NUMERO: 965

DATA: 08/05/2014

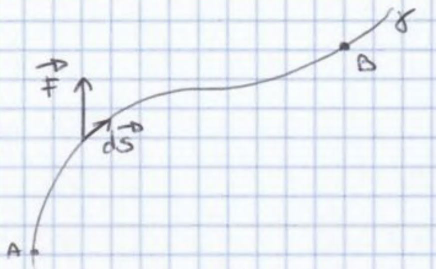
# A P P U N T I

STUDENTE: Tortorici

MATERIA: Fisica II

Prof. Barbero

# INTEGRALI DI LINEA (lavoro o tensione)

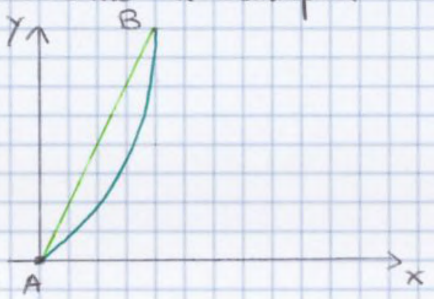



Consideriamo una traiettoria $\gamma$ tra i punti $A$ e $B$ e supponiamo che una particella si muova lungo di essa. Consideriamo una forza $\vec{F}$, che è una delle tante forze che agiscono sulla particella lungo la traiettoria $\gamma$.

Il lavoro della forza per andare da $A$ a $B$ lungo $\gamma$ è: $W_{A\to B}(\gamma) = \int_{A,\gamma}^{B} \vec{F}\cdot\vec{ds}$

Si tratta di un integrale di linea.

Facciamo un esempio.




Costruiamo un sistema di assi cartesiano.

Siano $A(0,0)$ e $B(2,4)$.

Siano inoltre:

$$\vec{F} = ax^2y\,\vec{u_x} + by^3\,\vec{u_y}$$

$$\vec{ds} = dx\,\vec{u_x} + dy\,\vec{u_y}$$

La soluzione dell'integrale di linea dipende da $\gamma$.

Consideriamo per esempio la retta $y=2x$ come traiettoria. Abbiamo:

$$W_{A\to B}(\gamma) = \int_{(0,0),\ y=2x}^{(2,4)} \left(ax^2y\,dy + by^3\,dy\right)$$

(Avendo già svolto il prodotto scalare). A $y$ sostituiamo $2x$:

$$W_{A\to B}(\gamma) = \int_0^2 \left(ax^2\,2x\,dx + b\,8x^3\,d(2x)\right) = \int_0^2 \left(2ax^3dx + 16bx^3dx\right) =$$

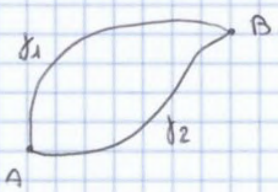
$$= 2a\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 + 16b\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 4(2a+16b)$$

Supponiamo ora che $\gamma$ sia la parabola $y=x^2$.

$$W_{A\to B}(\gamma) = \int_{(0,0),\ y=x^2}^{(2,4)} \left(ax^2y\,dx + by^3\,dy\right) = \int_0^2 \left(ax^2\cdot x^2dx + bx^6\,d(x^2)\right) = \int_0^2 \left(ax^4dx + 2bx^7dx\right) =$$

$$= a\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2 + 2b\left[\frac{x^8}{8}\right]_0^2 = a\frac{2^5}{5} + 2b\cdot 2^5 = 2^5\left(\frac{a}{5} + 2b\right)$$

Si è dimostrato che in generale un integrale di linea dipende dalla traiettoria.




$$W_{A\to B}(\gamma_1) \neq W_{A\to B}(\gamma_2)$$

Un CAMPO CONSERVATIVO $\vec{F}(\vec{r})$ è una funzione vettoriale il cui integrale di linea non dipende dalla traiettoria, cioè se $W_{A\to B}(\gamma_1) = W_{A\to B}(\gamma_2)$. Questo significa che $W$ dipende solo dal punto iniziale e dal punto finale.

$$W_{O\to B} = \int_{O\,\gamma}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \underbrace{\int_{O\,\gamma}^{A} \vec{F}\cdot d\vec{s}}_{W_{O\to A}} + \underbrace{\int_{A\,\gamma}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{s}}_{W_{A\to B}} \Rightarrow W_{O\to B} = W_{O\to A} + W_{A\to B}$$

Possiamo quindi scrivere la relazione tra gli integrali di linea:

$$f(O,B) = f(O,A) + f(A,B)$$

Ovvero:

$$f(A,B) = f(O,B) - f(O,A)$$

Al primo membro la O non compare e deve essere eliminata anche al secondo membro in quanto la relazione deve essere valida per ogni punto; deve essere del tipo: $f(X,Y) = U(X) - U(Y)$

Se un campo è conservativo, l'integrale di linea per andare da un punto all'altro è legato solo al punto iniziale e a quello finale:

$$\boxed{W_{X\to Y} = f(X,Y)} \rightarrow \text{DEFINIZIONE DI FORZA CONSERVATIVA}$$

Infatti:

$$\left.\begin{array}{l} f(O,B) = U(O) - U(B) \\ f(O,A) = U(O) - U(A) \end{array}\right\} \Rightarrow f(O,B) - f(O,A) = \cancel{U(O)} - U(B) - \cancel{U(O)} + U(A) = U(A) - U(B)$$

Come si fa a capire se una forza è conservativa?

Consideriamo un $\vec{F}$ conservativo; si ha che $W_{A\to B} = U(A) - U(B)$

$$\left.\begin{array}{l} W_{A\to B} = \displaystyle\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s} \\ U(A) - U(B) = -\displaystyle\int_A^B dU \end{array}\right\} \Rightarrow \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s} = -\int_A^B dU$$

$$\Downarrow$$

$$\int_A^B \left(\vec{F}\cdot d\vec{s} + dU\right) = 0 \quad \forall A, B$$

Se un integrale vale zero qualsiasi siano gli estremi di integrazione, la funzione deve essere nulla. Allora deve essere:

$$\vec{F}\cdot d\vec{s} + dU = 0 \qquad \text{per ogni linea possibile}$$

Consideriamo un sistema di assi cartesiani x, y, z. Allora:

$$d\vec{s} = \vec{u_x}\,dx + \vec{u_y}\,dy + \vec{u_z}\,dz$$

$$\vec{F} = F_x \vec{u_x} + F_y \vec{u_y} + F_z \vec{u_z}$$

Quindi svolgendo il prodotto scalare si ottiene:

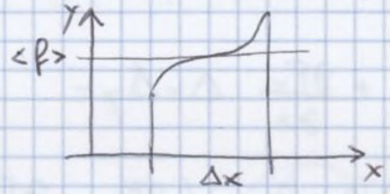
$$\vec{F}\cdot d\vec{s} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Quindi si ottiene:

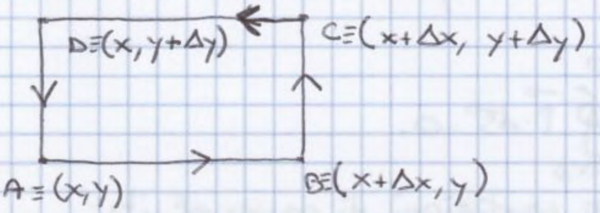
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F_x}{\partial y} &= \frac{\partial F_y}{\partial x} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} &= \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial z} &= \frac{\partial F_z}{\partial y} \end{aligned}\right\} \text{CONDIZIONI DI CONSERVATIVITÀ} \;(!!)$$

RIPASSO

- $f(x+\varepsilon) = f(x) + \varepsilon \dfrac{df}{dx}$ sviluppo di Taylor al 1° ordine
- $\displaystyle\int_x^{x+\Delta} f\,dx \cong \langle f \rangle \cdot \Delta$




TEOREMA DI STOKES




Consideriamo un circuito di forma rettangolare come in figura.
Specificare sempre il verso che consideriamo positivo!

Supponiamo di essere nel piano:

$$F(x,y) = F_x(x,y)\,\vec{u_x} + F_y(x,y)\,\vec{u_y}$$

Le quantità $\Delta x$ e $\Delta y$ sono i lati del rettangolo e sono infinitesime.

se dovessimo versso gli estremi invertiti, avremmo dovuto mettere $-dy$

$$\oint_{ABCD} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{F}\cdot(\vec{u_x}\,dx) + \int_B^C \vec{F}\cdot(\vec{u_y}\,dy) + \int_D^C \vec{F}\cdot(-\vec{u_x}\,dx) + \int_A^D \vec{F}\cdot(-\vec{u_y}\,dy) =$$

abbiamo risolto prodotto scalare

$$= \int_A^B F_x(x,y)\,dx + \int_B^C F_y(x,y)\,dy - \int_D^C F_x(x,y)\,dx - \int_A^D F_y(x,y)\,dy =$$

abbiamo risolto l'integrale tenendo conto del ripasso sopra

$$= \langle F_x \rangle_{AB}\cdot\Delta x + \langle F_y \rangle_{BC}\cdot\Delta y - \langle F_x \rangle_{CD}\,\Delta x - \langle F_y \rangle_{AD}\,\Delta y =$$

$$= (\langle F_x \rangle_{AB} - \langle F_x \rangle_{CD})\cdot\Delta x + (\langle F_y \rangle_{BC} - \langle F_y \rangle_{AD})\cdot\Delta y$$

Per piccoli intervalli, possiamo risolvere la media come segue:

$$\langle F_x \rangle_{AB} = \frac{F_x(A) + F_x(B)}{2} = \frac{1}{2}\left\{F_x(x,y) + F_x(x+\Delta x, y)\right\} =$$

Taylor

$$= \frac{1}{2}\left\{F_x(x,y) + F_x(x,y) + \frac{\partial F_x}{\partial x}\cdot\Delta x\right\} = F_x(x,y) + \frac{1}{2}\frac{\partial F_x}{dx}\cdot\Delta x$$

Ugualmente facciamo per la seconda media della prima parentesi:

$$\langle F_x \rangle_{CD} = \frac{F_x(C) + F_x(D)}{2} = \frac{1}{2}\left\{F(x, y+\Delta y) + F_x(x+\Delta x, y+\Delta y)\right\} =$$

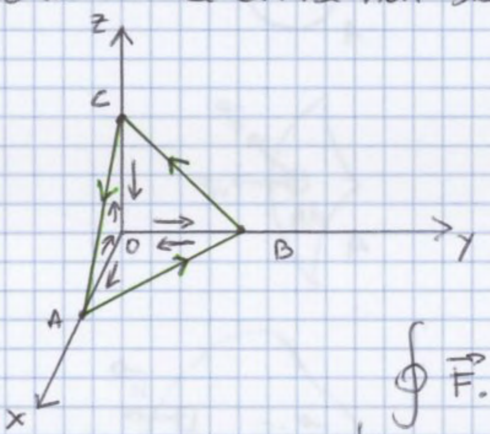
Il risultato precedente può essere riscritto come:

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint_{S(\gamma)} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) d\sigma$$

Se $\vec{F}$ è conservativo, la circuitazione deve essere pari a zero, quindi l'argomento dell'integrale doppio deve essere uguale a zero (perché deve essere valido per ogni superficie), quindi si ottiene di nuovo che:

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

Nel caso in cui la curva non sia contenuta in un piano:




$$\oint_{A\to B\to C} \vec{F}\cdot d\vec{s} = ?$$

Scomponiamo il nostro integrale nella somma di altri 3 integrali:

$$\underbrace{\oint_{AOCA} \vec{F}\cdot d\vec{s}}_{\text{giace su }(x,z)} + \underbrace{\oint_{ABOA} \vec{F}\cdot d\vec{s}}_{\text{giace su }(x,y)} + \underbrace{\oint_{BCOB} \vec{F}\cdot d\vec{s}}_{\text{giace su }(y,z)}$$

Ancora una volta i contributi dei lati comuni si annullano. Abbiamo ridotto il calcolo a elementi bidimensionali, quindi procediamo come prima.

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) d\sigma_{xz} + \int\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) d\sigma_{xy} + \int\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) d\sigma_{yz}$$

Abbiamo così enunciato la forma generale del teorema di STOKES. Possiamo scrivere il risultato in modo più semplice introducendo:

ROTORE: $\vec{R} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\vec{u_x} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\vec{u_y} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{u_z}$

$$\vec{R} = \vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{u_x} & \vec{u_y} & \vec{u_z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Introduciamo anche:

$$d\vec{\sigma} = d\sigma_x \vec{u_x} + d\sigma_y \vec{u_y} + d\sigma_z \vec{u_z}$$

Possiamo riscrivere la formula del teorema di Stokes:

$$\boxed{\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_{S(\gamma)} \vec{R}\cdot d\vec{\sigma}}$$

$$= \frac{\partial F_x}{\partial x} \cdot \underbrace{\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z}_{\text{VOLUME } \Delta\tau}$$

Quindi:

$$\Delta\Phi_x = \frac{\partial F_x}{\partial x} \Delta\tau$$

Con un ragionamento analogo, si ottiene che: $\Delta\Phi_y = \frac{\partial F_y}{\partial y} \cdot \Delta\tau$

$$\Delta\Phi_z = \frac{\partial F_z}{\partial z} \Delta\tau$$

Possiamo quindi calcolare il flusso totale:

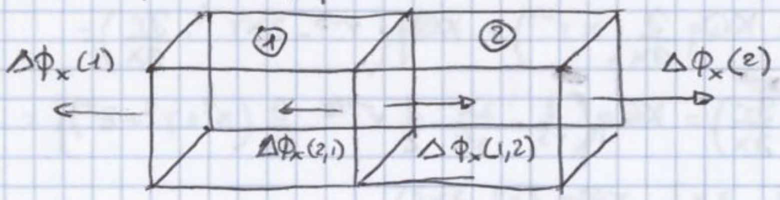
$$\Delta\Phi = \Delta\Phi_x + \Delta\Phi_y + \Delta\Phi_z = \underbrace{\left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right)}_{\text{DIVERGENZA}} \cdot \Delta\tau$$

DIVERGENZA: $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ oppure $\operatorname{div}\vec{F}$

è una quantità scalare.

Dunque: $\Delta\Phi = (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) \cdot \Delta\tau$

Consideriamo due parallelepipedi affiancati:



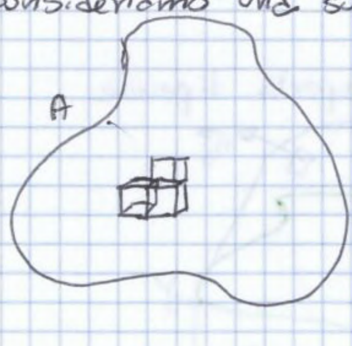

$$\Delta\Phi_x = \Delta\Phi_x(1) + \Delta\Phi_x(2) + \underbrace{\Delta\Phi_x(1,2) - \Delta\Phi_x(1,2)}_{\text{contributo dovuto alla parte comune}} =$$

$$= \left[\Delta\Phi_x(1) + \Delta\Phi_x(1,2)\right] + \left[\Delta\Phi_x(2) - \Delta\Phi_x(1,2)\right] =$$

$$= \underbrace{\left[\vec{F}(1) \cdot \vec{n}_1 + \vec{F}(1,2) \cdot \vec{n}(1,2)\right]}_{\text{flusso uscente da ①}} + \underbrace{\left[\vec{F}(2) \cdot \vec{n}(2) + \vec{F}(1,2) \cdot \vec{n}(2,1)\right]}_{\text{flusso uscente da ②}}$$

Quindi il flusso totale uscente è la somma dei flussi uscenti da ognuno dei parallelepipedi.

Consideriamo una superficie chiusa:




suddividiamo il volume in tanti parallelepipedi:

$$\Phi_A(\vec{F}) = \oint\!\!\!\oint_A \vec{F} \cdot \vec{n} \cdot dA = \sum_{i=1}^{n} \Delta\Phi_i$$

Con $\Delta\Phi_i$ flusso uscente dalla scatola i-esima.

Perché l'approssimazione sia valida, i parallelepipedi devono essere piccoli:

La superficie $S+\Sigma$ è chiusa, quindi sappiamo che: $\Phi_{S+\Sigma}(\vec{F})=0$

$$\oint\!\!\!\!\oint_{S+\Sigma} \vec{F}\cdot\vec{n}\, dA = \iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}_S \cdot dS + \iint_\Sigma \vec{F}\cdot\vec{n}_\Sigma\, d\Sigma = 0$$

Quindi:

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}_S\, dS = -\iint_\Sigma \vec{F}\cdot\vec{n}_\Sigma\, d\Sigma$$

Portiamo le due superfici a contatto. $\uparrow \vec{n}_S$, $\downarrow \vec{n}_\Sigma$, $\gamma$

$$\iint_S \vec{F}\,\vec{n}_S\, dS = \iint_\Sigma \vec{F}\cdot(-\vec{n}_\Sigma)\, d\Sigma$$

Quando S coincide con $\Sigma$, $\vec{n}_S$ è concorde con $-\vec{n}_\Sigma$, perciò il flusso attraverso S coincide con il flusso attraverso $\Sigma$ e dipende solo da $\gamma$.

## DIVERGENZA DI UN ROTORE

$$\vec{R} = \vec{\nabla}\times\vec{F}$$

$$R_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}$$

$$R_y = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}$$

$$R_z = \frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

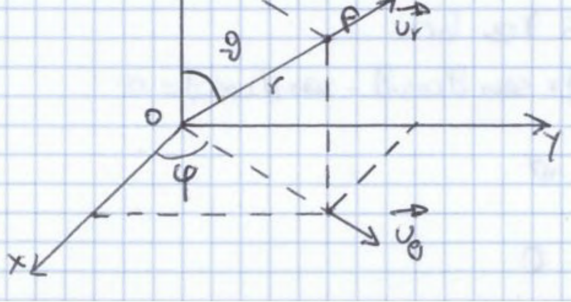
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{R} = \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{\partial R_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x}\right) =$$

$$= \cancel{\frac{\partial^2 F_z}{\partial x\partial y}} - \cancel{\frac{\partial^2 F_y}{\partial x\partial z}} + \cancel{\frac{\partial^2 F_x}{\partial y\partial z}} - \cancel{\frac{\partial^2 F_z}{\partial y\partial x}} + \cancel{\frac{\partial^2 F_x}{\partial z\partial y}} - \cancel{\frac{\partial^2 F_y}{\partial z\partial x}} = 0$$

Qualunque sia il vettore $\vec{F}$, il suo rotore è solenoidale! (!!)

