



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 966

DATA: 08/05/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Tortorici

MATERIA: Fondamenti di Meccanica Strutturale

Prof. Somà

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

SISTEMA IN EQUILIBRIO:

- **equilibrio dinamico:** modifica il suo stato di moto istante per istante;
- **equilibrio statico:** è in quiete o si muove a velocità costante.

PUNTO MATERIALE: è la rappresentazione di un oggetto quando se ne trascurano forma ed estensione. I gradi di libertà del punto materiale sono parametri indipendenti che servono a determinarne la posizione. Un punto libero nello spazio possiede 3 GdL.

CORPO RIGIDO: oggetto costituito da infiniti punti materiali che non cambiano le loro posizioni relative. Un corpo rigido nello spazio ha 6 GdL (3 di traslazione e 3 di rotazione).

PROGETTO LINEARIZZATO: modello semplificato con le seguenti ipotesi:

- ① vincoli ideali
- ② forze applicate in un punto o idealizzate
- ③ Hp dei piccoli spostamenti e delle piccole rotazioni: la deformabilità del sistema è trascurabile rispetto alle sue dimensioni complessive.

VINCOLI

Un corpo si dice vincolato quando le sue possibilità di movimento sono parzialmente o completamente impediti. I vincoli sviluppano azioni contrastanti i movimenti dette reazioni vincolari.

Si distinguono:

- sistema isostatico:** i vincoli sono in numero esattamente sufficiente per impedire ogni movimento del sistema;
- sistema iperstatico:** i vincoli sono sovrabbondanti;
- sistema labile:** i vincoli sono in numero inferiore ai GdL del corpo.

Per impedire ogni movimento del sistema i vincoli non devono solo essere sufficienti, ma anche efficaci.

I vincoli ideali considerati nel modello sono:

- OLONOMI (impongono una restrizione alla posizione e non all'atto del moto);
- PERFETTI (eliminano completamente lo spostamento al quale si oppongono);
- BILATERALI (impediscono il movimento in entrambi i versi di una direzione);
- PRIVI DI ATTRITO;
- FISSI (indipendenti dal tempo);
- PUNTI FORMI (privi di estensione superficiale).

I vincoli si possono suddividere in:

- esterni → rappresenta l'interazione tra struttura e ambiente circostante;
- interni → collegano due parti del sistema.

Nei sistemi di aste collegate da cerniere interne.
 Nel piano una trave reticolare presenta $(n+3)$ incognite ($n \rightarrow$ numero aste)
 Le equazioni risolventi sono $(2c_i)$ ($c_i \rightarrow$ numero nodi).

Condizione necessaria ma non sufficiente affinché una trave reticolare sia isostatica è che: $n+3=2c_i$

Una trave reticolare è sicuramente isostatica se è costituita da triangoli di aste con lati adiacenti, senza intrecci o giunzioni altra verso un solo vertice.

Sezione di Ritter: una sezione della trave reticolare si dice essere di Ritter in relazione a un'asta se essa taglia, oltre all'asta in esame, altre aste tutte confluenti in un punto proprio o improprio (cioè che si intersecano in un nodo o che sono parallele).



\rightarrow esempio di sezione di Ritter

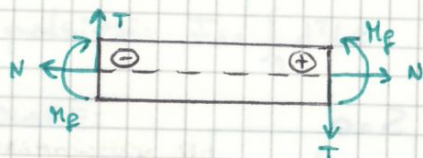
CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE

Le caratteristiche di sollecitazione sono gli sforzi interni alla trave. Su una struttura tridimensionale ne agiscono di 4 tipi:

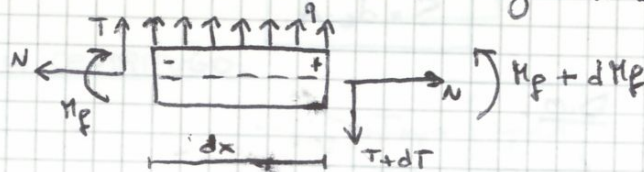
- SFORZO NORMALE:** (trazione e compressione) tende ad allungare o accorciare il corpo;
- SFORZO DI TAGLIO:** tende a far scivolare le sezioni l'una rispetto all'altra;
- MOMENTO TORCENTE:** tende a far ruotare un tronco rispetto a quello adiacente;
- MOMENTO FLETTENTE:** tende a far incurvare il corpo.

Nel piano agiscono solo sforzo normale, sforzo di taglio e momento flettente.

Convenzione di segno:



Tra le caratteristiche di sollecitazione esistono i seguenti legami:



$$q = \frac{dT}{dx}$$

Dim:

Equazione di equilibrio alla traslazione verticale: $T+dT - T - q dx = 0 \Rightarrow$

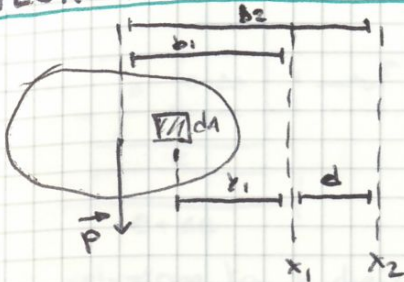
$$\Rightarrow dT - q dx = 0 \Rightarrow \frac{dT}{dx} = q$$

C.V.D.

$$x_G = 0 = \frac{\int x dA}{A} = \frac{S_y}{A}$$

$$y_G = 0 = \frac{\int y dA}{A} = \frac{S_x}{A}$$

TEOREMA DI TRASPOSIZIONE DEI MOMENTI STATICI:



$$S_2 = S_1 + A \cdot d$$

↳ momento di trasporto

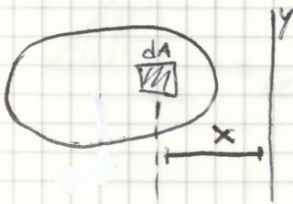
Dim: $S_1 = \int_A y_1 dA = A \cdot b_1$

$$S_2 = A \cdot b_2 = A(b_1 + d) = A b_1 + A \cdot d = S_1 + A d$$

c.v.d.

NB: Il momento statico di una figura composta è la somma dei momenti statici delle singole aree.

