



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 959

DATA: 08/05/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Tortorici

MATERIA: Analisi Matematica II

Prof. De Angelis

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

INTEGRALI DOPPI

Gli integrali doppi servono a calcolare i volumi.

$$\text{Sia } f(x,y): D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y) \in D \rightarrow f(x,y)$$

Definiamo:

$$\text{Superficie} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D \text{ e } z = f(x,y)\}$$

$$\text{Solido} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D \text{ e } 0 \leq z \leq f(x,y)\} \quad \text{se } f \geq 0$$

Fissato un centro $P_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e un raggio $r > 0$, definiamo:

$$\text{Cerchio} : B_r(P_0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq r^2\}$$

Insieme limitato: un insieme si dice limitato se è contenuto in un cerchio.

Punti interni ed esterni: Siano $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $P_0 \in D$, $P_1 \notin D$. Un punto P_0 si dice interno a D se esiste un cerchio di centro P_0 del tutto contenuto in D . Un punto P_1 si dice esterno a D se è interno rispetto al complementare di D , cioè $\mathbb{R}^2 \setminus D$.

Frontiera: l'insieme dei punti che non sono né interni né esterni a D si dice frontiera di D (o bordo). Si indica con ∂D .

Insieme chiuso: un insieme D si dice chiuso se contiene la sua frontiera.

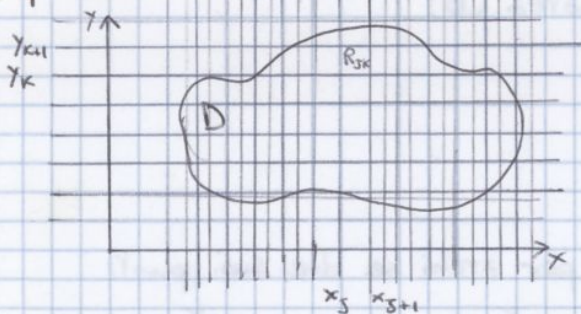
$$\overset{\circ}{D} = D \setminus \partial D \text{ è l'interno di } D.$$

$$\bar{D} = D \cup \partial D \text{ è la chiusura di } D.$$

DOMINIO D'INTEGRAZIONE: insieme chiuso e limitato, la cui frontiera è costituita da un numero finito di grafici di funzioni continue.

Sia D un dominio d'integrazione. Sia $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f \geq 0$ e continua in D per

ipotesi.



Scegliamo m punti su x e n punti su y e suddividiamo D in rettangolini come in figura.

Consideriamo il rettangolo R_{jk} , che ha

$$\text{lati: } \Delta x_j = x_{j+1} - x_j$$

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$$

Scegliamo un punto in R_{jk} , $(\xi_j, \eta_k) \in R_{jk}$, e calcoliamo il valore di f in quel punto.

Eseguiamo le somme di Riemann:

$$\sum_{j,k} \underbrace{f(\xi_j, \eta_k)}_{\text{altezza}} \cdot \underbrace{\Delta x_j \cdot \Delta y_k}_{\text{area } R_{jk}}$$

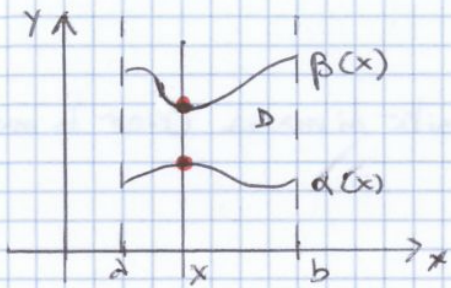
\Rightarrow stiamo calcolando un volume.

Le somme di Riemann sono un'approssimazione del volume totale. Per renderla migliore, bisogna considerare rettangolini sempre più piccoli.

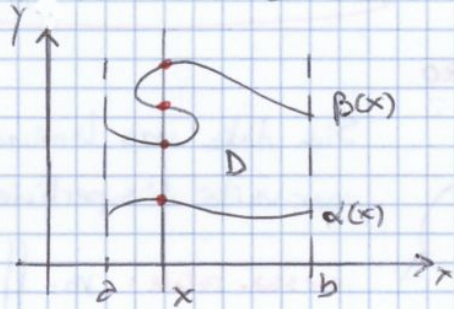
Domini semplici in y: $D \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice semplice in y (o verticalmente convesso)

se esistono due funzioni continue $\alpha, \beta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tali che:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$



D è semplice in y: se si traccia la perpendicolare all'asse x per un punto qualsiasi tra a e b, si incontra un solo punto di ingresso e uno solo d'uscita.



