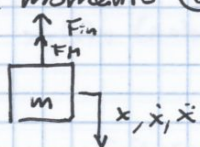
$$F_m = K \Delta x = K [x - x_{\text{libero}}]$$

Prendiamo F_m sempre opposta al moto!

Equazione di equilibrio:

$$\uparrow: K \cdot x_{st} - mg = 0 \Rightarrow x_{st} = \frac{mg}{K} \rightarrow \text{deformazione iniziale della molla dovuta al peso}$$

- * Nel momento (b):



Consideriamo solo le forze non in equilibrio, quindi non mettiamo più la forza peso. Iniziano le piccole oscillazioni.

$$\uparrow: F_{in} + F_m = 0 \Rightarrow m \ddot{x} + Kx = 0$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{contributo inerziale}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{contributo elastico}}$

A partire dall'equilibrio possiamo scrivere 3 equazioni

- ① $m \ddot{x} + Kx = 0$ equazione standard
- ② $\ddot{x} + \frac{K}{m} x = 0$ equazione canonica
- ③ $\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$ equazione generalizzata

Da cui: $\omega_n^2 = \frac{K}{m} \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} \rightarrow$ pulsazione naturale del sistema non smorzato

L'integrale generale $\vec{e} = x_g(t) = x(t)$

Cerco una soluzione del tipo: e^{2t}

Sostituisco e ottengo:

$$\lambda^2 + \omega_n^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \omega_n$$

Quindi:

$$x_g(t) = a e^{-i \omega_n t} + b e^{i \omega_n t}$$

$a, b \rightarrow$ coeff. costanti determinati tramite le condizioni iniziali

Per Eulero: $e^{\pm i \omega_n t} = \cos(\omega_n t) \pm i \sin(\omega_n t)$

Quindi:

$$x_g(t) = a [\cos(\omega_n t) - i \sin(\omega_n t)] + b [\cos(\omega_n t) + i \sin(\omega_n t)] = (a+b) \cos(\omega_n t) + i(b-a) \sin(\omega_n t) =$$

$$= A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t) = \underbrace{X_{og} \sin(\omega_n t + \varphi_0)}_{\text{NOTO ARMONICO SEMPLICE}} \rightarrow$$

X_{og} = ampiezza di oscillazione libera del sistema } \rightarrow dalle condizioni iniziali

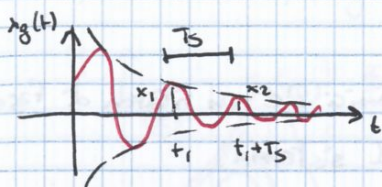
φ_0 = sfasamento iniziale

$$= e^{-\zeta \omega_n t} [A \cos(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t) + B \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t)] =$$

$$\Rightarrow x_{og} e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_s t + \varphi_0) = x_g$$

Con: $\omega_s = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$ → pulsazione naturale del sistema smorzato

x_{og} → ampiezza di oscillazione smorzata } → dalle condizioni iniziali
 φ_0 → sfasamento iniziale

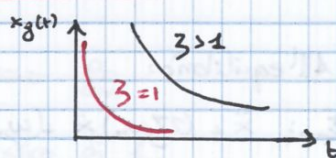


$$T_s = \frac{2\pi}{\omega_s} \rightarrow \text{pseudo periodo}$$

$\zeta = 1 \Rightarrow$ SISTEMA A SMORZAMENTO CRITICO $\Rightarrow \lambda_{1,2}$ reali e coincidenti:

$$\lambda_{1,2} = -\omega_n$$

$$x_g(t) = (a + bt)e^{-\omega_n t}$$



$\beta_{critico}$ è il coefficiente di smorzamento che fa tendere a zero il più velocemente possibile lo spostamento x_g senza oscillare.

Decadimento logaritmico: logaritmo naturale del rapporto di due ampiezze di due massimi successivi:

$$\delta = \log \frac{x_1(t_1)}{x_2(t_1 + T_s)}$$

Calcolo di ζ tramite il decadimento logaritmico:

$$x_1(t_1) = x_{og} e^{-\zeta \omega_n t_1} \sin(\omega_s t_1 + \varphi_0)$$

$$x_2(t_1 + T_s) = x_{og} e^{-\zeta \omega_n (t_1 + T_s)} \sin[\omega_s (t_1 + T_s) + \varphi_0]$$

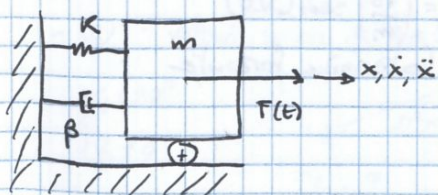
Quindi:

$$\delta = \log \left[\frac{x_{og} e^{-\zeta \omega_n t_1} \sin(\omega_s t_1 + \varphi_0)}{x_{og} e^{-\zeta \omega_n (t_1 + T_s)} \sin(\omega_s t_1 + \frac{\omega_s T_s}{2\pi} + \varphi_0)} \right] = \log [e^{\zeta \omega_n T_s}] = \zeta \omega_n T_s = \zeta \omega_n \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2\pi \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Nota e ricaviamo ζ :