MOMENTO D'INERZIA



$$I_y \triangleq \int_A x^2 dA$$

Analogamente si definisce: $I_x = \int_A y^2 dA$

Rispetto a una retta a qualsiasi: $I_d = \int_A d^2 dA$

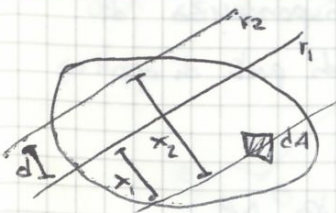
MOMENTO D'INERZIA POLARE:

$$I_p = \int_A r^2 dA$$

MOMENTO D'INERZIA CENTRIFUGO:

$$I_{xy} = \int_A xy dA$$

TEOREMA DI TRASPOSIZIONE DEI MOMENTI D'INERZIA:



$$I_2 = I_1 + 2 S_1 d + A d^2$$

Dim: $I_1 = \int_A x_1^2 dA$

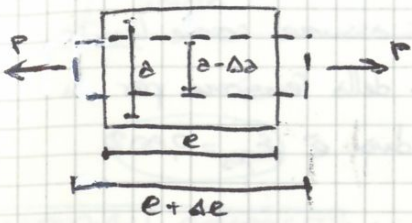
$$I_2 = \int_A x_2^2 dA = \int_A (x_1 + d)^2 dA = \int_A x_1^2 dA + \int_A d^2 dA + 2 \int_A d x_1 dA = I_1 + 2 \cdot d \cdot S_1 + A d^2$$

c.v.d.

Per la maggior parte dei materiali, per piccoli allungamenti c'è diretta proporzionalità tra tensione e deformazione (**LEGGE DI HOOKE**):

$$\sigma_{xx} = E \epsilon_{xx}$$

Dove: $E \rightarrow$ modulo di elasticità normale, determinato sperimentalmente; $udm: N/mm^2 = MPa$.



Sperimentalmente si osserva che contemporaneamente all'allungamento longitudinale si ha una contrazione trasversale:

$$\epsilon_{yy} = \frac{\Delta a}{a}$$

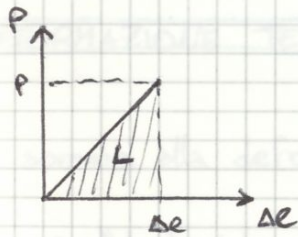
La relazione tra le due deformazioni è:

$$\epsilon_{yy} = \nu \epsilon_{xx}$$

Dove: $\nu \rightarrow$ modulo di Poisson, determinato sperimentalmente.

Per i materiali metallici si ha: $0,25 \leq \nu \leq 0,35$

LAVORO DI DEFORMAZIONE:



$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} P \Delta e$$

Si ha: $\Delta e = e \epsilon_{xx}$

$$\epsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{P}{A}$$

Quindi: $\Delta e = \frac{P e}{A E}$

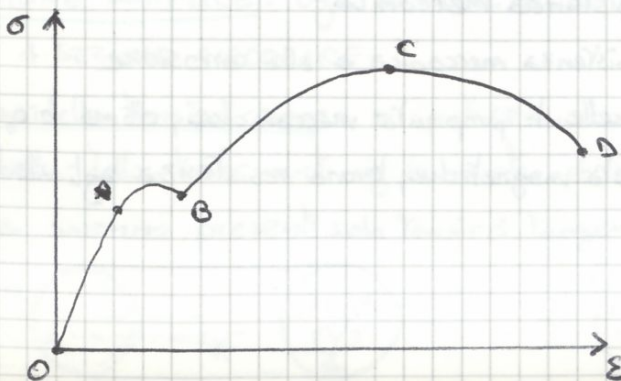
Da cui: $L = \frac{1}{2} \frac{P^2 e}{A E}$ con $\frac{A E}{e} \rightarrow$ rigidezza assiale della trave

Possiamo anche scrivere:

$$L = \frac{1}{2} P \cdot \Delta e \cdot \frac{1}{A} = \frac{1}{2} \frac{P}{A} \cdot \epsilon_{xx} \cdot \underbrace{e \cdot A}_{V} = \frac{1}{2} \sigma_{xx} \epsilon_{xx} \cdot V$$

PROVA DI TRAZIONE

Materiali duttile con snervamento evidente:



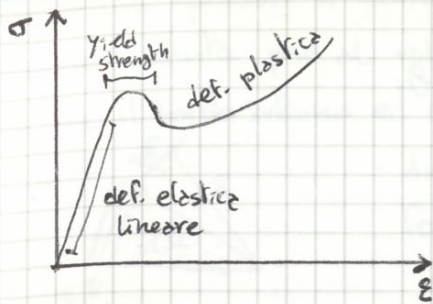
OA \rightarrow zona di elasticità: il materiale segue la legge di Hooke

AB \rightarrow zona di snervamento: molta variazione di lunghezza con poco aumento del carico

BC \rightarrow zona di incrudimento: il materiale si plasticizza

CD \rightarrow si forma la strizione e si perde controllo della prova.

MATERIALI PLASTICI:



1° TRATTO: comportamento elastico

2° TRATTO: comportamento elastico non lineare (finito lo sforzo le fibre tornano alla posizione iniziale in tempi lunghi).

3° TRATTO: deformazione plastica permanente. Il minimo della funzione è caratteristico dei materiali polimerici e dipende dalla loro struttura.

MATERIALI COMPOSITI: combinazione di 2 o più micro o macro costituenti che differiscono nella forma e nella composizione chimica, insolubili l'uno nell'altro.

VEDI LIBRO

MATERIALI BIOCOMPATIBILI: la biocompatibilità dei materiali è legata alla facilità o meno della loro corrosione in ambiente biologico. I principali metalli biocompatibili sono le leghe di titanio e gli acciai inossidabili.

DEFORMAZIONE TERMICA:

$$\epsilon_T = \alpha \Delta T$$

Si somma alla deformazione elastica:

$$\epsilon = \epsilon_{xx} + \epsilon_T = \frac{\sigma}{E} + \alpha \Delta T$$

COEFFICIENTE DI SICUREZZA:

Si definisce la tensione ammissibile σ_{amm} il valore che si ottiene dividendo la tensione limite del materiale (σ_L) per un numero $S > 1$ detto coefficiente di sicurezza.

