NUMERO: 964 DATA: 08/05/2014

# A P P U N T I

STUDENTE: Tortorici

MATERIA: Elettrotecnica

Prof. Canavero

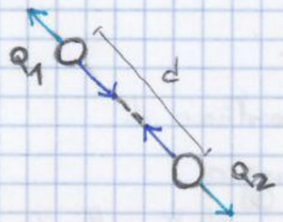
Nella materia tutti i fenomeni elettrici si basano sulla presenza di cariche elettriche, che possono essere positive o negative. Al segno − corrisponde l'elettrone.

$$e^- = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C$$

N.B.: mettere SEMPRE l'unità di misura!!

L'interazione tra le cariche è <u>repulsiva</u> se hanno lo stesso segno, <u>attrattiva</u> se sono di segno opposto.

LEGGE DELL'INTERAZIONE (o legge di Colomb)



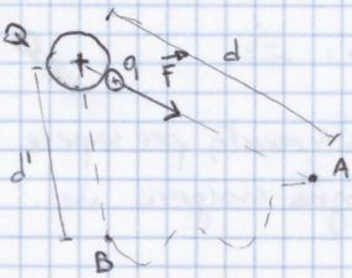

Siano $Q_1$ e $Q_2$ due cariche. Tra di esse si esercita una forza lungo la congiungente che può avere verso repulsivo (se $Q_1$ e $Q_2$ hanno lo stesso segno) o verso attrattivo (se $Q_1$ e $Q_2$ non hanno lo stesso segno).

$$\boxed{F = K \cdot \frac{Q_1 Q_2}{d^2}} \rightarrow \text{legge di Colomb}$$

La legge di Colomb è simile alla legge di Newton per l'interazione gravitazionale. Ciò significa che nella fisica classica tutte le interazioni a distanza sono gestite da una legge simile.

$$K = 9 \cdot 10^9\ \frac{N\,m^2}{C^2}$$

ESEMPIO N.B. possibile domanda d'esame (cariche invertite).




Supponiamo che Q sia fissa; q è libera di muoversi e viene stoppata nel punto A.
Il lavoro di q (unità di misura: Joule) è dato da:

$$\boxed{L = F \cdot d}$$ (niente vettori perché $F // d$)

Vogliamo rendere il risultato indipendente da q, quindi introduciamo il POTENZIALE (unità di misura: J/C):

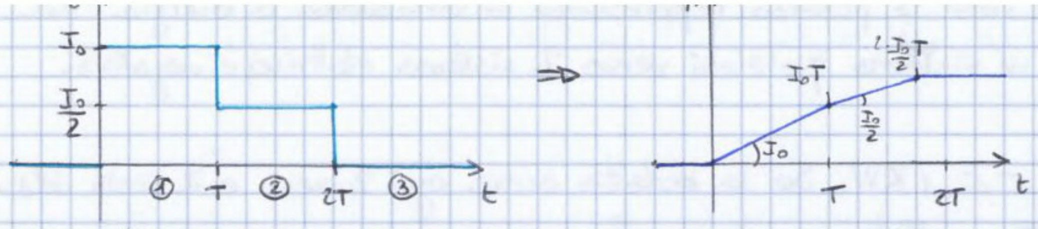
$$\boxed{\phi = \frac{L}{q}}$$

Svolgendo i calcoli otteniamo: $\phi = K \frac{Qq}{d^2} \cdot \frac{d}{q} = K \cdot \frac{Q}{d}$

Supponiamo che dopo aver raggiunto A, q inizi a seguire il percorso tratteggiato fino a B (per esempio perché spinta dentro una scanalatura). Non importa se q arriva in B tramite il percorso a zig-zag o se ci arriva in modo diretto, in quanto il lavoro fatto dipende <u>solo</u> dalla sua posizione:

$$\phi_A = K \cdot \frac{Q}{d} \qquad \phi_B = K \cdot \frac{Q}{d'}$$

Calcoliamo la differenza di potenziale tra A e B (per convenzione, la differenza si fa tra il potenziale all'arrivo e quello alla partenza, tranne in Germania)



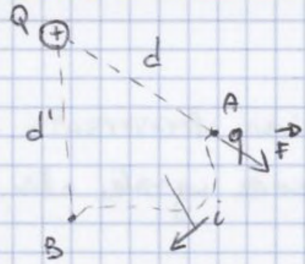

① $q = \int_0^t I_0\,dt = I_0 t \quad \text{con} \quad 0 < t < T$

② $q = \int_0^T I_0\,dt + \int_T^t \frac{I_0}{2}\,dt = I_0 T + \frac{I_0}{2}(t-T) \quad \text{con} \quad T < t < 2T$

③ $q = \int_0^T I_0\,dt + \int_T^{2T} \frac{I_0}{2}\,dt + \int_{2T}^{t} 0\,dt = I_0T + \frac{I_0}{2}(2T-T) + 0$

N.B: es tipo esame!

## POTENZA




Abbiamo visto che: $L = F \cdot d = K\frac{Qq}{d}$

$\Phi = \frac{L}{q} = K\frac{Q}{d}$

$V_{AB} = \Phi_A - \Phi_B$

Poiché $d < d' \Rightarrow \Phi_A > \Phi_B \Rightarrow V_{AB} > 0$

La tensione può essere espressa anche come: $V_{AB} = \frac{\Delta L}{\Delta q}$

Le cariche scorrono da A a B sotto l'influenza del campo generato da Q. Arrivano in B con un potenziale inferiore a quello in A, cioè hanno meno energia: L'energia persa è quella che ha generato il movimento.

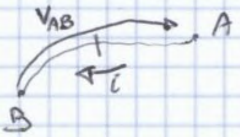
ENERGIA ELETTRICA ⟶ ENERGIA MECCANICA

Il $\Delta L$ è la differenza di energia, cioè l'energia persa dal campo elettrico che si è trasformata in energia meccanica.

NB: occhio al segno dell'energia!

$V_{AB} \cdot i = \frac{\Delta L}{\Delta q} \cdot \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\Delta L}{\Delta t} = p \rightarrow$ POTENZA (unità di misura: Watt)

$$\boxed{p = v \cdot i} \rightarrow p = \frac{dE}{dt}$$

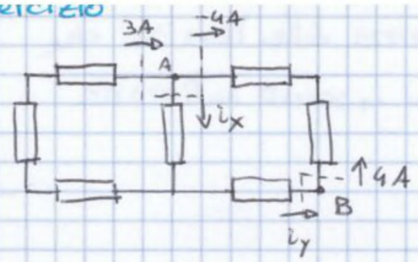



Tensione e corrente hanno versi opposti: la potenza è persa dal punto di vista elettrico, acquisita da quello meccanico.

Convenzione di segno degli utilizzatori: la freccia della tensione ha verso opposto alla freccia della corrente.

Convenzione di segno dei generatori: la freccia della tensione ha lo stesso verso della freccia

Esercizio



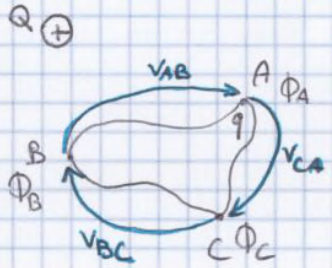

in Ⓐ: $3 = -4 + i_x \Rightarrow i_x = 7A$

in Ⓑ: $i_y = 4A$


MONOPÒLO: KCL $\Rightarrow i_m = 0$


BIPÒLO: KCL $\Rightarrow i_1 = i_2$

## LEGGE DI KIRCHHOFF DELLE TENSIONI




$$V_{AB} = \Phi_A - \Phi_B$$
$$V_{BC} = \Phi_B - \Phi_C$$
$$V_{CA} = \Phi_C - \Phi_A$$

La carica q, sotto l'influenza del campo generato da Q, si sposta lungo il filo da A a B, da B a C e da C ad A.

Per la convenzione di segno degli utilizzatori, le tensioni vanno in senso orario.

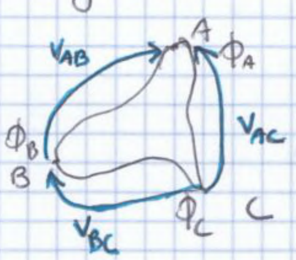
Si vede subito che:

$$V_{AB} + V_{BC} + V_{CA} = 0$$

KVL: (prima versione): (IPOTESI: percorso chiuso) La somma delle tensioni lungo un percorso chiuso è zero.

$$\boxed{\sum_{\substack{n \\ \text{equiverse}}} V_n = 0}$$

Immaginiamo di "sbagliare" a indicare il verso di una tensione.




$$\left.\begin{aligned} V_{AB} &= \Phi_A - \Phi_B \\ V_{BC} &= \Phi_B - \Phi_C \\ V_{AC} &= \Phi_A - \Phi_C \end{aligned}\right\} \rightarrow V_{AB} + V_{BC} + V_{AC} = 2\Phi_A - 2\Phi_C \neq 0$$

SBAGLIATO!

Possiamo, però, considerare $V_{AC}$ come $-V_{CA}$.

$$V_{AB} + V_{BC} - V_{CA} = 0$$

$$\underbrace{V_{AB} + V_{BC}}_{\text{senso orario}} = \underbrace{V_{CA}}_{\text{senso antiorario}}$$

# ALCUNI ELEMENTI ELETTRICI IDEALI

## 1) GENERATORE INDIPENDENTE DI TENSIONE

simbolo:  oppure: 

Il segno + indica il punto a potenziale più alto. Il generatore fornisce una tensione pari a:

$$\underbrace{v = e(t)}$$

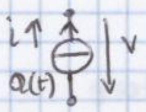
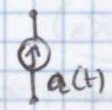
→ equazione di funzionamento del generatore

$e(t)$ si chiama <u>grandezza impressa</u>.

La corrente può essere qualsiasi (idealmente) perché l'equazione di funzionamento agisce solo sulla tensione: $v = e(t) \ \forall i$

Esempi di questo tipo di generatore sono la pila (che fornisce una tensione costante ed ha un simbolo particolare: $\overset{+}{-}|\!\!\vdash\!\!\rightarrow$), una presa elettrica (che fornisce una tensione alternata).

## 2) GENERATORE INDIPENDENTE DI CORRENTE

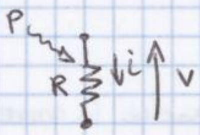
simbolo:  oppure: 

L'equazione di funzionamento è: $i = a(t) \ \forall v$ (sempre idealmente)

$a(t)$ è la grandezza impressa.

Esempi di questo tipo di generatore sono i carica batterie.

## 3) RESISTORE

simbolo:  (N.B.) utilizzare convenzione segno degli utilizzatori!!! Se no si sbagliano i calcoli.

Equazione di funzionamento (legge di Ohm): $\boxed{v = R \cdot i}$

Dove $R$ è la <u>resistenza</u>, unità di misura: $\frac{V}{A} = \Omega$

La potenza nel resistore è una quantità sempre assorbita (quindi positiva): il resistore converte energia elettrica in calore (energia termica).

Calcoliamo la potenza assorbita dal resistore:

$$\underbrace{p}_{>0} = v \cdot i = R \cdot \underbrace{i^2}_{>0}$$

$p > 0$ per definizione della funzione del resistore

$i^2 > 0$ qualsiasi sia il valore di $i$

Quindi $R$ è <u>sempre</u> positiva.

Analizziamo il caso particolare in cui si ha $R=0$.

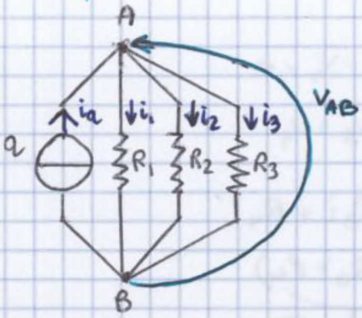
$R=0 \Rightarrow p=0$

$R=0 \Rightarrow v=0 \rightarrow$ c'è la stessa en. potenziale ovunque nel resistore

**Regola del partitore di tensione** (IPOTESI: percorso chiuso con un generatore di tensione e resistori in serie): La tensione parziale sul resistore K è data da:

$$\boxed{v_K = e \cdot \frac{R_K}{\sum_n R_n}}$$

**Esempio**




La tensione $v_{AB}$ vale per tutti e tre i resistori.

$$i_a = i_1 + i_2 + i_3$$

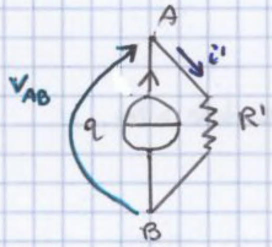
$$a = v_{AB} \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$$

$$v_{AB} = \frac{a}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)}$$

Calcoliamo, per esempio, $i_3$:

$$i_3 = \frac{v_{AB}}{R_3} = \frac{a}{R_3\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)}$$

Confrontiamo il precedente circuito con questo:




$$v_{AB} = R'a$$

Con lo stesso generatore, per avere la stessa tensione deve essere:

$$R' = \frac{1}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)}$$

**Regola delle resistenze in parallelo** (IPOTESI: circuito in cui tutti i resistori sono collegati tra gli stessi due punti, cioè collegati in parallelo). La resistenza equivalente del collegamento in parallelo è:

$$\boxed{R_{eq} = \frac{1}{\sum_K \frac{1}{R_K}} \quad \text{in parallelo}}$$

Altre scritture: $\frac{1}{R_{eq}} = \sum_K \frac{1}{R_K}$ oppure $G_{eq} = \sum_K G_K$

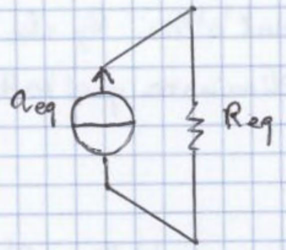
Nel caso in cui ci siano solo due resistori ($R_1$ e $R_2$) si può scrivere:

$$R_{eq} = \frac{1}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)} = \frac{1}{\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

**Regola del partitore di corrente** (IPOTESI: circuito chiuso con un generatore di corrente e resistori collegati in parallelo). La corrente sul lato K è:

$$\boxed{i_K = \frac{a/R_K}{\sum_n \left(\frac{1}{R_n}\right)} = \frac{a/R_K}{1/R_{eq}}}$$

In un circuito parallelo, posso trovare un generatore di corrente equivalente:

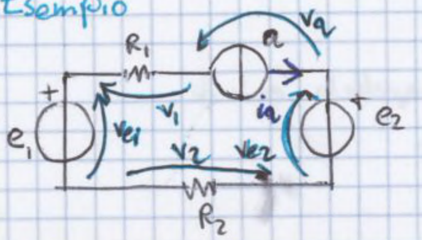



$$\boxed{a_{eq} = \sum_n a_n}$$

Se $R_J << R_K$ $(K \neq J)$ Allora: $R_{eq} \cong R_J$ o meglio $R_{eq} \leq R_J$

Supponiamo che $R_J = 0$: poiché una R non può essere negativa, si ha che $R_{eq} = 0$ !!

Esempio




Circuito in serie con generatore di corrente.

Applichiamo KVL:

$e_1 - v_1 - v_a - e_2 - v_2 = 0$

$e_1 - R_1 i_a - v_a - e_2 - R_2 i_a = 0$

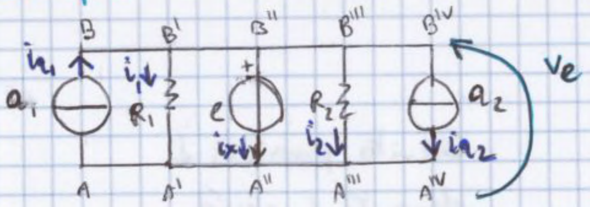
$e_1 - R_1 a - v_a - e_2 - R_2 a = 0$

$v_a = e_1 - R_1 a - e_2 - R_2 a$

Non si può applicare la regola del partitore di tensione! !!

Supponiamo che nel circuito ci sia un altro generatore di corrente: serie di generatori di corrente possono esistere solo se hanno correnti impresse uguali.

Esempio




Circuito parallelo con generatore di tensione.

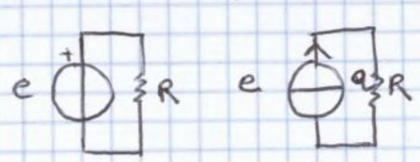
Applichiamo KCL su B:

$a_1 - i_1 - i_2 - a_2 - i_x = 0$

$i_x = a_1 - \frac{e}{R_1} - \frac{e}{R_2} - a_2$

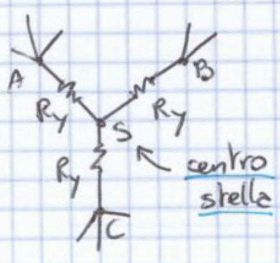
Non si può applicare la regola del partitore di corrente! !!