Possiamo dunque enunciare il teorema di Stokes:
dato un percorso qualunque $\gamma$, la circuitazione di $\vec{F}$ è uguale al flusso del rotore di $\vec{F}$ calcolato su una superficie che ha per bordo $\gamma$. Il risultato non dipende dalla superficie ma solo da $\gamma$ perché il rotore è solenoidale.

## COORDINATE POLARI




$$P \equiv (\rho, \vartheta, \varphi)$$

$$\begin{cases} x = r \operatorname{sen}\vartheta\cos\varphi \\ y = r\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\varphi \\ z = r\cos\vartheta \end{cases}$$

Dunque abbiamo ottenuto che:

$$d\vec{s} = \vec{u_r}\,dr + r\,d\vartheta\,\vec{u_\vartheta} + \vec{u_\varphi}\,r\sin\vartheta\,d\varphi$$

$$\vec{F} = F_r\,\vec{u_r} + F_\vartheta\,\vec{u_\vartheta} + F_\varphi\,\vec{u_\varphi}$$

Dobbiamo esprimere il gradiente in coordinate polari:

$$\vec{F}\cdot d\vec{s} = -dU \rightarrow \text{potenziale}$$

$$\vec{F}\cdot d\vec{s} = \left(F_r\,\vec{u_r} + F_\vartheta\,\vec{u_\vartheta} + F_\varphi\,\vec{u_\varphi}\right)\cdot\left(dr\,\vec{u_r} + r\,d\vartheta\,\vec{u_\vartheta} + r\,\text{sen}\vartheta\,d\varphi\,\vec{u_\varphi}\right) =$$

$$= \underbrace{F_r\,dr + F_\vartheta\,r\,d\vartheta + F_\varphi\,r\,\text{sen}\vartheta\,d\varphi}_{\text{elemento di linea elementare}}$$

$$U(r,\vartheta,\varphi) \Rightarrow dU = \frac{\partial U}{\partial r}\cdot dr + \frac{\partial U}{\partial \vartheta}\cdot d\vartheta + \frac{\partial U}{\partial \varphi}\cdot d\varphi$$

Quindi sostituiamo nell'equazione: $\vec{F}\cdot d\vec{s} + dU = 0$

$$\left(F_r + \frac{\partial U}{\partial r}\right)dr + \left(F_\vartheta\,r + \frac{\partial U}{\partial \vartheta}\right)d\vartheta + \left(F_\varphi\,r\,\text{sen}\vartheta + \frac{\partial U}{\partial \varphi}\right)d\varphi = 0 \qquad \forall\,\vartheta,\varphi,r$$

Poiché $dr$, $d\vartheta$ e $d\varphi$ sono linearmente indipendenti, poniamo ogni coefficiente uguale a zero, trovando i componenti del gradiente in coordinate polari:

$$F_r = -\frac{\partial U}{\partial r}$$

$$F_\vartheta = -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \vartheta}$$

$$F_\varphi = -\frac{1}{r\,\text{sen}\vartheta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}$$

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial r}\cdot\vec{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \vartheta}\,\vec{u_\vartheta} + \frac{1}{r\,\text{sen}\vartheta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\,\vec{u_\varphi}\right) = -\vec{\nabla}U$$

$$\boxed{\vec{\nabla} = \vec{u_r}\frac{\partial}{\partial r} + \vec{u_\vartheta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta} + \vec{u_\varphi}\frac{1}{r\,\text{sen}\vartheta}\frac{\partial}{\partial \varphi}}$$

## FORZA CENTRALE

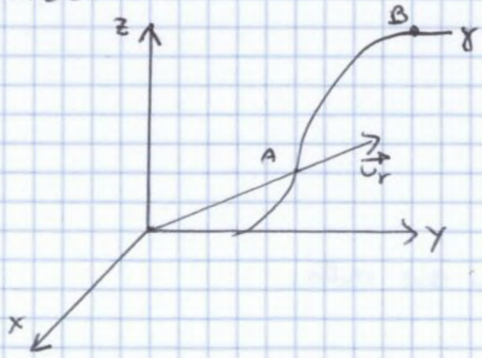
$$\vec{F} = f(r)\cdot\vec{u_r}$$

Il modulo dipende solo dal centro, la direzione è radiale

Ogni forza centrale è conservativa

Dimostrazione:

1° MODO:

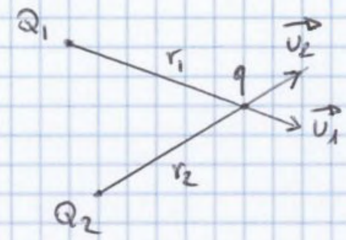



$$W_{A\to B}(\gamma) = \int_{A,\gamma}^{B}\vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_{A,\gamma}^{B} f(r)\,\vec{u_r}\cdot\left(\vec{u_r}\,dr + \vec{u_\vartheta}\,r\,d\vartheta + \vec{u_\varphi}\,r\sin\vartheta\,d\varphi\right)$$

$$= \int_A^B f(r)\,dr$$

L'integrale trovato non dipende dal percorso, dunque la forza è conservativa.

Nel caso ci sia più di una carica:




$$\begin{cases} \vec{F_1} = K \dfrac{Q_1 q}{r_1^2} \vec{u_1} \\ \vec{F_2} = K \dfrac{Q_2 q}{r_2^2} \vec{u_2} \end{cases}$$

Sperimentalmente si ricava che è valido il principio di sovrapposizione:

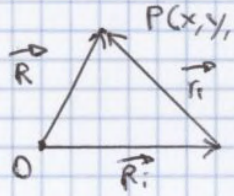
$$\vec{F}_{TOT} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = K \frac{q Q_1}{r_1^2} \vec{u_1} + K \frac{Q_2 q}{r_2^2} \vec{u_2}$$

Quindi, in generale:

$$\vec{F}_{TOT} = \sum_{i=1}^{N} K \frac{Q_i q}{r_i^2} \vec{u_i} = q \underbrace{\sum_{i=1}^{N} K \frac{Q_i}{r_i^2} \vec{u_i}}_{\text{CAMPO ELETTROSTATICO}}$$

Se c'è una determinata distribuzione di carica e ne aggiungo una, la forza elettrica sarà proporzionale alla carica stessa.

$$\boxed{\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} K \frac{Q_i}{r_i^2} \vec{u_i}} \qquad \text{unità di misura: } \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \Rightarrow N/C$$




$P(x, y, z) \rightarrow$ coordinate punto campo

$Q_i\,(x_i, y_i, z_i) \rightarrow$ coordinate punto sorgente

$$\vec{r_i} = \vec{R} - \vec{R_i} = (x - x_i)\vec{u_x} + (y - y_i)\vec{u_y} + (z - z_i)\vec{u_z}$$

Quindi:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} K Q_i \frac{(x - x_i)\vec{u_x} + (y - y_i)\vec{u_y} + (z - z_i)\vec{u_z}}{\left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2\right]^{3/2}}$$

Da cui:

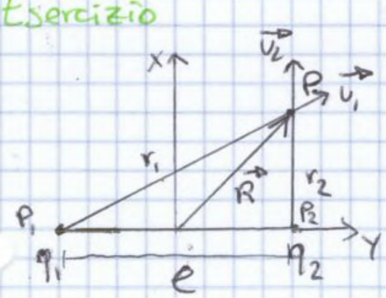
$$E_x = \sum_i K Q_i \frac{x - x_i}{r_i^3}$$

$$E_y = \sum_i K Q_i \frac{y - y_i}{r_i^3}$$

$$E_z = \sum_i K Q_i \frac{z - z_i}{r_i^3}$$

Svolgendo i calcoli, si trova che il campo è irrotazionale.

Esercizio




Supponiamo che $q_1 = q_2$. Vogliamo calcolare il campo elettrico in tutti i punti

$$P_1\left(0, -\frac{\ell}{2}\right) \; ; \quad P_2\left(0, \frac{\ell}{2}\right)$$

$$\vec{E}(P) = \vec{E_1}(P) + \vec{E_2}(P) = K \frac{q_1}{r_1^2} \vec{u_1} + K \frac{q_2}{r_2^2} \vec{u_2}$$

Poniamo $q_1 = q_2 = q$: $\quad \vec{E}(P) = K \dfrac{q}{r_1^2} \vec{u_1} + K \dfrac{q}{r_2^2} \vec{u_2}$

$$\vec{E} = k \frac{q}{x^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2} \cdot \left(2 \cos\vartheta \, \vec{u_x}\right)$$

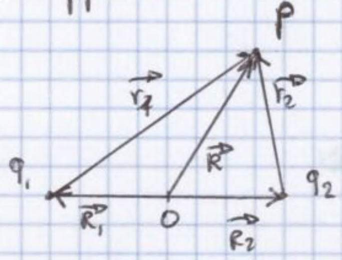
Ma:
$$\left.\begin{array}{l} x \cdot tg\,\vartheta = \frac{\ell}{2} \rightarrow tg\,\vartheta = \frac{\ell}{2x} \\ \cos\vartheta = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\vartheta}} \end{array}\right\} \rightarrow \cos\vartheta = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\ell}{2x}\right)^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+\left(\frac{\ell}{2}\right)^2}}$$

Da cui:
$$\vec{E} = 2K\,\frac{q \cdot x}{\left(\sqrt{x^2+\left(\frac{\ell}{2}\right)^2}\right)^3} \cdot \vec{u_x}$$

Se $x \gg \ell$, allora $\frac{\ell}{2x} \ll 1$. Ne segue che:
$$\vec{E} = 2Kq \cdot \frac{x}{x^3\left\{1+\left(\frac{\ell}{2x}\right)^2\right\}^{3/2}} \vec{u_x} \cong 2K\frac{q}{x^2}\vec{u_x} = \vec{E}$$

Che è lo stesso risultato di prima.

Supponiamo che P appartenga al piano $(x, y)$.

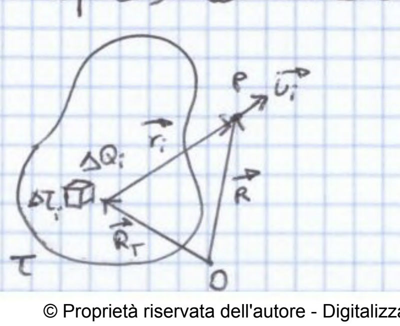



$$\vec{E} = K\frac{q}{r_1^2}\vec{u_1} + K\frac{q}{r_2^2}\vec{u_2} = Kq\frac{\vec{r_1}}{r_1^3} + Kq\frac{\vec{r_2}}{r_2^3}$$

Valgono le seguenti relazioni:
$$\vec{R} = x\vec{u_x} + y\vec{u_y}$$
$$\vec{R_1} = -\frac{\ell}{2}\vec{u_y}$$
$$\vec{R_2} = \frac{\ell}{2}\vec{u_y}$$
$$\vec{r_1} = \vec{R} - \vec{R_1}$$
$$\vec{r_2} = \vec{R} - \vec{R_2}$$

Quindi:
$$\vec{E} = kq\frac{\vec{R}-\vec{R_1}}{|\vec{R}-\vec{R_1}|^3} + kq\frac{\vec{R}-\vec{R_2}}{|\vec{R}-\vec{R_2}|^3} =$$
$$= kq\frac{(x\vec{u_x} + y\vec{u_y} + \ell/2\,\vec{u_y})}{\left[x^2+\left(y+\frac{\ell}{2}\right)^2\right]^{3/2}} + kq\frac{(x\vec{u_x} + y\vec{u_y} - \ell/2\,\vec{u_y})}{\left[x^2+\left(y-\frac{\ell}{2}\right)^2\right]^{3/2}} =$$
$$= kq\cdot\frac{x\vec{u_x} + (y+\ell/2)\vec{u_y}}{\left[x^2+(y+\ell/2)^2\right]^{3/2}} + kq\cdot\frac{x\vec{u_x} + (y-\ell/2)\vec{u_y}}{\left[x^2+(y-\ell/2)^2\right]^{3/2}}$$

Cosa capita se le cariche sono continue invece che discrete?




Consideriamo un corpo con una carica distribuita con continuità e sia $\tau$ il volume di tale corpo.
Approssimiamo il corpo con cubetti tanto piccoli da poter essere considerati puntiformi.

Fissato x, quanto vale il campo in P?

$$dy = d(x \operatorname{tg}\vartheta) = x\, d(\operatorname{tg}\vartheta) = x \frac{d\vartheta}{\cos^2\vartheta}$$

Quindi:

$$d\vec{E} = 2K\lambda \frac{x\, d\vartheta}{\cos^2\vartheta} \cdot \frac{\cos^2\vartheta}{x^2} \cdot \cos\vartheta\, \vec{u_x} = 2K\lambda \frac{d\vartheta}{x} \cos\vartheta\, \vec{u_x}$$

Da cui:

$$\vec{E} = \int_0^{\theta} 2K\lambda \frac{\cos\vartheta}{x} d\vartheta\, \vec{u_x} = 2\frac{K\lambda}{x} [\operatorname{sen}\vartheta]_0^{\theta}\, \vec{u_x} = 2\frac{K\lambda}{x} \operatorname{sen}\theta\, \vec{u_x}$$

$\theta$ = val. max di $\vartheta$

Sia $x \gg L$: la barra si comporta come se tutta Q fosse concentrata in O.

$$x \to \infty \Rightarrow \vartheta \to 0 \Rightarrow \sin\vartheta \cong \operatorname{tg}\vartheta$$

$$x \operatorname{tg}\vartheta = \frac{L}{2} \Rightarrow \operatorname{tg}\vartheta = \frac{L}{2x}$$

Quindi:

$$\vec{E}(x \gg L) = \cancel{2}K\frac{\lambda}{x} \cdot \underbrace{\frac{L}{\cancel{2}x}}_{\text{prima } \sin\vartheta} \vec{u_x} = K \cdot \frac{\lambda L}{x^2} \vec{u_x}$$

Poiché $\lambda L = Q$

Si ha:

$$\vec{E}(x \gg L) = K \cdot \frac{Q}{x^2} \vec{u_x}$$

Se $x \ll L$:

$$x \to 0 \Rightarrow \vartheta \to \pi/2$$

Quindi:

$$\vec{E}(x \ll L) = 2K \cdot \frac{\lambda}{x} \cdot \underbrace{1}_{\sin\vartheta} \cdot \vec{u_x} = 2K \frac{\lambda L}{xL} \vec{u_x} = 2K \frac{Q}{xL} \vec{u_x} = \vec{E}(x \ll L)$$

IL campo non dipende più da $1/x^2$, ma da $1/x$ !!!!!

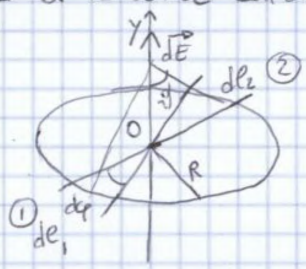
Se il filo è infinito:

$$L \to \infty \Rightarrow \vartheta \to \pi/2 \Rightarrow \vec{E} = 2K \frac{\lambda}{x} \vec{u_x}$$

(È uguale al caso in cui $x \ll L$ perché non ha più senso parlare di $x \gg L$).

## CAMPO ELETTRICO DI UN ANELLO CARICO IN MODO UNIFORME

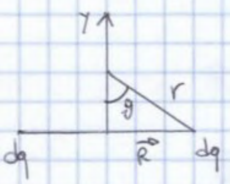
Sia Q la carica dell'anello e sia R il suo raggio. Il sistema è unidimensionale.




$$\lambda = \frac{Q}{2\pi R} = \text{cost.} \text{ (perché carico uniformemente)}$$

Vogliamo calcolare il campo su y.

In sezione:




Si ha che:

$$dq_1 = \lambda\, dl_1 = \lambda R\, d\varphi = dq_2$$

$$d\vec{E} = k \frac{dq}{r^2} = \cos\vartheta\, \vec{u_y}$$

Dunque si ottiene:

$$\frac{1}{2}\int_{\eta(0)}^{\eta(R)} \frac{d\eta}{\eta^{3/2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-\frac{3}{2}+1}\left[\eta^{-\frac{3}{2}+1}\right]_{\eta(0)}^{\eta(R)} = -\left[\frac{1}{\sqrt{\eta}}\right]_{\eta(0)}^{\eta(R)} =$$

$$= -\left\{\frac{1}{\sqrt{\xi^2+y^2}}\right\}_0^R = -\frac{1}{\sqrt{R^2+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{y^2}} = \frac{1}{|y|} - \frac{1}{\sqrt{R^2-y^2}}$$

Quindi:

$$\vec{E}(y) = k2\pi\sigma y\left\{\frac{1}{|y|} - \frac{1}{\sqrt{R^2+y^2}}\right\}\vec{u_y}$$

In $y=0$ il campo non è definito.