Materiali duttili: $\sigma_L = \sigma_S \Rightarrow \sigma_{amm} = \frac{\sigma_S}{S}$

Materiali fragili: $\sigma_L = \sigma_R \Rightarrow \sigma_{amm} = \frac{\sigma_R}{S}$

TORSIONE:

TORSIONE SEMPLICE: ogni sezione del corpo è soggetta al solo momento torcente.

* TRAVI A SEZIONE CIRCOLARE:

Ipotesi delle tensioni piane: si ipotizza che sotto l'azione dei momenti esterni ogni sezione retta della trave ruoti rigidamente nel suo piano. In tali condizioni nelle sezioni rette saranno presenti solo tensioni tangenziali τ .



* TRAVI A SEZIONE ANULARE DI PICCOLO SPESSORE

Per piccoli spessori si ipotizza che la tensione tangenziale sia approssimabile ad un valore costante pari al valor medio della tensione in corrispondenza della linea mediana tra il bordo interno ed esterno della parete.



Analizzando il tratto della sezione in figura si ha che la forza agente su di esso è:

$$dF = \tau S de$$

Il momento di dF rispetto all'asse x della trave è:

$$dM_t = dF \cdot s = \tau S s de = \tau S 2 d\Omega$$

Con $d\Omega = \frac{s de}{2}$ area del triangolo di base de e altezza s .

Integrando lungo tutto il contorno si ottiene:

$$M_t = \oint dM_t = \int \tau S 2 d\Omega = 2 \tau S \Omega$$

Da cui:

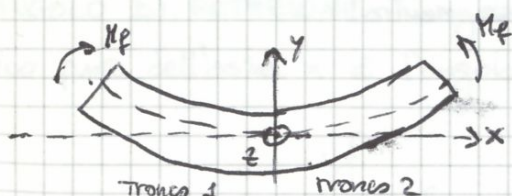
$$\tau = \frac{M_t}{2 S \Omega}$$

dove Ω è l'area racchiusa dalla linea mediana della tensione e s lo spessore della sezione nel punto in cui si calcola τ .

$$g_u = \frac{M_t}{4 G \Omega^2} \sum_{i=1}^n \frac{L_i}{s_i}$$

FLESSIONE:

FLESSIONE PURA: modo di carico della trave tale che nelle sezioni rette della trave la sollecitazione si riduca al solo momento flettente M_f . Generalmente la sollecitazione di flessione è accompagnata anche da sollecitazioni di taglio: si parla allora di **FLESSIONE SEMPLICE**.



$z =$ asse neutro (le fibre della sezione poste lungo z non si allungano né si accorciano)

Consideriamo la sezione S che divide il tronco 1 dal tronco 2. I due tronchi si scambiano le forze:

$$\Delta F_i = \sigma_i \Delta A_i$$

Per l'equilibrio, la somma di tali forze deve essere nulla (lo sforzo normale N è nullo infatti) e la somma dei loro momenti rispetto a z deve essere uguale al momento applicato M_f :

$$\sum_{i=1}^n \sigma_i \Delta A_i = 0$$

$$- \sum_{i=1}^n \sigma_i \Delta A_i \cdot y_i = M_f$$

TAGLIO:

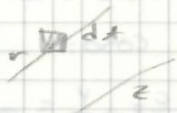
Una sezione S di una trave è soggetta al solo sforzo di taglio T quando la risultante di tutte le forze esterne che precedono S giace nel piano della sezione e passa per il suo baricentro. Il taglio risulta sempre accompagnato dalla flessione: si ha taglio puro solo nella sezione in cui la caratteristica del momento passa per lo zero.

$$\tau_m = \frac{T}{A}$$

TEORIA DI JOURAWSKI: si ipotizza che il taglio sia funzione solo di y ; si scrive l'equilibrio alla traslazione verticale e si ottiene:

$$\tau = \frac{TS}{bS_z}$$

↳ momento statico rispetto a z



Trave a sezione rettangolare:

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{T}{b \cdot h} = \frac{3}{2} \tau_m$$

Trave a sezione circolare:

$$\tau_{max} = \frac{4}{3} \frac{T}{\pi r^2} = \frac{4}{3} \tau_m$$

LAVORO DI DEFORMAZIONE:

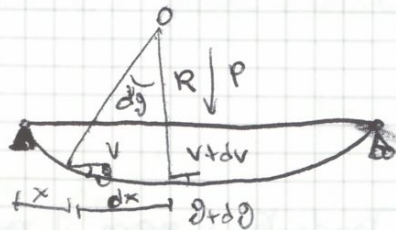
$$L = \chi \frac{T^2 l}{GA}$$

Con $\chi \rightarrow$ fattore di taglio, coefficiente dipendente dalla forma della sezione.

LINEA ELASTICA

FRECCIA: in un generico punto distante x dall'origine, la freccia è definita come lo spostamento verticale $v(x)$ nella direzione y subito dal punto quando passa dalla configurazione indeformata alla configurazione deformata.

ANGOLO DI ROTAZIONE: l'angolo di rotazione ϑ della sezione della trave nel generico punto dell'asse x è l'angolo fra l'asse x e la tangente alla curva $v(x)$.



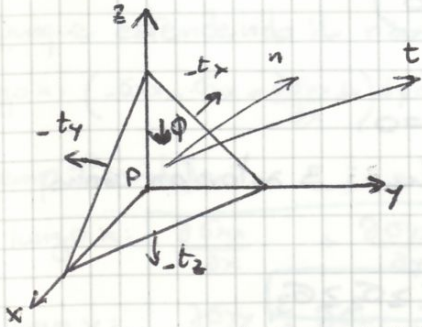
Possiamo scrivere: $R = \frac{ds}{d\vartheta}$ (ds è la distanza fra i due punti sull'asse deformato)

Quindi: $\frac{1}{R} = \frac{d\vartheta}{ds}$

$$\{t\} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\{\Delta F\}}{\Delta S}$$

Si è in grado di calcolare il vettore $\{t\}$ coniato a qualsiasi direzione $\{n\}$ se si conosce lo stato di tensione su 3 piani perpendicolari per P.

Consideriamo un tetraedo nel punto P:



La faccia obliqua ha area dS , le altre hanno rispettivamente dS_x, dS_y, dS_z .

$\{\phi\}$ indica le forze per unità di massa (per esempio peso e inerzia).