Supponiamo che nel circuito ci sia un altro generatore di tensione: perché il circuito possa esistere, tutti i generatori devono imporre la stessa tensione.

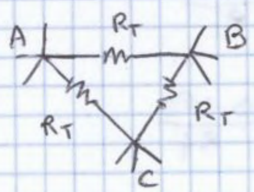



sono circuiti sia in serie che in parallelo.

## COLLEGAMENTO A STELLA E COLLEGAMENTO A TRIANGOLO




A STELLA (O A Y)




A TRIANGOLO (O A DELTA)

$$V_{AB}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right)=\frac{e_1}{R_1}+a_1-\frac{e_1}{R_4}-a_2$$

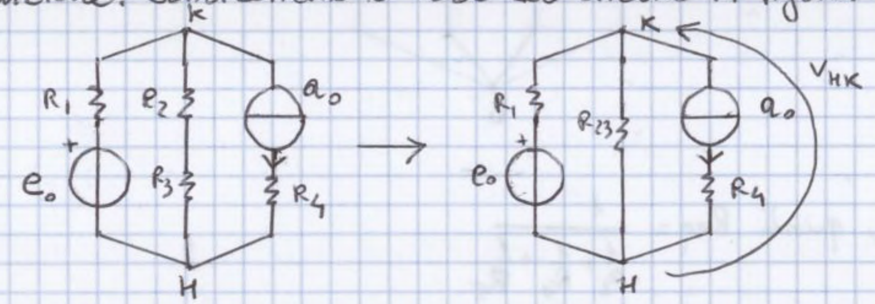
$$V_{AB}=\frac{\frac{e_1}{R_1}+a_1-\frac{e_2}{R_4}-a_2}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}}$$

**TEOREMA DI MILLMAN** (IPOTESI: circuito con struttura in parallelo avente rami con bipoli in serie):

$$\boxed{V_p=\frac{\sum_K \pm\frac{e_K}{R_K}+\sum_J \pm a_J}{\sum_n \frac{1}{R_n}}}$$

↳ rami ≠ da gen. corrente

Attenzione! Consideriamo il caso del circuito in figura:




Si fa prima la Req sul secondo ramo: $R_{23}=R_1+R_3$

POI si applica Millman:

$$V_{HK}=\frac{-\frac{e_0}{R_1}+a_0}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_{23}}}\ \text{OK!}\ \neq\ \cancel{\frac{-\frac{e_0}{R_1}+a_0}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}}}\ \text{NO!}$$

Riprendiamo la $V_{AB}$ del primo circuito:

$$V_{AB}=\frac{\frac{e_1}{R_1}+a_1-\frac{e_2}{R_4}-a_2}{G_E}=\frac{e_1}{R_1G_E}+\frac{a_1}{G_E}-\frac{e_2}{R_4G_E}-\frac{a_2}{G_E}=$$

$$=\left(\frac{1}{G_ER_1}\right)e_1+\left(\frac{1}{G_E}\right)a_1+\left(-\frac{1}{R_4G_E}\right)e_2+\left(-\frac{1}{G_E}\right)a_2$$

Abbiamo ottenuto una combinazione lineare di generatori: si può ricavare per ogni circuito.

**Regola** (IPOTESI: circuito con bipoli lineari, cioè rappresentati da un'equazione di funzionamento del tipo lineare): per ogni circuito, ogni variabile elettrica $y$ (cioè i o v) è una combinazione lineare di tutti i generatori.

$$y=\sum_S K_S\cdot g_S$$ dove $g$ è un generatore qualsiasi.

Consideriamo la $V_{AB}$ dell'esempio:

$$V_{AB}=K_1e_1+K_2a_1+K_3e_2+K_4a_2$$

2° contributo: $i_R'' = K_2 e_2$ , $e_1 = 0$

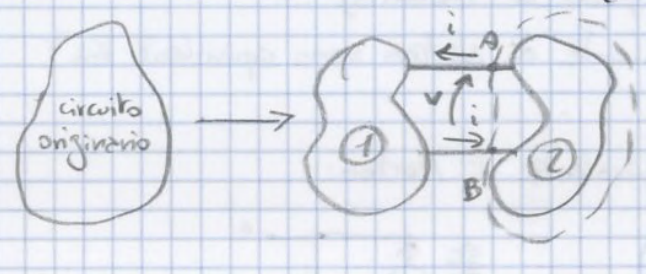
$i_R'' = \frac{e_2}{R}$ $\quad p_R'' = V'' \cdot i_R'' = \frac{e_2^2}{R}$

Le due potenze trovate non sono uguali! $p_R \neq p_R' + p_R''$

Ciò è dovuto al fatto che la sovrapposizione vale solo per elementi lineari (v e i) e la potenza non lo è!! ($p = v \cdot i$)

## TEOREMA DI THEVENIN

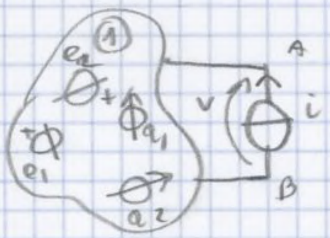
Consideriamo un circuito originario (di cui non sappiamo nulla) e supponiamo che sia divisibile in 2 sotto circuiti collegati solo attraverso due fili.




Possiamo racchiudere il circuito ② in una superficie chiusa attraversata da conduttori, quindi per KCL possiamo affermare che su entrambi i fili scorre la stessa corrente i con verso opposto. Inoltre tra i punti A e B sarà presente una tensione V.

Supponiamo di voler ricavare il valore di v.

Possiamo sostituire l'intero circuito ② con un generatore di corrente i.



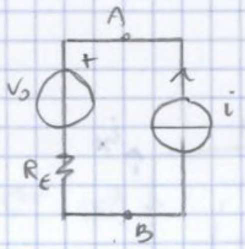

Supponiamo che nel circuito ① ci siano dei generatori, per esempio due di corrente e due di tensione:

$$V = \underbrace{K_1 e_1 + K_2 e_2 + K_3 a_1 + K_4 a_2}_{\substack{V_0 \\ \text{contributi interni}}} + K_5 i$$

$K_5 i$: contributo esterno

$K_5 = R_E$ xk risultato deve essere una v

$$V = V_0 + R_e i$$



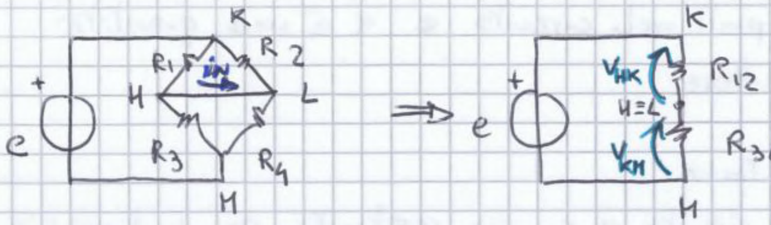

Abbiamo approssimato il circuito ① a un generatore di tensione e una resistenza.

Enunciamo il teorema di Thevenin:

Ogni sottocircuito è equivalente alla serie di un generatore di tensione e un resistore

$V_0$ = tensione a vuoto (cioè tensione del sottocircuito con uscita in circuito aperto: infatti nella combinazione lineare si aveva $k_5 i = 0$)

$R_E$ = resistenza equivalente (resistenza del sottocircuito dall'uscita quando tutti i generatori sono uguali a zero).




$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$R_{34} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}$$

Quindi:

$$V_{KM} = e \, \frac{R_{12}}{R_{12} + R_{34}}$$

$$V_{HM} = e \cdot \frac{R_{34}}{R_{12} + R_{34}}$$

Possiamo calcolare la corrente su $R_1$ (uscente da K):

$$i_1 = \frac{V_{KM}}{R_1} = \frac{e}{R_1} \cdot \frac{R_{12}}{R_{12} + R_{34}}$$

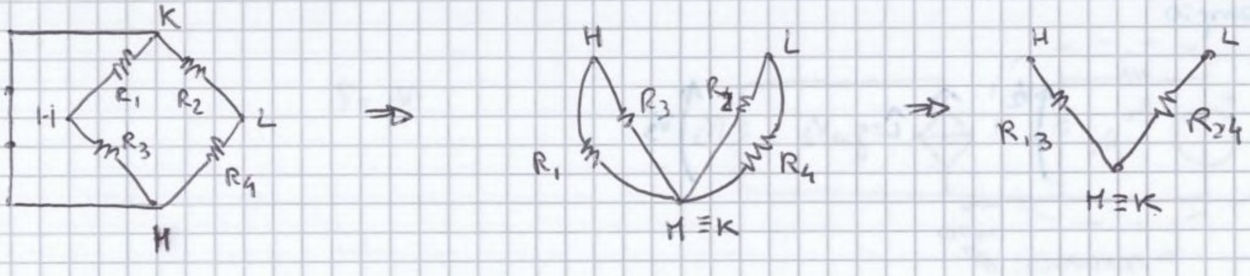
E la corrente su $R_3$ (uscente da H):

$$i_3 = \frac{V_{HM}}{R_3} = \frac{e}{R_3} \cdot \frac{R_{34}}{R_{12} + R_{34}}$$

Applichiamo KCL su K:

$$i_N = i_1 - i_3 = \frac{e}{R_1} \cdot \frac{R_{12}}{R_{12}+R_{34}} - \frac{e}{R_3} \, \frac{R_{34}}{R_{12}+R_{34}} = \frac{e}{R_{12}+R_{34}} \left( \frac{R_{12}}{R_1} - \frac{R_{34}}{R_3} \right)$$

Per calcolare $R_N$ poniamo pari a zero tutti i generatori.




$$R_{13} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} \qquad R_{24} = \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}$$

$$R_N = R_{13} + R_{24} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}$$

Quindi:

$$i_x = - \frac{\frac{e}{R_{12}+R_{34}} \cdot \left( \frac{R_{12}}{R_1} - \frac{R_{34}}{R_3} \right) \cdot \frac{1}{R_x}}{\frac{1}{R_{13}+R_{24}} + \frac{1}{R_x}}$$

## GENERATORI DIPENDENTI

Questi generatori sono modelli semplificati e non esistono fisicamente.

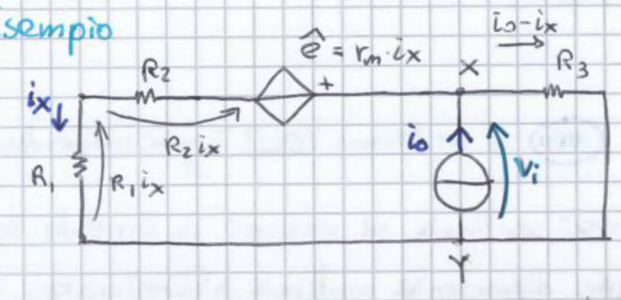
- generatore dipendente di tensione:  $\hat{e}$

Ne esistono di due tipi:

1) pilotati da una tensione: $\hat{e} = \alpha V_x$

③ Trovo la grandezza incognita.

Esempio




$V_i = ?$

Ipotizziamo che $\hat{e}$ sia indipendente e troviamo $i_x$.

Analizziamo il ramo sinistro del circuito:

$$V_{xy} = R_1 i_x + R_2 i_x + \hat{e}$$

Analizziamo il ramo destro del circuito:

$$V_{xy} = R_3 (i_0 - i_x)$$

Quindi:

$$R_1 i_x + R_2 i_x + \hat{e} = R_3 (i_0 - i_x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i_x (R_1 + R_2 + r_m) = R_3 i_0 - R_3 i_x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i_x (R_1 + R_2 + R_3 + r_m) = R_3 i_0$$

$$i_x = \frac{R_3 i_0}{R_1 + R_2 + R_3 + r_m}$$

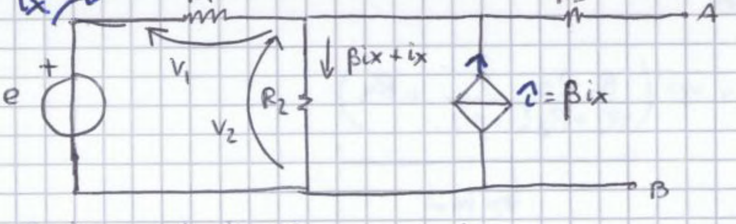
Il generatore dipendente è noto e può essere considerato indipendente:

$$\hat{e} = r_m \cdot \frac{R_3 i_0}{R_1 + R_2 + R_3 + r_m}$$

Troviamo la quantità incognita:

$$V_i = V_{xy} = R_3 (i_0 - i_x) = R_3 \left( i_0 - \frac{R_3 i_0}{R_1 + R_2 + R_3 + r_m} \right) = R_3 i_0 \left( \frac{R_1 + R_2 + r_m}{R_1 + R_2 + R_3 + r_m} \right)$$

Esempio: equivalente di Thevenin con gen. dipendent.




Cerchiamo la tensione a vuoto

$$V_2 = R_2 (\beta i_x + i_x)$$

$$V_1 = R_1 i_x$$

$$e = V_1 + V_2 = R_2 \beta i_x + R_2 i_x + R_1 i_x = i_x (R_2 \beta + R_2 + R_1)$$

$$i_x = \frac{e}{R_2 \beta + R_2 + R_1}$$

Quindi: $\hat{i} = \beta \dfrac{e}{R_1 + R_2 (\beta + 1)}$

Supponiamo di avere dei bipoli come in figura. Cerchiamo la corrente su ciascuno di essi.

Applichiamo KVL al percorso: $0 \to K \to M \to 0$

$$V_K = V_M + V_1$$

Possiamo esprimere $V_1$ in funzione delle tensioni nodali: $V_1 = V_K - V_M$

$$V_1 = i_1 R_1 \Rightarrow i_1 = \frac{V_K - V_M}{R_1}$$

Applichiamo KVL al percorso: $0 \to K \to P \to 0$

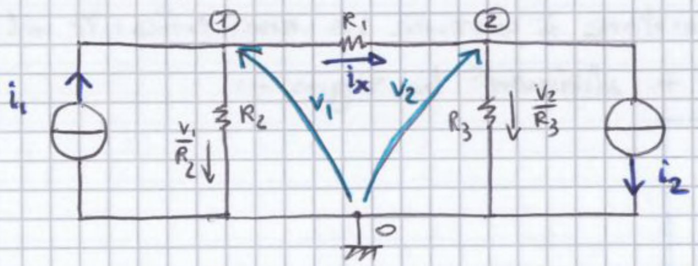
$$V_K = V_2 + V_P$$

Quindi:

$$\begin{cases} V_2 = V_K - V_P \\ V_2 = i_2 R_2 \end{cases} \Rightarrow i_2 = \frac{V_K - V_P}{R_2}$$

Generalizzando, la tensione su una R è pari alla differenza tra le tensioni nodali sui nodi estremi; inoltre, la corrente su R è la differenza tra le tensioni nodali divise per la R stessa.

In un circuito, le tensioni nodali sono le incognite. Facciamo un esempio




3 NODI $\Rightarrow$ 2 TENSIONI NODALI

Applichiamo KCL al nodo 1: $i_x = \frac{V_1 - V_2}{R_1}$

$$i_1 = \frac{V_1}{R_2} + \frac{V_1 - V_2}{R_1}$$

Applichiamo KCL al nodo 2 (consideriamo uscenti tutte le correnti tranne quella del generatore):

$$-i_2 = -i_x + \frac{V_2}{R_3} \Rightarrow i_2 = \frac{V_1 - V_2}{R_1} - \frac{V_2}{R_3}$$

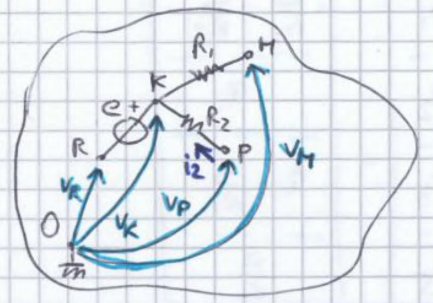
Costruiamo il nostro sistema di equazioni:

$$\begin{cases} V_1\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right) + V_2\left(-\frac{1}{R_1}\right) = i_1 \\ V_1\left(-\frac{1}{R_1}\right) + V_2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}\right) = -i_2 \end{cases}$$

Possiamo esprimere tutto sotto forma di matrici:

$$\underset{\underline{\underline{A}}}{\begin{bmatrix} \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \end{bmatrix}} \cdot \underset{\underline{v}}{\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}} = \underset{\underline{b}}{\begin{bmatrix} i_1 \\ -i_2 \end{bmatrix}}$$

# METODO DEI NODI CON GENERATORE DI TENSIONE



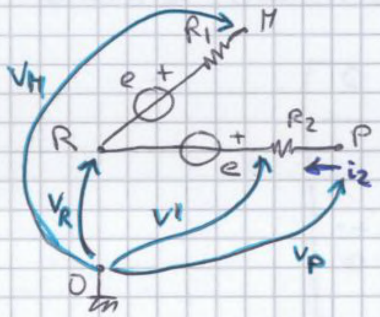
Consideriamo un generico circuito e supponiamo che abbia gli elementi in figura.