Se $y>0 \Rightarrow |y| = y$

$$\vec{E}(y>0) = k2\pi\sigma y\left\{\frac{1}{y} - \frac{1}{\sqrt{R^2+y^2}}\right\}\vec{u_y} = k2\pi\sigma\left\{1 - \frac{y}{\sqrt{R^2+y^2}}\right\}\vec{u_y}$$

Se $y<0 \Rightarrow |y| = -y$

$$\vec{E}(y<0) = k2\pi\sigma y\left\{-\frac{1}{y} - \frac{1}{\sqrt{R^2+y^2}}\right\}\vec{u_y} = k2\pi\sigma\left\{-1 - \frac{y}{\sqrt{R^2+y^2}}\right\}\vec{u_y}$$

Quindi il campo elettrico è una funzione dispari:

$$\boxed{\vec{E}(y) = -\vec{E}(-y)}$$

Sia: $\vec{E}_+(y) = \vec{E}(y>0)$ e $\vec{E}_-(y) = \vec{E}(y<0)$

Si ha:

$$\vec{E}_+(0) = k2\pi\sigma\,\vec{u_y} \quad \text{e} \quad \vec{E}_-(0) = -k2\pi\sigma\,\vec{u_y}$$

Dunque il campo elettrico creato da un disco ha una discontinuità in zero:

$$\Delta\vec{E} = \vec{E}_+(0) - \vec{E}_-(0) = k4\pi\sigma\,\vec{u_y}$$

Supponiamo $y>0$ e consideriamo il caso in cui $y\to\infty$:

$$\vec{E}(y\to\infty) = 2k\pi\sigma\left\{1 - \frac{y}{y\sqrt{1+\underbrace{\left(\frac{R}{y}\right)^2}_{<<1}}}\right\}\vec{u_y} = k2\pi\sigma\left\{1 - \frac{1}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{R}{y}\right)^2}\right\}\vec{u_y} =$$

Taylor

Taylor

$$= k2\pi\sigma\left\{1 - \left(1 + \frac{1}{2}\frac{R^2}{y^2}\right)\right\}\vec{u_y} = k2\pi\sigma\,\frac{1}{2}\frac{R^2}{y^2}\,\vec{u_y} =$$

Area

$$= \frac{k(\pi R^2)\sigma}{y^2}\vec{u_y} = k\frac{Q}{y^2}\vec{u_y}$$ (stesso risultato dell'anello carico)

Consideriamo il caso in cui $R\to\infty$ (il disco tende a un piano):

$$\left.\begin{array}{l}\vec{E}(y>0) = 2\pi\sigma k\,\vec{u_y}\\ \vec{E}(y<0) = -2\pi\sigma k\,\vec{u_y}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{in un piano il campo elettrico è costante}$$

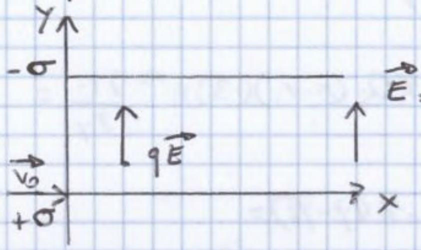
Un piano di estensione limitata si comporta come uno infinito per tutti i punti molto vicini ad esso.

## CONDENSATORI

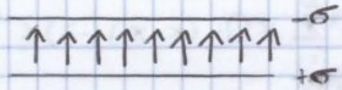
Dati due piani illimitati paralleli con densità di carica costanti $\sigma_1$ e $\sigma_2$, determina=

Esempio

Una particella che si muove con velocità $\vec{v_0}$ entra in una regione delimitata da due piani. Qual è il suo moto?




$$\vec{E} = 4\pi K\sigma \vec{u_y} = 4\pi \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sigma \vec{u_y} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u_y}$$




Trascuriamo la forza di gravità.

$$\begin{cases} \vec{F} = m\vec{a} \\ \vec{F} = q\vec{E} = q\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u_y} \end{cases} \Rightarrow m\frac{d\vec{v}}{dt} = qE\vec{u_y}$$

$$\vec{v} = v_x\vec{u_x} + v_y\vec{u_y} \Rightarrow m\frac{dv_x}{dt}\vec{u_x} + m\frac{dv_y}{dt}\vec{u_y} = qE\vec{u_y}$$

$$\begin{cases} m\frac{dv_x}{dt} = 0 \\ m\frac{dv_y}{dt} = qE \end{cases}$$

Condizioni iniziali: $t=0$

$$\begin{cases} v_x(0) = v_0 \\ v_y(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$v_x = \text{costante} = v_0$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{q}{m}E \Rightarrow v_y(t) = v_y(0) + \frac{q}{m}Et = \frac{q}{m}Et$$

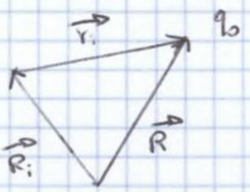
$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \\ v_y(t) = \frac{q}{m}E\cdot t \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \Rightarrow x(t) = v_0 t$$

$\Rightarrow$ il moto della particella è una parabola

$$\frac{dy}{dt} = \frac{q}{m}E\cdot t \Rightarrow y(t) = \frac{1}{2}\frac{q}{m}E\cdot t^2$$

DIMOSTRAZIONE CONSERVATIVITÀ CAMPO ELETTRICO




$$\vec{E}(\vec{R}) = \sum_{i=1}^{N} KQ_i\frac{\vec{R}-\vec{R_i}}{|\vec{R}-\vec{R_i}|^3} = \sum_{i=1}^{N} KQ_i\frac{\vec{r_i}}{|\vec{r_i}|^3}$$

$$r_i = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}$$

$$E_x(x,y,z) = \sum_{i=1}^{N} KQ_i\frac{x-x_i}{r_i^3}$$

$$E_y(x,y,z) = \sum_{i=1}^{N} KQ_i\frac{y-y_i}{r_i^3}$$

$$E_z(x,y,z) = \sum_{i=1}^{N} KQ_i\frac{z-z_i}{r_i^3}$$

$$W_{A\to B} = \int_A^B q_0 \left\{ \sum_{i=1}^N \vec{E}_i \right\} d\vec{s} = \int_A^B \sum_{i=1}^N \left( q_0 \vec{E}_i \cdot d\vec{s} \right) = \sum_{i=1}^N \int_A^B q_0 \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = \sum_{i=1}^N \left( K q_0 \frac{Q_i}{r_{iA}} - K q_0 \frac{Q_i}{r_{iB}} \right)$$

$$\boxed{U = q_0 \sum_{i=1}^N K \frac{Q_i}{r_i} + \text{cost.}}$$

Forza ed energia potenziale sono proporzionali alla carica di prova.

La forza è conservativa: $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$

Dividiamo per la carica di prova:

$$\frac{\vec{F}}{q_0} = -\vec{\nabla}\left(\frac{U}{q_0}\right)$$

campo elettrico $\vec{E}$

POTENZIALE ELETTROSTATICO $V = \frac{U}{q_0}$

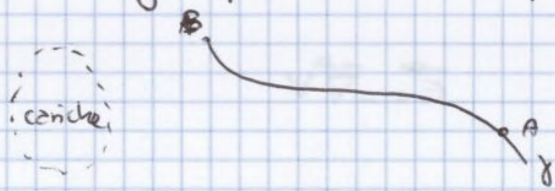
u. di m. : Volt = J/C

Quindi: $\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla} V}$

u. di m. di $\vec{E}$: $\frac{N}{C} = \frac{N \cdot m}{C \cdot m} = \frac{J}{C \cdot m} = \frac{V}{m}$

## ENERGIA PROPRIA

È l'energia spesa dall'esterno per costruire un sistema.




Spostiamo molto lentamente una carica da A e B lungo $\gamma$.

$$W_{A\to B}(\gamma)^{(ext)} = \int_{A,\gamma}^{B} \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{s}$$

Se $\vec{F}$ è la forza dovuta alle cariche che creano il campo elettrico, a causa della lentezza dello spostamento è sempre vera la seguente condizione:

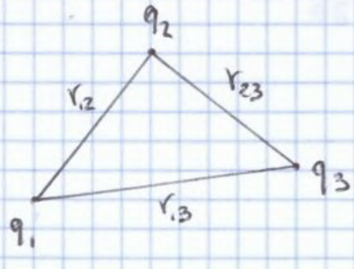
$$\vec{F}_{ext} + \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{ext} = -\vec{F}$$

Quindi:

$$W_{A\to B}\cancel{(\gamma)}^{(ext)} = -\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = U(B) - U(A)$$

### Esempio

Vogliamo creare la situazione in figura.




Il lavoro per mettere $q_1$ in posizione è nullo perché non è presente nessun campo:

$$W_{\infty\to 1} = 0$$

Per $q_2$: $U_2 = K \frac{q_1 q_2}{r}$

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u_x} = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{u_x} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{u_y} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u_z}$$

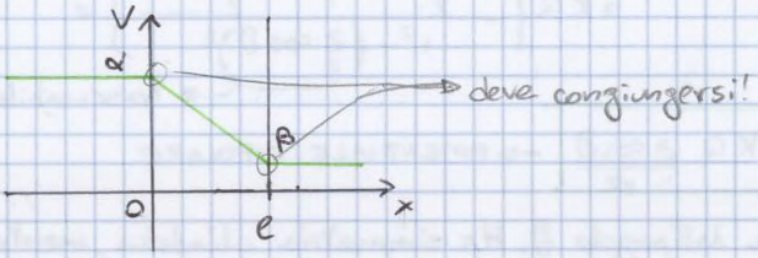
Si ha che:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \Rightarrow V = V(x) \rightarrow \text{dipende solo da } x \text{ ed è costante se } \underbrace{x<0}_{V=\alpha} \text{ o } \underbrace{x>\ell}_{V=\beta}$$

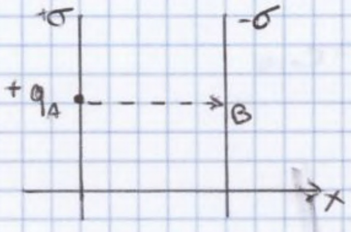
Quando $0 \leq x \leq \ell$:

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = -\frac{\partial V}{\partial x} \Rightarrow V(x) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}x + \text{cost.}$$

$$\begin{cases} \alpha = c \\ \beta = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\ell + c \end{cases}$$




Supponiamo di avere una carica $+q_A$ come in figura. Qual è la sua velocità in $-\sigma$?




$$E(A) = \overset{\text{en. cin.}}{E_k(A)} + \overset{\text{en. pot.}}{E_p(A)} = 0 + qV(A)$$

$$E(A) = E_k(B) + E_p(B) = \frac{1}{2}m\overset{\text{vel.}}{v_B^2} + qV(B)$$

$$E(A) = E(B)$$

$$qV(A) = \frac{1}{2}mv_B^2 + qV(B)$$

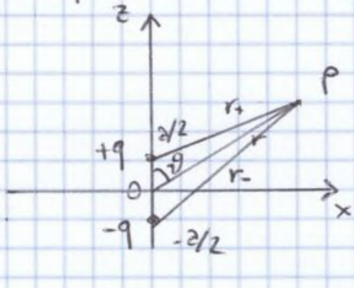
$$v_B = \sqrt{\frac{2}{m}q(V(A)-V(B))}$$

Ma $V = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}x + c \Rightarrow \begin{cases} V(A) = c \\ V(B) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\ell + c \end{cases} \Rightarrow V(A) - V(B) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\ell$

$$v_B = \sqrt{\frac{2q}{m}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\ell}$$

## DIPOLI

Un dipolo è un sistema neutro globalmente.




$$V(P) = V_+(P) + V_-(P) = K\frac{Q}{r_+} - K\frac{Q}{r_-}$$

xk una delle cariche è negativa

$P = (x, z) \qquad q_+ = (0, \frac{a}{2}) \qquad q_- = (0, -\frac{a}{2})$

$$r_+ = \sqrt{x^2 + (z-\frac{a}{2})^2}$$

$$r_- = \sqrt{x^2 + (z+\frac{a}{2})^2}$$

$$V(x,z) = KQ\left\{\frac{1}{\sqrt{x^2+(z-\frac{a}{2})^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+(z+\frac{a}{2})^2}}\right\}$$

$$= K\left\{ p_x r^{-3} + (xp_x + yp_y + zp_z)(-3) r^{-4} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \right\} =$$

$$= K\left\{ p_x \cdot r^{-3} - 3(xp_x + yp_y + zp_z) \cdot r^{-4} \cdot \frac{x}{r} \right\} =$$

$$= K\left\{ \frac{p_x}{r^3} - 3\frac{(xp_x + yp_y + zp_z)x}{r^5} \right\} = K\left\{ \frac{p_x}{r^3} - 3\frac{(\vec{p}\cdot\vec{r})x}{r^5} \right\}$$

Per gli altri termini si procede analogamente:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = K\left\{ \frac{p_y}{r^3} - 3\frac{(\vec{p}\cdot\vec{r})y}{r^5} \right\}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = K\left\{ \frac{p_z}{r^3} - 3\frac{(\vec{p}\cdot\vec{r})z}{r^5} \right\}$$

Quindi:

$$\vec{E} = -K\left\{ \frac{p_x\vec{u_x} + p_y\vec{u_y} + p_z\vec{u_z}}{r^3} - 3\frac{(\vec{p}\cdot\vec{r})(x\vec{u_x} + y\vec{u_y} + z\vec{u_z})}{r^5} \right\} =$$

$$= -K\left\{ \frac{\vec{p}}{r^3} - 3\frac{(\vec{p}\cdot\vec{r})\cdot\vec{r}}{r^5} \right\} = \vec{E}$$ → CAMPO DIPOLO SE $r \gg a$

La precedente formula può anche essere espressa come:

$$\vec{E} = K\left\{ \frac{3(p\cdot\vec{u_r})\vec{u_r} - \vec{p}}{r^3} \right\}$$ oppure $$\vec{E} = K\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\cdot\vec{r} - \vec{p}r^2}{r^5}$$

Cosa succede se mettiamo un dipolo in un campo esterno?

$$+q \equiv \left(x + \frac{a}{2}x,\ y + \frac{a}{2}y,\ z + \frac{a}{2}z\right)$$

$$-q \equiv \left(x - \frac{a}{2}x,\ y - \frac{a}{2}y,\ z - \frac{a}{2}z\right)$$

$$\vec{a} = a_x\vec{u_x} + a_y\vec{u_y} + a_z\vec{u_z}$$

Calcoliamo l'energia potenziale del dipolo:

$$U = qV\left(x + \frac{a}{2}x,\ y + \frac{a}{2}y,\ z + \frac{a}{2}z\right) - qV\left(x - \frac{a}{2}x,\ y - \frac{a}{2}y,\ z - \frac{a}{2}z\right)$$

Utilizzando Taylor (possiamo perché a è molto piccolo) si ottiene:

$$V\left(x + \frac{a}{2}x,\ y + \frac{a}{2}y,\ z + \frac{a}{2}z\right) = V(x,y,z) + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{a}{2}x + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{a}{2}y + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{a}{2}z$$

$$V\left(x - \frac{a}{2}x,\ y - \frac{a}{2}y,\ z - \frac{a}{2}z\right) = V(x,y,z) - \frac{\partial V}{\partial x}\frac{a}{2}x - \frac{\partial V}{\partial y}\frac{a}{2}y - \frac{\partial V}{\partial z}\frac{a}{2}z$$

Quindi:

$$U = q\left\{ \cancel{V(x,y,z)} + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{a}{2}x + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{a}{2}y + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{a}{2}z - \cancel{V(x,y,z)} + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{a}{2}x + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{a}{2}y + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{a}{2}z \right\} =$$

$$= q\left\{ \frac{\partial V}{\partial x}a_x + \frac{\partial V}{\partial y}a_y + \frac{\partial V}{\partial z}a_z \right\} =$$

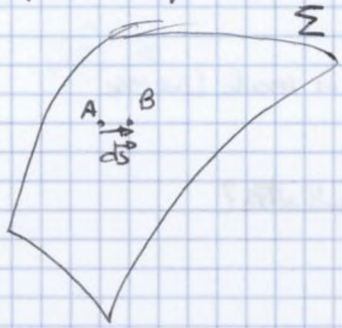
$$= \underbrace{q(\vec{a}}_{\vec{p}}\cdot\underbrace{\vec{\nabla}V)}_{=-\vec{E}} =$$

$$= \boxed{-\vec{p}\cdot\vec{E} = U}$$ ← (!!)

## SUPERFICI EQUIPOTENZIALI

Il potenziale ha lo stesso valore in ogni punto: $V = cost.$

Su una superficie equipotenziale il campo è sempre normale alla superficie: due superfici equipotenziali non si possono incontrare.




$$\forall P \in \Sigma \quad V(P) = V_0$$

Su $\Sigma$ prendiamo un punto A e un punto B, molto vicini: in questo modo $\vec{ds}$ è praticamente tangente a $\Sigma$:

$$\vec{ds} = \vec{AB} = ds\,\vec{u_T}$$

Poniamo in A la carica $q_0$:

$$\vec{F} = q_0 \cdot \vec{E}(A)$$

Se $q_0$ va da A a B si ha:

$$dW_{A\to B} = \vec{F}\,\vec{ds} = q_0\,\vec{E}(A)\,\vec{ds}$$

Poiché il campo è conservativo, possiamo scrivere:

$$dW_{A\to B} = q_0\,(V(A) - V(B))$$

Ma poiché la superficie è equipotenziale, si ha:

$$V(A) = V(B) = V_0 \implies W_{A\to B} = 0$$

Dunque:

$$q_0 \vec{E}(A)\,\vec{ds} = 0 \qquad \forall B \text{ prossimo ad } A$$

$$\Downarrow$$

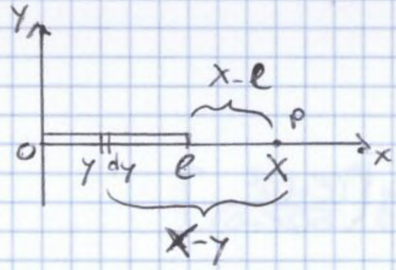
$$q_0\,\vec{E}(A) \cdot \vec{u_T}\,ds = 0 \qquad \text{deve valere } \forall q_0 \text{ e } \forall ds$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{E}(A) \cdot \vec{u_T} = 0 \qquad \text{quindi il campo elettrico è perpendicolare a } \Sigma!!$$

### Esercizio

Una barra di lunghezza $\ell$ è caricata uniformemente con la carica Q. Quanto vale il campo in un generico punto P fuori dalla barra?




Sia $X \geq \ell$ la distanza di P da O.

La carica in dy è:

$$dQ = \lambda\,dy = \frac{Q}{\ell}\,dy$$

Il campo elettrico che dQ crea in P è:

$$d\vec{E}(P) = k\,dQ\,\frac{\vec{u_x}}{(X-y)^2} = k\,\frac{\lambda\,dy}{(X-y)^2}\,\vec{u_x}$$

Quindi:

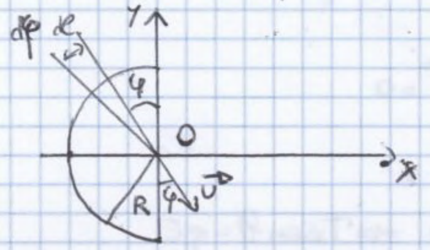
possiamo cambiare segno x/e e alla 2

$$\vec{E}(P) = \int_0^\ell k\,\frac{\lambda\,dy}{(x-y)^2}\,\vec{u_x} = k\lambda\,\vec{u_x}\int_0^\ell \frac{dy}{(y-x)^2} = -k\lambda\,\vec{u_x}\left(\frac{1}{(y-x)}\right)_0^\ell = -k\lambda\,\vec{u_x}\left(\frac{1}{\ell-x} - \frac{1}{-x}\right) =$$

$$= -k\lambda\,\vec{u_x}\underbrace{\left(\frac{x+\ell-x}{x(\ell-x)}\right)}_{\text{la quantità è sempre negativa perché } x>\ell\text{: cambio segno}} = k\lambda\,\frac{\ell}{x(x-\ell)}\,\vec{u_x}$$

Esercizio

Si ha una barra piegata a semicerchio con densità di carica $\lambda = \lambda(\varphi)$ (non costante). Quanto vale il campo elettrico generato dalla barra in O?