D non è semplice in y: se si traccia la perpendicolare all'asse x per un punto qualsiasi tra a e b, si possono incontrare più di un punto d'ingresso e d'uscita.

TEOREMA: Sia D semplice in y, f continua in D. Allora:

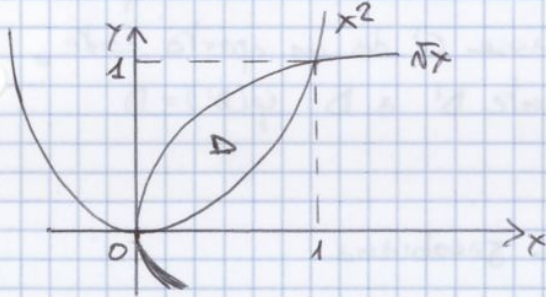
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

Esempio:

$$\iint_D xy dx dy = ?$$

$$D = \begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$$

PRIMA DI TUTTO DISEGNARE IL DOMINIO!!



D è semplice in y:
possiamo usare teorema

$$\begin{aligned} \iint_D xy dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(x \int_{x^2}^{\sqrt{x}} y dy \right) dx = \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x^5 \right) dx = \left[\frac{1}{6} x^3 \right]_0^1 - \left[\frac{1}{12} x^6 \right]_0^1 = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Domini semplici in x: $D \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice semplice in x (o orizzontalmente convesso) se $\exists \gamma, \delta$ continue: $[c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ tali che:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d \text{ e } \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\}$$

COORDINATE POLARI

$$\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases} \quad \text{con } \rho \geq 0 \text{ e } \vartheta \in [0, 2\pi]$$

$$J_{\varphi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x}{\partial \rho} \\ \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial \rho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho \sin \vartheta & \cos \vartheta \\ \rho \cos \vartheta & \sin \vartheta \end{pmatrix}$$

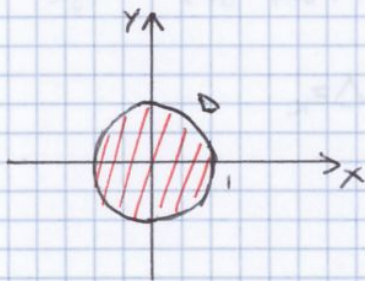
$$\det(J_{\varphi}) = -\rho \sin^2 \vartheta - \rho \cos^2 \vartheta = -\rho$$

$$|\det(J_{\varphi})| = \rho$$

Esempio

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy$$

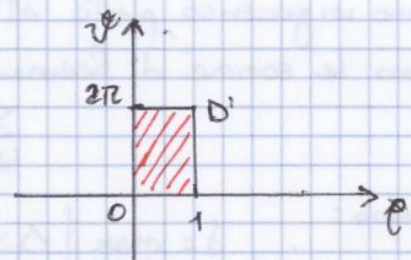
$$\text{con } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$



Poniamo:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases}$$

$$D' = \{0 \leq \rho \leq 1; 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\}$$



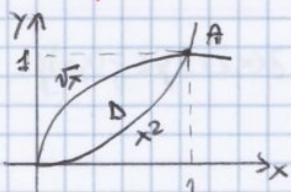
$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\rho^2 \cos^2 \vartheta + \rho^2 \sin^2 \vartheta} = \sqrt{\rho^2} = \rho$$

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy = \iint_{D'} \rho \cdot |\rho| \, d\rho \, d\vartheta = \iint_{D'} \rho^2 \, d\rho \, d\vartheta = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \rho^2 \, d\vartheta \right) d\rho =$$

CASO SPECIALE

$$\int_0^1 \rho^2 \, d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\vartheta = \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^1 \cdot \left[\vartheta \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{3} \cdot 2\pi = \frac{2\pi}{3}$$

Esempio



$$f(x, y) = xy$$

BARICENTRO?

$$m = \iint_D xy \, dx \, dy = \frac{1}{12}$$

$$\begin{aligned} x_G &= 12 \iint_D x(xy) \, dx \, dy = 12 \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} x^2 y \, dy \right) dx = 12 \int_0^1 x^2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = 12 \int_0^1 x^2 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2} \right) dx = \\ &= 12 \left(\int_0^1 \frac{x^4}{2} dx - \int_0^1 \frac{x^6}{2} dx \right) = 12 \left[\left(\frac{x^5}{10} \right)_0^1 - \left(\frac{x^7}{14} \right)_0^1 \right] = 12 \cdot \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{14} \right) = \frac{12}{28} = \frac{3}{7} \end{aligned}$$