Applichiamo KVL al percorso O→R→K→O:

$$V_R + e = V_K \Rightarrow e = V_K - V_R$$

Ma e è noto, quindi $V_K$ e $V_R$ non sono più variabili indipendenti!

Per usare il metodo dei nodi dobbiamo modificare il circuito di partenza in modo tale da far saltare un nodo per ogni generatore di tensione presente.

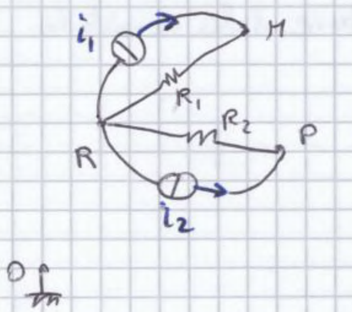


Facciamo scorrere il generatore e oltre il nodo K, ottenendo un circuito come in figura.

$$\begin{cases} i_2 = \dfrac{V_P - V'}{R_2} \\ V' = V_R + e \end{cases} \Rightarrow i_2 = \frac{V_P - V_R - e}{R_2}$$

La corrente trovata è uguale a quella del circuito originale.

Consideriamo ogni ramo con un generatore di tensione come un equivalente di Thevenin e lo trasformiamo in un equivalente di Norton:



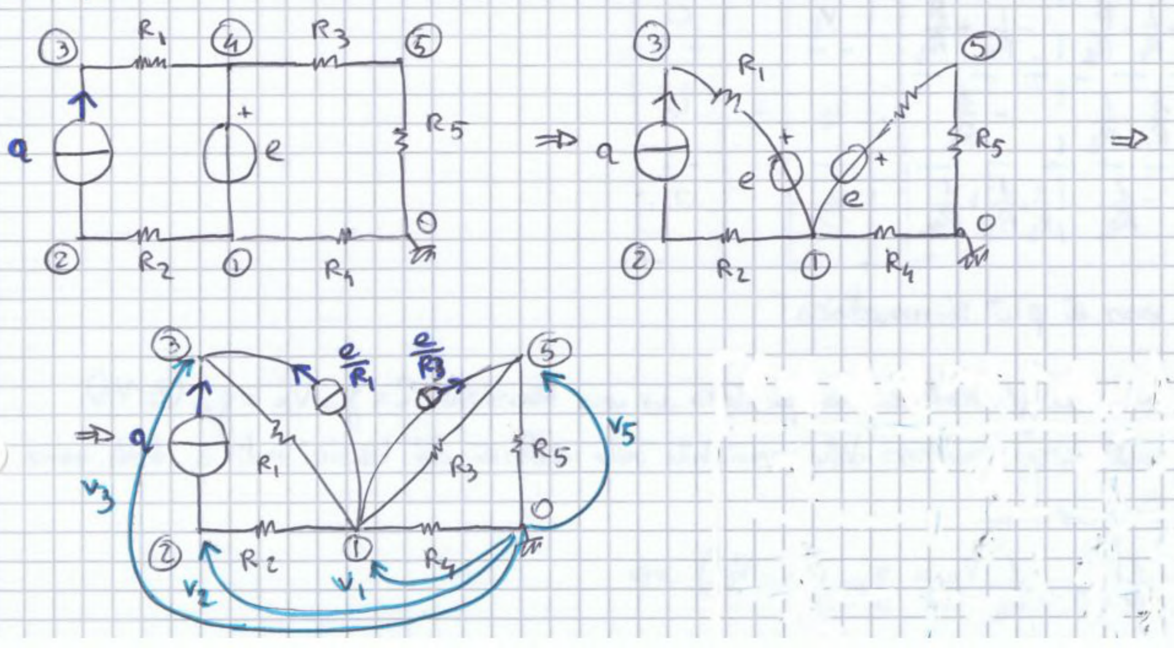
Sappiamo che:

$$i_1 = \frac{e}{R_1}$$

$$i_2 = \frac{e}{R_2}$$

A questo punto possiamo applicare il metodo automatico al circuito.

## Esempio

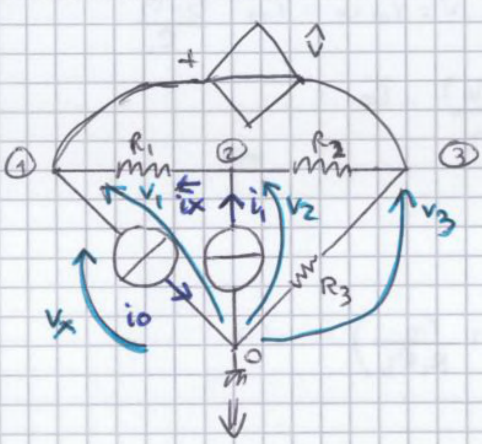


$$\Rightarrow \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_4}\right)v_1 - \left(\frac{1}{R_1}+g_m\right)v_2 - \left(\frac{1}{R_4}-g_m\right)v_3 = 0$$

Quindi:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_1}-g_m & -\frac{1}{R_4}+g_m \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ i_o \\ 0 \end{bmatrix}$$

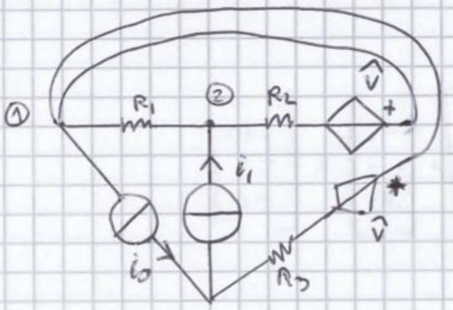
Analizziamo il caso in cui ci siano dei generatori dipendenti di tensione:



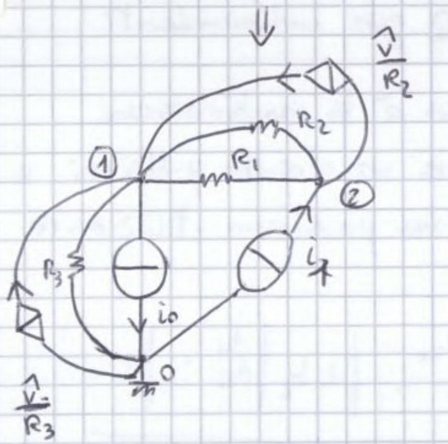
1) $\hat{v} = \alpha v_x$

2) $\hat{v} = r_m i_x$

Consideriamo $\hat{v}$ come indipendente ed eliminiamo il nodo ③



Sostituiamo gli equivalenti di Norton:



Possiamo scrivere:

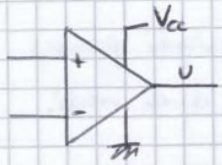
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\hat{v}}{R_2}+\frac{\hat{v}}{R_3}-i_o \\ -\frac{\hat{v}}{R_2}+i_1 \end{bmatrix}$$

In questo caso le equazioni coinvolte sono due:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)v_1 - \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)v_2 = \frac{\alpha}{R_2}v_1 + \frac{\alpha}{R_3}v_1 - i_o \\ -\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)v_2 + \left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_1}\right)v_2 = -\frac{\alpha}{R_2}v_1 + i_1 \end{cases} \Rightarrow$$

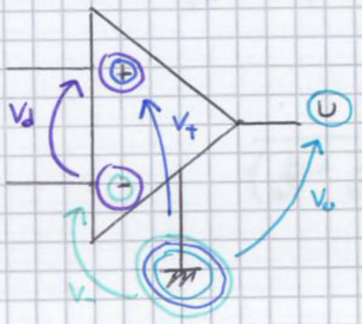
# AMPLIFICATORE OPERAZIONALE (Op Amp)

È un circuito elettronico che funziona solo quando è alimentato. A differenza degli elementi visti finora, non è un bipolo: infatti ha 8 "piedini".




gli altri 3 piedini servono per funzioni specifiche.

Tra due "piedini" si può definire una porta:




- tra u e terra
- tra + e terra
- tra - e terra
- tra + e -

Su ogni porta si può definire una tensione (sempre orientate come in figura):

$V_u$ tra u e terra

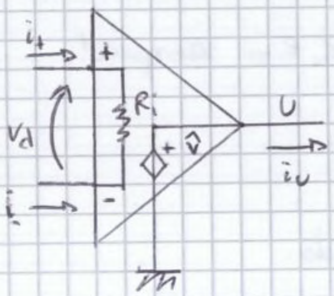
$V_+$ tra + e terra

$V_-$ tra - e terra

$V_d$ tra + e -

Si nota che: $V_d = V_+ - V_-$

Analizziamo l'interno dell'Op Amp:



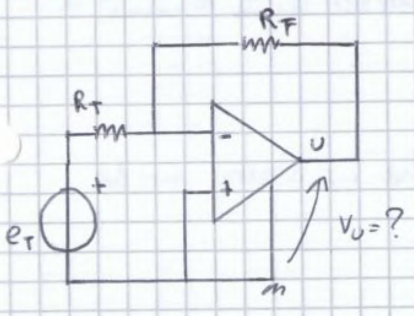

Per convenzione la corrente su + ($i_+$) e su - ($i_-$) si prende entrante, quella su u ($i_U$) uscente.

Il generatore dipendente è pilotato da $V_d$:

$$\hat{V} = A\, V_d$$

Il coefficiente A ha valori enormi (fino a $10^8$) e anche la resistenza $R_i$ (fino a $10^{13}$). Si può dire che $R_i \to \infty$, quindi tra + e - c'è un circuito aperto: ciò significa che $i_+ = i_- = 0$, mentre $V_d$ è definita.

## CONFIGURAZIONE INVERTENTE

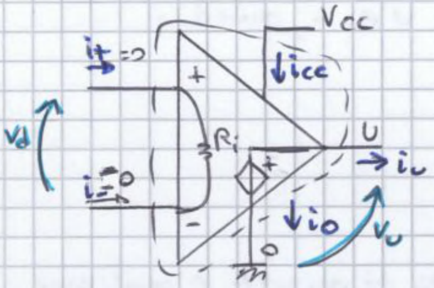



Abbiamo collegato l'Op Amp a un circuito che rappresentiamo con il suo equivalente di Thevenin. Questa situazione equivale a:

$V_U + R_F i_T = V_- \Rightarrow V_U = -R_F i_T = -R_F \frac{e_T}{R_T}$

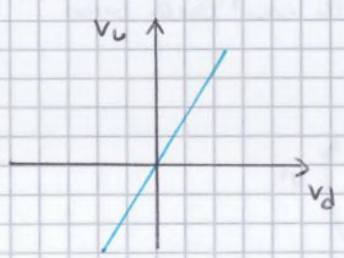
Abbiamo ottenuto lo stesso risultato di prima ma in modo più semplice.

ATTENZIONE!

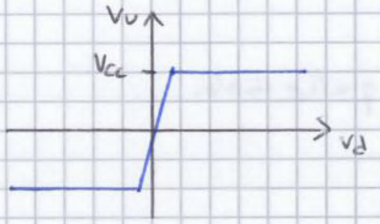



Applicando la KCL sulla superficie chiusa, otteniamo che $i_{cc}$, $i_u$ e $i_o$ si devono bilanciare.

Lasciamo U a vuoto: $V_U = A v_d$ è la tensione a vuoto.



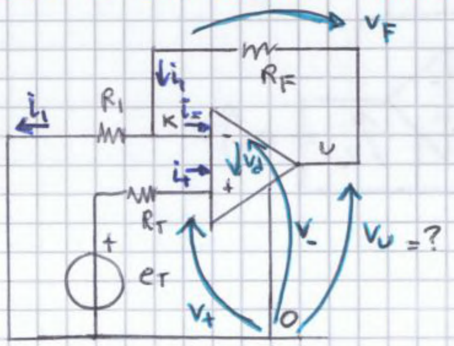

→ CARATTERISTICA dell'Op Amp (ideale)
La pendenza della retta dipende da A.
Poca $v_d$ crea una $v_u$ grandissima: in realtà $v_u$ arriva al massimo al valore di $V_{cc}$.




→ caratteristica dell'Op Amp (reale)
Spesso O è attaccato a $-V_{cc}$, quindi il grafico è simmetrico.
$A \to \infty$

Per ragioni fisiche non può essere che $v_u \to \infty$
Ne consegue che $v_d \to 0$.

## CONFIGURAZIONE NON INVERTENTE




$V_d > 0$

$$\begin{cases} V_d = V_+ + V_- = 0 \\ V_+ = e_T \end{cases} \Rightarrow V_- = e_T$$

$V_-$ è la tensione su $R_1$, quindi definisce:

$$i_1 = \frac{V_-}{R_1} = \frac{e_T}{R_1}$$

Applicando KCL al nodo K e ricordando che $i_- = 0$, ottengo che $i_1$ scorre anche in $R_F$ e determina una tensione:

$$V_F = R_F i_1$$

Applico KVL al percorso $U \xrightarrow{R_F} K \to O \to U$:

$$V_U = V_F + V_- \Rightarrow V_U = R_F i_1 + e_T = \boxed{e_T \underbrace{\left(\frac{R_F}{R_1} + 1\right)}_{\text{quantità sicuramente} > 1} = V_U}$$

Quindi $\forall R_F \neq 0$ si crea un'amplificazione di $e_T$ ($V_U$ ha lo stesso verso di $e_T$).

Facendo KCL su K, si trova che $i_2$ scorre anche in $R_F$ dove determina:

$$V_F = R_F \cdot i_2 = R_F \cdot \left(\frac{e_1}{R_2}\cdot\frac{R_+}{R_1+R_+} - \frac{e_2}{R_2}\right)$$

Applichiamo KVL alla parte destra del circuito:

$$V_u = V_K + V_F \Rightarrow V_u = e_1\frac{R_+}{R_1+R_+} + R_F\left(\frac{e_1}{R_2}\cdot\frac{R_+}{R_1+R_+} - \frac{e_2}{R_2}\right) =$$

$$= e_1\frac{R_+}{R_1+R_+} + \frac{R_F}{R_2}e_1\cdot\frac{R_+}{R_1+R_+} - \frac{R_F}{R_2}e_2 =$$

$$= e_1\frac{R_+}{R_1+R_+}\left(1+\frac{R_F}{R_2}\right) - \frac{R_F}{R_2}e_2 =$$

$$= e_1\frac{\cancel{R_+}\left(1+\frac{R_F}{R_2}\right)}{\cancel{R_+}\left(1+\frac{R_1}{R_+}\right)} - \frac{R_F}{R_2}e_2$$

Il risultato è la differenza pesata dei due generatori. Se pongo:

$$1+\frac{R_F}{R_2} = \left(1+\frac{R_1}{R_+}\right)\cdot\frac{R_F}{R_2} \Rightarrow$$

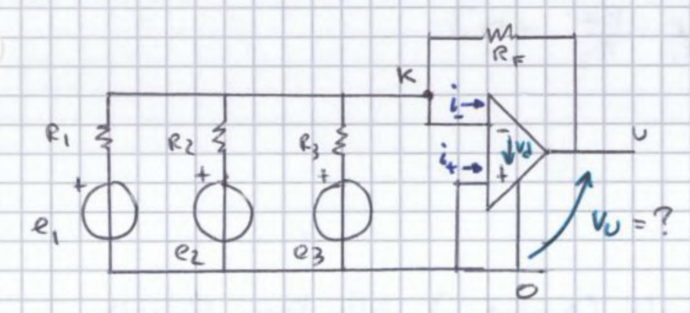
$$\Rightarrow \frac{R_2+R_F}{\cancel{R_2}} = \frac{R_++R_1}{R_+\cancel{R_2}}R_F \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_F\left(1+\frac{R_2}{R_F}\right) = \left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)\cdot\frac{\cancel{R_F}}{\cancel{R_+}}\cdot\cancel{R_F} \Rightarrow \frac{R_2}{R_F} = \frac{R_1}{R_+}$$

Ottengo:

$$v_u = e_1\frac{R_F}{R_2} - e_2\frac{R_F}{R_2} = \boxed{\frac{R_F}{R_2}(e_1-e_2) = V_u}$$

## CIRCUITO SOMMATORE

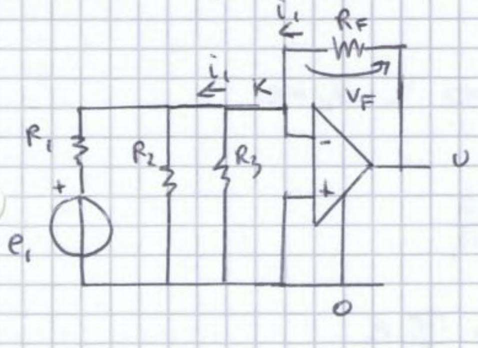



Si ottiene la somma di segnali.