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}$$

VIBRAZIONI FORZATE



$F(t) \rightarrow$ forzante; di solito è armonica:

$$F(t) = F_0 \sin(\Omega t)$$

$F_0 \rightarrow$ ampiezza della forzante [N]

$\Omega \rightarrow$ pulsazione della forzante [rad/s]

- Si possono avere due tipi di forzante:
- F_0 costante
 - $F_0(\Omega)$ funzione di Ω

In AHO:

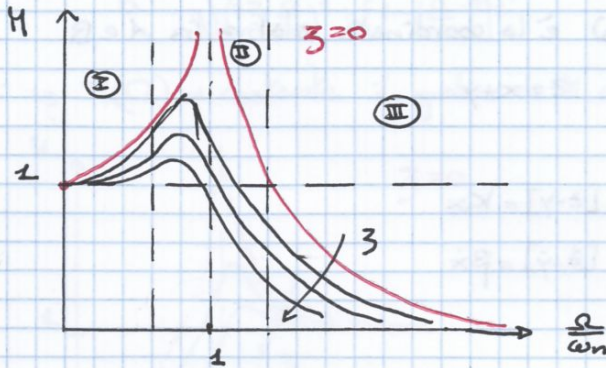
$$\frac{F_0}{m} = \sqrt{x_0^2(\omega_n^2 - \Omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\Omega x_0)^2} \Rightarrow x_0 = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{\omega_n^2} = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{K}$$

$$\frac{F_0}{m} = \sqrt{\left(2\zeta \frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2 + \left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2} \Rightarrow \dots$$

Si definisce il fattore di amplificazione:

$$H = \frac{x_0}{F_0/K} = \frac{1}{\sqrt{\dots}}$$

Se F_0 è costante, i grafici di H e φ sono:



Ⓘ: $\frac{\Omega}{\omega_n} \rightarrow 0 \Rightarrow H=1$

Ⓜ: $\frac{\Omega}{\omega_n} \rightarrow 1 \Rightarrow H = \frac{1}{2\zeta}$

Ⓝ: $\frac{\Omega}{\omega_n} \rightarrow \infty \Rightarrow H \approx \frac{1}{\left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}$

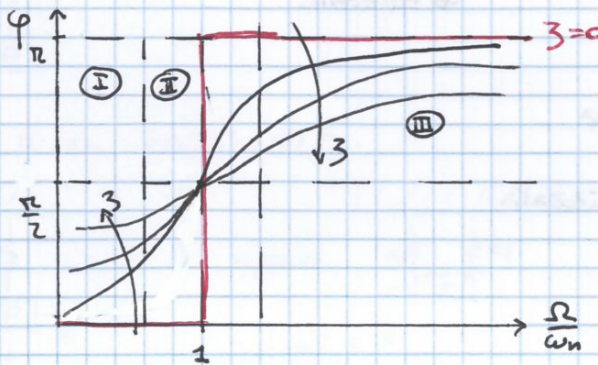
Se $\zeta \neq 0$ si ha un massimo a sinistra di 1.

In Ⓘ, H dipende maggiormente dalla rigidezza.

In Ⓜ, H dipende maggiormente dallo smorzamento.

In Ⓝ, H dipende maggiormente dall'inerzia.

$\frac{\Omega}{\omega_n} = 1 \Rightarrow$ **RISONANZA**



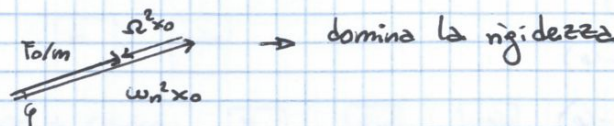
Ⓘ: $\frac{\Omega}{\omega_n} \rightarrow 0 \Rightarrow \tan \varphi \rightarrow 0 \Rightarrow \varphi = 0$

Ⓜ: $\frac{\Omega}{\omega_n} \rightarrow 1 \Rightarrow \tan \varphi \rightarrow \infty \Rightarrow \varphi = \pi/2$

Ⓝ: $\frac{\Omega}{\omega_n} \rightarrow \infty \Rightarrow \tan \varphi \rightarrow 0^- \Rightarrow \varphi = 0^-$