In d$\varphi$: $dQ = \lambda d\ell = \lambda R d\varphi$

$$\begin{cases} d\vec{E}(O) = k \dfrac{dQ}{R^2} \vec{u} \\ \vec{u} = \sin\varphi \, \vec{u_x} - \cos\varphi \, \vec{u_y} \end{cases}$$

$$d\vec{E} = k \frac{\lambda d\varphi R}{R^2} \left( \sin\varphi \, \vec{u_x} - \cos\varphi \, \vec{u_y} \right)$$

Quindi:

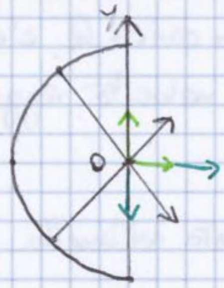
$$\vec{E} = \int_0^{\pi} k \lambda(\varphi) \frac{d\varphi}{R} \left( \sin\varphi \, \vec{u_x} - \cos\varphi \, \vec{u_y} \right)$$

Analizziamo due casi diversi:

1° CASO: supponiamo $\lambda$ uniforme: $\lambda(\varphi) = \lambda_0$

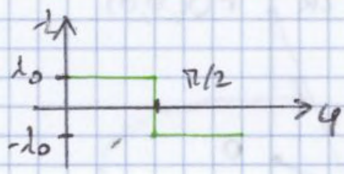
$$\vec{E}(O) = \int_0^{\pi} k \lambda_0 \frac{d\varphi}{R} \left( \sin\varphi \, \vec{u_x} - \cos\varphi \, \vec{u_y} \right) = k \frac{\lambda_0}{R} \int_0^{\pi} \left( \sin\varphi \, \vec{u_x} - \cos\varphi \, \vec{u_y} \right) d\varphi =$$

$$= -k \frac{\lambda_0}{R} \left( \cos\varphi \, \vec{u_x} + \sin\varphi \, \vec{u_y} \right) \Big|_0^{\pi} = -k \frac{\lambda_0}{R} \left( -2 \vec{u_x} \right) = 2k \frac{\lambda_0}{R} \vec{u_x}$$




le componenti in y si annullano a vicenda, mentre quella in x si raddoppia.

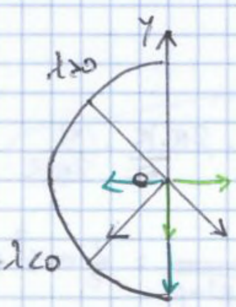
2° CASO:
$$\begin{cases} \lambda > 0 & \text{se } 0 \le \varphi \le \pi/2 \\ \lambda < 0 & \text{se } \pi/2 \le \varphi \le \pi \end{cases}$$




$$\vec{E}(O) = \int_0^{\pi} k \lambda(\varphi) \frac{d\varphi}{R} \left( \sin\varphi \, \vec{u_x} - \cos\varphi \, \vec{u_y} \right) =$$

$$= \int_0^{\pi/2} k \frac{\lambda_0}{R} \left( \sin\varphi \, \vec{u_x} - \cos\varphi \, \vec{u_y} \right) d\varphi - \int_{\pi/2}^{\pi} k \frac{\lambda_0}{R} \left( \sin\varphi \, \vec{u_x} - \cos\varphi \, \vec{u_y} \right) d\varphi =$$

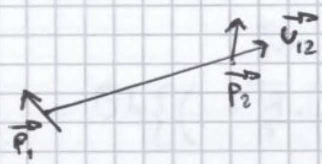
fare calcolo $= -2k \dfrac{\lambda_0}{R} \vec{u_y}$




le componenti in x si annullano, quella in y si raddoppia dalla parte negativa.

$$E_i = E_{2R} \Rightarrow K\frac{Qq_P}{R} = \frac{1}{2}mv_2^2 + K\frac{Qq_P}{R\sqrt{5}} \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2}{m}\frac{KQq_P}{R}\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}$$

## ENERGIA DI INTERAZIONE TRA DUE DIPOLI

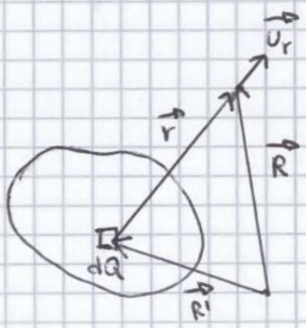



$$\begin{cases} U = -\vec{p}_2\cdot\vec{E}_1 \\ \vec{E}_1 = K\dfrac{3(\vec{p}_1\cdot\vec{u}_{12})\cdot\vec{u}_{12} - \vec{p}_1}{r^3} \end{cases}$$

$$\boxed{U = -K\frac{3(\vec{p}_1\cdot\vec{u}_{12})\cdot\vec{u}_{12}\cdot\vec{p}_2 - \vec{p}_1\cdot\vec{p}_2}{r^3}}$$

La formula dipende dall'orientamento relativo di un dipolo verso l'altro, ma anche da come è messo un dipolo rispetto alla congiungente.
La $r$ compare al cubo, mentre nell'energia di interazione tra due cariche si aveva: $U = K\frac{Q_1Q_2}{r}$

## SVILUPPO MULTIPOLARE




Qual è il potenziale al di fuori del corpo?

$$V = \int_{corpo} K\frac{dQ}{r}$$

Sappiamo che $dQ$ occupa il volume $d\tau'$:

$$V = \int_{corpo} K\frac{\rho(\vec{R'})\,d\tau'}{r}$$

Si ha che: $\vec{R} = \vec{R'} + \vec{r} \Rightarrow \vec{r} = \vec{R} - \vec{R'}$

Quindi:

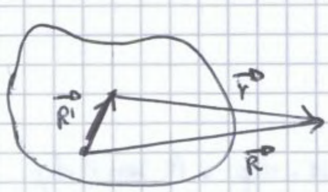
$$|\vec{r}| = \sqrt{\vec{r}\cdot\vec{r}} = \sqrt{(\vec{R}-\vec{R'})\cdot(\vec{R}-\vec{R'})} = \sqrt{R^2 - 2\vec{R}\cdot\vec{R'} + R'^2}$$

Da cui:

$$V = \int_\tau K\frac{\rho(\vec{R'})}{\sqrt{R^2 - 2\vec{R}\cdot\vec{R'} + R'^2}}\,d\tau'$$

Se $R \to \infty$ (cioè se $R$ è molto maggiore della dimensione tipica del corpo)
Si ha che $\frac{R'}{R} \to 0$

$$V = \int_\tau K\frac{\rho(\vec{R'})}{R\sqrt{1 - 2\frac{\vec{R}}{R}\cdot\frac{\vec{R'}}{R} + \left(\frac{R'}{R}\right)^2}}\,d\tau'$$




Poniamo:

$$\varepsilon = -2\frac{\vec{R}}{R}\cdot\frac{\vec{R'}}{R} + \left(\frac{\vec{R'}}{R}\right)^2$$

Se $R \to \infty$, $\varepsilon \to 0$

$$d\Sigma_n = R^2 \operatorname{sen}\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

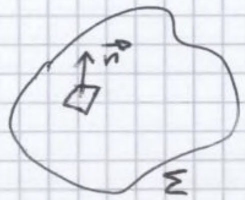
Quindi:

$$d\Omega = \frac{d\Sigma_n}{R^2} = \operatorname{sen}\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

Da cui:

$$\Omega = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi} \sin\vartheta \, d\vartheta\right) d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\vartheta \, d\vartheta = 2\pi\left(-\cos\vartheta\right)_0^{\pi} = 4\pi$$

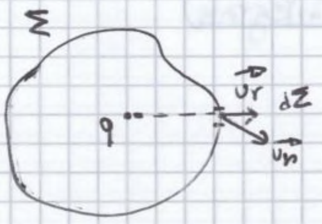
## LEGGE DI GAUSS




$$\phi_\Sigma(\vec{F}) = \int_\Sigma \vec{F}\cdot\vec{n} \, d\Sigma \qquad \text{(se } \Sigma \text{ è chiusa, } \vec{n} \text{ è verso l'esterno)}$$

$$\phi_\Sigma(\vec{E}) = \frac{Q(\Sigma)}{\varepsilon_0} \Rightarrow \phi_\Sigma(\vec{E}) = 4\pi K \, Q(\Sigma)$$

Supponiamo di avere una carica puntiforme circondata dalla superficie chiusa $\Sigma$



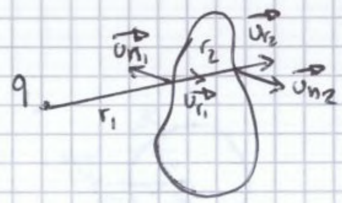

$$\vec{E} = K\frac{q}{r^2}\vec{u_r}$$

$$\phi = \int_\Sigma \vec{E}\cdot\vec{u_n} \, d\Sigma = \int_\Sigma Kq \frac{\overbrace{\vec{u_r}\cdot\vec{u_n} \, d\Sigma}^{d\Sigma_n}}{r^2} =$$

$$= \int_\Sigma Kq \frac{d\Sigma_n}{r^2} = \int_\Sigma Kq \, d\Omega = Kq \int_\Sigma d\Omega = 4\pi Kq$$

$$\boxed{\phi = 4\pi Kq}$$

Il flusso è indipendente dalla posizione della carica all'interno della superficie.
Supponiamo che la carica sia esterna alla superficie.




$$\phi_\Sigma(\vec{E}) = \oint_\Sigma \vec{E}\cdot\vec{u_n} \, d\Sigma =$$

$$= \int_{\Sigma_1} \vec{E}(\Sigma_1)\vec{u_{n_1}} \, d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_2} \vec{E}(\Sigma_2)\vec{u_{n_2}} \, d\Sigma_2 =$$

$$= \int_{\Sigma_1} Kq \frac{\vec{u_{r_1}}\cdot\vec{u_{n_1}}}{r_1^2} d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_2} Kq \frac{\vec{u_{r_2}}\cdot\vec{u_{n_2}}}{r_2^2} d\Sigma_2 =$$

xk l'angolo è ottuso

$$= \int_{\Sigma_1} -Kq \underbrace{\frac{d\Sigma_{n_1}}{r_1^2}}_{d\Omega} + \int_{\Sigma_2} Kq \underbrace{\frac{d\Sigma_{n_2}}{r_2^2}}_{d\Omega} = Kq\int\left(-d\Omega + d\Omega\right) = 0$$

!!

Una carica puntiforme all'esterno di una superficie chiusa dà un flusso complessivamente nullo!!

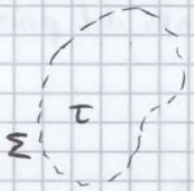
Se q è esterna alla superficie si ottiene direttamente:

$\cdot q$  $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0 \Rightarrow \Phi_\Sigma(\vec{E})=0$

## EQUAZIONE DI POISSON

È un'equazione di tipo locale.

Consideriamo una regione con cariche distribuite non uniformemente ma in modo continuo. Isoliamo una regione di spazio delimitata da una superficie Σ.




$$\oint_\Sigma \vec{E}\cdot\vec{u}_n\, d\Sigma = \frac{Q(\Sigma)}{\varepsilon_0}$$

Ma:

$$Q(\Sigma)=\iiint_{\tau(\Sigma)} \rho\, d\tau$$

Quindi:

$$\oint_\tau \vec{E}\cdot\vec{u}_n\, d\Sigma = \iiint_{\tau(\Sigma)} \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, d\tau \Rightarrow \iiint_{\tau(\Sigma)} \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, d\tau = \iiint_{\tau(\Sigma)} \frac{\rho}{\varepsilon_0}\, d\tau$$

Dunque:

$$\iiint_{\tau(\Sigma)}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right)d\tau=0$$

Σ era arbitraria: la formula deve valere $\forall\Sigma$, quindi:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}-\frac{\rho}{\varepsilon}=0 \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$ → lega campo e densità in un punto.

## EQUAZIONI DI MAXWELL

1ª EQ. DI MAXWELL: $\vec{\nabla}\times\vec{E}=0$

Significa che il campo elettrostatico è conservativo e implica: $\vec{E}=-\vec{\nabla}V$

2ª EQ. DI MAXWELL: $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon_0$

Significa che le sorgenti del campo sono le cariche.

Da qui si ricava:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=\rho/\varepsilon_0$$

Sappiamo che:

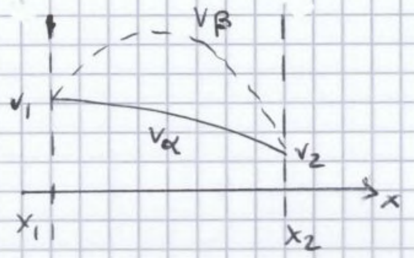
$$E_x=-\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$E_y=-\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$E_z=-\frac{\partial V}{\partial z}$$

Quindi:

Con condizioni al contorno assegnate (cioè conosciamo il potenziale in qualche punto).




$V_1, V_2$ = condizioni al contorno.

La soluzione è unica!

Infatti se ci fossero due soluzioni, la funzione $V = V_\beta - V_\alpha$ si annullerebbe al bordo:

$$V(x_1) = V(x_2) = 0$$

Dunque esisterebbe $x^*$ in cui $V(x^*)$ sarebbe massimo o minimo, ma il campo non può avere derivata prima pari a zero (corrisponderebbe a un punto di equilibrio stabile o instabile, a seconda che sia massimo o minimo).
Quindi la soluzione è unica.

Posto:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \nabla^2$$

Possiamo scrivere:

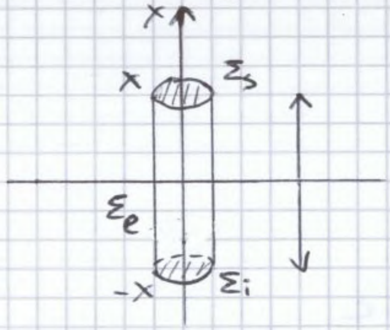
$$\nabla^2 V = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

e

$$\nabla^2 V = 0$$

Esercizio

Qual è il campo elettrico di un piano infinito uniformemente carico?
Proprio perché il piano è infinito e uniformemente carico, non si possono fare distinzioni tra destra e sinistra, quindi il campo deve essere perpendicolare al piano stesso.
Il campo $\vec{E}$ in ogni punto non può dipendere da coordinate del piano: in modulo dipende solo da $x$ ed è diretto come $\vec{u_x}$.




$$\vec{E} = E(x)\,\vec{u_x}$$

Sopra e sotto al piano, il campo deve avere direzioni opposte:

$$E(-x) = -E(x)$$

Consideriamo un cilindro come in figura (è una superficie gaussiana, cioè mantiene tutte le simmetrie del problema).

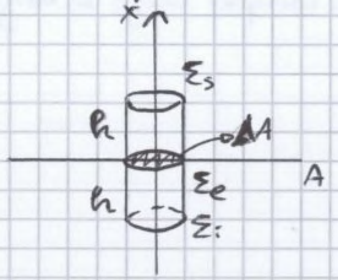
$$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \oint_\Sigma \vec{E}\,\vec{u_n}\,d\Sigma = \iint_{\Sigma_s} \vec{E}(x)\cdot\vec{u_{ns}}\,d\Sigma + \iint_{\Sigma_i} \vec{E}(-x)\cdot\vec{u_{ni}}\,d\Sigma + \underbrace{\iint_{\Sigma_e} \vec{E}\cdot\vec{u_{ne}}\,d\Sigma}_{=0}$$

L'integrale su $\Sigma_e$ è pari a zero perché $\vec{u_{ne}}$ sta nel piano $(y,z)$ ed è perpendicolare ad $\vec{E}$ in ogni punto.
Poniamo: $\Sigma_s = \Sigma_i = A$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 178

## Esercizio

Dimostriamo che tutte le volte che c'è una superficie carica in presenza di altre cariche ci sono delle componenti che non variano passando da sopra a sotto la superficie.




Consideriamo un cilindro come in figura.
Se $\Delta A$ è sufficientemente piccola, $\sigma$ è uniforme.
Quindi la carica contenuta in $\Delta A$ è:

$$\Delta Q = \sigma \cdot \Delta A$$

$$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \oint_\Sigma \vec{E}\,\vec{u_n}\,d\Sigma = \iint_{\Sigma_s} \vec{E}\,\vec{u_{ns}}\,d\Sigma + \iint_{\Sigma_i} \vec{E}\,\vec{u_{ni}}\,d\Sigma + \iint_{\Sigma_e} \vec{E}\cdot\vec{u_{ne}}\,d\Sigma$$

Vogliamo che $h \to 0$, quindi:

$$\lim_{h\to 0} \oint_\Sigma \vec{E}\cdot\vec{u_n}\,d\Sigma = \iint_{\Sigma_s} \vec{E}\,\vec{u_{ns}}\,d\Sigma + \iint_{\Sigma_i} \vec{E}\cdot\vec{u_{ni}}\,d\Sigma + 0 =$$

$$= \vec{E_s}\,\vec{u_n}\,\Delta A + \vec{E_i}\,(-\vec{u_n})\,\Delta A =$$ (abbiamo applicato teo. media del calcolo integrale)

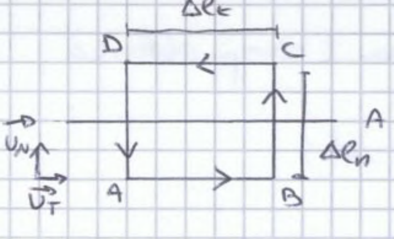
normale superiore

$$= (E_{ns} - E_{ni})\,\Delta A$$

Confrontiamo il risultato ottenuto con quello che si ricava dalla legge di Gauss:

$$(E_{ns} - E_{ni})\,\Delta A = \frac{\sigma\cdot\Delta A}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_{ns} - E_{ni} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Abbiamo trovato la discontinuità del campo lungo la normale alla superficie.
Analizziamo la componente tangente del campo




Consideriamo il percorso in figura e calcoliamone la circuitazione.

$$\oint_\gamma \vec{E}\cdot d\vec{s} =$$

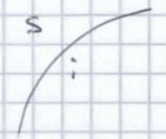
$$= \int_A^B \vec{E}\cdot\vec{u_T}\,ds + \int_B^C \vec{E}\cdot\vec{u_N}\,ds + \int_C^D \vec{E}(-\vec{u_T})\,ds + \int_D^A \vec{E}(-\vec{u_N})\,ds = 0$$ xk il campo è conservativo

Vogliamo che $\Delta\ell_n \to 0$, quindi:

$$\lim_{\Delta\ell_n \to 0} \oint_\gamma \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{E}\cdot\vec{u_T}\,ds + \int_C^D \vec{E}(-\vec{u_T})\,ds =$$

$$= \vec{E_i}\cdot\vec{u_T}\,\Delta\ell_T - \vec{E_s}\cdot\vec{u_T}\,\Delta\ell_T =$$

Potevamo giungere alla stessa conclusione senza calcoli. Infatti:




s = esterno del conduttore
i = interno del conduttore

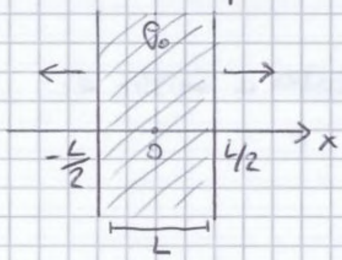
Sappiamo che:
$$\begin{cases} E_{Ti} = E_{TS} \\ E_{NS} - E_{Ni} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \end{cases}$$

Quindi:
$$\vec{E}_i = 0 \Rightarrow \begin{cases} E_{Ti} = 0 \\ E_{Ni} = 0 \end{cases}$$
$$\vec{E}_S = \begin{cases} E_{TS} = 0 \quad (\text{perché uguale a } E_{Ti}) \\ E_{NS} = E_{Ni} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \end{cases}$$

Abbiamo trovato il campo appena al di fuori di un conduttore in equilibrio elettrostatico:
$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_N} \rightarrow (\text{Teorema di Coulomb})$$

**Esempio**

Si abbia uno strato di materiale infinito con densità di carica volumica $\rho_0$.
Qual è il campo elettrico in tutto lo spazio?