$V_K = 0$

1° MODO: calcoliamo $V_u$ per sovrapposizione.

effetto di $e_1$:




$V_K = 0 \Rightarrow R_2$ e $R_3$ non hanno corrente

$$V_K = R_1 i_1 + e_1 \Rightarrow i_1 = -\frac{e_1}{R_1}$$

$$V_F = R_F i_1 = -\frac{R_F}{R_1}e_1$$

Poiché $V_K = 0$, si ha che $V_u' = V_F$

$$V_u' = -\frac{R_F}{R_1}e_1$$

$$V_U = V_F + V_K = e + e\frac{R_F}{R_1} = V_+'$$

$$V_K' = V_+' = V_U = e\left(1+\frac{R_F}{R_1}\right)$$

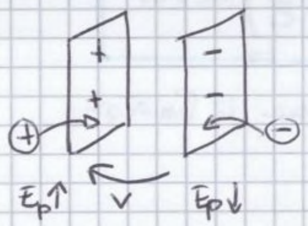
$$i' = \frac{V_U}{R'}$$

$$V_F' = R_F' \cdot i' = \frac{R_F}{R'} \cdot e\left(1+\frac{R_F}{R_1}\right)$$

$$V_U' = V_K' + V_F' = V_U + V_F' = \boxed{V_U\left(1+\frac{R_F'}{R'}\right) = V_U'}$$

Quindi la tensione all'uscita del secondo OpAmp è uguale alla tensione all'uscita del primo moltiplicata per il coefficiente non invertente. Si ottiene una forte amplificazione.

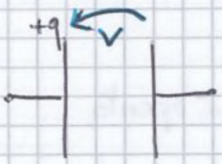
## CONDENSATORE




Si abbiamo due piastre cariche come in figura.
Portiamo un'ulteriore carica sulla piastra positiva: questo comporta un lavoro, quindi aumenta l'energia potenziale dell'armatura. Allo stesso tempo la carica in più richiama un'ulteriore carica di segno meno sulla piastra negativa: significa che l'energia potenziale di quella armatura è diminuita. Si crea una tensione tra le armature.

$$V = E_p(+) - E_p(-) > 0$$

Introduciamo l'elemento circuitale corrispondente alla situazione descritta:




La tensione è rivolta sempre verso la piastra positiva.
Equazione di funzionamento:

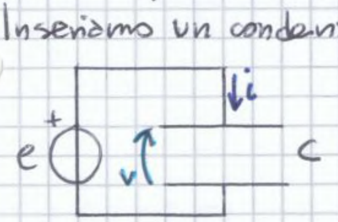
$$q = CV \qquad \text{con } C>0 \text{ sempre}$$

C = **Capacità** è un coefficiente di proporzionalità ed è una costante che idealmente non dipende da nessun fattore. Unità di misura: $\frac{C}{V} = F$ (Farad)

Dall'equazione di funzionamento ricaviamo:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(CV) \Rightarrow \frac{dq}{dt} = C\frac{dV}{dt} \Rightarrow \boxed{i = C \cdot \frac{dV}{dt}}$$

Il verso di i è entrante nella piastra positiva: senza nessuna imposizione viene rispettata la convenzione degli utilizzatori.
Inseriamo un condensatore in un circuito:




Per la struttura del circuito si ha che:

$$e \equiv V$$

Supponiamo che e vari nel tempo.

Ricalcoliamo la tensione in un istante $t+\Delta t$:

$$v(t+\Delta t) - V_0 = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t+\Delta t} i(t)dt$$

Facciamo la differenza tra le due formule:

$$v(t+\Delta t) - \cancel{V_0} - v(t) + \cancel{V_0} = \frac{1}{C}\left\{\int_{t_0}^{t+\Delta t} i(t)dt - \int_{t_0}^{t} i(t)dt\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v(t+\Delta t) - v(t) = \frac{1}{C}\left\{\cancel{\int_{t_0}^{t} i(t)dt} + \int_{t}^{\Delta t} i(t)dt - \cancel{\int_{t_0}^{t} i(t)dt}\right\}$$

Se facciamo il limite per $\Delta t \to 0$, si vede subito che l'integrale tende a zero e che:

$$v(t) - v(t) = 0 \Rightarrow v(t) = v(t)$$ MA DAI!

Quella trovata è la condizione di continuità di una funzione. Abbiamo così dimostrato che la tensione del condensatore è continua.

N.B.: Il risultato trovato vale SOLO per la tensione!
La corrente può avere dei salti.

Essendo sotto forma di derivata, la tensione influenza la corrente solo in un istante.
Essendo sotto forma di integrale (quindi un'area), la corrente influenza la tensione con tutta la storia precedente: si dice che il condensatore è un elemento con memoria rispetto alla corrente.

Vogliamo calcolare la potenza assorbita dal condensatore. Sappiamo che:

$$p = v \cdot i \quad \text{con convenzione utilizzatori}$$

Quindi:

$$p = C\,\frac{dv}{dt}\cdot v$$

Ma in questo modo la potenza può essere sia positiva che negativa! Dipende dall'andamento di $v$ (per esempio, se $v$ è positiva e calante, $p<0$).
Sappiamo che:

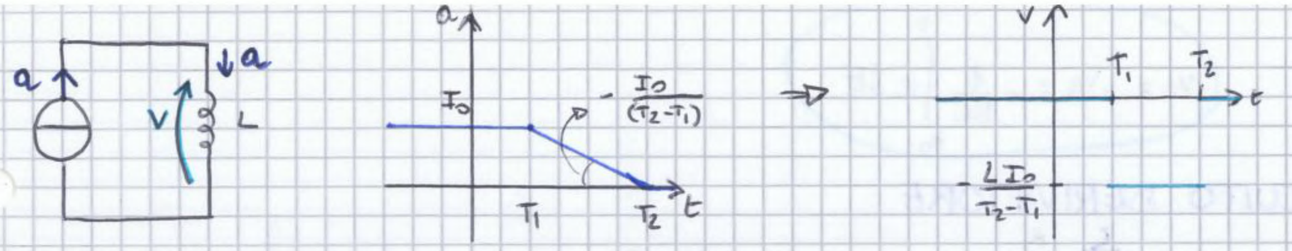
$$p = \frac{dE}{dt} \Rightarrow E - E_0 = \int_{t_0}^{t} p(t)dt$$

Poniamo $t_0$ come momento di inizio del funzionamento del condensatore, quindi

$$E_0 = 0$$

$$E = \int_{t_0}^{t} C v \frac{dv}{\cancel{dt}}\cancel{dt} = C\int_{v(t_0)}^{v(t)} v\,dv = C\left(\frac{v^2}{2}\right)_{v(t_0)}^{v(t)} = \frac{C}{2}v(t)^2$$

perché $v(t_0) = 0$




La corrente deve essere continua, mentre la tensione può avere dei salti.

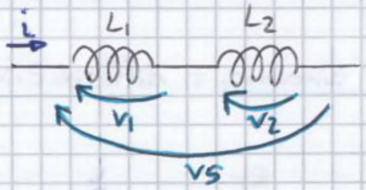
Calcoliamo la potenza sull'induttore:

$$p = i \cdot L \frac{di}{dt} \quad \text{con convenzione utilizzatori}$$

Può essere maggiore o minore di zero. Ricaviamo l'energia:

$$\boxed{E = \frac{L}{2} i^2} \quad > 0 \text{ sempre}$$

## Induttori in Serie

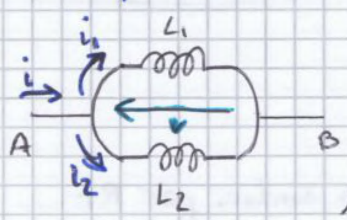



$$V_S = V_1 + V_2 = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} = (L_1 + L_2) \frac{di}{dt}$$

Abbiamo trovato l'equazione di un induttore equivalente:

$$\boxed{L_{eq} = L_1 + L_2}$$

## Induttori in parallelo

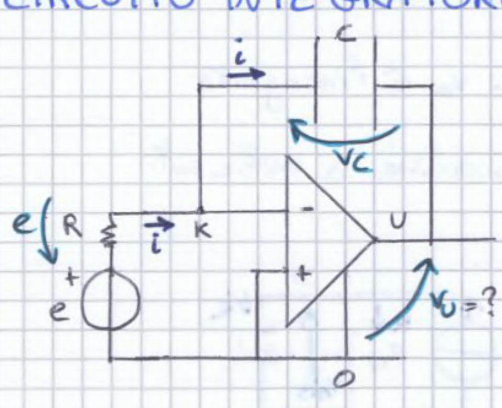



$$i = i_1 + i_2 = \frac{1}{L_1} \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt + \frac{1}{L_2} \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right) \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$$

Abbiamo trovato l'equazione di un induttore equivalente:

$$\boxed{\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}}$$

## CIRCUITO INTEGRATORE




$V_+ = 0$

$V_d = 0$

$V_K = V_- = 0$

Applicando KVL si trova che la tensione su R deve essere e. Si genera una corrente:

$$i = \frac{e}{R}$$

Tale corrente passa anche in C e induce: $V_c = \frac{1}{C} \int_{t_0}^{t} \frac{e}{R}\,dt = \frac{1}{RC} \int_{t_0}^{t} e\,dt$

Applichiamo KVL al percorso $O \to U \to K \to O$:

Su $R_N$ agisce sempre $V_{AB}$, quindi:

$$i_R = \frac{V_{AB}}{R_N} = \frac{L}{R_N} \cdot \frac{di_L}{dt}$$

Applichiamo KCL in A:

$$i_N = i_R + i_L \Rightarrow i_N = \frac{L}{R_N}\frac{di_L}{dt} + i_L \Rightarrow \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{L/R_N} i_L = \frac{1}{L/R_N} i_N(t)$$

Abbiamo ottenuto un'equazione differenziale di primo ordine a coefficienti costanti non omogenea. L'incognita è $i_L$.

Entrambe le equazioni differenziali trovate possono essere generalizzate come:

$$\frac{dx}{dt} + \frac{x}{\tau} = \frac{s(t)}{\tau} \rightarrow \begin{cases} \Rightarrow x = v_C;\ \tau = R_T C;\ s = e_T \\ \Rightarrow x = i_L;\ \tau = \frac{L}{R_N};\ S = i_N \end{cases}$$

La soluzione è data da: $x(t) = x_{om}(t) + x_p(t)$

La soluzione omogenea è:

$$x_{om} = K e^{at}$$

Verifichiamo:

$$\frac{dKe^{at}}{dt} + \frac{Ke^{at}}{\tau} = 0 \Rightarrow aKe^{at} + \frac{Ke^{at}}{\tau} = 0 \Rightarrow Ke^{at}\left(a + \frac{1}{\tau}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{\tau} \qquad (K \neq 0 \text{ sicuramente se no non ha senso})$$

Quindi

$$\begin{cases} \Rightarrow a = -\frac{1}{R_T C} < 0 \\ \Rightarrow a = -\frac{R_N}{L} < 0 \end{cases}$$

Poiché C, L, R sono sempre positive, si ha che $\tau > 0$ sempre e dipende dal circuito. Per questo "a" è sempre negativa: ciò significa che l'esponenziale decresce nel tempo.

La soluzione particolare dipende dalla natura di s(t).

Analizziamo il caso s(t) = S costante.

$$x_p = K_0$$

Se s(t) = S, nel circuito ci sono <u>solo</u> generatori costanti.

Abbiamo ottenuto:

$$x(t) = K e^{-t/\tau} + K_0$$

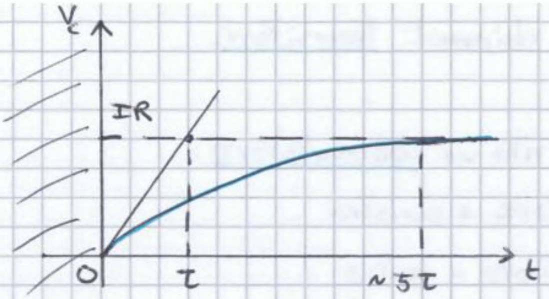
Introduciamo la condizione iniziale: $x(t=0) = x_0$

Quindi si ha:

$$x_0 = K + K_0 \Rightarrow K = (x_0 - K_0)$$

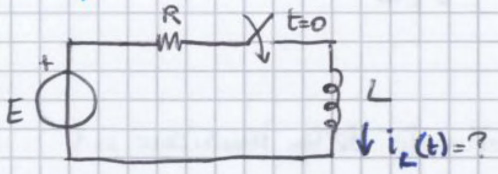
Sostituiamo il K trovato nell'equazione:

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 82




Dopo un tempo di circa $5\tau$, la curva diventa praticamente costante.
Se facciamo la tangente in O a $e^{-t/RC}$, troviamo che essa interseca la retta $V_c = IR$ **ESATTAMENTE** al tempo $\tau$.

## Esempio




Con E costante.

$$i_L(t) = (i_L(0) - i_L(\infty))e^{-\frac{t}{\tau}} + i_L(\infty) \quad \text{per } t \geq 0$$

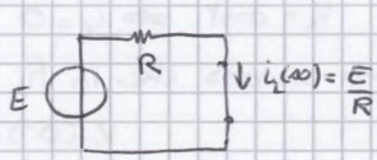
Facendo l'equivalente di Norton si trova che $\tau = \frac{L}{R}$

Per la condizione iniziale: $i_L(0^+) = i_L(0^-)$
Ma prima della chiusura dell'interruttore, L è un monopolo:

$$i_L(0^-) = 0 \Rightarrow i_L(0^+) = i_L(0) = 0$$

Per la condizione finale, sappiamo che l'esponenziale è esaurito, quindi tutte le grandezze del circuito sono costanti.

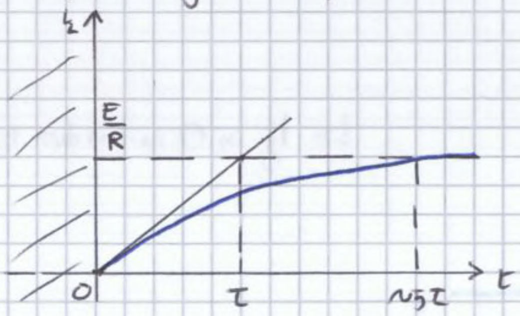
$$i_L = \text{costante} \Rightarrow V_L = 0$$




Quindi: $i(t) = \left(0 - \frac{E}{R}\right)e^{-\frac{tR}{L}} + \frac{E}{R}$ per $t \geq 0$ $\Rightarrow$

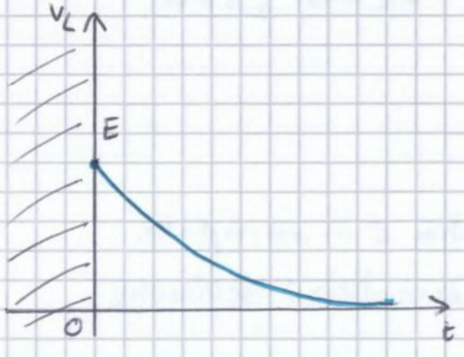
$$\Rightarrow i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{tR}{L}}\right) \quad \text{per } t \geq 0$$

Facciamo il grafico quotato:




Dopo circa $5\tau$ la curva diventa praticamente costante.
Se facciamo la tangente in O a $e^{-\frac{tR}{L}}$ troviamo che interseca la retta $i_L = \frac{E}{R}$ **ESATTAMENTE** al tempo $\tau$.