Equilibrio alla traslazione:

$$\{t\}dS - \{t_x\}dS_x - \{t_y\}dS_y - \{t_z\}dS_z - \{\phi\}dV = 0$$

dV è infinitesimo di ordine superiore rispetto a dS , quindi al tendere dell'infinitesimo a zero si annulla prima: possiamo trascurare quel termine.

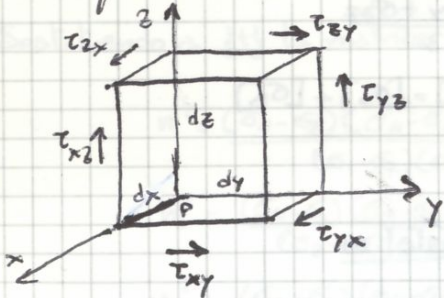
$$\{t\}dS - \{t_x\}dS \cdot n_x - \{t_y\}dS \cdot n_y - \{t_z\}dS \cdot n_z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{t\} = \{t_x\}n_x + \{t_y\}n_y + \{t_z\}n_z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{t\} = \begin{bmatrix} t_{xx} & t_{yx} & t_{zx} \\ t_{xy} & t_{yy} & t_{zy} \\ t_{xz} & t_{yz} & t_{zz} \end{bmatrix} \{n\}$$

↳ **TENSORE DELLE TENSIONI:** $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$

Dall'equilibrio alla rotazione si ottiene che la matrice è simmetrica:



$$x) : -(\tau_{zy} dx dy) dz + (\tau_{yz} dx dz) dy = 0 \Rightarrow \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

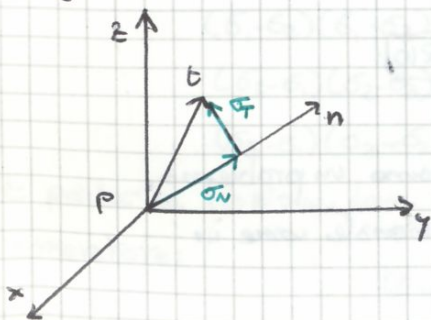
$$y) : (\tau_{xz} dy dz) dx - (\tau_{zx} dx dy) dz = 0 \Rightarrow \tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$z) : (\tau_{xy} dy dz) dx - (\tau_{yx} dx dz) dy = 0 \Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Possiamo esprimere il vettore tensione anche tramite le componenti: normale (σ_n) e tangenziale (σ_t):

$$\sigma_n = \{t\}^T \{n\} = \{n\}^T \{t\} = \{n\}^T [\sigma] \{n\}$$

$$\sigma_t^2 + \sigma_n^2 = \{t\}^T \{t\}$$



Equazione di equilibrio lungo x:

$$(-\sigma_{xx} dx + \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx) dy + (-\sigma_{yx} + \sigma_{yx} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} dy) dx + \phi_x dx dy = 0$$

Equazione di equilibrio lungo y:

$$(-\sigma_{yy} + \sigma_{yy} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dy) dx + (-\sigma_{xy} + \sigma_{xy} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} dx) dy + \phi_y dx dy = 0$$

Dunque estendendo il risultato trovato alla terza dimensione si ottengono:

lungo x: $(-\sigma_{xx} + \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx) dy dz + (-\sigma_{yx} + \sigma_{yx} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} dy) dx dz + (-\sigma_{zx} + \sigma_{zx} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} dz) dx dy + \phi_x dx dy dz$

(semplificando):

lungo x: $\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + \phi_x = 0$

lungo y: $\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + \phi_y = 0$

lungo z: $\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \phi_z = 0$

} eq. diff. indefinite di equilibrio

CERCHI DI MOHR:

Sono una rappresentazione bidimensionale (nel piano $\sigma_N - \sigma_T$) di uno stato di tensione tridimensionale in un punto.

Il sistema di equazioni che definisce il sistema è:

$$\sigma_N = \{t\}^T \{n\}$$

$$\sigma_T^2 + \sigma_N^2 = \{t\}^T \{t\}$$

$$1 = \{n\}^T \{n\}$$

Sostituendo a $\{t\}$ la matrice $[\sigma]$ e risolvendo per n_i^2 ($i=1,2,3$) si ottiene: ?!

$$n_1^2 = \frac{(\sigma_N - \sigma_2)(\sigma_N - \sigma_3) + \sigma_T^2}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)}$$

$$n_2^2 = \frac{(\sigma_N - \sigma_1)(\sigma_N - \sigma_3) + \sigma_T^2}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3)}$$

$$n_3^2 = \frac{(\sigma_N - \sigma_1)(\sigma_N - \sigma_2) + \sigma_T^2}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}$$

Poiché per convenzione $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, possiamo stabilire i segni dei denominatori:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3) \geq 0$$

$$(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3) < 0$$

$$(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2) > 0$$

E poiché la frazione deve essere positiva (le n sono al quadrato), ricaviamo il segno del numeratore:

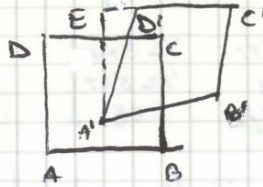
$$(\sigma_N - \sigma_2)(\sigma_N - \sigma_3) + \sigma_T^2 \geq 0$$

$$(\sigma_N - \sigma_1)(\sigma_N - \sigma_3) + \sigma_T^2 \leq 0$$

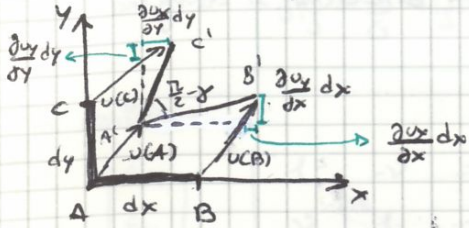
$$(\sigma_N - \sigma_1)(\sigma_N - \sigma_2) + \sigma_T^2 \geq 0$$

2) cambiamento di forma (distorsione), la misura della distorsione è:

$$\frac{ED'}{EA'} = \tan \gamma \approx \gamma$$



Consideriamo un problema bidimensionale:



La generica funzione spostamento lungo x nell'intorno del punto P è:

$$u(x, y, z) = u_x(P) + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

Dunque:

$$u(B) = u(A) + \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

$$u(C) = u(A) + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

La distanza tra A' e B' è:

$$dx'^2 = \left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} dy\right)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow dx'^2 = dx^2 + \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx^2}_{\text{trascurabili}} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} dx^2 + \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dy^2}_{\text{trascurabili}} \Rightarrow$$

↳ trascurabili perché infinitesimi di ordine superiore

$$\rightarrow dx'^2 = dx^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} dx^2 = dx^2 \left(1 + 2 \frac{\partial u}{\partial x}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dx' = dx \sqrt{1 + 2 \frac{\partial u}{\partial x}} \approx dx \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \text{ (per Taylor)}$$

Sostituisco dx' nella formula della deformazione:

$$\epsilon_x = \frac{dx' - dx}{dx} = \frac{dx + dx \frac{\partial u}{\partial x} - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Per ϵ_y si procede analogamente. Generalizzando al caso 3D:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial u}{\partial y} \\ \epsilon_z &= \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned}$$

Per gli angoli:

$$\tan \gamma_{xy} \approx \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

Espandendo al caso 3D:

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned}$$

Materiale omogeneo isotropo:

Per la legge di Hooke vale:

$$\epsilon_{ii} = \frac{1}{E} [\sigma_{ii} - \nu(\sigma_{jj} + \sigma_{kk})]$$

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{G} \tau_{ij} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{ij}$$

In matrice:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yx} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \Rightarrow \{\epsilon\} = [D] \{\sigma\}$$

All'inverso: $\{\sigma\} = [E] \{\epsilon\}$

$$[E] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix}$$

STATO DI DEFORMAZIONE PIANO:

$$\epsilon_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \Rightarrow \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

STATO DI TENSIONE PIANO:

$$\sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \Rightarrow \epsilon_{zz} = \frac{1}{E} [-\nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})]$$

PROBLEMA ELASTICO:

La soluzione del problema elastico ad richiede la conoscenza dello stato di tensione e deformazione in un sistema meccanico in tutti i punti.

È dovuto a Kirchhoff il teorema che dimostra l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema elastico, ma la soluzione generale analitica non è disponibile.

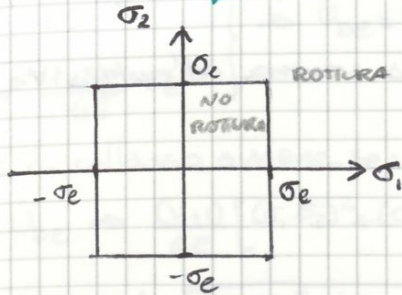
Le soluzioni del problema elastico si riferiscono a soluzioni in particolari condizioni geometriche e di vincolo: tra di esse la soluzione del solido di De Saint Venant (teoria delle travi).

IPOTESI DI RAUHKINE (massima tensione normale):

MATERIALI FRAGILI

Il cedimento di una struttura o di un componente sollecitato da uno stato di tensione triassiale avviene se la massima tensione principale uguaglia o supera la tensione limite in uno stato di tensione monoassiale

$$\sigma_{id} = \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_1 \quad (\geq \sigma_c \Rightarrow \text{rottura})$$



Questo criterio prevede rottura se $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, ma sperimentalmente si vede che non è così: quindi il criterio non va usato in stato di tensione idrostatico.

NON FATTO DAL PROF:

IPOTESI DI DE SAINT VENANT: si ha cedimento se $\epsilon_{id} = \max(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) \geq \epsilon_c$

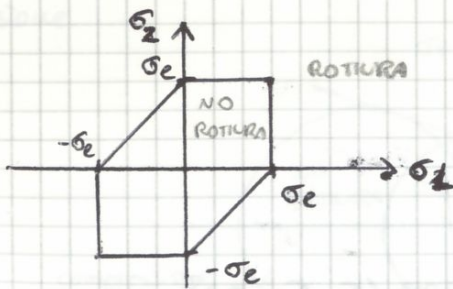
con $\epsilon_i = \frac{1}{E} [\sigma_i - \nu(\sigma_j + \sigma_k)]$ e $\epsilon_c = \frac{\sigma_c}{E}$

IPOTESI DI TRESCA (massima tensione tangenziale):

MATERIALI DUTILI

Il cedimento di una struttura o di un componente sollecitato da uno stato di tensione triassiale avviene se la massima tensione tangenziale uguaglia o supera la tensione tangenziale limite in uno stato di tensione monoassiale.

$$\sigma_{id} = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (\geq \sigma_e \Rightarrow \text{rottura})$$



Questa ipotesi deriva da osservazioni sperimentali. La formula si ottiene prendendo la tensione massima tra:

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \\ \tau_2 &= \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \\ \tau_3 &= \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \\ \tau_e &= \frac{\sigma_e}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tau_e = \max \left\{ \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}; \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2}; \frac{|\sigma_3 - \sigma_1|}{2} \right\}$$

NON FATTO DA PROF:

IPOTESI DI BELTRAMI: si ha cedimento se: $U_T \geq U_{Te}$

Con $U_T \rightarrow$ energia di deformazione.

$$\left\{ \begin{aligned} U_T &= \frac{1}{2} (\sigma_1 \epsilon_1 + \sigma_2 \epsilon_2 + \sigma_3 \epsilon_3) \\ \epsilon_i &= \frac{1}{E} [\sigma_i - \nu(\sigma_j + \sigma_k)] \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow U_T = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)]$$

$$= \frac{(1+\nu)}{6E} \{ 2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 + 2\sigma_3^2 - 2\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_2\sigma_3 - 2\sigma_3\sigma_1 \} =$$

$$= \frac{(1+\nu)}{6E} \{ (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2) + (\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - 2\sigma_3\sigma_1) + (\sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\sigma_2\sigma_3) \} =$$

$$= \frac{(1+\nu)}{6E} \{ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \} = U_D$$

Nel caso monodassiale di confronto:

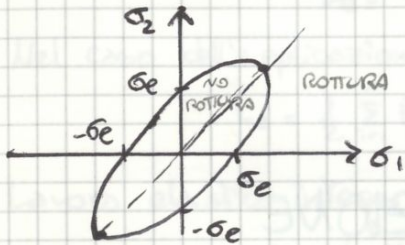
$$U_{re} = U_{ve} + U_{de}$$

$$\left. \begin{aligned} U_{re} &= \frac{1}{2E} \sigma_e^2 \\ U_{ve} &= \frac{1-2\nu}{6E} \sigma_e^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow U_{de} = U_{re} - U_{ve} = \frac{1}{2E} \sigma_e^2 - \frac{1-2\nu}{6E} \sigma_e^2 = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_e^2$$