Poiché il corpo è infinito su y e z, ci aspettiamo che il campo dipenda solo da x, che sia una funzione dispari e che sia perpendicolare alla superficie in ogni punto.

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \qquad \vec{E} = \vec{E}(x) = E(x)\vec{u}_x \qquad \vec{E}(x) = -\vec{E}(-x)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial E_y}{\partial y}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial E_z}{\partial z}}_{=0} = \frac{dE}{dx}$$

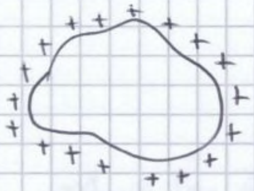
Quindi: $\frac{dE}{dx} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}$

Riconosciamo tre casi:
$$x > \frac{L}{2} \Rightarrow \rho = 0 \Rightarrow \frac{dE_D}{dx} = 0 \quad \text{destra}$$
$$-\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2} \Rightarrow \rho = \rho_0 \Rightarrow \frac{dE_C}{dx} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \quad \text{centrale}$$
$$x < -\frac{L}{2} \Rightarrow \rho = 0 \Rightarrow \frac{dE_S}{dx} = 0 \quad \text{sinistra}$$

Se per $x > \frac{L}{2}$ e per $x < -\frac{L}{2}$ la derivata del campo è zero, vuol dire che il campo è costante:

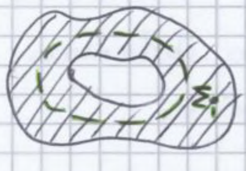
Sulla superficie si genera un campo: $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u_N}$

Se su un conduttore scarico gettiamo una carica $Q$, in superficie si origina un campo: $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u_N}$



Si ha che: $\iint \sigma \, d\Sigma = Q$.

Cosa succede se il conduttore è bucato?




Nella parte tratteggiata si ha $\vec{E} = 0$.

Consideriamo una superficie $\Sigma_i$ come in figura.

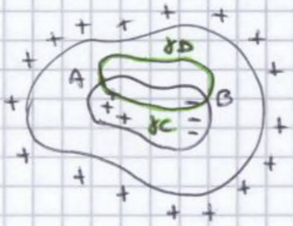
$$\Phi_{\Sigma_i}(\vec{E}) = \frac{Q(\Sigma_i)}{\varepsilon_0}$$

Ma:

$$\Phi_{\Sigma_i}(\vec{E}) = \oiint_{\Sigma_i} \vec{E} \cdot \vec{u_N} \, d\Sigma = 0 \quad \text{(perché all'interno del conduttore } \vec{E} = 0\text{)}$$

Quindi si ha che: $Q(\Sigma_i) = 0$

Ciò significa che la carica NON si distribuisce sulla superficie interna.




Supponiamo che sia possibile la configurazione di carica in figura.

Consideriamo una curva $\gamma_C$ che segua il campo e una curva $\gamma_D$ che passi attraverso il conduttore.

$$\oint_{\gamma_C + \gamma_D} \vec{E} \, d\vec{s} = 0 \quad \text{(perché } \vec{E} \text{ è conservativo)}$$

Quindi:

$$\oint_{\gamma = \gamma_C + \gamma_D} \vec{E} \, d\vec{s} = \underbrace{\int_{A,\gamma_C}^{B} \vec{E} \, d\vec{s}}_{>0} + \underbrace{\int_{B,\gamma_D}^{A} \vec{E} \, d\vec{s}}_{=0 \text{ perché } \vec{E} = 0 \text{ nel conduttore}} \neq 0$$

Assurdo!

Questa configurazione di cariche è impossibile.

La carica si dispone sulla superficie esterna, come in figura.

Cosa succede se si mette una carica nella cavità?


Consideriamo una superficie $\Sigma$ come in figura.

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \frac{Q(\Sigma)}{\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow Q(\Sigma) = 0$$

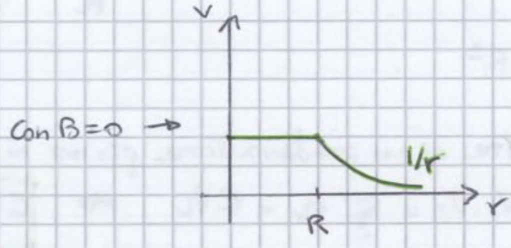
Da cui:

$$\begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} = -\frac{\partial V}{\partial r} \\ 0 = -\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\cdot\frac{1}{r} \\ 0 = -\frac{\partial V}{\partial \varphi}\,\frac{1}{r\sin\vartheta} \end{cases} \Rightarrow V = V(r)$$

Quindi:

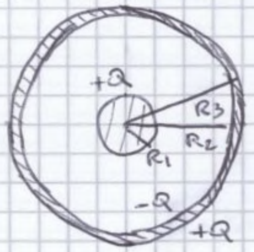
$$\frac{dV}{dr} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r^2} \Rightarrow V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r} + B$$

Se $r<R$, V è costante




## CONDENSATORI SFERICI

Analizziamo la situazione di induzione completa.



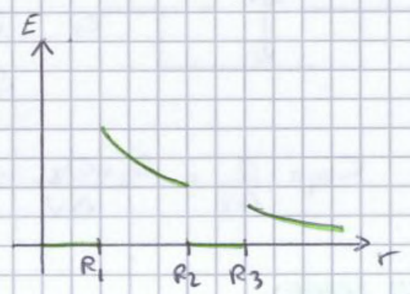

La sfera interna è carica di carica +Q.
Qual è il campo elettrico?
Qual è la differenza di potenziale tra conduttore interno ed esterno?

Se $r<R_1$: $E_1 = E(r<R_1) = 0$

Se $R_1 \le r \le R_2$: $E_2 = E(R_1<r<R_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$

Se $R_2 \le r \le R_3$: $E_3 = E(R_2<r<R_3) = 0$

Se $r>R_3$: $E_4 = E(r>R_3) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$




Per quanto riguarda il potenziale:

$$V(r=R_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R_1} + B = V_1$$

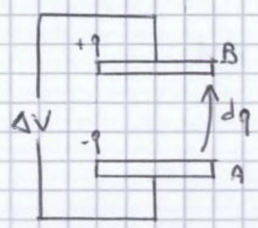
$$V(r=R_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R_2} + B = V_2$$

$$\Delta V = V_1 - V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)Q$$

CAPACITÀ: è il rapporto tra la carica e la differenza di potenziale tra due corpi (unità di misura: Farad = $\frac{C}{V}$)

# DENSITÀ DI ENERGIA

Si abbiano due pezzi di metallo scarichi. Si vuole arrivare ad avere una differenza di potenziale tra i due.




Prendiamo una carica da A e la portiamo in B; ripetiamo l'operazione più volte. Si ottiene:

$$dW_{ext} = \int_A^B \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{s}$$

Se lo spostamento avviene in modo infinitamente lento, si ha che in ogni punto

$$\vec{F}_{ext} = \vec{F}_c$$ → forza del campo

Quindi:

$$dW_{ext} = \int_A^B -\vec{F}_c \cdot d\vec{s} = -\underbrace{\int_A^B \vec{F}_c \cdot d\vec{s}}_{-dU} = dU$$ → variazione di en. potenziale

Sappiamo che: $dU = dq\, \Delta V$

Inoltre: $C = \frac{q}{\Delta V} \Rightarrow \Delta V = \frac{q}{C}$

Perciò si ottiene:

$$dW_{ext} = dq \cdot \frac{q}{C}$$

Da cui:

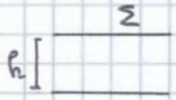
$$W_{ext} = U = \int_0^Q \frac{q\,dq}{C} = \boxed{\frac{Q^2}{2C} = U}$$

Tenendo conto della definizione di capacità possiamo riscrivere la formula come:

$$U = \frac{1}{2} Q \Delta V$$

$$U = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2$$

Ipotizziamo di avere un condensatore piano. Sappiamo che: $C = \varepsilon_0 \cdot \frac{\Sigma}{h}$




il suo volume è:

$$\tau = \Sigma \cdot h$$

Quindi:

$$U = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{\Sigma}{h} (\Delta V)^2 \cdot \frac{h}{h} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \Sigma h \left(\frac{\Delta V}{h}\right)^2$$

Sappiamo che:

$$E = \frac{\Delta V}{h}$$

Quindi: $U = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \tau E^2$

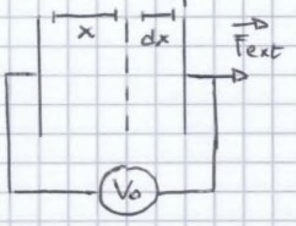
Dim. rigorosa nei fogli in rete

Da cui:

$$\boxed{\frac{U}{\tau} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2}$$

→ DENSITÀ DI ENERGIA

3) Carichiamo il condensatore con un generatore; mentre è ancora attaccato, spostiamo una piastra di dx. In questo caso, $\Delta V$ rimane costante.




Prima dello spostamento abbiamo:

$$\left.\begin{array}{l} E = \dfrac{V_0}{x} \\ E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{V_0}{x} \Rightarrow \sigma = \frac{\varepsilon_0 V_0}{x}$$

Questo implica che all'aumentare di $x$, $\sigma$ diminuisce. Poiché la carica è variabile, il sistema non è isolato!

$$\begin{cases} dW_{ext} = dU \\ dW_{ext} = \underbrace{F_{ext}\,dx}_{W\,forza} + \underbrace{dq\,V_0}_{W\,gen.} = -F_c\,dx + dq\,V_0 \end{cases} \Rightarrow dU = -F_c\,dx + dq\,V_0$$

Sappiamo che:

$$\begin{cases} q = C \cdot V_0 \\ C = \varepsilon_0 \dfrac{\Sigma}{x} \end{cases} \Rightarrow dq = d(CV_0) = dC \cdot V_0$$

dipende da $x$: non è costante

Nella formula precedente sostituiamo il risultato appena trovato e il valore di $U$ calcolato in precedenza:

$$-F_c\,dx + dC\,V_0^2 = d\left(\frac{1}{2} C V_0^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -F_c\,dx + dC\,V_0^2 = \frac{1}{2}\,dC\,V_0^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -F_c\,dx = -\frac{1}{2}\,dC\,V_0^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_c = \frac{1}{2}\frac{dC}{dx} V_0^2$$

Abbiamo che:

$$\frac{dC}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\varepsilon_0 \frac{\Sigma}{x}\right) = -\varepsilon_0 \frac{\Sigma}{x^2}$$

Quindi:

$$F_c = -\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 \Sigma}{x^2} V_0^2 = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 \Sigma \left(\frac{V_0}{x}\right)^2 = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 \Sigma E^2$$

Dunque:

$$\frac{F_c}{\Sigma} = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$ risultato identico a quello degli altri due casi.

Quindi se il sistema ha $Q$ costante, esso è isolato e bisogna tener conto solo del lavoro fatto per modificare il sistema: in caso contrario, bisogna considerare anche il generatore.

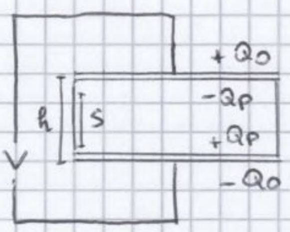
## PRESSIONE ELETTROSTATICA

Si abbia un conduttore carico: le cariche tendono a stare il più lontano possibile tra di loro, quindi se possono modificano il corpo.

Consideriamo un elemento di superficie $\Delta A$ sul conduttore. La carica contenuta

La carica che si crea sul conduttore è prelevabile: è una carica libera.

- Si abbia un condensatore di carica $Q_0$ e di differenza di potenziale $V_0$, sia $h$ la distanza tra le piastre.
  Poniamo una sbarra isolante spessa $s$ tra le piastre.
  Si osserva che $V(s)$ diminuisce linearmente con $s$, ma se $s = h \Rightarrow V(s) \neq 0$
  Analizziamo il caso $s = h$:




Introduciamo la costante dielettrica relativa $K$:

$$K = \frac{V_0}{V} > 1 \quad \text{sempre}$$

$K$ è la stessa per ogni distanza $h$ ed è un numero adimensionale. È $>1$ per ogni materiale, nel vuoto vale 1.

Sull'isolante si crea una carica $Q_P$: tale carica non è prelevabile, cioè è una carica legata.

$$V = \frac{V_0}{K}$$

$$E_0 = \frac{V_0}{h}$$

Quindi:

$$E = \frac{V}{h} = \frac{V_0}{Kh} = \frac{E_0}{K} = E$$

Il campo si riduce: tale fenomeno si spiega soltanto supponendo che si generi la carica di superficie $Q_P$.

$$E_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_0 - \sigma_P}{\varepsilon_0} \quad \text{(infatti } \sigma \text{ è dovuta in parte a } Q_0\text{, in parte a } Q_P\text{)}$$

Confrontando quest'ultimo risultato con il precedente otteniamo:

$$\frac{\sigma_0 - \sigma_P}{\varepsilon_0} = \frac{E_0}{K} \Rightarrow \frac{\sigma_0 - \sigma_P}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_0}{K \cdot \varepsilon_0} \Rightarrow K\sigma_0 - K\sigma_P = \sigma_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_P = \frac{K-1}{K}\sigma_0}$$

Dove l'indice P sta per polarizzazione.
Dunque la capacità di un condensatore completamente riempito da materiale isolante è:

$$C = \frac{Q_0}{V} = \frac{Q_0}{\frac{V_0}{K}} = \frac{KQ_0}{V_0} = K C_0 = C$$

Se il condensatore è a facce piane parallele:

$$C = K\varepsilon_0 \frac{\Sigma}{h} = \varepsilon \frac{\Sigma}{h}$$

Quindi:

$$\boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_{SV}} + \frac{1}{C_{SD}}}$$

Ovvero il sistema si comporta come una serie di due condensatori, uno vuoto e uno interamente occupato dal dielettrico.

## POLARIZZAZIONE

Sistema di Drude: un sistema di carica positiva-negativa si comporta come una molla con lunghezza a riposo nulla. Per modificarla applichiamo una forza esterna:

$$F_m = K_m \Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{F_m}{K_m}$$

$-q$ ~~~ $+q$ $\qquad |-q| = |+q| = q$

La forza esterna corrisponde a un campo elettrico esterno:

$$F_{ee} = F_m \Rightarrow qE = K_m \Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{qE}{K_m}$$

Il sistema non è più neutro e acquista un momento di dipolo:

$$p = q\Delta x = \frac{q^2}{K_m} \cdot E$$

Qualunque mezzo, sottoposto a un campo elettrico, acquista un momento di dipolo.

MODELLO DIPOLARE: un atomo neutro in un campo esterno acquista un momento di dipolo proporzionale al campo.

$$\vec{p_a} = \varepsilon_0 \alpha \vec{E}$$

Dove $\alpha$ è la polarizzabilità molecolare.

$$\left.\begin{aligned} [p_a] &= C \cdot m \\ [\varepsilon_0] &= \frac{F}{m} = \frac{C}{V \cdot m} \\ [E] &= \frac{V}{m} \end{aligned}\right\} \Rightarrow [\alpha] = \frac{[p_a]}{[\varepsilon_0][E]} = \frac{C \cdot m}{\frac{C}{Vm} \cdot \frac{V}{m}} = m^3$$

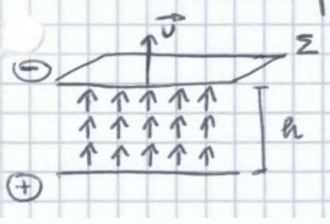
→ è un volume! per la precisione un volume atomico ($10^{-30}\ m^3$)

Dato un corpo, consideriamo la porzione di volume $d\tau$. Se $n$ è la densità atomica (unità di misura: $1/m^3$), si ha che gli atomi in $d\tau$ sono:

$$dN = n\, d\tau$$

Il momento di dipolo totale di $d\tau$ è: $d\vec{p} = dN \cdot \vec{p_a} = n\vec{p_a}\, d\tau$

Introduciamo la polarizzazione: $\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{d\tau} = n\vec{p_a}$



Consideriamo un mezzo omogeneo.

Calcoliamo il momento di dipolo tramite la polarizzazione:

$$\vec{p} = \vec{P}\tau = \vec{P} \cdot \Sigma h$$

Introduciamo il vettore spostamento:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Otteniamo:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{lib}$$

Le sorgenti del campo $\vec{D}$ sono solo le cariche libere, mentre le sorgenti del campo $\vec{E}$ sono sia le cariche libere che quelle di polarizzazione.