Tramite l'equazione di funzionamento dell'induttore si trova: $v_L = L\frac{di_L}{dt} = \cancel{L}\frac{E}{\cancel{R}}\left(\frac{\cancel{R}}{\cancel{L}}e^{-\frac{tR}{L}}\right)$
Quindi: $v_L = Ee^{-\frac{tR}{L}}$. Facciamo il grafico:




Prima che si chiuda l'interruttore:

$i_L = 0 \qquad v_L = 0$

Dopo chiusura dell'interruttore:

$i_L = 0 \qquad v_L = E$

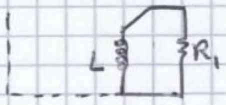
Notiamo che la tensione fa un salto.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 82

$i_L(0^-) = \text{cost.} \Rightarrow V_L = 0 \Rightarrow L$ è un corto circuito

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = \frac{E}{R_1}$$

Calcolo condizione finale:

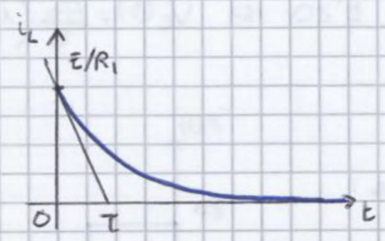



La parte a sinistra è un monopolo, la parte a destra è un circuito inerte.

$$i_L(\infty) = 0$$

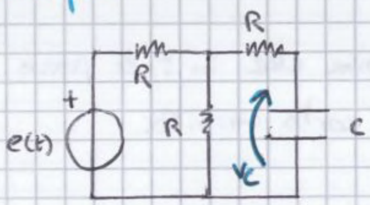
Abbiamo la soluzione:

$$i_L(t) = \frac{E}{R_1} e^{-\frac{tR}{L}}$$

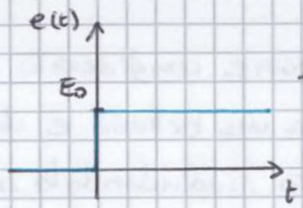



tg in 0 individua $\tau$

Esempio

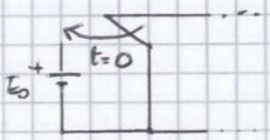



dove:




→ funzione gradino

La tensione del generatore non è più costante, ma possiamo schematizzare il generatore come:



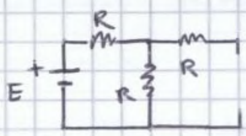

commutatore collegato a un corto circuito per $t<0$, collegato a una batteria per $t \geq 0$.

Ci siamo ricondotti a un caso già visto: $V_C(t) = (V_C(0^+) - V_C(\infty)) e^{-t/\tau} + V_C(\infty)$

$$\tau = C \cdot R_{eq} = \frac{3}{2} R \cdot C$$

Condizioni iniziali: il circuito è inerte. $V_C(0^-) = V_C(0^+) = 0$

Condizioni finali: il circuito è in condizioni stazionarie.

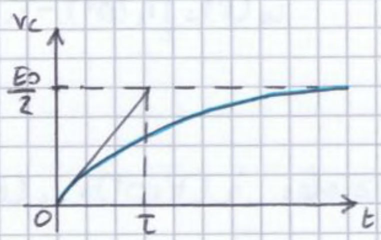



$V_C = \text{cost.} \Rightarrow i_C = 0 \Rightarrow C$ è un circuito aperto

$$V_C(\infty) = E_0 \cdot \frac{R}{2R} = \frac{E_0}{2}$$

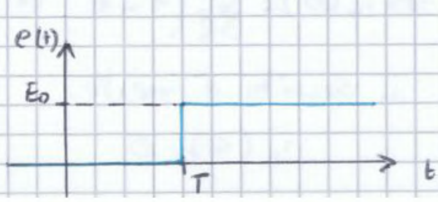
Abbiamo la soluzione:

$$V_C(t) = -\frac{E_0}{2} e^{-\frac{2t}{3RC}} + \frac{E_0}{2} = \frac{E_0}{2}\left(1 - e^{-\frac{2t}{3RC}}\right)$$




Esempio

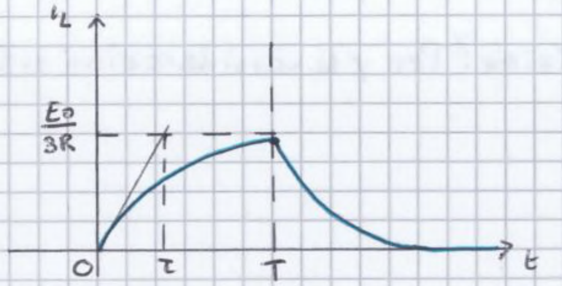

dove:



Quindi: $i_L(t') = \left[\frac{E_0}{3R}\left(1 - e^{-\frac{3RT}{2L}}\right)\right] e^{-\frac{3Rt'}{2L}}$, $t' \geq 0$

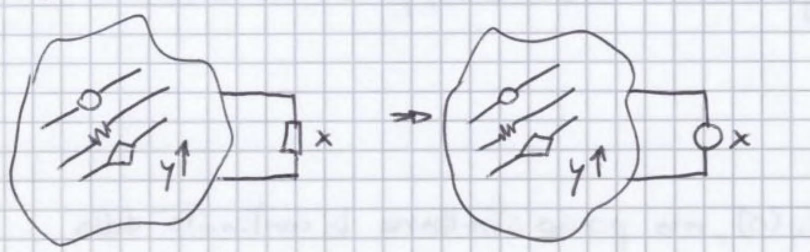
Torniamo alla variabile $t$:

$$i_L(t) = \left[\frac{E_0}{3R}\left(1 - e^{-\frac{3RT}{2L}}\right)\right] e^{-\frac{3R(t-T)}{2L}}, \quad t \geq T$$




## CALCOLO DI ALTRE VARIABILI IN CIRCUITI TRANSITORI

Ipotizziamo di avere generatori costanti e un solo elemento con memoria ($x$).
Vogliamo calcolare la variabile $y$.




Ipotizziamo di aver già risolto l'elemento differenziale: quindi $x$ è nota.
Possiamo sostituire l'elemento differenziale con un generatore $x$.

Utilizziamo la sovrapposizione degli effetti:

$$y = \underbrace{\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \beta_1 i_1 + \beta_2 i_2 + \ldots}_{\text{effetti dei gen. interni al circuito: } U = \text{cost.}} + \gamma x = U + \gamma x$$

Deriviamo:

$$\frac{dy}{dt} = \underbrace{\frac{dU}{dt}}_{=0} + \frac{d}{dt}(\underbrace{\gamma}_{\text{cost.}} x) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \gamma \frac{dx}{dt}$$

Ma avevamo trovato:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{S}{\tau} - \frac{x}{\tau}$$

Quindi:

$$\frac{dy}{dt} = \gamma\left(\frac{S}{\tau} - \frac{x}{\tau}\right)$$

Dalla prima equazione che abbiamo scritto troviamo: $x = y - \frac{U}{\gamma}$

Quindi:

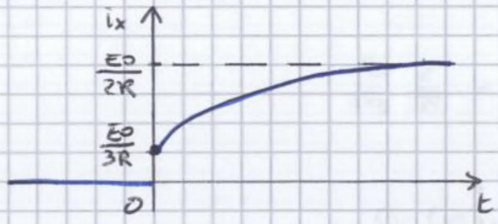
$$\frac{dy}{dt} = \gamma\left(\frac{S}{\tau} - \frac{y - U}{\gamma\tau}\right) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \gamma\frac{S}{\tau} - \frac{y}{\tau} + \frac{U}{\tau}$$

Poniamo: $\gamma S + U = M$ (è il contributo dei gen. indipendenti del circuito)

Quindi:

$$i_x(t) = \left(\frac{E_0}{3R} - \frac{E_0}{2R}\right) e^{-\frac{2t}{3RC}} + \frac{E_0}{2R}, \quad t \geq 0$$

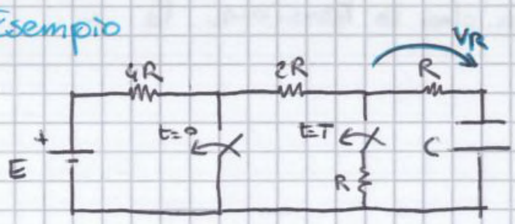
Se proviamo a calcolare $i_x$ per $t<0$, si vede subito che $i_x(0^-)=0$.
Quindi la $i_x$ non è continua.




Variabili di stato: tensione sul condensatore e corrente sull'induttore

variabili complementari: corrente sul condensatore e tensione sull'induttore

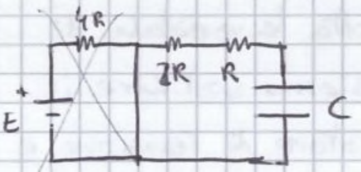
Esempio




$V_R = ?$

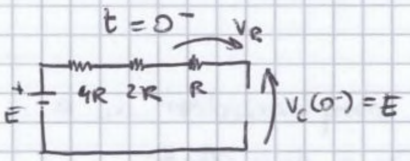
Si ha che $T>0$

1° INTERVALLO: $V_R(t) = \left[V_R(0^+) - V_R(\infty)\right] e^{-t/\tau} + V_R(\infty), \quad t \geq 0$

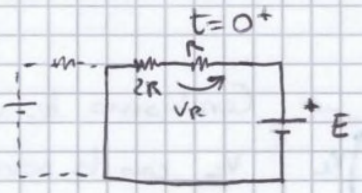



$\tau = C \cdot R_{eq} = C \cdot 3R$

Condizione iniziale: $V_R$ non è una funzione continua, dobbiamo sfruttare $V_C(0^-)$

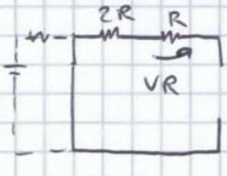



$\Rightarrow$




$V_R(0^+) = E \frac{R}{2R+R} = \frac{E}{3}$

Condizione finale: $V_R(\infty)$

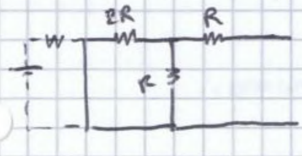



è un circuito inerte: $V_R(\infty) = 0$

$V_C(\infty) = 0$

Quindi: $V_R(t) = \frac{E}{3} e^{-\frac{t}{3RC}}, \quad 0 \leq t < T$

2° INTERVALLO: poniamo $t' = t - T \Rightarrow V_R(t') = \left[V_R(0^+) - V_R(\infty)\right] e^{-\frac{t'}{\tau'}} + V_R(\infty), \quad t' \geq 0$




$\tau' = C \cdot R_{eq} = C\left[(2R // R) + R\right] = \frac{5}{3} RC \neq \tau$

Condizione iniziale:


Avevamo: $0 \leq t \leq T \Rightarrow V_c(t) = E e^{-\frac{t}{3RC}}$

Abbiamo ottenuto un sistema di due equazioni differenziali a coefficienti costanti non omogenee.

Ipotizziamo che i generatori del circuito siano costanti e riscriviamo come:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{S}$$

Dove: $\underline{x} = \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix}$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \frac{m_{11}}{C} & \frac{m_{12}}{C} \\ \frac{m_{21}}{L} & \frac{m_{22}}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\underline{s} = \begin{bmatrix} \frac{u_1}{C} \\ \frac{u_2}{L} \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{S} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} \quad \text{(perché gen. costanti)}$$

La soluzione sarà:

$$\underline{x}(t) = \underline{x}_0(t) + \underline{x}_P$$

dove la soluzione particolare sarà una costante del tipo: $\underline{X}_P = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix}$

Per la soluzione omogenea:

$$\begin{cases} v_C = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t} \\ i_L = K_1 \eta_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 \eta_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

Dove $\lambda_1$ e $\lambda_2$ sono gli autovalori di $\underline{\underline{A}}$. Per trovarli poniamo:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{21} \cdot a_{12} = 0$$

I coefficienti $\eta_1$ e $\eta_2$ sono componenti degli autovettori di $\underline{\underline{A}}$:

$$\underline{\underline{A}} \begin{bmatrix} 1 \\ \eta_1 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \eta_1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{\underline{A}} \begin{bmatrix} 1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}$$

Imponiamo la condizione iniziale in $t=0$ (quindi gli esponenziali valgono 1):

$$\begin{cases} V_C(0) = K_1 + K_2 + W_1 \\ i_L(0) = K_1 \eta_1 + K_2 \eta_2 + W_2 \end{cases}$$

Noti $W_1$ e $W_2$, possiamo trovare $K_1$ e $K_2$.

Consideriamo allora la condizione finale per $t \to \infty$. Vediamo che se $\lambda_1$ e $\lambda_2$ fossero positivi, per $t \to \infty$ gli esponenziali tenderebbero a $\infty$. Tuttavia che una tensione e una corrente tendano ad $\infty$ non ha nessun senso fisico, quindi possiamo supporre $\lambda_1$ e $\lambda_2$ negativi.

$$\begin{cases} V_C(t \to \infty) = K_1 \cdot 0 + K_2 \cdot 0 + W_1 \\ i_L(t \to \infty) = K_1 \eta_1 \cdot 0 + K_2 \eta_2 \cdot 0 + W_2 \end{cases}$$

Quindi:

Cerchiamo gli autovalori di $\underline{\underline{A}}$:

$$\det\begin{bmatrix} -\frac{1}{RC}-\lambda & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda\left(-\frac{1}{RC}-\lambda\right)+\frac{1}{CL}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{RC}+\lambda^2+\frac{1}{CL}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L\lambda + RCL\,\lambda^2 + R = 0 \Rightarrow$$

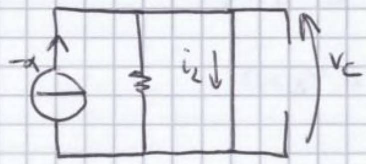
$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-L \pm \sqrt{L^2-4R^2CL}}{2RCL}$$

Cerchiamo gli autovettori di $\underline{\underline{A}}$:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ \eta_1 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \eta_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{RC}-\frac{\eta_1}{C}=\lambda_1 \\ \text{l'altra eq. non ci serve} \end{cases} \Rightarrow \eta_1 = C\left(-\frac{1}{RC}-\lambda_1\right)$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} \Rightarrow -\frac{1}{RC}-\frac{\eta_2}{C}=\lambda_2 \Rightarrow \eta_2 = C\left(-\frac{1}{RC}-\lambda_2\right)$$

Cerchiamo le condizioni iniziali $V_C(0)$ e $i_L(0)$: entrambe sono funzioni continue.
Per $t<0$, $J_0=-\alpha$ e il circuito è in condizioni stazionarie.




$V_C(0^-)=0=V_C(0^+)$ (perché tensione su un corto circuito)
$i_L(0^-)=-\alpha=i_L(0^+)$

Cerchiamo le condizioni finali: $i_L(\infty)$ e $v_C(\infty)$. Il circuito è sempre in condizioni stazionarie, ma $J_0=\alpha$. Quindi:

$$i_L(\infty)=\alpha$$
$$v_C(\infty)=0$$

Ora possiamo calcolare le costanti $k_1$ e $k_2$:

$$\begin{cases} v_C(0)=k_1+k_2+v_C(\infty) \\ i_L(0)=k_1\eta_1+k_2\eta_2+i_L(\infty) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0=k_1+k_2 \\ -\alpha=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1=-k_2 \\ k_2(\eta_2-\eta_1)=-2\alpha \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} k_2 = -\frac{2\alpha}{\eta_2-\eta_1} \\ k_1 = \frac{2\alpha}{\eta_2-\eta_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = \frac{2\alpha}{C(\lambda_1-\lambda_2)} \\ k_2 = -\frac{2\alpha}{C(\lambda_1-\lambda_2)} \end{cases}$$

Le soluzioni sono:

$$\begin{cases} v_C(t)=\frac{2\alpha}{C(\lambda_1-\lambda_2)}e^{\lambda_1 t}-\frac{2\alpha}{C(\lambda_1-\lambda_2)}e^{\lambda_2 t} \\ i_L(t)=\frac{2\alpha}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\frac{1}{RC}-\lambda_1\right)e^{\lambda_1 t}+\frac{2\alpha}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\frac{1}{RC}+\lambda_2\right)e^{\lambda_2 t}+\alpha \end{cases} \quad \text{per } t\geq 0$$

Soluzione:

$$\begin{cases} v_C(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t} + V_C(\infty) \\ i_L(t) = K_1 \eta_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 \eta_2 e^{\lambda_2 t} + i_L(\infty) \end{cases} \quad , t \geq 0$$

Calcoliamo $K_1$ e $K_2$:

$$\begin{cases} V_C(0) = K_1 + K_2 + V_C(\infty) \\ i_L(0) = K_1 \eta_1 + K_2 \eta_2 + i_L(\infty) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = K_1 + K_2 + E \\ \frac{E}{R} = K_1 \lambda_1 C + K_2 \lambda_2 C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_2 = -K_1 - E \\ \frac{E}{R} = K_1 \lambda_1 C + (-K_1 - E)\lambda_2 C \end{cases}$$

$$\frac{E}{R} = K_1 \lambda_1 C - K_1 \lambda_2 C - E\lambda_2 C \Rightarrow \frac{E}{R} = K_1 C(\lambda_1 - \lambda_2) - E\lambda_2 C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_1 C(\lambda_1 - \lambda_2) = \frac{E}{R} + E\lambda_2 C \Rightarrow \begin{cases} K_1 = \frac{\frac{E}{R} + E\lambda_2 C}{C(\lambda_1 - \lambda_2)} = \frac{E\left(\frac{1}{R} + \lambda_2 C\right)}{C(\lambda_1 - \lambda_2)} \\ K_2 = -\frac{E\left(\frac{1}{R} + \lambda_2 C\right)}{C(\lambda_1 - \lambda_2)} - E \end{cases}$$

Gli autovalori influenzano l'andamento nel tempo.