Quindi il collasso avviene se:

$$U_D \geq U_{de} \Rightarrow \frac{(1+\nu)}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \geq \frac{1+\nu}{3E} \sigma_e^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \geq \sigma_e \quad \text{c.v.d.}$$

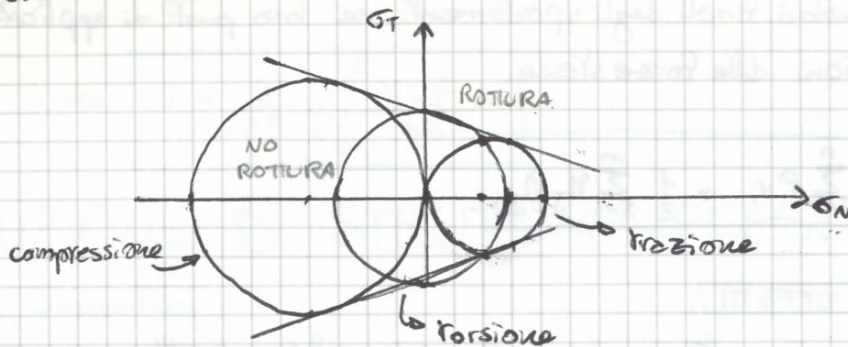


L'ipotesi nasce da osservazioni sperimentali.

IPOTESI DI MOHR

MATERIALI DUTILI / FRAGILI?

Il cedimento avviene se il più grande dei cerchi di Mohr associato allo stato di tensione nel punto è tangente o esterno alla linea di collasso individuata dall'involuppo dei cerchi di Mohr corrispondenti alle prove di trazione, compressione, torsione.



N.B.: Il criterio di Von Mises interpola meglio i risultati sperimentali
 Il criterio di Tresca è più conservativo, quindi garantisce più sicurezza.

CRITERI DI ROTTURA NELLA TEORIA DELLE TRAVI

Il problema di De Saint Venant evidenzia che in qualunque sistema di travi lo stato di tensione è al più bidimensionale.

TEOREMA DI BETTI

Il lavoro mutuo o indiretto che compie un sistema di forze A già applicato ad un corpo elastico durante l'applicazione di un sistema di forze B è uguale al lavoro indiretto che compirebbe il sistema B se fosse già applicato allo stesso corpo elastico durante l'applicazione del sistema A.

TEOREMA DI CASTIGLIANO

La derivata del lavoro di deformazione rispetto ad una forza misura la componente dello spostamento del punto di applicazione della forza nella direzione della forza stessa.

In fatti:

Una forza P_i applicata in un generico punto della struttura produce la freccia v_i .

Il lavoro elastico prodotto da P_i è:

$$L_e = P_i v_i$$

Nel caso dell'applicazione di n forze e m momenti:

$$L_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i v_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m M_j \theta_j$$

Lavoro elastico interno della trave (dovuto al momento flettente)

$$L_i = \int_0^e \frac{\pi(x)^2}{2ES} dx$$

Deve essere:

$$L_e = L_i \Rightarrow \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i v_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m M_j \theta_j = \int_0^e \frac{\pi(x)^2}{2ES} dx$$

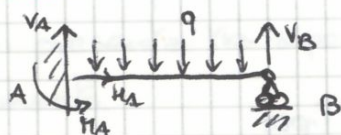
Quindi:

$$\frac{\partial L_e}{\partial P_i} = \frac{\partial L_i}{\partial P_i} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial P_i} \left\{ \sum_{i=1}^n P_i v_i + \sum_{j=1}^m M_j \theta_j \right\} = \frac{\partial}{\partial P_i} \left\{ \int_0^e \frac{\pi(x)^2}{ES} dx \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_i = \frac{\partial}{\partial P_i} \left\{ \int_0^e \frac{\pi(x)^2}{ES} dx \right\}$$

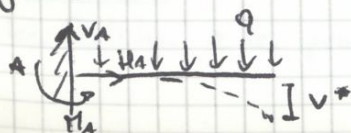
SOLUZIONE DI STRUTTURE IPERSTATICHE

Metodo Cinematico:



Valo il principio di sovrapposizione degli effetti:

Tolgo V_B :



Valuto la freccia v^* nel punto in cui è stato rimosso il vincolo.

Da cui?
$$\frac{P}{ESz} = \frac{n\pi^2}{e^2}$$

Per $n=1$ si ricava il carico critico di equilibrio indifferente (carico euleriano):

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 ESz}{e^2}$$

Combinando i vincoli, cambiamo le condizioni al contorno; quindi si definisce la lunghezza libera di inflessione l_0 e si scrive in generale:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 ESz}{l_0^2}$$

Dividendo il carico per l'area della sezione troviamo la tensione σ_{cr} .

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E Sz}{l_0^2 A}$$

Definiamo: $\rho = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$ → raggio d'inerzia della sezione (mm)

Definiamo: $\lambda = \frac{l_0}{\rho}$ → snellezza (adimensionale)

Quindi:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E \rho^2}{l_0^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

Notiamo che la tensione critica euleriana è funzione solo del modulo elastico e della snellezza. Questa relazione vale solo in campo elastico.

FATICA

In caso dinamico il cedimento può avvenire per:

- fatica: è un processo permanente, progressivo e localizzato di cambiamento strutturale in un materiale soggetto a condizioni di tensione e deformazione variabili nel tempo che può portare alla formazione di cricche e/o alla frattura dopo un numero sufficiente di cicli.
- creep: a partire da una soglia di temperatura dell'ordine di un terzo del valore di fusione, sotto tensione costante il materiale si deforma progressivamente nel tempo.
- usura: si presenta tra superfici a diretto contatto, premute tra loro e soggette a strisciamento.
- corrosione.

La durabilità di un componente consiste nell'attitudine a conservare le caratteristiche fisiche e le proprietà meccaniche originarie.