Dunque abbiamo visto che:

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{d\tau} = n\vec{p_a} = n\,\varepsilon_0 \alpha \vec{E}$$

Introduciamo il fattore di polarizzabilità (grandezza adimensionale)

$$\chi = n \cdot \alpha$$

Riscriviamo l'equazione precedente: $\boxed{\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}}$

Tale relazione vale per i mezzi dielettrici isotropi e lineari.

ATOMO NEUTRO

RICHIAMI

$\vec{p_a} = \varepsilon_0 \alpha \vec{E} \rightarrow$ momento di dipolo atomico

$n \rightarrow$ densità atomica

$$\vec{P} = n\,\varepsilon_0 \alpha \vec{E} = n\vec{p_a}$$

Quando $\vec{P}$ è parallelo ad $\vec{E}$, il mezzo è isotropo: in questo caso $\alpha$ è uno scalare.
Se il mezzo non è isotropo:

$$\begin{pmatrix} p_{ax} \\ p_{ay} \\ p_{az} \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

In presenza di una polarizzazione $\vec{P}$, si ha una densità di carica pari a:

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{u_N}$$

$$dq = -\frac{\partial P_z}{\partial z}\, dx\, dy\, dz$$

MEZZI LINEARI ISOTROPI

$$\vec{P} = \varepsilon_0 n \alpha \vec{E} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} \rightarrow P = \varepsilon_0 \chi E$$

Ricordiamo che:

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{u_N} \qquad e \qquad E = \frac{E_0}{K}$$

Quindi:

$$\sigma_p = \varepsilon_0 \chi E$$

Ricordiamo anche che:

condensatori?

$$\sigma_p = \frac{K-1}{K}\sigma_0 \qquad e \qquad E_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$$

Quindi:

Quindi:

$$\lim_{\Delta h\to 0}\iiint_{cil}\vec{\nabla}\cdot\vec{D}\,d\tau=\lim_{\Delta h\to 0}\oint_{\Sigma}\vec{D}\cdot\vec{u_N}\,d\Sigma=\lim_{\Delta h\to 0}\left\{\iint_{\Delta A_2}\vec{D_2}\cdot\vec{u_{n2}}\,d\Sigma+\iint_{\Delta A_1}\vec{D_1}\cdot\vec{u_{n1}}\,d\Sigma+\underbrace{\iint_{lat}\vec{D}\cdot\vec{u_N}\,d\Sigma}_{\to 0}\right\}$$

perché $\Delta h\to 0$

Ricordando che $u_{n1}=-u_{n2}$ si ottiene:

$$\lim_{\Delta h\to 0}\iiint_{cil}\vec{\nabla}\cdot\vec{D}\,d\tau=\left(\vec{D_2}\cdot\vec{u_{n2}}+\vec{D_1}\cdot\vec{u_{n1}}\right)\Delta A=\left(\vec{D_2}\,\vec{u_{n2}}-\vec{D_1}\,\vec{u_{n2}}\right)\Delta A=0$$

Poniamo $\vec{u_{n2}}=\vec{u_N}$:

$$\vec{D_2}\,\vec{u_N}-\vec{D_1}\,\vec{u_N}=0\;\Rightarrow\;\vec{u_N}\left(\vec{D_2}-\vec{D_1}\right)=0\;\Rightarrow\;\vec{D_{2N}}-\vec{D_{1N}}=0$$

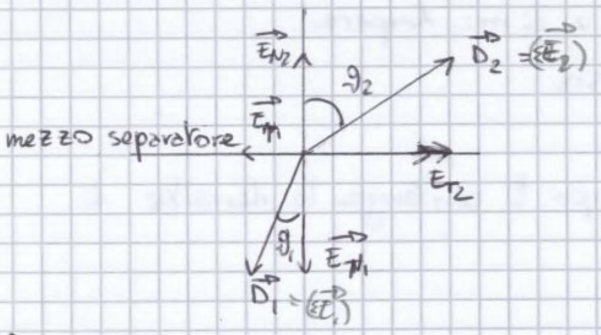
Quindi:

$$\begin{cases}\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho_{libera}\\ \vec{D_{2N}}=\vec{D_{1N}}\end{cases}\;\to\;\text{Vale per ogni mezzo}$$

Se i mezzi sono lineari e isotropi:

$$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}\qquad(\varepsilon\text{ è indipendente da }\vec{E})$$

Quindi: $\vec{D_1}=\varepsilon_1\vec{E_1}$ e $\vec{D_2}=\varepsilon_2\vec{E_2}$




$$\begin{cases}E_{T1}=E_1\,\text{sen}\,\vartheta_1\\ E_{N1}=E_1\cos\vartheta_1\end{cases}\qquad\begin{cases}E_{T2}=E_2\,\text{sen}\,\vartheta_2\\ E_{N2}=E_2\cos\vartheta_2\end{cases}$$

Dunque:

$$\begin{cases}E_{T1}=E_{T2}\;\to\;E_1\,\text{sen}\,\vartheta_1=E_2\,\text{sen}\,\vartheta_2\\ E_{N1}=E_{N2}\;\to\;\varepsilon_1E_1\cos\vartheta_1=\varepsilon_2E_2\cos\vartheta_2\end{cases}$$

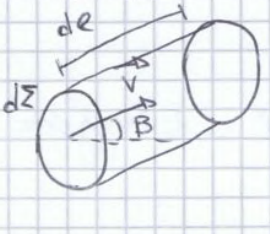
Dividendo si ottiene:

$$tg\,\vartheta_1=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\,tg\,\vartheta_2\;\to\;\boxed{\frac{tg\,\vartheta_1}{tg\,\vartheta_2}=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$$

→ LEGGE DI RIFRAZIONE delle linee di forza in presenza di due dielettrici a contatto.

## CORRENTE ELETTRICA

Se le particelle in un dielettrico si muovono, data un'area infinitesima quante particelle la attraversano nel tempo dt?




Consideriamo una superficie $d\Sigma$ abbastanza piccola perché tutte le particelle in essa si muovano con velocità $\vec{v}$.

Sia $n$ la densità di particelle.

$$\vec{dl}=\vec{v}\,dt$$

Tutte le particelle passate sono contenute nel volume in figura.

Per il teorema della divergenza si ha che:

$$\phi_\Sigma(\vec{J}) = \oint_\Sigma \vec{J} \cdot \vec{u_N}\, d\Sigma = \iiint_{\tau(\Sigma)} \vec{\nabla} \cdot \vec{J}\, d\tau$$

Quindi:

$$\iiint_{\tau(\Sigma)} \frac{d\rho}{dt} d\tau = -\iiint_{\tau(\Sigma)} \vec{\nabla} \cdot \vec{J}\, d\tau \Rightarrow \iiint_{\tau(\Sigma)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}\right) d\tau = 0$$

Poiché il precedente risultato deve valere per ogni dominio d'integrazione, si ha:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0}$$

→ eq. di continuità: vale sia in regime stazionario che in regime non stazionario

In regime stazionario le grandezze non dipendono dal tempo, ma solo dalla posizione: $\rho = \rho(x, y, z)$

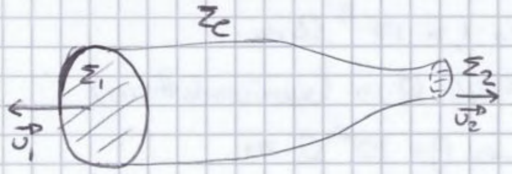
Da ciò deriva che: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

Quindi:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

⇒ $\vec{J}$ è un vettore solenoidale, quindi il suo flusso attraverso una superficie chiusa è zero.

Considériamo un tubo di flusso, cioè un oggetto composto da linee di flusso:




In regime stazionario si ha:

$$\phi_\Sigma(\vec{J}) = \oint_{\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_e} \vec{J} \cdot \vec{u_N}\, d\Sigma = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\oint_{\Sigma_1} \vec{J_1} \cdot \vec{u_1}\, d\Sigma}_{-i_1} + \underbrace{\oint_{\Sigma_2} \vec{J_2} \cdot \vec{u_2}\, d\Sigma}_{i_2} + \oint_{\Sigma_e} \vec{J_e} \cdot \vec{u_e}\, d\Sigma = 0$$

↳ vale sempre zero perché $\vec{u_e}$ è normale alla velocità e le linee di flusso sono tangenti alla velocità.

Quindi:

$$i_1 = i_2$$

Cioè la corrente elettrica che entra in un tubo di flusso è uguale a quella che esce.

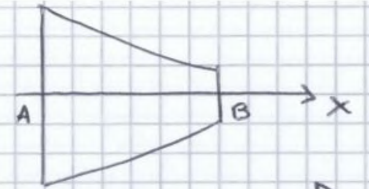
## LEGGE DI OHM

È stata dedotta sperimentalmente.

Se $\vec{E} = 0$, si ha che $\vec{J} = 0$ (cioè in assenza di campo macroscopico in un conduttore non si ha movimento ordinato di cariche) ⇒ $\vec{J}(\vec{E})$

Consideriamo un sistema formato da un protone e da un elettrone:


$$\vec{E} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{(10^{-10})^2} \simeq 1{,}2 \cdot 10^{10} \frac{V}{m} \simeq 10^{11} \frac{V}{m}$$



La differenza di potenziale è applicata dall'esterno

$\vec{E} = \rho \cdot \vec{J} \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{s} = \rho \vec{J} \cdot d\vec{s}$

Dove $d\vec{s}$ è uno spostamento infinitesimo lungo la direzione della corrente. Poiché $\vec{v_T} // \vec{v} \Rightarrow \vec{v_T} // \vec{J}$. Quindi:

$$\underbrace{-dV}_{\text{per definizione}} = \rho J ds$$

In regime stazionario $J = \frac{i}{\Sigma}$ = costante (se il filo non è calibro, $J$ non è costante)

$$-dV = \rho \cdot \frac{i}{\Sigma} \cdot ds \Rightarrow \int_A^B -dV = \int_A^B \rho \frac{i}{\Sigma} ds \Rightarrow V_A - V_B = i \underbrace{\int_A^B \rho \frac{ds}{\Sigma}}_{R}$$

La resistenza di un conduttore dipende dalla sua temperatura perché la resistività dipende dalla temperatura: $\rho = \rho(T)$

$$\rho(T) = \rho(T_0)\left[1 + \alpha(T - T_0)\right] \Rightarrow \text{aumenta } T, \text{ aumenta } \rho$$

$$\alpha = \frac{1}{T - T_0} \cdot \underbrace{\frac{\rho(T) - \rho(T_0)}{\rho(T_0)}}_{\text{variazione relativa}}$$

$\alpha$ è sempre maggiore di zero ed è dell'ordine di $10^{-3}$ 1/°C.

Cosa succede a una particella nel vuoto in presenza di un campo elettrico?

$$\vec{F} = q\vec{E} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{q}{m}\vec{E}$$

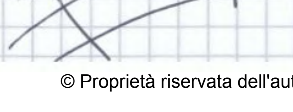
Quindi se il campo è uniforme, $\vec{a}$ è costante. Possiamo ricavare la velocità:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \frac{q}{m}\vec{E} \cdot t$$

Si ha che in un conduttore:

$$\begin{cases} \vec{J} = \sigma \vec{E} \quad \text{(legge di Ohm locale)} \\ \vec{J} = nq\vec{v_d} \end{cases} \Rightarrow nq\vec{v_d} = \sigma \vec{E} \Rightarrow \vec{v_d} = \frac{\sigma}{nq}\vec{E}$$

Dunque nel vuoto il moto è uniformemente accelerato, mentre nel conduttore il moto è uniforme pur essendo presente una forza. Questo accade perché la presenza del mezzo è responsabile di un fenomeno dissipativo che fa sì che la velocità di una particella tenda a un valore costante.



$dq$ va da A a B.

dove $q\vec{E}$ è la forza che spinge la particella a muoversi e $\eta\vec{v}$ è la forza viscosa, cioè la resistenza; $\eta$ dipende dalla forma dell'oggetto e dal mezzo (per esempio in una sfera $\eta = 6\pi\gamma R$, dove $\gamma$ è la viscosità: LEGGE DI STOKES).
Abbiamo supposto $q\vec{E} \gg m\vec{g}$.
Quando l'accelerazione si azzera, la velocità si chiama velocità limite.

$$\vec{v} = \vec{v_e}$$

$$q\vec{E} - \eta\vec{v_e} = 0 \Rightarrow \vec{v_e} = \frac{q}{\eta}\vec{E}$$

Qual è la corrente complessiva?

$$\begin{cases} \vec{J} = nq\vec{v_d} \\ \vec{v_d} = \vec{v_e} \end{cases} \Rightarrow \vec{J} = nq\frac{q}{\eta}\vec{E} = n\frac{q^2}{\eta}\vec{E} = \vec{J}$$

Per un elettrolita in equilibrio vale la legge di Ohm: $\vec{J} = \sigma\vec{E}$.
Ricaviamo che:

$$\sigma = \frac{nq^2}{\eta} \rightarrow \text{CONDUCIBILITÀ}$$

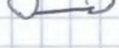
Prendiamo un corpo di rame: $n = 8{,}5 \cdot 10^{28}\ e/m^3$
Gli elettroni si muovono in modo disordinato nel corpo: quanto vale la loro velocità? Vale il principio di equipartizione dell'energia:

$$\frac{1}{2}m\langle v^2\rangle = \frac{3}{2}\underbrace{K_B}_{\text{costante di Boltzmann}}T$$

Consideriamo: $K_B = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ J/K$
$T = 300\ K$
$m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ Kg$

Quindi: $\langle v\rangle = \sqrt{\frac{3K_BT}{m}} \simeq 10^5\ m/s$

Qual è la velocità degli elettroni in presenza di una corrente?



$i = 8A$
$\Sigma = 4\ mm^2$

$$J = \frac{i}{\Sigma} = 2 \cdot 10^6\ A/m^2$$

Ma $J = nqv_d \Rightarrow v_d = \frac{J}{nq} = \frac{2 \cdot 10^6}{8{,}5 \cdot 10^{28} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 1{,}5 \cdot 10^{-4}\ m/s$

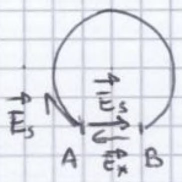
Quindi il fatto che gli elettroni si muovano può essere considerato una perturbazione
Se non c'è un campo esterno:

in media $v_d = 0$

## FORZA ELETTROMOTRICE

Si abbia una particella in una guida circolare senza attrito. Se si sposta la particella dalla posizione di equilibrio, essa ci torna con $\vec{v}=0$.

Se vogliamo che la particella continui a girare bisogna applicare una differenza di potenziale $V_A > V_B$.




Se, una volta compiuto un giro completo, vogliamo far tornare le cariche in A, dobbiamo applicare $\vec{E}_*$ (campo elettromotore)

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{E}_s & \forall P \in \gamma_{ext} \\ \vec{E}_* + \vec{E}_s & \forall P \in \gamma_{int} \end{cases}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V \Rightarrow \oint_\gamma \vec{E}\, d\vec{s} = 0$$

Ma:

$$\oint_\gamma \vec{E}\, d\vec{s} = f_{em} \text{ (forza elettromotrice)}$$

Quindi:

xk $\vec{E}_*$ non è presente su $\gamma_{ext}$?

$$f_{em} = \oint_\gamma (\vec{E}_s + \vec{E}_*)\, d\vec{s} = \underbrace{\oint_\gamma \vec{E}_s\, d\vec{s}}_{=0} + \oint_\gamma \vec{E}^*\, d\vec{s} = \oint_{\gamma_{ext}+\gamma_{int}} \vec{E}_*\, d\vec{s} = \int_{\gamma_{int}} \vec{E}_*\, d\vec{s} = \int_B^A \vec{E}_*\, d\vec{s}$$

Perciò:

$$\boxed{f_{em} = \int_B^A \vec{E}_*\, d\vec{s}}$$

Per la legge di Ohm abbiamo che tra A e B di $\gamma_{ext}$ vale: $V_A - V_B = Ri$

Tra B ed A di $\gamma_{int}$:

$$\vec{E} = \vec{E}_* + \vec{E}_s \Rightarrow \int_B^A \vec{E}\, d\vec{s} = \int_B^A \vec{E}_*\, d\vec{s} + \int_B^A \vec{E}_s\, d\vec{s} \Rightarrow \int_B^A \vec{E}\, d\vec{s} = f_{em} + V_B - V_A$$

Ma se vale la legge di Ohm si ha:

$$\vec{E} = \rho \vec{J}$$

Quindi:

$$\int_B^A \vec{E}\, d\vec{s} = \int_B^A \rho \vec{J}\, d\vec{s} = \int_B^A \rho J\, ds = \int_B^A \rho \frac{i}{\Sigma}\, ds = i \int_B^A \frac{\rho}{\Sigma}\, ds = r \cdot i$$

$\vec{J} \parallel d\vec{s}$

la resistenza interna al generatore

Quindi:

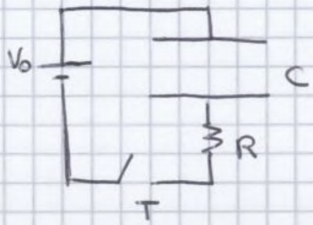
$$ri = f_{em} - [V_A - V_B] \Rightarrow f_{em} = ri + V_A - V_B = ri + Ri = i(r+R)$$

$$\begin{cases} V_A - V_B = i \cdot R_1 = \frac{R_1}{R_1+R_2} V_0 \\ V_B - V_C = i \cdot R_2 = \frac{R_2}{R_1+R_2} V_0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} E_1 = \frac{V_A - V_B}{L_1} \\ E_2 = \frac{V_B - V_C}{L_2} \end{cases} \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{V_A - V_B}{L_1} \cdot \frac{L_2}{V_B - V_C}$$

Quindi:

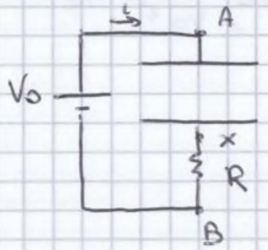
$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{R_1}{\cancel{R_1+R_2}} \frac{V_0}{L_1} \cdot \frac{L_2}{V_0 \frac{R_2}{\cancel{R_1+R_2}}} = \frac{L_2}{L_1} \cdot \frac{R_1}{R_2} = \frac{L_2}{\cancel{L_1}} \cdot \frac{1}{\sigma_1} \cdot \frac{\cancel{L_1}}{\cancel{\Sigma}} \cdot \sigma_2 \cdot \frac{\cancel{\Sigma}}{\cancel{L_2}} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

## Esercizio




In questa situazione C è scarico e $i$ è nulla.