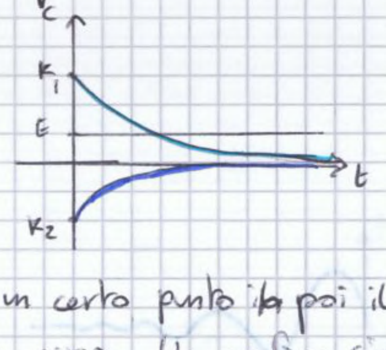
Se $\alpha^2 > \omega_0^2$ gli autovalori sono reali e negativi:

$$\begin{cases} V_C(t) = K_1 e^{-\alpha_1 t} + K_2 e^{-\alpha_2 t} + E \\ i_L(t) = -K_1 C\alpha_1 e^{-\alpha_1 t} - K_2 C\alpha_2 e^{-\alpha_2 t} \end{cases}$$

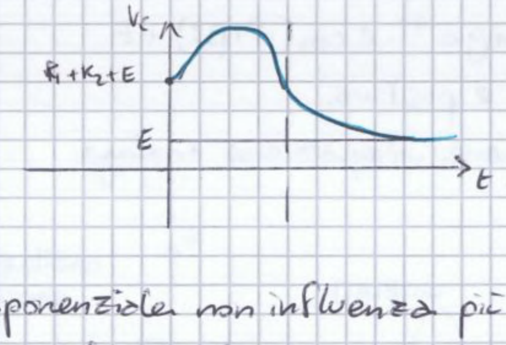
$$\begin{cases} K_1 = \frac{E\left(\frac{1}{R} - C\alpha_2\right)}{C(-\alpha_1 + \alpha_2)} \\ K_2 = -\frac{E\left(\frac{1}{R} - C\alpha_1\right)}{C(\alpha_2 - \alpha_1)} - E \end{cases}$$

Se le quantità tra parentesi sono positive, $K_1$ e $K_2$ hanno segno opposto.

Considieriamo singolarmente gli esponenziali. Se $\alpha_1$ è piccolo, la costante di tempo $\left(\alpha = \frac{1}{\tau}\right)$ è grande. Se $\alpha_2$ è grande, la costante di tempo è piccola.



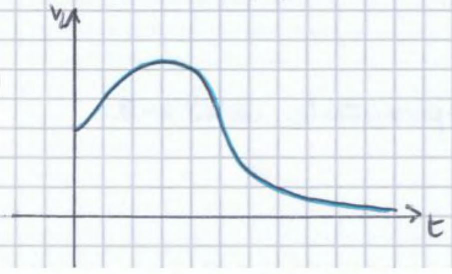

$\Longrightarrow$




Da un certo punto in poi il secondo esponenziale non influenza più l'andamento della curva. Un grafico simile si ricava anche per $i_L$.

Se sullo stesso circuito volessimo calcolare $v_L$, per prima cosa risolviamo le variabili di stato, poi:

$$v_L(t) = L\frac{di_L}{dt} = L\left(K_1 C\alpha_1^2 e^{-\alpha_1 t} + K_2 C\alpha_2^2 e^{-\alpha_2 t}\right)$$




Questo circuito è come quello del motore a benzina:

induttore → bobina

interruttore → puntine

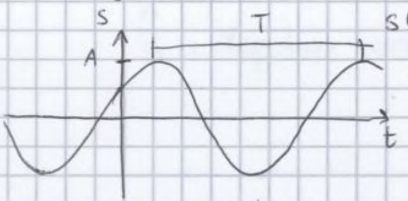
tra K e H → candela

# GENERATORI SINUSOIDALI

Sappiamo che:

$$\frac{dx}{dt}+\frac{x}{\tau}=\frac{s}{\tau} \Rightarrow x = x_0 + x_p$$

Ipotizziamo di avere un solo generatore sinusoidale oppure tanti generatori sinusoidali con la stessa frequenza $\omega$:




$$s(t) = A\cos(\omega t+\varphi)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$x_p = k_p\cos(\omega t+\varphi)$$

Nei sistemi elettrici le costanti di tempo durano molto poco ($10^{-3}$s), quindi possiamo lasciare da parte $x_0$ che tende a zero molto rapidamente.
Sappiamo che $x_p$ deve soddisfare l'equazione differenziale:

$$\frac{dx_p}{dt}+\frac{x_p}{\tau}=\frac{s}{\tau} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -k_p\omega\,\mathrm{sen}(\omega t+\varphi)+\frac{k_p}{\tau}\cos(\omega t+\varphi)=\frac{A}{\tau}\cos(\omega t+\varphi)$$

Vogliamo trovare $k_p$. L'equazione è molto complicata: usiamo il teorema di Eulero.

$$S = A\,\frac{e^{j(\omega t+\varphi)}+e^{-j(\omega t+\varphi)}}{2}$$

$$x_p = k_p\,\frac{e^{j(\omega t+\varphi)}+e^{-j(\omega t+\varphi)}}{2}$$

L'equazione differenziale diventa:

$$\frac{k_p}{2}\omega j e^{j(\omega t+\varphi)}-\frac{k_p}{2}\omega j e^{-j(\omega t+\varphi)}+\frac{k_p}{2\tau}e^{j(\omega t+\varphi)}+\frac{k_p}{2\tau}e^{-j(\omega t+\varphi)}=\frac{A}{2\tau}e^{j(\omega t+\varphi)}+\frac{A}{2\tau}e^{-j(\omega t+\varphi)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{k_p}{2}j\omega e^{j\omega t}e^{j\varphi}-\frac{k_p}{2}\omega j e^{-j\omega t}e^{-j\varphi}+\frac{k_p}{2\tau}e^{j\omega t}e^{j\varphi}+\frac{k_p}{2\tau}e^{-j\omega t}e^{-j\varphi}=\frac{A}{2\tau}e^{j\omega t}e^{j\varphi}+\frac{A}{2\tau}e^{-j\omega t}e^{-j\varphi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{j\omega t}\left(\frac{j\omega k_p}{2}e^{j\varphi}+\frac{k_p}{2\tau}e^{j\varphi}-\frac{A}{2\tau}e^{j\varphi}\right)=e^{-j\omega t}\left(\frac{k_p\omega j}{2}e^{-j\varphi}-\frac{k_p}{2\tau}e^{-j\varphi}+\frac{A}{2\tau}e^{-j\varphi}\right)$$

Le due funzioni di t sono diverse: l'uguaglianza regge solo se si ha 0=0.

$$\frac{j\omega k_p}{2}e^{j\varphi}+\frac{k_p}{2\tau}e^{j\varphi}-\frac{A}{2\tau}e^{j\varphi}=0$$

$k_p$ è l'incognita.
$\omega$ è noto e dipende dal generatore.
$\varphi$ è noto e dipende dal generatore.
$A$ è nota e dipende dal generatore.
$\tau$ è nota e dipende dal circuito.

Quindi:

$$e^{j\varphi}\left[k_p\left(\frac{j\omega}{2}+\frac{1}{2\tau}\right)-\frac{A}{2\tau}\right]=0 \Rightarrow k_p\left(\frac{j\omega}{2}+\frac{1}{2\tau}\right)=\frac{A}{2\tau} \Rightarrow$$

Da cui:

$$\underbrace{Re\left\{\hat{Y}e^{j\omega t}\right\}}_{y} = \alpha_1 \underbrace{Re\left\{\hat{E}_1 e^{j\omega t}\right\}}_{e_1} + \alpha_2 \underbrace{Re\left\{\hat{E}_2 e^{j\omega t}\right\}}_{e_2} + \dots + \beta_1 \underbrace{Re\left\{\hat{A}_1 e^{j\omega t}\right\}}_{a_1} + \dots$$

I coefficienti $\alpha$ e $\beta$ sono sicuramente reali perchè dipendono dai parametri del circuito, quindi possiamo scrivere:

$$Re\left\{\hat{Y}e^{j\omega t}\right\} = Re\left\{\alpha_1 \hat{E}_1 e^{j\omega t}\right\} + Re\left\{\alpha_2 \hat{E}_2 e^{j\omega t}\right\} + \dots + Re\left\{\beta_1 \hat{A}_1 e^{j\omega t}\right\} + \dots$$

La somma di parti reali è la parte reale della somma:

$$Re\left\{\hat{Y}e^{j\omega t} - \alpha_1 \hat{E}_1 e^{j\omega t} - \alpha_2 \hat{E}_2 e^{j\omega t} - \dots\right\} = 0$$

Se la parte reale è nulla, tutto ciò che c'è tra parentesi deve essere nullo:

$$\hat{Y}e^{j\omega t} - \alpha_1 \hat{E}_1 e^{j\omega t} - \alpha_2 \hat{E}_2 e^{j\omega t} - \dots = 0$$

Semplifichiamo gli esponenziali e otteniamo:

$$\boxed{\hat{Y} = \alpha_1 \hat{E}_1 + \alpha_2 \hat{E}_2 + \dots}$$

Se vale la sovrapposizione degli effetti, continuano a valere tutte le regole già studiate per i circuiti.

Nella distribuzione della corrente elettrica si usano generatori sinusoidali con:

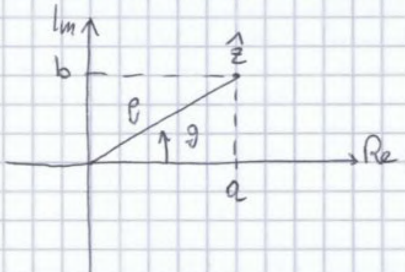
usi industriali in Europa: $f = 50\ Hz$

$T = 20\ mS$

$\omega = 314\ rad/s$

usi industriali in USA e Jap: $f = 60\ Hz$.

## RICHIAMI SUI COMPLESSI




I complessi si rappresentano sul piano di Gauss.

$j = \sqrt{-1}$

Rappresentazione cartesiana: $\hat{z} = a + jb$

Rappresentazione polare: $\hat{z} = \rho e^{j\vartheta}$

Passaggio da cartesiana a polare:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{a^2 + b^2} \\ tg\,\vartheta = \frac{b}{a} \Rightarrow \vartheta = arctg\left(\frac{b}{a}\right) \end{cases}$$

Passaggio da polare a cartesiana:

$$\begin{cases} a = \rho \cos\vartheta \\ b = \rho \sin\vartheta \end{cases}$$

R è reale e positivo, quindi può essere portato dentro la parte reale:

$$Re\{\hat{V} e^{j\omega t}\} = Re\{R \hat{I} e^{j\omega t}\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Re\{\hat{V} e^{j\omega t}\} - Re\{R \hat{I} e^{j\omega t}\} = 0 \Rightarrow$$

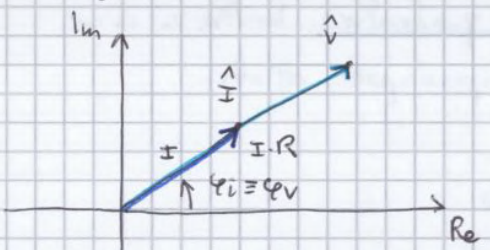
$$\Rightarrow Re\{\hat{V} e^{j\omega t} - R \hat{I} e^{j\omega t}\} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Re\{e^{j\omega t}(\hat{V} - R\hat{I})\} = 0$$

Se l'argomento delle graffe è nullo, allora anche la sua parte reale sarà nulla:

$$e^{j\omega t}(\hat{V} - R\hat{I}) = 0 \Rightarrow \hat{V} - R\hat{I} = 0 \Rightarrow \hat{V} = R\hat{I}$$

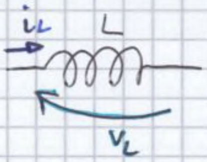
Per un resistore l'equazione di funzionamento con fasori è dello stesso tipo di quella già vista.




Notiamo che: $\hat{V} = R \cdot I \cdot e^{j\varphi_i}$

Quindi R agisce solo sul modulo e non sulla fase.

## INDUTTORI E CONDENSATORI CON FASORI




$$V_L = L \frac{di_L}{dt}$$

Se siamo in regime sinusoidale:

$$V = Re\{\hat{V} e^{j\omega t}\}$$

$$i = Re\{\hat{I} e^{j\omega t}\}$$

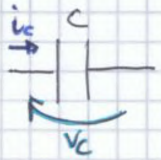
Quindi:

$$Re\{\hat{V} e^{j\omega t}\} = L \frac{d}{dt} Re\{\hat{I} e^{j\omega t}\} \Rightarrow Re\{\hat{V} e^{j\omega t}\} = Re\{L \frac{d}{dt}(\hat{I} e^{j\omega t})\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Re\{\hat{V} e^{j\omega t}\} = Re\{L \hat{I} e^{j\omega t} \cdot j\omega\} \Rightarrow Re\{\hat{V} e^{j\omega t} - L\hat{I} j\omega e^{j\omega t}\} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{V} \cancel{e^{j\omega t}} - L\hat{I} j\omega \cancel{e^{j\omega t}} = 0 \Rightarrow \boxed{\hat{V} = j L \hat{I} \omega}$$

Con i fasori l'equazione di funzionamento di un induttore cambia!




$$i = C \frac{dV}{dt}$$

Svolgendo gli stessi calcoli già visti per l'induttore otteniamo: $\boxed{\hat{I} = j C \hat{V} \omega}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 82

R: $\hat{I} = \frac{1}{R}\hat{V}$ $\qquad Y_R = \frac{1}{R}$

L: $\hat{I} = \frac{1}{j\omega L}\hat{V}$ $\qquad Y_L = \frac{1}{j\omega L}$

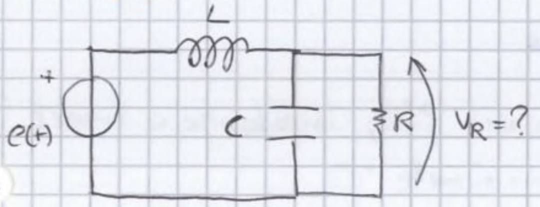
C: $\hat{I} = j\omega C\,\hat{V}$ $\qquad Y_C = j\omega C$

Il coefficiente di proporzionalità tra $\hat{I}$ e $\hat{V}$ è l'ammettenza (Y):

$$\hat{I} = Y\hat{V}$$

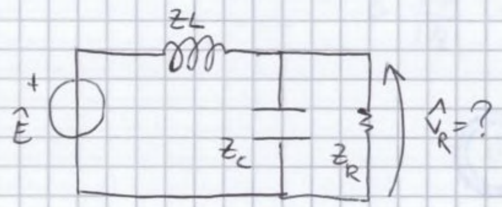
Ammettenza e impedenza possono essere reali o complessi.