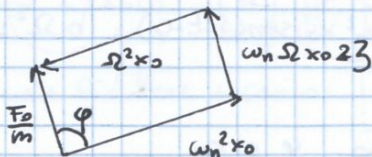
In Ⓘ i vettori sono in fase; inoltre:

$$\begin{cases} \varphi = 0 \\ \zeta = 0 \end{cases}$$



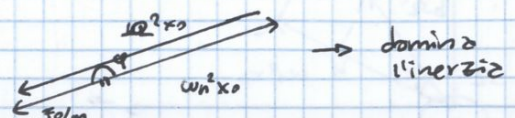
In Ⓜ i vettori sono in quadratura; inoltre:

$$\begin{cases} \varphi = 90^\circ \\ \zeta \neq 0 \end{cases}$$



In Ⓝ i vettori sono in opposizione di fase; inoltre:

$$\varphi = 180^\circ, \zeta = 0$$



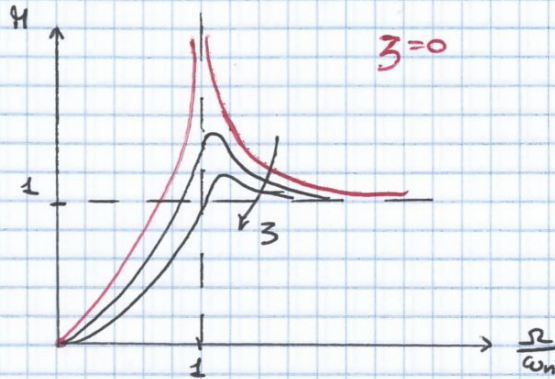
• $t_{\text{sp}} = \frac{23 \omega_n \Omega x_0}{\omega_n^2 x_0 - \Omega^2 x_0} = \frac{23 \frac{\Omega}{\omega_n}}{1 - (\frac{\Omega}{\omega_n})^2}$ → stessa struttura che con F_0 costante. Anche il suo grafico non varia

• $b \Omega^2 = \sqrt{(23 \omega_n x_0 \Omega)^2 + x_0^2 (\omega_n^2 - \Omega^2)^2}$ ⇒ $x_0 = \frac{b (\frac{\Omega}{\omega_n})^2}{\sqrt{(23 \frac{\Omega}{\omega_n})^2 + [1 - (\frac{\Omega}{\omega_n})^2]^2}}$

Il fattore di amplificazione è:

$$M = \frac{x_0}{b} = \frac{(\frac{\Omega}{\omega_n})^2}{\sqrt{(23 \frac{\Omega}{\omega_n})^2 + [1 - (\frac{\Omega}{\omega_n})^2]^2}}$$

Quindi se $F_0(\Omega) \neq$ costante il grafico di M è:

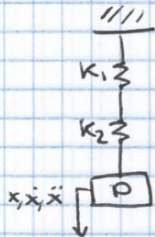


$\frac{\Omega}{\omega_n} \rightarrow 0 \Rightarrow M=0$

$\frac{\Omega}{\omega_n} \gg 1 \Rightarrow \frac{x_0}{b} \cong 1 \Rightarrow x_0 \cong b \rightarrow$ sismografo

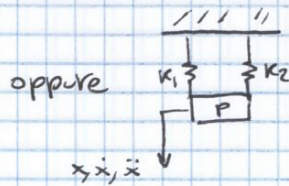
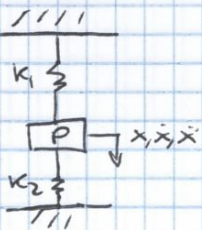
$\frac{\Omega}{\omega_n} \ll 1 \Rightarrow \frac{x_0}{\Omega^2} \cong 1 \Rightarrow x_0 \cong \underbrace{\Omega^2 b}_g \rightarrow$ accelerometro

MOLLE IN SERIE



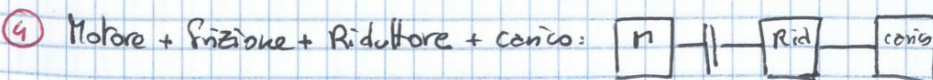
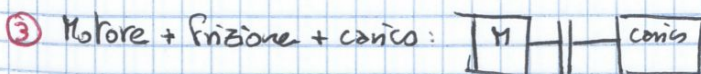
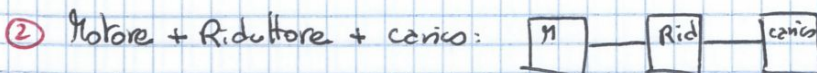
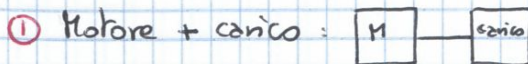
$$\frac{1}{K_{eq}} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} + \dots + \frac{1}{K_N}$$

MOLLE IN PARALLELO



$$K_{eq} = K_1 + K_2 + \dots + K_N$$

TRANSITORI



frizione = innesto di sicurezza

VEDI APPUNTI