Esempio

$$f(x,y,z) = z^2$$

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \rightarrow z = \pm \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

$$\iiint_D z^2 dx dy dz = \iint_A \left(\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z^2 dz \right) dx dy = \iint_A \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy =$$

$$= 2 \iint_A \frac{(1-x^2-y^2)^{3/2}}{3} dx dy \rightarrow \text{PASSIAMO ALLE COORDINATE POLARI}$$

$\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases} \rightarrow A(x,y) \rightarrow A'(\rho, \vartheta)$

$$f(x,y) = (1-x^2-y^2)^{3/2} = (1-\rho^2 \cos^2 \vartheta - \rho^2 \sin^2 \vartheta)^{3/2} = (1-\rho^2)^{3/2}$$

Quindi:

$$\frac{2}{3} \iint_{A'} (1-\rho^2)^{3/2} |\rho| d\rho d\vartheta = \frac{2}{3} \int_0^1 (1-\rho^2)^{3/2} \rho d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\vartheta$$

Risoliamo il primo integrale per sostituzione:

$$\begin{aligned} \rho^2 &= u \\ 2\rho d\rho &= du \end{aligned}$$

$$\int (1-\rho^2)^{3/2} \rho d\rho = \int (1-u)^{3/2} \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+3/2} (1-u)^{1+3/2} \cdot (-1) + K =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} (1-u)^{5/2} + K = -\frac{1}{5} (1-\rho^2)^{5/2} + K$$

Torniamo all'equazione principale:

$$\frac{2}{3} \int_0^1 (1-\rho^2)^{3/2} \rho d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\vartheta = \frac{2}{3} \cdot 2\pi \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \left[(1-\rho^2)^{5/2} \right]_0^1 = \frac{2\pi}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{15} \pi$$

INTEGRAZIONE PER STRATI

- // (x,y) : Il dominio $D \subset \mathbb{R}^3$ è delimitato dai piani $z=a, z=b$ e tale che, fissata una quota z tra a e b , definiamo la proiezione della sezione orizzontale di quota z di D su (x,y) ,

$$A_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y,z) \in D\}$$

$$\iiint_D f(x,y,z) dx dy dz = \int_a^b \left(\iint_{A_z} f(x,y,z) dx dy \right) dz$$

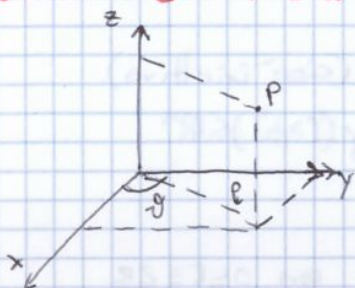
- // (x,z) : Il dominio $D \subset \mathbb{R}^3$ è delimitato dai piani $y=c, y=d$ e tale che, fissata una quota y ,

$$\varphi = \begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases}$$

$$J_{\varphi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$$

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{D'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |\det(J_{\varphi})| du dv dw$$

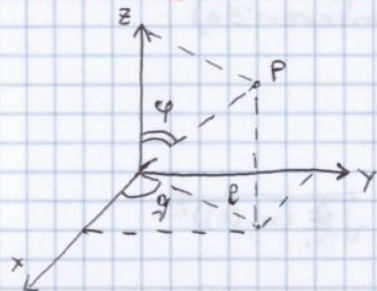
COORDINATE CILINDRICHE



$$\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \\ z = t \end{cases}$$

$$\det(J_{\varphi}) = \rho$$

COORDINATE SFERICHE

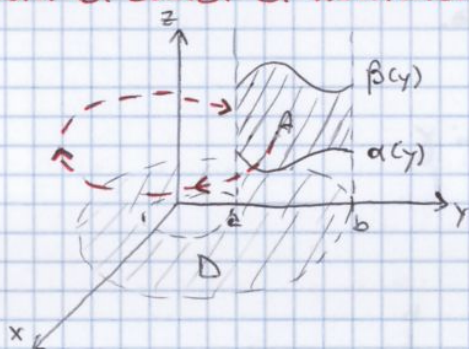


$$\begin{cases} x = \rho \sin \vartheta \cos \varphi \\ y = \rho \sin \vartheta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \vartheta \end{cases}$$

$$|\det(J_{\varphi})| = \rho^2 \sin \vartheta$$

(N.B.) $0 \leq \vartheta \leq \pi$

VOLUMI DI SOLIDI DI ROTAZIONE



Questi solidi sono generati per rotazione intorno a z di una regione piana A come in figura.

$$D = \{(\rho, \vartheta) \mid 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, a \leq \rho \leq b\}$$

Il dominio D (proiezione del solido sul piano (x,y)) è una corona circolare, quindi è comodo da esprimere in coordinate polari.