Esercizio




$e(t) = E_0\cos(\omega_0 t + \varphi)$

Ridisegnamo il circuito con le quantità complesse:



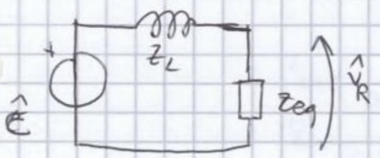

$\underset{(\omega_0)}{\hat{E}} = E_0 e^{j\varphi}$

$Z_L = j\omega L$

$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$

$Z_R = R$

Facciamo il parallelo tra $Z_R$ e $Z_C$:




$$Z_{eq} = Z_R // Z_C = \frac{Z_C Z_R}{Z_C + Z_R} = \frac{\frac{R}{j\omega_0 C}}{R + \frac{1}{j\omega_0 C}} =$$

$$= \frac{\frac{R}{j\omega_0 C}}{\frac{1 + j\omega_0 CR}{j\omega_0 C}} = \frac{R}{1 + j\omega_0 CR} = \frac{R}{\underbrace{\sqrt{1+(\omega_0 CR)^2}}_{M}\, e^{j\underbrace{\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega_0 CR}{1}\right)}_{\alpha}}}$$

Quindi: $Z_{eq} = \frac{R}{M}e^{-j\alpha}$

$$\hat{V}_R = \hat{E}\cdot\frac{Z_{eq}}{Z_{eq} + Z_L} = E_0 e^{j\varphi}\,\frac{\frac{R}{M}e^{-j\alpha}}{\frac{R}{M}e^{-j\alpha} + j\omega_0 L} = E_0 e^{j\varphi}\,\frac{\frac{R}{M}e^{-j\alpha}}{A + jB + j\omega_0 L}$$

con: $\begin{cases} A = \frac{R}{M}\cos\alpha \\ B = -\frac{R}{M}\operatorname{sen}\alpha \end{cases}$

Quindi: $$\hat{V}_R = E_0 e^{j\varphi}\cdot\frac{\frac{R}{M}e^{-j\alpha}}{\underbrace{\sqrt{A^2 + (B+\omega_0 L)^2}}_{m}\; e^{j\underbrace{\operatorname{arctg}\left(\frac{B+\omega_0 L}{A}\right)}_{\beta}}} =$$

Notiamo che la potenza oscilla con frequenza doppia rispetto a tensione e corrente!
Aggiungiamo e togliamo $\angle\hat{I}$ al termine che dipende da $t$:

$$\cos(2\omega t + \angle\hat{V} + \angle\hat{I} + \angle\hat{I} - \angle\hat{I}) = \cos(\underbrace{2\omega t + 2\angle\hat{I}}_{\alpha} + \underbrace{\angle\hat{V} - \angle\hat{I}}_{\beta}) =$$

$$= \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta =$$

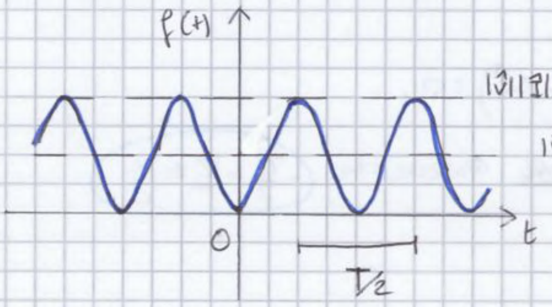
$$= \cos(2\omega t + 2\angle\hat{I})\cos(\underbrace{\angle\hat{V} - \angle\hat{I}}_{\to\ \angle Z}) - \operatorname{sen}(2\omega t + 2\angle\hat{I})\operatorname{sen}(\angle\hat{V} - \angle\hat{I})$$

Quindi:

$$p = \frac{1}{2}\Big\{|\hat{V}||\hat{I}|\cos(2\omega t + 2\angle\hat{I})\cos(\angle\hat{V} - \angle\hat{I}) - |\hat{V}||\hat{I}|\operatorname{sen}(2\omega t + 2\angle\hat{I})\operatorname{sen}(\angle\hat{V} - \angle\hat{I}) + |\hat{V}||\hat{I}|\cos(\angle\hat{V} - \angle\hat{I}) =$$

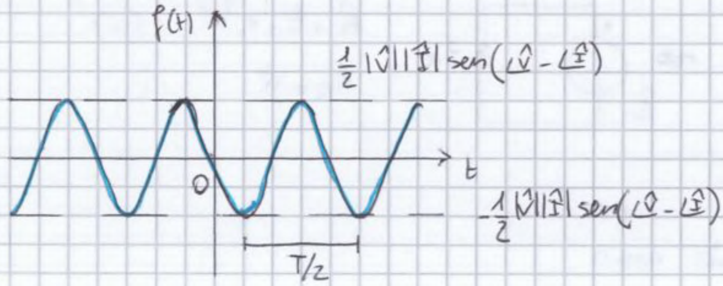
$$= \frac{1}{2}|\hat{V}||\hat{I}|\cos(\angle\hat{V} - \angle\hat{I})\left[1 + \cos(2\omega t + 2\angle\hat{I})\right] - \frac{1}{2}|\hat{V}||\hat{I}|\operatorname{sen}(2\omega t + 2\angle\hat{I})\operatorname{sen}(\angle\hat{V} - \angle\hat{I})$$

Abbiamo ottenuto la somma di due termini dipendenti da $t$ con la stessa frequenza.
Primo termine:




potenza attiva

Secondo termine:




potenza reattiva

Definiamo la potenza media:

$$P = \bar{p} = \frac{|\hat{V}||\hat{I}|\cos(\angle\hat{V} - \angle\hat{I})}{2} + 0$$

La potenza non è costante, ma ai fini della trasformazione dell'energia conta $P$.
Consideriamo il caso di un resistore:

$$\angle\hat{V} = \angle\hat{I} \Longrightarrow p = \frac{1}{2}|\hat{V}||\hat{I}|\cos(0)\left[1 + \cos(2\omega t + 2\angle\hat{I})\right] - \frac{1}{2}|\hat{V}||\hat{I}|\cancel{\operatorname{sen}(2\omega t + \angle\hat{I})\operatorname{sen}(0)}$$

La potenza sul resistore ha solo la parte attiva!


$$P_R = \frac{1}{2}|\hat{V}||\hat{I}|$$

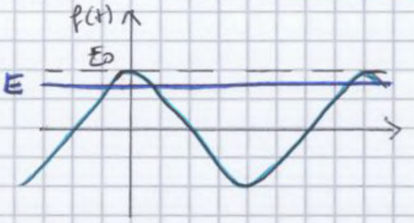
La fisica è soddisfatta!

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 82

Quindi:

$$\frac{1}{2}\frac{E_0^2}{\cancel{R}} = \frac{E^2}{\cancel{R}} \Rightarrow E = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$$

Questo significa che per avere lo stesso effetto dobbiamo prendere una batteria con tensione costante pari al 70% di quella del sinusoide. Tale valore della batteria si chiama valore efficace.



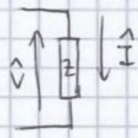

$$\boxed{E_{eff} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} = 70\% \text{ di } E_0}$$

I fasori possono essere definiti con il valore efficace come modulo.

$$e = E_0 \cos(\omega t + \vartheta) \Rightarrow \hat{E}' = \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{j\vartheta}$$

## DATI DI TARGA

Abbiamo visto che:




$$\underbrace{p(t)}_{\text{pot. istantanea}} = \underbrace{\frac{1}{2}|\hat{V}||\hat{I}|\cos(\angle\hat{V}-\angle\hat{I})\left[1+\cos(2\omega t + 2\angle\hat{I})\right]}_{\text{pot. attiva}} + \underbrace{\frac{1}{2}|\hat{V}||\hat{I}|\,\mathrm{sen}(\angle\hat{V}-\angle\hat{I})\,\mathrm{sen}(2\omega t + 2\angle\hat{I})}_{\text{pot. reattiva}}$$

Svolgiamo il seguente calcolo:

$$\frac{1}{2}\hat{V}\cdot\hat{I}^* = \frac{1}{2}|\hat{V}|e^{j\angle\hat{V}}\cdot|\hat{I}|e^{-j\angle\hat{I}} = \frac{1}{2}|\hat{V}||\hat{I}|e^{j\overbrace{(\angle\hat{V}-\angle\hat{I})}^{\angle\hat{Z}}}$$

Passiamo alla notazione cartesiana:

$$\underbrace{\frac{1}{2}|\hat{V}||\hat{I}|\cos(\angle\hat{V}-\angle\hat{I})}_{\text{coeff. della pot. attiva: potenza media }(P)} + j\,\underbrace{\frac{1}{2}|\hat{V}||\hat{I}|\,\mathrm{sen}(\angle\hat{V}-\angle\hat{I})}_{\text{coeff. della pot. reattiva: ampiezza delle sue oscillazioni }(Q)}$$

Quindi: $\frac{1}{2}\hat{V}\cdot\hat{I}^* = P + jQ = S \rightarrow$ potenza complessa

In forma polare:

$$S = \frac{1}{2}|\hat{V}||\hat{I}|e^{j(\angle\hat{V}-\angle\hat{I})} \Rightarrow |S| = \frac{1}{2}|\hat{V}||\hat{I}| \rightarrow \text{potenza apparente}$$

Unità di misura:

- $P \rightarrow$ Watt
- $Q \rightarrow$ VAr (Volt-Ampere reattivi)
- $|S| \rightarrow$ VA (Volt-Ampere)

Indichiamo: $\cos(\angle\hat{V}-\angle\hat{I}) = \cos\varphi \rightarrow$ fattore di potenza

Quando si compra un apparecchio elettrico, ci vengono sempre fornite 3 grandezze, dette dati di targa:

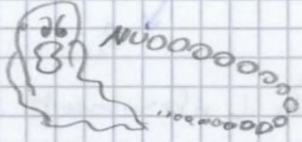
- **Teorema di Bouchelot:**

$$\sum_k S_k = \sum_k (P_k + jQ_k) = 0 \Rightarrow \sum_k P_k + j\sum_k Q_k = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \sum_k P_k = 0 \\ \sum_k Q_k = 0 \end{cases}}$$

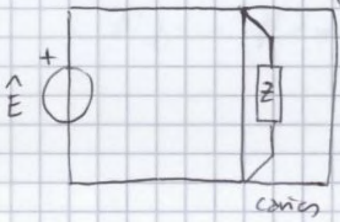
In un circuito si conserva la potenza complessa, ma si conservano anche la potenza attiva e la potenza reattiva separatamente.

- $\sum_k S_k = \sum_k |S_k| e^{j\varphi_k} = 0 \;\not\Rightarrow\; \sum_k |S_k| = 0$ NO!!!

La potenza apparente <u>NON</u> si conserva!!!




Supponiamo di avere un generatore sinusoidale collegato a un carico.



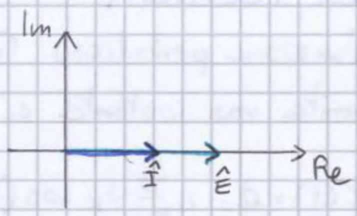

Dati di targa:
$\begin{cases} V_{eff} \\ P \\ \cos\varphi \end{cases}$

<u>1° CASO</u>: $Z = R$ (per esempio, il carico è una lampadina a incandescenza) $\Rightarrow \cos\varphi = 1$

Quindi:

$$|\hat{I}| = \sqrt{2}\frac{P}{V_{eff}\cdot 1} = \sqrt{2}\frac{P}{V_{eff}}$$

$$\hat{E} = \sqrt{2}\,V_{eff}$$



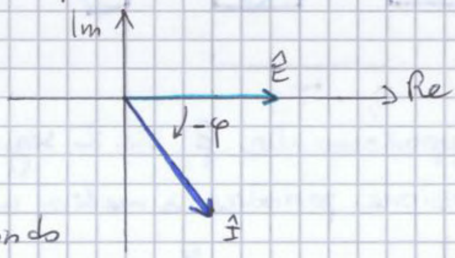

In realtà i fili hanno una piccola resistenza (r), quindi anche una potenza assorbita. Maggiore è la corrente, maggiore è questa potenza sprecata:

$$P_{sprec} = r|\hat{I}|^2$$

<u>2° CASO</u>: $Z = R + jX$ (come la maggior parte dei carichi; tipicamente $X$ è dato da un induttore) $\Rightarrow \cos\varphi \neq 1$

Quindi:

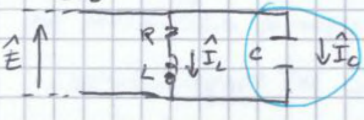
$$|\hat{I}| = \sqrt{2}\frac{P}{V_{eff}\cos\varphi}$$




Se nei due casi P è la stessa, si ha che nel secondo caso la corrente che prelievo dalla linea è maggiore di quella del primo caso. Ciò implica che anche la potenza sprecata è maggiore.

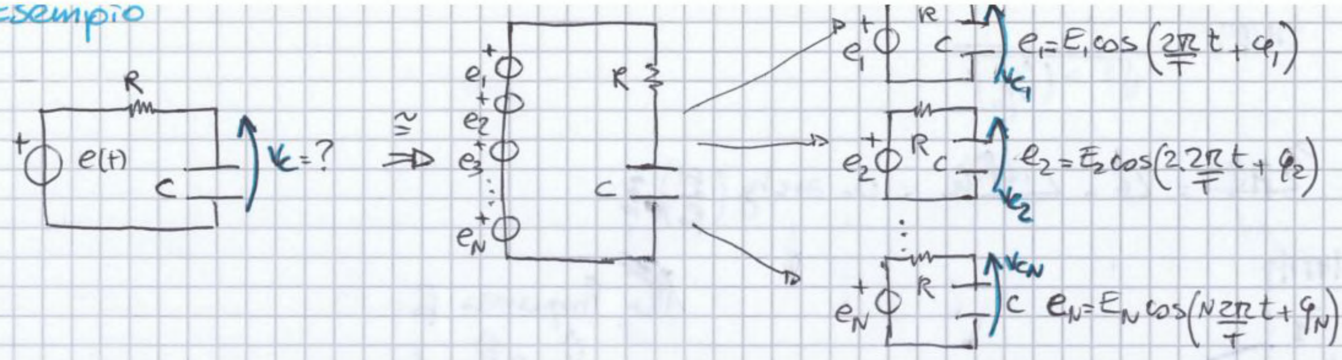
Le potenze sprecate possono essere anche maggiori del 10% dell'energia effettivamente utilizzata: per questo le compagnie elettriche richiedono che l'utilizzatore abbia almeno $\cos\varphi > 0{,}9$.

Come rispettare questa condizione?

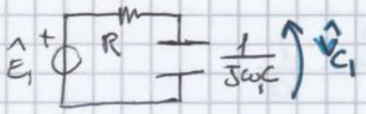



$$\hat{I}_C = j\omega C\hat{E}$$

## Esempio



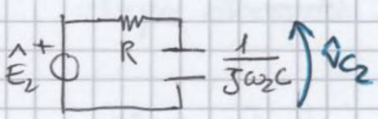

Primo effetto:




$\hat{E}_1 = E_1 e^{j\varphi_1} \qquad \left(\omega_1 = \frac{2\pi}{T}\right)$

$\omega_1 = 2\pi f$

Secondo effetto:




$\hat{E}_2 = E_2 e^{j\varphi_2} \qquad \left(\omega_2 = 2 \cdot \frac{2\pi}{T}\right)$

$\omega_2 = 2f \cdot 2\pi$

N.B: i circuiti variano sia nelle impedenze che nel generatore!

Soluzione:

$$\hat{V}_{C_1} = \hat{E}_1 \cdot \frac{\frac{1}{j\omega_1 C}}{R + \frac{1}{j\omega_1 C}} = \hat{E}_1 \cdot \frac{\frac{1}{j\omega_1 C}}{\frac{j\omega_1 CR + 1}{j\omega_1 C}} = \hat{E}_1 \cdot \frac{1}{j2\pi f CR + 1} =$$

$$= \hat{E}_1 \frac{1}{2\pi CR\left(\underbrace{\frac{1}{2\pi CR}}_{f_0} + jf\right)} = \hat{E}_1 \frac{f_0}{f_0 + jf} = \hat{E}_1 = \frac{1}{1 + j\frac{f}{f_0}}$$

$$\hat{V}_{C_2} = \hat{E}_2 \cdot \frac{\frac{1}{j\omega_2 C}}{R + \frac{1}{j\omega_2 C}} = \hat{E}_2 \cdot \frac{1}{1 + j\,2\frac{f}{f_0}}$$

Eccetera: $\hat{V}_{CN} = \hat{E}_N \frac{1}{1 + j\frac{Nf}{f_0}}$

Introduciamo la funzione di trasferimento (FdT): $H_K = \frac{\hat{V}_{K}}{\hat{E}_K}$

Nel nostro caso: $H_K = \frac{1}{1 + jK\frac{f}{f_0}}$

Possiamo estendere $Kf$ a $f'$, numero reale positivo.

FdT: $H(f') = \frac{1}{1 + j\frac{f'}{f_0}}$ → funzione complessa con variabile $f'$ reale e positiva.

Per la rappresentazione di FdT facciamo il grafico del modulo e quello della fase.