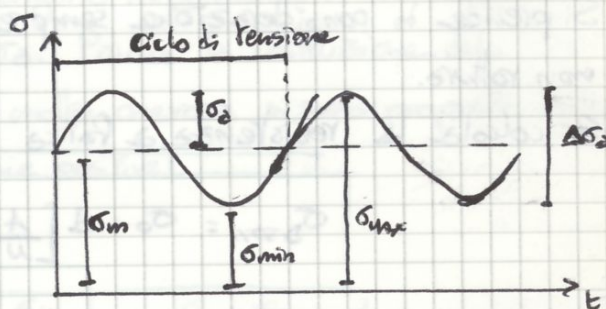
FATICA A BASSO NUMERO DI CICLI: durata a fatica limitata; elevate deformazioni plastiche; durata caratterizzata dalla propagazione.

Parametri che influenzano la fatica:

- tipo di sollecitazione (trazione, flessione, torsione, ...)
- numero di cicli di sollecitazione
- valori di σ_{min} e σ_{max}
- effetto di $\sigma_m \neq 0$
- forma (effetto di intaglio)
- dimensioni (effetto scala)
- temperatura
- trattamenti superficiali (meccanici e/o metallurgici)

Parametri che caratterizzano lo stato di tensione:

- σ_{max}
- σ_{min}
- $\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}$ (tensione media)
- $\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$ (tensione alternata)
- $\Delta\sigma_a = 2\sigma_a$ (campo di tensione)
- $R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$ (rapporto di tensione)
- $A = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \frac{1-R}{1+R}$ (rapporto di ampiezza)

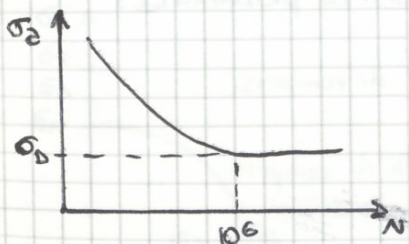


Se $\sigma_m = 0$ si ha un ciclo di tensione alternata simmetrica.

TIPICI DI PROVE: VEDI LIBRO

I provini non rotti (run outs) dopo un elevatissimo numero di cicli in una prova di fatica suggeriscono una possibile durata infinita.

Negli acciai si presenta il limite di fatica (σ_D) per $10^6 - 10^7$ cicli; viene usato come limite sicuro al di sotto del quale non si ha collasso a fatica.



Nel diagramma di **WÖHLER** ($\sigma_a - N$) il limite di fatica corrisponde a un asintoto orizzontale.

Il limite di fatica può non essere più visibile per alte temperature o ambienti corrosivi.

Per le leghe di alluminio e le leghe leggere non esiste un limite di fatica: la curva di Wöhler non presenta un asintoto orizzontale ma è sempre decrescente.

La curva di Wohler si può riportare anche nel piano semi-logaritmico ($\sigma - \log N$). In questo caso l'andamento della curva può essere interpolato da rette spezzate.



$$\sigma_N = AN^b \rightarrow \text{interpolazione della curva non logaritmica}$$

$$\text{Di solito } \sigma_D = 0,5 \sigma_R$$

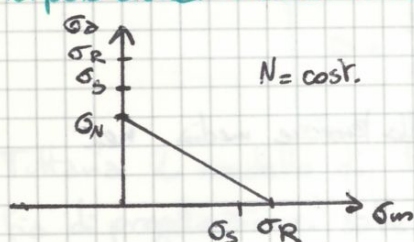
Per calcolare A e b:

$$\log \sigma_N = \log A + b \log N$$

Generalmente il carico ciclico di sollecitazione del componente presenta una tensione media non nulla. Si è osservato che tensioni medie di compressione sono "favorevoli" al comportamento a fatica (allungano la vita del componente), mentre tensioni medie di trazione sono "dannose" per il comportamento a fatica.

I dati ottenuti dalle prove di fatica vengono rappresentati sul diagramma di Haigh con in ascissa σ_m e in ordinata σ_a . Poiché la costruzione del diagramma di Haigh con dati sperimentali è molto onerosa si sono proposte delle equazioni interpolanti (valgono per le tensioni medie positive)

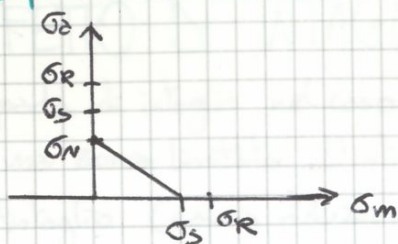
Interpolazione lineare di Goodman:



$$\sigma_a = \sigma_N - \sigma_m \cdot \frac{\sigma_N}{\sigma_R}$$

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_N} + \frac{\sigma_m}{\sigma_R} = 1$$

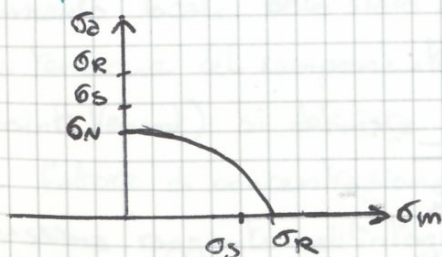
Interpolazione lineare di Soderberg:



$$\sigma_a = \sigma_N - \sigma_m \cdot \frac{\sigma_N}{\sigma_S}$$

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_N} + \frac{\sigma_m}{\sigma_S} = 1$$

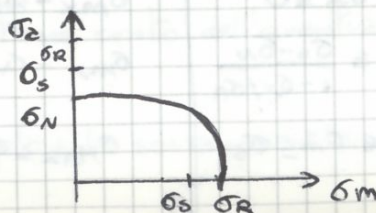
Interpolazione di Gerber:



$$\frac{\sigma_a}{\sigma_N} + \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_R}\right)^2 = 1$$

Interpolazione ellittica:

$$\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_N}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_R}\right)^2 = 1$$



Generalmente non solo il valor medio della sollecitazione, ma anche la sua ampiezza sono variabili nel tempo. Si parla di danno cumulativo.

Il modello di danneggiamento si pone l'obiettivo di valutare l'influenza di un singolo ciclo (o blocchi di cicli ripetuti), cioè valutare quale porzione di vita utile del componente viene consumata da un blocco di cicli di sollecitazione.