Se chiudiamo il tasto: (imponiamo $q(0)=0$)




$$fem = V_0 = (V_A - V_x) + (V_x - V_B)$$

Sappiamo che:

$$C = \frac{q}{\Delta V} \Rightarrow \Delta V = \frac{q}{C}$$

per Ohm: $\Delta V = R \cdot i$

Quindi:

$$V_0 = \frac{q}{C} + R \cdot i = \frac{q}{C} \cdot R\frac{dq}{dt}$$

L'equazione trovata ricorda quella per la caduta di un corpo in un mezzo viscoso. È un'equazione differenziale, quindi la soluzione è data da:

$$q = q_{om} + q_p.$$

Calcoliamo $q_{om}$:

$$R\frac{dq_{om}}{dt} + \frac{1}{C} q_{om} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dq_{om}}{dt} + \frac{1}{RC} q_{om} = 0$$

↳ ha le dimensioni di un tempo. È la costante di tempo del circuito

Integriamo:

$$\int \frac{dq_{om}}{q_{om}} = \int -\frac{dt}{RC} \Rightarrow \log(q_{om}) = -\frac{t}{RC} + \text{costante}$$

$$q_{om}(t) = B e^{-t/RC}$$

Soluzione particolare: $q_p$ = costante K

Bilancio energetico:

$$0 = \frac{1}{C} q\,dq + Ri\,dq \Rightarrow 0 = \frac{1}{C} q \frac{dq}{dt} + Ri \frac{dq}{dt} \Rightarrow$$

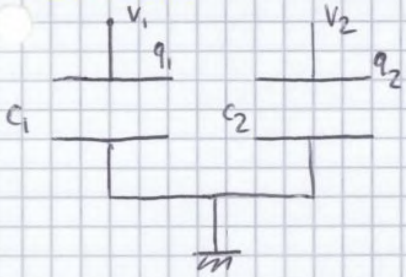
$$\Rightarrow 0 = \frac{1}{2C} \frac{d}{dt}\left(q^2\right) + Ri^2 \Rightarrow 0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{q^2}{2C}\right) + Ri^2$$

Bilancio energetico complessivo:

$$\int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(\frac{q^2}{2C}\right) dt + \int_0^\infty Ri^2 dt = 0 \Rightarrow \frac{q^2}{2C}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty Ri^2 dt = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 - \frac{q_0^2}{2C} + \int_0^\infty Ri^2 dt = 0 \Rightarrow \underbrace{\int_0^\infty Ri^2 dt}_{\text{energia dissipata dal resistore}} = \frac{q_0^2}{2C} = U(0)$$

Esercizio




Calcolare la tensione che si crea se i condensatori vengono collegati e le nuove cariche che si creano sulle armature


Al tempo iniziale:

$$\begin{cases} q_1 = C_1 V_1 \\ q_2 = C_2 V_2 \end{cases} \Rightarrow q = q_1 + q_2 = C_1 V_1 + C_2 V_2$$

Dopo il collegamento: $C = C_1 + C_2$

Ma: $C = \frac{q}{V} \Rightarrow V = \frac{q}{C} = \frac{C_1 V_1 + C_2 V_2}{C_1 + C_2}$

Quindi:

$$\begin{cases} q_1' = C_1 V = C_1 \cdot \dfrac{C_1 V_1 + C_2 V_2}{C_1 + C_2} \\ q_2' = C_2 V = C_2 \cdot \dfrac{C_1 V_1 + C_2 V_2}{C_1 + C_2} \end{cases}$$

$$\delta q_1 = q_1' - q_1 = C_1 \cdot \frac{C_1 V_1 + C_2 V_2}{C_1 + C_2} - C_1 V_1 \overset{\text{calcolo}}{=} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \cdot (V_2 - V_1)$$

$$\delta q_2 = q_2' - q_2 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} (V_1 - V_2) = -\delta q_1$$

Bilancio energetico?

$$U_{in} = U_{1\,in} + U_{2\,in} = \frac{1}{2} C_1 V_1^2 + \frac{1}{2} C_2 V_2^2$$

$$U_f = \frac{1}{2} C V^2$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 178

Ci sia un campo magnetico $\vec{B}$.
Se poniamo una carica $q$ ferma nel campo, essa rimane dove la mettiamo: un campo magnetico statico non ha effetto su cariche elettriche ferme.
Se la particella carica si muove, si ha:

- $\vec{v} \parallel \vec{B} \Rightarrow \vec{F} = 0$
- $\vec{v} \nparallel \vec{B} \Rightarrow \vec{F} \neq 0$ (traiettoria curva della particella)

La definizione di campo magnetico è data attraverso la forza di Lorentz:

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}}$$

Se una particella carica si muove sotto la sola azione di $\vec{B}$, se il campo è uniforme, la sua velocità non cambia. Infatti:

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \frac{dE_K}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v}) = \frac{1}{2}m\left\{\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}m\left\{2\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt}\right\} = \vec{v}\cdot m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}\cdot\vec{F}$$

Quindi:

$$\frac{dE_K}{dt} = \vec{v}\cdot\vec{F} \quad \text{(in generale)}$$

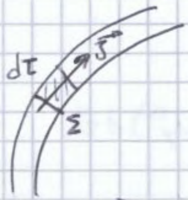
Se la forza è la forza di Lorentz:

$$\frac{dE_K}{dt} = \vec{v}\cdot(q\vec{v}\times\vec{B}) = 0 \quad \rightarrow \text{perché } q\vec{v}\times\vec{B} \text{ è } \perp \text{ a } \vec{v}$$

Ciò significa che $E_K$ non varia, quindi la velocità non varia.
Unità di misura del campo magnetico:

$$[B] = \frac{[F]}{[q][v]} = \frac{N}{C\cdot\frac{m}{s}} = \frac{N\cdot m}{C\cdot\frac{m^2}{s}} = \frac{J}{C\cdot\frac{m^2}{s}}\cdot\frac{s}{s} = \frac{J\cdot s}{C\cdot m^2} = \frac{\overbrace{V\cdot s}^{\text{Weber}}}{m^2} = \underbrace{\frac{Wb}{m^2}}_{\text{Tesla}}$$

Quanto visto finora vale nel vuoto.
Se le cariche si muovono lungo un filo immerso in un campo magnetico:



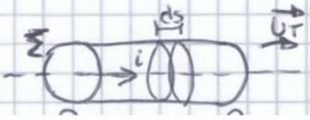

su ogni particella agisce: $\vec{f} = q\vec{v}\times\vec{B}$
Quindi:

$$\frac{d\vec{F}}{d\tau} = \underbrace{nq\vec{v}}_{\text{densità di corrente}}\times\vec{B} = \vec{J}\times\vec{B}$$

Da cui:

$$d\vec{F} = \vec{J}\times\vec{B}\,d\tau \Rightarrow \vec{F} = \iiint_\tau \vec{J}\times\vec{B}\,d\tau$$

Per un conduttore calibro (cioè con stessa sezione in ogni punto) si ha:




$$\vec{J} = \frac{i}{\Sigma}\vec{u}_T$$

$$\vec{F}_- = \int_{-R}^{R} d\vec{F}_- = iB\vec{u}_z \int_{-R}^{R} dx = 2iB\vec{u}_z$$

Le due forze trovate danno origine a effetti dinamici, infatti sono applicate nei centri di massa dei rispettivi tratti di circuiti, sono uguali ed opposte: danno origine a una coppia di forze, quindi c'è un momento.
Calcoliamo il momento delle forze rispetto a O.

$$d\vec{M}_{on} = \vec{r} \times d\vec{F}_n \qquad \text{dove } \vec{r} = \vec{u}_x x + \vec{u}_y y = R(\cos\vartheta\, \vec{u}_x + \operatorname{sen}\vartheta\, \vec{u}_y)$$

$$d\vec{M}_{on} = R(\cos\vartheta\, \vec{u}_x + \operatorname{sen}\vartheta\, \vec{u}_y) \times (-iRB\operatorname{sen}\vartheta\, d\vartheta)\vec{u}_z =$$

$$= -iR^2B\left[(\cos\vartheta\operatorname{sen}\vartheta)\,\vec{u}_x \times \vec{u}_z + \operatorname{sen}^2\vartheta\; \vec{u}_y \times \vec{u}_z\right] d\vartheta =$$

$$= -iR^2B\left(-\vec{u}_y\cos\vartheta\operatorname{sen}\vartheta + \vec{u}_x\operatorname{sen}^2\vartheta\right)d\vartheta$$

Quindi:

$$\vec{M}_{on} = \int_0^{\pi} d\vec{M}_{on} = -iR^2\frac{\pi}{2}B\,\vec{u}_x$$

il momento della parte piatta è nullo, infatti:

$$d\vec{M}_{o-} = \vec{r} \times d\vec{F} = (x\vec{u}_x) \times (iB\vec{u}_z\, dx) = iB(\vec{u}_x \times \vec{u}_z)\, x\, dx$$

Andando a integrare tra $-R$ ed $R$ si annulla tutto.
Quindi: risultante forze nulle ⇒ momento non dipende da polo

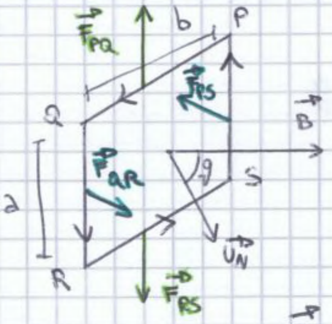
$$\vec{M} = \vec{M}_{on} = -i\underbrace{\frac{\pi}{2}R^2}_{\text{area del circuito: } \Sigma}B\,\vec{u}_x = -i\Sigma B\vec{u}_x$$

Scegliamo come normale positiva $\vec{u}_N = \vec{u}_z$ e introduciamo il vettore momento di dipolo magnetico:

$$\vec{m} = i\Sigma\vec{u}_z$$

Otteniamo: $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$

## MOMENTO MAGNETICO




Considerimo una spira percorsa da corrente come in figura e calcoliamo la forza che agisce su ciascun lato.

$$\left.\begin{aligned} \vec{F}_{PQ} &= i\,\vec{PQ} \times \vec{B} \\ \vec{F}_{RS} &= i\,\vec{RS} \times \vec{B} \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{sono uguali ed opposte, non contribuiscono al momento perché} \perp \vec{B}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{F}_{SP} &= i\,\vec{SP} \times \vec{B} \rightarrow |\vec{F}_{SP}| = iaB \\ \vec{F}_{QR} &= i\,\vec{QR} \times \vec{B} \rightarrow |\vec{F}_{QR}| = iaB \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{formano una coppia di forze}$$

braccio: $b\cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = b\operatorname{sen}\vartheta$

Quindi:

$$I\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + mB\sin\vartheta = 0$$

L'equazione trovata rimanda a quella del pendolo.

Per piccole rotazioni abbiamo: $\vartheta \to 0 \Rightarrow \sin\vartheta \simeq \vartheta$

Da cui:

$$I\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + mB\vartheta = 0 \Rightarrow \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{mB}{I}\vartheta = 0$$

Posto $\omega_0^2 = \frac{mB}{I}$, otteniamo:

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \omega_0^2\vartheta = 0$$

Risolvendo l'equazione differenziale si trova:

$$\vartheta(t) = A\,\mathrm{sen}(\underbrace{\omega_0}_{\text{propria del problema}} t + \delta)$$

dipendono da condizioni iniziali

È un moto periodico:

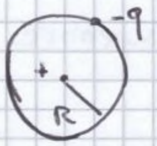
$$\omega_0 T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mB}}$$

Da tale formula si può ricavare il valore di $\vec{B}$.

## PRINCIPIO DI EQUIVALENZA DI AMPERE

Ogni corpo magnetizzato è equivalente a una spira percorsa da corrente.

Per esempio si abbia un atomo di idrogeno:




$$\underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{R^2}}_{\text{forza elettrica}} = \underbrace{m\frac{V^2}{R}}_{\text{forza centripeta}} \quad \text{(semplificazione)}$$

velocità! NON FACCIAMO CONFUSIONI IDIOTE!

Quindi:

$$mv^2 = K\frac{q^2}{R} \Rightarrow v = \sqrt{K\frac{q^2}{mR}}$$

Il moto è circolare uniforme:

$$V = \omega R = \sqrt{\frac{Kq^2}{mR}} \Rightarrow \omega = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{Kq^2}{mR}}$$

Il periodo è:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi R\sqrt{\frac{mR}{Kq^2}}$$

Il movimento dell'elettrone può essere interpretato come una corrente:

$$i = \frac{q}{T} = q\frac{1}{2\pi R}\sqrt{\frac{Kq^2}{mR}}$$

Se c'è corrente, possiamo considerare il sistema come una spira: c'è momento magnetico.

Quella che abbiamo trovato è chiamata differenza di potenziale Hall.
Grazie a questo risultato possiamo stabilire quali cariche si muovono.

$$\vec{J} = nq\vec{v} \Rightarrow v = \frac{J}{nq} = \frac{i}{ab}\cdot\frac{1}{nq} \Rightarrow \Delta V = \frac{i}{nqab}Bb = \frac{iB}{nqa} = \Delta V$$

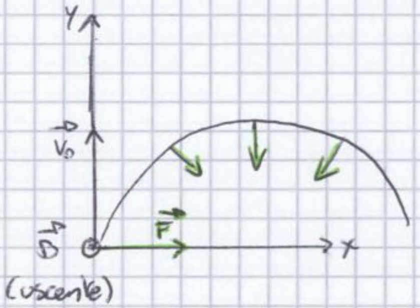
Se i portatori sono positivi, $\Delta V$ è positiva.
Se le cariche che si muovono sono negative, se $J>0 \Rightarrow |\vec{v}|<0$ (mantenendo i versi in figura):

$$\vec{v} = -v\vec{u}_x \Rightarrow \vec{F} = (-|q|)(-|\vec{v}|)\times\vec{B} = |q||v|B\vec{u}_z$$

La forza è sempre positiva, quindi $\Delta V$ è negativa.
La sonda Hall viene utilizzata per determinare quali siano i portatori.
Se si sa quanti portatori ci sono, può essere usata per calcolare $\vec{B}$:

$$B = \frac{nqa}{i}\cdot\Delta V$$

## MOTO DI UNA PARTICELLA IN UN CAMPO MAGNETICO




$$\vec{F} = q\vec{v}_0\times\vec{B}$$

Il modulo di $v_0$ non cambia: si ottiene un moto curvilineo con velocità costante, quindi un moto circolare uniforme.
Il moto avviene su un piano!

$$\vec{F} = qv_0B\vec{u}_N$$

Sappiamo che: $m\vec{a} = \vec{F}$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{v^2}{R}\vec{u}_N$$

Quindi:

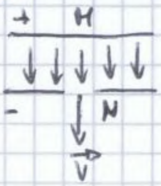
$$m\left(\frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{v^2}{R}\vec{u}_N\right) = q\vec{v}_0\times\vec{B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow qv_0B\vec{u}_N = m\left(\frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{v^2}{R}\vec{u}_N\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\frac{dv}{dt} = 0 \\ m\frac{v^2}{R} = qv_0B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = v_0 \\ R = \frac{mv_0}{qB} \end{cases}$$

Quindi se $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$ la forza sta sempre in un piano ed è perpendicolare a $\vec{v}$ e $\vec{B}$

**Spettrometro di massa:** separa isotopi




Sulla piastra positiva ci sono degli ioni, inizialmente fermi.
in M: $E(M) = E_K(M) + E_P(M) = qV(M)$
in N: $E(N) = E_K(N) + E_P(N) = \frac{1}{2}mv^2 + qV(N)$

Se non c'è dissipazione d'energia: $E(M) = E(N)$


Al tempo 0 si applica la differenza di potenziale $\Delta V$ tra A e C. Se nel centro dell'oggetto c'è una particella libera, essa acquista una velocità e si muove da una piastra all'altra.

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = q \Delta V$$

Raggiunto il semicerchio, la particella non è più sottoposta a un campo elettrico (che è confinato tra le armature A e C), ma c'è un campo magnetico $\vec{B}$ entrante. La particella si muove con una traiettoria circolare di raggio $R_1$ fino ad arrivare al punto 2. Il tempo che impiega per andare da 1 a 2 è:

$$\Delta t_1 = \frac{T}{2} = \frac{\pi m}{qB}$$

Quando la particella arriva in 2, la carica degli elettrodi viene invertita: la particella raggiunge quindi il punto 3:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} m v_2^2 + q\Delta V = \frac{1}{2} m v_3^2 \\ v_2 = v_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2q\Delta V = \frac{1}{2} m v_3^2 \end{cases}$$

Poiché $v_3 > v_2 \Rightarrow R_2 > R_1$.

La particella percorre una traiettoria circolare fino al punto 4, ma poiché il periodo non dipende dalla velocità, il tempo che ci impiega è sempre:

$$\Delta t_4 = \Delta t_1 = \frac{\pi m}{qB}$$

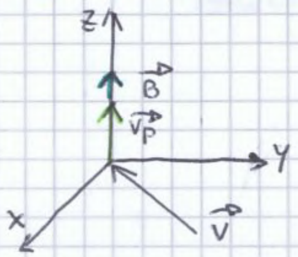
I poli si invertono di nuovo e così via finché si raggiunge:

$$R_{MAX} = R_D = \frac{m v_{MAX}}{qB} \Rightarrow v_{MAX} = \frac{qB R_{MAX}}{m}$$

Il ciclotrone inverte le cariche delle piastre A e C con intervallo di

$$\Delta t = \frac{\pi m}{qB}$$

## MOTO GENERALE DI UNA PARTICELLA CARICA IN UN $\vec{B}$ UNIFORME




$$\vec{B} = B\vec{u_z} \quad \text{per } z \geq 0$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

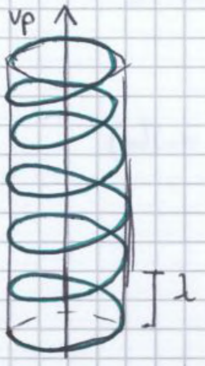
$$\vec{v} = v_x \vec{u_x} + v_y \vec{u_y} + v_z \vec{u_z}$$

$$\vec{v} \times \vec{B} = (v_x \vec{u_x} + v_y \vec{u_y} + v_z \vec{u_z}) \times (B\vec{u_z}) =$$
$$= (v_x B)\vec{u_x} \times \vec{u_z} + (v_y B)\vec{u_y} \times \vec{u_z} + 0 =$$
$$= -v_x B \vec{u_y} + v_y B \vec{u_x}$$

Quindi:

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 178

Se $\vec{v_p} \neq 0$, il moto percorre un'elica cilindrica.