I valori minori di 1 danno Logaritmi negativi.

$$|H(f')| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(f'/f_0\right)^2}} \xrightarrow{dB} |H|_{dB} = 20\,\mathrm{Log}_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(f'/f_0\right)^2}}\right)$$

Quindi:

$$|H|_{dB} = \underbrace{20\,\mathrm{Log}_{10}(1)}_{=0} - 20\,\mathrm{Log}_{10}\left(\sqrt{1+\left(f'/f_0\right)^2}\right) = -\frac{20}{2}\,\mathrm{Log}_{10}\left[1+\left(\frac{f'}{f_0}\right)^2\right]$$

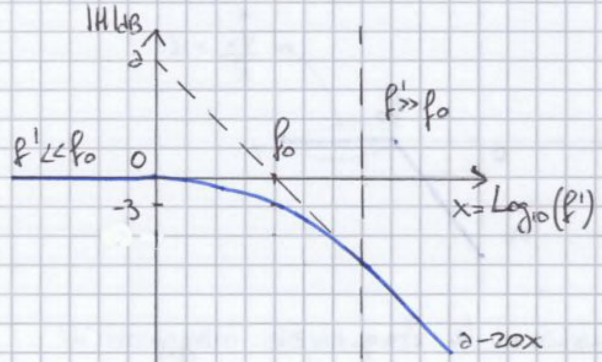
Se $f' \to 0$, $|H|_{dB} = 0$ dB

Se $f' \ll f_0$, $|H|_{dB} \cong 0$ dB

Se $f' = f_0$, $|H|_{dB} = -3$ dB

Se $f' \gg f_0$, $|H|_{dB} \cong -20 \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}_{10}\left[\left(\frac{f'}{f_0}\right)^2\right] = -20\,\mathrm{Log}_{10}\left(\frac{f'}{f_0}\right) = -20\,\mathrm{Log}_{10}(f') + 20\,\mathrm{Log}_{10}(f_0)$

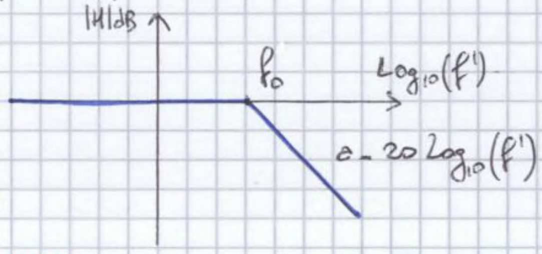
Poniamo $\begin{cases} \mathrm{Log}_{10}(f') = x \\ \mathrm{Log}_{10}(f_0) = a \end{cases} \Rightarrow |H|_{dB} = -20x + a \to$ equazione di una retta




→ diagramma di Bode

La retta ha una pendenza di -20 dB per decade.

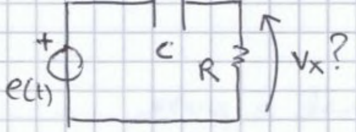
Si può approssimare:



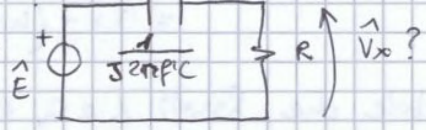

→ diagramma asintotico di Bode

L'errore massimo è di 3 dB.

## Esempio




$e(t) = E\cos(2\pi f' t + \varphi) \Rightarrow$




$$\hat{V}_x = \hat{E} \cdot \frac{R}{R + \frac{1}{j2\pi f'C}} = \hat{E} \cdot \frac{j2\pi f'CR}{\underbrace{j2\pi CR}_{\to \frac{1}{f_0}} f' + 1} = \hat{E} \cdot \frac{j\frac{f'}{f_0}}{1 + j\frac{f'}{f_0}}$$

FdT: $H = \frac{\hat{V}_x}{\hat{E}} = \frac{j\frac{f'}{f_0}}{1 + j\frac{f'}{f_0}}$

$$H = \frac{R}{R\left[1 + j\left(\frac{\omega L}{R}\cdot\frac{C}{C} - \frac{1}{\omega C R}\cdot\frac{L}{L}\right)\right]} = \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega L C}{RC} - \frac{L}{\omega C R L}\right)} =$$

$$= \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0^2}\cdot\frac{1}{RC} - \frac{L}{R}\cdot\frac{\omega_0^2}{\omega}\right)} = \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0}\cdot\frac{1}{\omega_0 RC} - \frac{\omega_0}{\omega}\cdot\frac{\omega_0 L}{R}\right)}$$

Notiamo che:

$$\frac{1}{\omega_0 RC}\cdot\frac{\omega_0}{\omega_0} = \frac{\omega_0 L C}{R C} = \omega_0\frac{L}{R} = Q_s \rightarrow \text{FATTORE DI QUALITÀ}$$

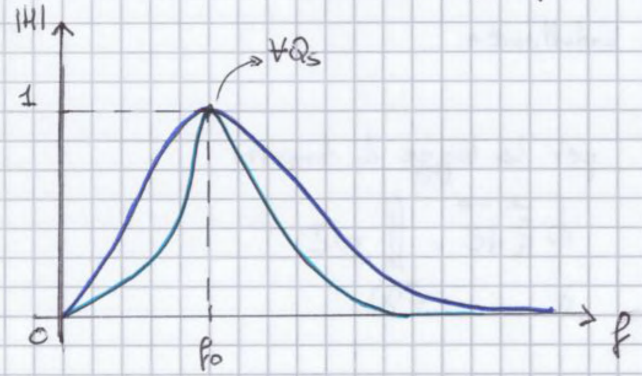
Quindi:

$$H = \frac{1}{1 + jQ_s\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} = \frac{1}{1 + jQ_s\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)}$$

Da cui:

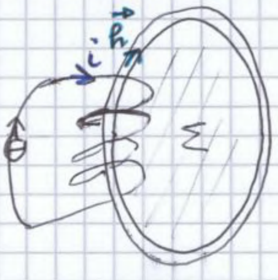
$$|H| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_s^2\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)^2}}$$

$$\angle H = -\operatorname{arctg}\left[Q_s\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)\right]$$




A partire di $f_0$, se $Q_s$ è grande la funzione si azzera più velocemente.
Abbiamo ottenuto un filtro che fa passare solo $f_0$: **FILTRO PASSA BANDA**. Viene usato in tutti i sistemi di comunicazione.

## SISTEMI MAGNETICI




Si abbia un anello fatto con un materiale con alta permeabilità magnetica: $\mu >> \mu_0$
Si avvolge un filo intorno all'anello: La corrente $i$ produce un campo magnetico $\vec{h}$ perpendicolare alla spira.
Tutto il campo $\vec{h}$ prodotto dalla corrente sta all'interno del materiale dell'anello.

Per la legge di Ampere: $\oint_\gamma \vec{h}\, d\vec{l} = \iint_{\Sigma(\gamma)} J\, d\Sigma$

Nel nostro caso $\gamma$ è l'anello. Sia $\mathcal{L}$ la sua lunghezza.

$$\oint_\gamma \vec{h}\, d\vec{l} = |h|\mathcal{L}$$

$$\Phi = b \cdot A = \frac{Ni}{\frac{e_1+e_2}{\mu} + \frac{2x}{\mu_0}} A$$

Quindi la tensione sulla spira è:

$$V = N\frac{d\Phi}{dt} = \underbrace{\frac{N^2 A}{\frac{e_1+e_2}{\mu} + \frac{2x}{\mu_0}}}_{L} \frac{di}{dt}$$

Si presentano 2 casi:

- $x \neq 0 \Rightarrow L_1 = \dfrac{N^2 A}{\frac{e_1+e_2}{\mu} + \frac{2x}{\mu_0}}$
- $x = 0 \Rightarrow L_2 = \dfrac{N^2 A}{\frac{e_1+e_2}{\mu_0}}$

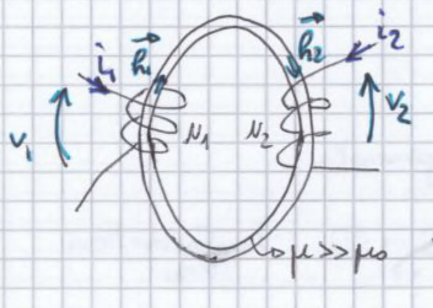
L'energia dell'induttore è: $\mathcal{E} = \frac{1}{2} L i^2$

Notiamo che: $\mathcal{E}_1 = \frac{1}{2} L_1 i^2 \neq \mathcal{E}_2 = \frac{1}{2} L_2 i^2$

La variazione di energia è dovuta al lavoro fatto per spostare la barretta nella nuova posizione.

$$\Delta\mathcal{E} = Fx \quad \rightarrow \text{calamita elettrica}$$

Consideriamo un altro caso:




Nell'anello si ha: $\vec{h}_1 + \vec{h}_2 = \vec{h}$

$$\oint_\gamma \vec{h}\, d\vec{e} = he = (h_1 + h_2)e$$

$$\iint_{\Sigma(\gamma)} J\, d\Sigma = N_1 i_1 + N_2 i_2$$

Quindi per la legge di Ampere:

$$(h_1 + h_2)e = N_1 i_1 + N_2 i_2 \Rightarrow \left(\frac{b_1}{\mu} + \frac{b_2}{\mu}\right) e = N_1 i_1 + N_2 i_2$$

Quindi:

$$b = b_1 + b_2 = \frac{\mu}{e}\left(N_1 i_1 + N_2 i_2\right)$$

$$\Phi = bA = \frac{A\mu}{e}\left(N_1 i_1 + N_2 i_2\right)$$

Per la legge di Faraday:

$$v_1 = N_1 \frac{d\Phi}{dt} = \underbrace{N_1^2 \frac{\mu A}{e}}_{\text{autoinduttanza } L_{11}} \frac{di_1}{dt} + \underbrace{N_1 N_2 \frac{\mu A}{e}}_{\text{mutua induttanza } M} \frac{di_2}{dt}$$

$$v_2 = N_2 \frac{d\Phi}{dt} = \underbrace{\frac{N_1 N_2 \mu A}{e}}_{M} \frac{di_1}{dt} + \underbrace{\frac{N_2^2 \mu A}{e}}_{} \frac{di_2}{dt}$$

$\hat{I}_p = \hat{I}_1 \Rightarrow \hat{I}_2 = -\frac{1}{n}\hat{I}_p$

$\hat{V}_z = Z\hat{I}_2 = -\hat{V}_2 \Rightarrow \hat{V}_2 = -Z\left(-\frac{1}{n}\hat{I}_p\right)$

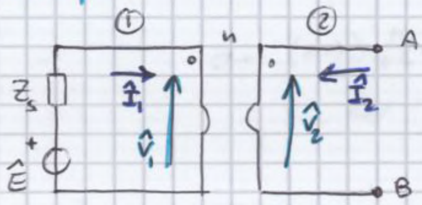
$\hat{V}_2 = n\hat{V}_1 \Rightarrow \hat{V}_1 = \frac{\hat{V}_2}{n} = \frac{Z}{n^2}\hat{I}_1 = \frac{Z}{n^2}\hat{I}_p$ con $\hat{V}_1 = \hat{V}_i$

$$Z_{in} = \frac{\hat{V}_i}{\hat{I}_p} = \frac{Z}{n^2}$$

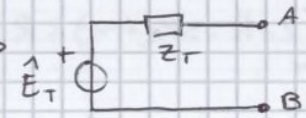
**REGOLA:** L'impedenza vista dall'ingresso del primo elemento del trasformatore è:

$$\boxed{Z_{in} = \frac{Z}{n^2}}$$

## Esempio




Equivalente di Thevenin ai morsetti A e B?

$\Rightarrow$ 

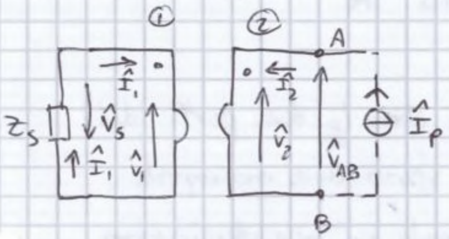

Calcolo di $\hat{E}_T$:

Poiché stiamo cercando la tensione a vuoto, si ha: $\hat{I}_2 = 0 \Rightarrow \hat{I}_1 = 0$

Dal fatto che $\hat{I}_1 = 0$ deriva che non c'è nessuna tensione su $Z_s$, quindi:

$$\hat{V}_1 = \hat{E} \Rightarrow \hat{V}_2 = n\hat{V}_1 = n\hat{E} = \hat{E}_T$$

Calcolo di $Z_T$:




$$Z_T = \frac{\hat{V}_{AB}}{\hat{I}_p}$$

$\hat{I}_2 = \hat{I}_p \Rightarrow \hat{I}_1 = -n\hat{I}_p$

$\hat{V}_s = Z_s\hat{I}_1 = -nZ_s\hat{I}_p$

$\hat{V}_s = -\hat{V}_1 \Rightarrow \hat{V}_1 = nZ_s\hat{I}_p$

$\hat{V}_2 = n\hat{V}_1 = n^2 Z_s\hat{I}_p$

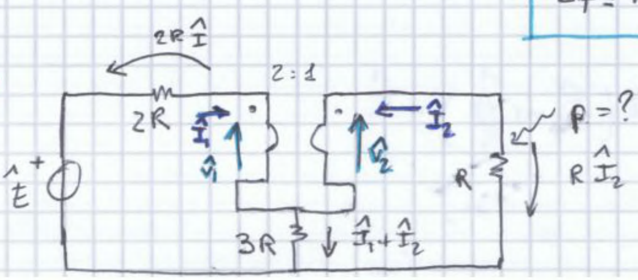
$\hat{V}_2 = \hat{V}_{AB} \Rightarrow Z_T = n^2 Z_s$

**REGOLA:** un generatore collegato a un trasformatore può essere trasformato in un equivalente di Thevenin con:

$$\boxed{\hat{E}_T = n\hat{E}}$$

$$\boxed{Z_T = n^2 Z_s}$$

## Esercizio



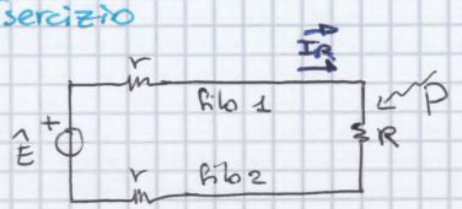
$$\begin{cases} \hat{E} = \dfrac{\hat{V}_2}{n} + R\hat{I}_1 \\ \hat{E} = z\hat{I}_2 + \dfrac{z}{R}\hat{V}_2 + \hat{V}_2 \end{cases} \Rightarrow \hat{I}_1 = \dfrac{\hat{E} - \frac{\hat{V}_2}{n}}{R}$$

Quindi: $\hat{E} = -\dfrac{z}{n}\left(\dfrac{\hat{E} - \hat{V}_2/n}{R}\right) + \dfrac{z}{R}\hat{V}_2 + \hat{V}_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \hat{E} + \frac{z}{nR}\hat{E} = \frac{z\hat{V}_2}{n^2R} + \frac{z}{R}\hat{V}_2 + \hat{V}_2 \Rightarrow \hat{V}_2\left(\frac{z}{n^2R} + \frac{z}{R} + 1\right) = \hat{E}\left(1 + \frac{z}{nR}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{V}_2 = \frac{\hat{E}\left(1 + z/nR\right)}{1 + \frac{z}{R} + \frac{z}{n^2R}}$$

## Esercizio




Studiamo la trasmissione dell'energia elettrica da dove viene prodotta a dove viene consumata.

$$P = \frac{1}{2}|\hat{V}_R| \cdot |\hat{I}_R| \cos\varphi = \frac{1}{2}R|\hat{I}_R|^2$$

P è data: $|\hat{I}_R| = \sqrt{\dfrac{2P}{R}}$

La potenza dissipata durante il trasporto è:

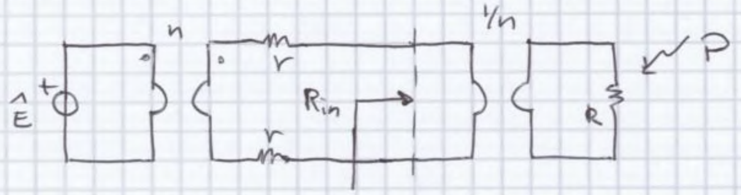
$$P_D = P_{D1} + P_{D2} = \frac{1}{2}r|\hat{I}_R|^2 + \frac{1}{2}r|\hat{I}_R|^2 = r|\hat{I}_R|^2 = r \cdot \frac{2P}{R}$$

Per cavi molto lunghi si ha: $r \cong 1\ \Omega$

$R \cong 10\ \Omega$

Quindi il 10% della potenza viene sprecato durante il trasporto.

Modifichiamo il circuito:




$$R_{in} = \frac{R}{1/n^2} = n^2R$$

Quindi possiamo studiare il circuito come:


La potenza assorbita non varia perché il trasformatore non la modifica.

$$P = \frac{1}{2}R_{in}|\hat{I}'|^2 \Rightarrow |\hat{I}'| = \sqrt{\frac{2P}{R_{in}}} = \sqrt{\frac{2P}{n^2R}}$$

Notiamo che se n è grande, nei fili scorre una $\hat{I}'$ piccola. Se la corrente è piccola, viene dissipata poca energia.

$$P_D = P_{D1} + P_{D2} = \frac{1}{2}r|\hat{I}'|^2 + \frac{1}{2}r|\hat{I}'|^2 = \frac{r\,2P}{n^2R}$$

Per il secondo trasformatore poniamo: $m = \dfrac{1}{n} = \dfrac{N_2}{N_1}$

n grande $\Rightarrow$ m piccolo