Teoria lineare di Palmgren-Miner:

ogni blocco di sollecitazione ad ampiezza costante produce un danno nel materiale pari al rapporto (D_i) tra il numero di cicli che il componente ha subito (n_i) e il numero di cicli N_i che provoca il cedimento per fatica a pari livello di sollecitazione.

$$D_i = \frac{n_i}{N_i}$$

In generale il collasso avviene se:

$$\sum_{i=1}^n \frac{n_i}{N_i} \geq 1$$

ATTENZIONE: la teoria di Palmgren-Miner non tiene conto dell'ordine di applicazione dei carichi; risultati sperimentali dimostrano invece che esso ha grande importanza. Infatti si osserva sperimentalmente che a seconda dell'ordine di applicazione il cedimento può avvenire per $0,6 \leq D \leq 1,6$:

$$D = \sum_{i=1}^n \frac{n_i}{N_i} = \begin{cases} 0,6 \\ 1,6 \end{cases}$$

Tuttavia il modello di Palmgren-Miner può essere applicato nel caso di fibroso o di progettazione safe life.

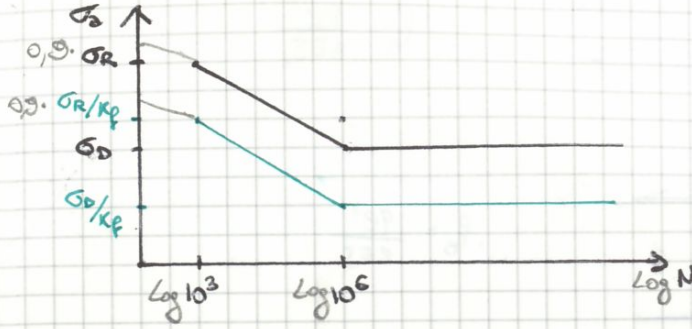
EFFETTO DI INTAGLIO

Si parla di intaglio nel caso di una variazione della sezione resistente di un componente in una zona limitata. L'intaglio causa un aumento delle tensioni nella sezione dell'intaglio (causa riduzione sezione resistente) e una alterazione della distribuzione delle tensioni sulla sezione stessa: le variazioni di forma provocano un aumento locale dello stato di tensione che diventa, localmente, triassiale. La tensione del componente non intagliato (in cui sono valide le ipotesi di De Saint Venant) si definisce tensione nominale.

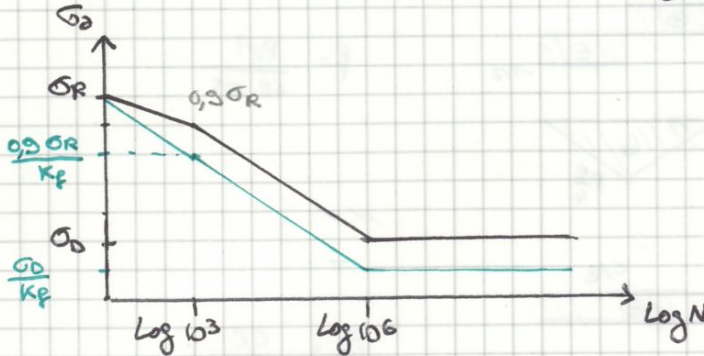
Il fattore di concentrazione delle tensioni (K_t) è il rapporto tra la tensione massima raggiunta nell'intaglio e quella nominale del componente. K_t è definito in campo lineare elastico e non tiene conto dell'eventuale plasticizzazione locale dell'intaglio.

Nel caso di intagli multipli si applica la sovrapposizione degli effetti

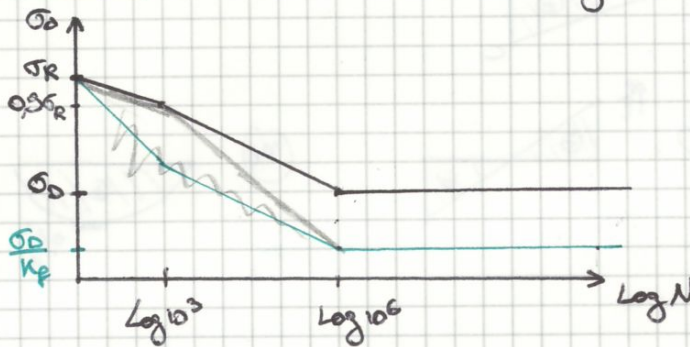
① si scala la curva di Wohler dividendo sia la tensione di rottura che quella limite di fatica per K_F :



② METODO DI JUNIALL: si considera l'effetto dell'intaglio a partire da 10^3 cicli:

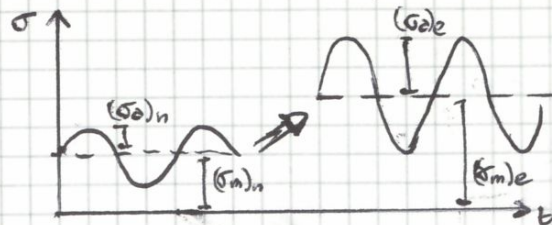


③ METODO DI MORROW: si considera l'effetto dell'intaglio a partire da 10^6 cicli:



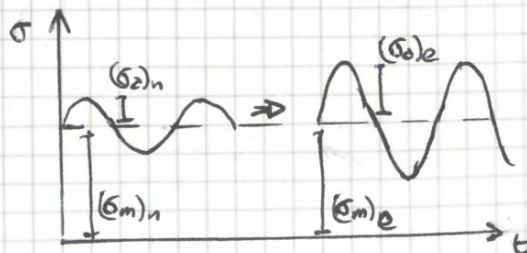
Nel calcolo a fatica di componenti con intaglio si osserva sperimentalmente che:
 Materiali fragili: K_F deve essere applicata a entrambi i componenti della sollecitazione:

$$\begin{aligned} (\sigma_m)_e &= K_F (\sigma_m)_n \\ (\sigma_a)_e &= K_F (\sigma_a)_n \end{aligned}$$



Materiali duttili: K_F deve essere applicato solo a σ_a :

$$\begin{aligned} (\sigma_m)_e &= (\sigma_m)_n \\ (\sigma_a)_e &= K_F (\sigma_a)_n \end{aligned}$$



COEFFICIENTI DI SICUREZZA CON INTAGLIO (PETERSON): VEDI LIBRO