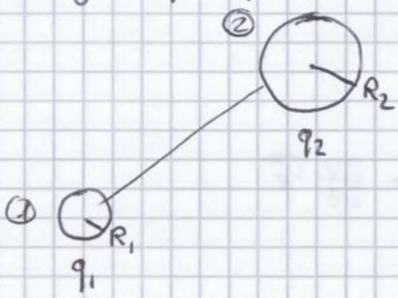

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB}$$

$\lambda$ è il passo dell'elica e vale:

$$\lambda = v_p \cdot T = \frac{2\pi m v_p}{qB}$$

## Esercizio

Due sfere conduttrici di raggio rispettivamente $R_1$ e $R_2$ sono poste a distanza molto grande rispetto ai loro raggi e sono unite da un filo conduttore. La carica complessiva sulle sfere è $q$, sulla prima c'è $q_1$ distribuita con densità $\sigma_1$, sulla seconda c'è $q_2$ distribuita con densità $\sigma_2$. La carica sul filo è trascurabile. Quanto valgono $q_1$ e $q_2$? Qual è il campo in prossimità delle sfere?




Consideriamo i corpi come un unico conduttore.

Deve essere $V_1 = V_2$

$$V_1 = k\frac{q_1}{R_1}$$

$$V_2 = k\frac{q_2}{R_2}$$

$$q = q_1 + q_2$$

Quindi: $\begin{cases} \frac{kq_1}{R_1} = \frac{kq_2}{R_2} \\ q = q_1 + q_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1 = q_2\frac{R_1}{R_2} \\ q_2\frac{R_1}{R_2} + q_2 = q \end{cases} \Rightarrow q_2\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) = q \Rightarrow q_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}q$

Analogamente: $q_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2}q$

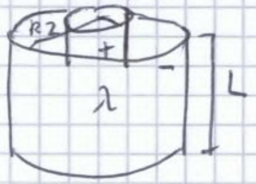
Sappiamo che: $E = k\frac{Q}{R^2}$

Quindi: $E_1 = k\frac{q_1}{R_1^2} = \frac{kq}{R_1(R_1 + R_2)}$

$$E_2 = k\frac{q_2}{R_2^2} = \frac{kq}{R_2(R_1 + R_2)}$$

Notiamo che il campo è maggiore per la sfera minore (effetto punte)

## Esercizio




$E = ?$

Per considerazioni sulla simmetria del corpo, possiamo dire che il campo è perpendicolare alla dimensione L ed ha direzione radiale.

$$\vec{E} = E(r)\,\vec{u_r}$$

dove $\mu_0$ è la permeabilità magnetica nel vuoto: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m

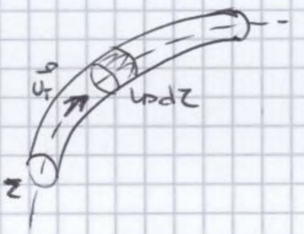
$$[\mu_0] = \frac{[\vec{B}][r^2]}{[d\vec{s}][i]} = \frac{\frac{Wb}{m^2} \cdot m^2}{m \cdot A} = \frac{Vs}{mA} = \frac{\Omega s}{m} = \frac{H}{m}$$

Quindi: $$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{s} \times \vec{u_r}}{r^2}$$

Integrando: $$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \oint \frac{d\vec{s} \times \vec{u_r}}{r^2}$$

Esercizio

Determinare il campo magnetico creato da una carica elettrica che si muove con velocità $\vec{v}$.




Consideriamo un conduttore calibro.
Sia $\vec{J}$ la densità di corrente:
$$\vec{J} = nq\vec{v}$$
$$i = \Sigma J$$

Quindi:
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot J\Sigma \frac{d\vec{s} \times \vec{u_r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot nqv \underbrace{(\Sigma\, ds)}_{d\tau} \frac{\vec{u_T} \times \vec{u_r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} nq\, d\tau \frac{\vec{v} \times \vec{u_r}}{r^2}$$

Con $\vec{v} = v\vec{u_T}$.

$n$ è il numero di portatori per unità di volume, quindi il numero totale di portatori nel volume è: $dN = n d\tau$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} dN q \frac{\vec{v} \times \vec{u_r}}{r^2}$$

Il campo magnetico creato da un solo portatore è: $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{v} \times \vec{u_r}}{r^2}$

Moltiplichiamo e dividiamo per $\varepsilon_0$ e ricordiamo che:
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u_r}$$

Otteniamo:
$$\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \vec{v} \times \left( \frac{q\,\vec{u_r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \right) \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0 \vec{v} \times \vec{E}}$$

La formula trovata vale solo per ambiti non relativistici, cioè con velocità non prossime a quella della luce.

$$[\mu_0\varepsilon_0] = [\mu_0][\varepsilon_0] = \frac{H}{m} \cdot \frac{F}{m} = \frac{\Omega s}{m} \cdot \frac{C}{V} \cdot \frac{1}{m} = \frac{V}{A} \cdot \frac{s}{m} \cdot \frac{C}{V} \cdot \frac{1}{m} = \frac{1}{A} \cdot \frac{s}{m^2} \cdot A \cdot s = \left(\frac{s}{m}\right)^2$$

Questa quantità dipende solo dalle unità di misura.

$$\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$$ dove $c$ è la velocità della luce

Quindi: $$\vec{B} = \frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c^2}$$

Quindi:

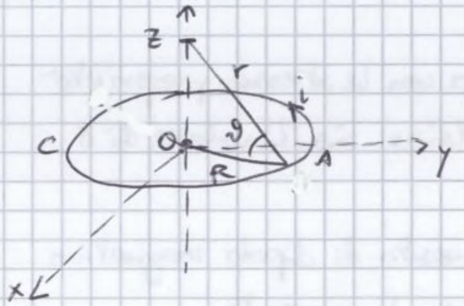
$$\cos\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\beta_1}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{R}{a}\right)^2}}$$

Se $a \to \infty \Rightarrow tg\,\beta_1 \to 0 \Rightarrow \cos\beta_1 \to 1$

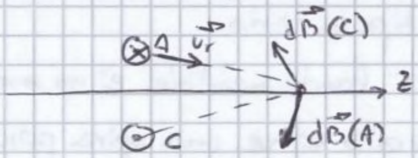
$$\boxed{\vec{B}(a \gg R) = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}\vec{u_\varphi}} \rightarrow \text{legge di Biot-Savart}$$

Esercizio 11

Calcolare il campo magnetico creato sull'asse di una spira circolare percorsa da corrente.




Il campo creato da due punti appartenenti alla spira posti sulla stessa retta ha solo la componente lungo z:




$$|d\vec{B}(A)| = |d\vec{B}(C)|$$

Le componenti del campo lungo z si raddoppiano, quelle lungo la verticale si azzerano.

$$d\vec{B}_{//} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{ds}{r^2}\cos\vartheta$$

il campo dovuto a due elementi simmetrici è: $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} i \frac{ds}{r^2}\cos\vartheta = 2\,d\vec{B}_{//}$

Quindi:

$$\vec{B} = \int \frac{\mu_0}{2\pi} i \frac{ds}{r^2}\cos\vartheta\,\vec{u_z} = \frac{\mu_0}{2\pi} i \frac{\cos\vartheta}{r^2}\underbrace{\int ds}_{\frac{1}{2}cf_r}\,\vec{u_z} = \frac{\mu_0}{2\pi} i \frac{\cos\vartheta}{r^2}\pi R\,\vec{u_z} = \frac{\mu_0 i}{2}\frac{\cos\vartheta}{r^2}R\,\vec{u_z}$$

Ma:

$$r\cos\vartheta = R \Rightarrow \cos\vartheta = \frac{R}{r}$$

Quindi: $\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2}\frac{R}{r}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot R\vec{u_z} = \frac{\mu_0 i}{2}\cdot\frac{R^2}{r^3}\vec{u_z}$

Ricordiamo che: $r = \sqrt{R^2+z^2}$

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 i}{2}\frac{R^2}{(z^2+R^2)^{3/2}}\vec{u_z}$$

Il campo non varia se z è maggiore o minore di zero.

$$\vec{B}(0) = \frac{\mu_0 i}{2}\cdot\frac{R^2}{R^3}\vec{u_z} = \frac{\mu_0 i}{2R}\cdot\vec{u_z}$$

$$\vec{B}(z \gg R) = \frac{\mu_0 i}{2}\frac{R^2}{z^3}\vec{u_z}$$

Ricordiamo la formula del campo elettrico di un dipolo:

$$(x_p - x)\cdot \operatorname{tg}\varphi = R \implies x_p - x = \frac{R}{\operatorname{tg}\varphi}$$

Fissato P, $x_p$ è una costante. Si ha: stiamo facendo $d(x_p - x)$

$$-dx = d\left(\frac{R}{\operatorname{tg}\varphi}\right) = -\frac{R}{\operatorname{tg}^2\varphi}\, d(\operatorname{tg}\varphi) \implies$$

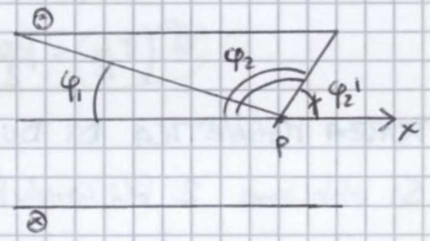
$$\implies dx = \frac{R}{\operatorname{tg}^2\varphi}\cdot\frac{1}{\cos^2\varphi}\, d\varphi = R\,\frac{\cos^2\varphi}{\operatorname{sen}^2\varphi}\cdot\frac{1}{\cos^2\varphi}\, d\varphi = \frac{R}{\operatorname{sen}^2\varphi}\, d\varphi$$

Sostituiamo nella formula:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{2}\, i \cdot R^2 \cdot \frac{\operatorname{sen}^3\varphi}{R^3}\cdot n \cdot \frac{R}{\operatorname{sen}^2\varphi}\, d\varphi\, \vec{u_x} = \frac{\mu_0}{2}\, n i\, \underbrace{\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi}_{\to\ -d(\cos\varphi)}\, \vec{u_x}$$

Notiamo che il campo sull'asse è indipendente da R!

$$d\vec{B} = -\frac{\mu_0}{2}\, n i\, d(\cos\varphi)\,\vec{u_x}$$




Integriamo:

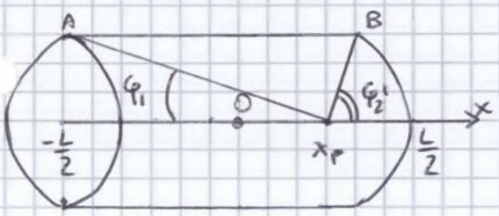
$$\vec{B}(x_p) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} -\frac{\mu_0}{2}\, n i\, d(\cos\varphi) = -\frac{\mu_0}{2}\, n i\, \Big[\cos\varphi\Big]_{\varphi_1}^{\varphi_2}\,\vec{u_x} =$$

$$= -\frac{\mu_0}{2}\, n i\,(\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1)\,\vec{u_x}$$

Dalla figura vediamo che: $\varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \varphi_2' \implies \cos\varphi_2 = -\cos\varphi_2'$

Quindi: $\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{2}\, n i\,(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2')\,\vec{u_x}}$

Poniamo l'origine di x a metà del solenoide:




$$\overline{PA} = \sqrt{\left(x_p + \frac{L}{2}\right)^2 + R^2}$$

$$\overline{PB} = \sqrt{\left(\frac{L}{2} - x_p\right)^2 + R^2}$$

$$\overline{PA}\cos\varphi_1 = x_p + \frac{L}{2} \implies \cos\varphi_1 = \left(x_p + \frac{L}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{\left(x_p + \frac{L}{2}\right)^2 + R^2}}$$

$$\overline{PB}\cos\varphi_2' = \frac{L}{2} - x_p \implies \cos\varphi_2' = \left(\frac{L}{2} - x_p\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{L}{2} - x_p\right)^2 + R^2}}$$

Da cui:

$$\vec{B}(x_p) = \frac{\mu_0}{2}\, n i\left[\frac{x_p + \frac{L}{2}}{\sqrt{\left(x_p + \frac{L}{2}\right)^2 + R^2}} + \frac{\frac{L}{2} - x_p}{\sqrt{\left(\frac{L}{2} - x_p\right)^2 + R^2}}\right]\vec{u_x}$$

Facciamo passare le correnti $i_1$ e $i_2$ nelle spire.

Se $a \gg R$, possiamo considerare infiniti i fili:

$$f = \frac{\mu_0}{2\pi R} i_1 i_2 (2\pi a) = \frac{\mu_0}{R} i_1 i_2 a$$

Per equilibrare di nuovo il sistema devo aggiungere la massa $M = f$.

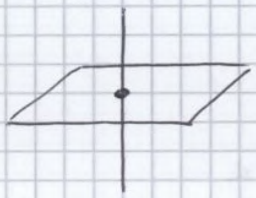
Se $i_1 = i_2$, si ha:

$$f = \frac{\mu_0}{R} i^2 a = M$$

Da qui possiamo misurare la forza magnetica.

## LEGGE DI AMPERE

Mette in relazione la circuitazione di $\vec{B}$ con le correnti.



Per Biot-Savart sappiamo che:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi R} i \vec{u_\varphi}$$

Vogliamo calcolare la circuitazione $\Gamma(\gamma) = \oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{s}$

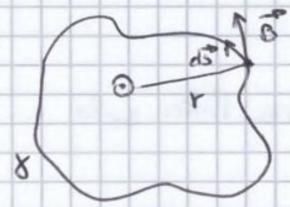
Supponiamo che $\gamma$ appartenga al piano perpendicolare all'asse del filo.

Sappiamo che:

$$d\vec{s} = dr\,\vec{u_r} + r\,d\varphi\,\vec{u_\varphi}$$

Si presentano 2 casi.

1° caso: $\gamma$ contiene il filo.




$$\Gamma(\gamma) = \oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint_\gamma \left(\frac{\mu_0}{2\pi r} i \vec{u_\varphi}\right) \cdot \left(dr\,\vec{u_r} + r\,d\varphi\,\vec{u_\varphi}\right) =$$

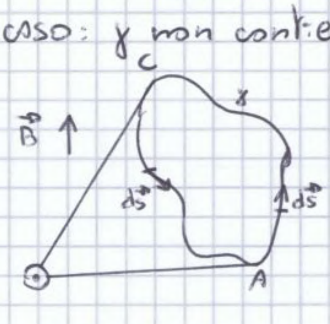
costante perché siamo in regime stazionario

$$= \oint_\gamma \frac{\mu_0}{2\pi \cancel{r}} \cdot i \cdot \cancel{r}\,d\varphi = \oint_\gamma \frac{\mu_0}{2\pi} i\,d\varphi = \frac{\mu_0}{2\pi} i \underbrace{\oint_\gamma d\varphi}_{\text{angolo piano}} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \cdot 2\pi$$

Quindi:

$$\boxed{\oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i}$$

2° caso: $\gamma$ non contiene il filo




$d\vec{s} \cdot \vec{B}\,(A \to C) > 0$

$d\vec{s} \cdot \vec{B}\,(C \to A) < 0$

$$\Gamma(\gamma) = \oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_A^C \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_C^A \vec{B} \cdot d\vec{s} =$$

$$= \int_A^C \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{u_\varphi} \cdot \left(dr\,\vec{u_r} + r\,d\varphi\,\vec{u_\varphi}\right) + \int_C^A \frac{\mu_0}{2\pi r} i(-\vec{u_\varphi}) \cdot \left(dr\,\vec{u_r} + r\,d\varphi\,\vec{u_\varphi}\right) = 0$$

Poiché la formula trovata deve valere $\forall \gamma$, si ha:

$$\boxed{(\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \vec{J}}$$ → forma locale della legge di Ampere, valida <u>SOLO</u> con correnti stazionarie.

Infatti in regime stazionario si ha:

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{0} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

Quindi facendo la divergenza della legge di Ampere:

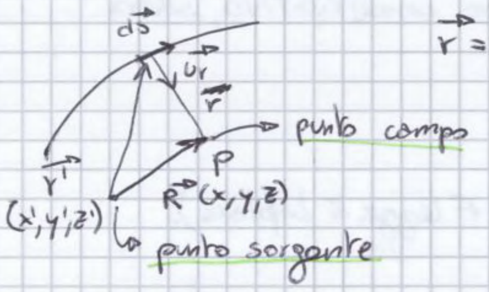
$$\underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})}_{\equiv 0} = \mu_0 \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{J})}_{=0} \Rightarrow 0 = 0$$

Se non si è in regime stazionario, $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} \neq 0$ e la formula non è più valida.

DIVERGENZA DI $\vec{B}$

Partiamo dalla prima legge di Laplace in regime stazionario.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{s} \times \vec{u_r}}{r^2} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int \frac{d\vec{s} \times \vec{u_r}}{r^2}$$




$$\vec{r} = \vec{R} - \vec{r'} = (x-x')\vec{u_x} + (y-y')\vec{u_y} + (z-z')\vec{u_z}$$

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{u_x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{u_y} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{u_z} =$$

$$= -\vec{u_x}\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} - \vec{u_y}\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial y} - \vec{u_z}\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial z}$$

Calcoliamo la derivata parziale di r rispetto a x, le altre sono analoghe:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} = \frac{1}{2\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \cdot 2(x-x') =$$

$$= \frac{(x-x')}{r}$$

Quindi:

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = -\vec{u_x}\frac{(x-x')}{r^3} - \vec{u_y}\frac{(y-y')}{r^3} - \vec{u_z}\frac{(z-z')}{r^3} = -\frac{(x-x')\vec{u_x} + (y-y')\vec{u_y} + (z-z')\vec{u_z}}{r^3} =$$

$$= -\frac{\vec{r}}{r^3} = -\frac{\vec{u_r}}{r^2}$$

Quindi:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int -\frac{\vec{u_r} \times d\vec{s}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) \times d\vec{s}$$