Il volume del solido è:

$$V = \iiint_D \left(\int_{\alpha(\sqrt{x^2+y^2})}^{\beta(\sqrt{x^2+y^2})} dz \right) dx dy$$

Analizziamo l'integrale interno:

$$\int_{\alpha(\sqrt{x^2+y^2})}^{\beta(\sqrt{x^2+y^2})} dz = \beta(\sqrt{x^2+y^2}) - \alpha(\sqrt{x^2+y^2}) \xrightarrow{\text{coordinate polari}} \beta(\rho) - \alpha(\rho)$$

Quindi:

$$V = \int_0^{2\pi} \left(\int_a^b (\beta(\rho) - \alpha(\rho)) \rho d\rho \right) d\vartheta = 2\pi \int_a^b \rho (\beta(\rho) - \alpha(\rho)) d\rho$$

$$\int_{\gamma} x^2 y \, ds = \int_0^{2\pi} 4 \cos^2 t \cdot 2 \sin t \cdot 2 \, dt = 8 \int_0^{2\pi} 2 \cos^2 t \sin t \, dt = -8 \int_0^{2\pi} -2 \sin t \cos^2 t \, dt =$$

$$= -8 \left[\frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^{2\pi} = -8 \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{16}{3}$$

MASSA E BARICENTRO

Si abbia un filo disposto lungo una curva $\gamma \in \mathbb{R}^3$ con densità lineare di massa $\sigma = \sigma(x, y, z)$

$$\text{MASSA} = \int_{\gamma} \sigma(x, y, z) \, ds$$

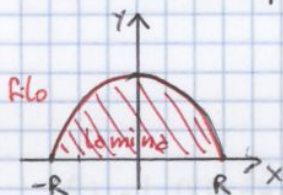
$$\text{BARICENTRO: } x_G = \frac{1}{m} \int_{\gamma} x \sigma(x, y, z) \, ds$$

$$y_G = \frac{1}{m} \int_{\gamma} y \sigma(x, y, z) \, ds$$

$$z_G = \frac{1}{m} \int_{\gamma} z \sigma(x, y, z) \, ds$$

Esempio

Si abbiano due masse uguali ma distribuite uniformemente ($\sigma = \text{cost.}$). La prima è su un filo disposto lungo una semicirconferenza di raggio R ; la seconda è su una lamina piana che occupa un semicerchio di raggio R . In quale delle due configurazioni il baricentro è più basso?



$$\text{curva del filo: } \gamma = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = R^2, y \geq 0 \}$$

$$\text{dominio della lamina: } D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2, y \geq 0 \}$$

Filo: passiamo a coordinate polari.

$$\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi \quad \begin{cases} x' = -R \sin t \\ y' = R \cos t \end{cases}$$

$$\| \gamma'(t) \| = \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} = \sqrt{R^2} = R$$

$$x_G = \frac{1}{\int_{\gamma} ds} \cdot \int_{\gamma} x \, ds = \frac{1}{\pi R} \cdot \int_0^{\pi} R \cos t \cdot R \, dt = \frac{1}{\pi R} \cdot R^2 (\sin t)_0^{\pi} = \frac{R}{\pi} \cdot 0 = 0$$

↳ lunghezza filo

si ha:

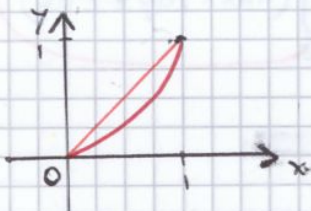
$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{\tau} ds = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

Dove τ è il versore tangente a γ : $\tau = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \neq 0$

Il prodotto scalare $F \cdot \tau$ rappresenta il lavoro fatto dalla forza F per spostare un punto materiale lungo γ , oppure lo si può vedere come la proiezione di F lungo τ .

Esempio

Calcolare il lavoro del campo $F(x,y) = (y^2, 2xy)$ per spostare un punto materiale da $(0,0)$ a $(1,1)$ lungo la retta $y=x$.



$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{\tau} ds = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

$$\gamma = \begin{cases} x=t \\ y=t \end{cases} \quad t \in [0,1] \quad \gamma'(t) = \begin{cases} x'=1 \\ y'=1 \end{cases}$$

$$I = \int_0^1 (t^2, 2t^2) \cdot (1,1) dt = \int_0^1 (t^2 + 2t^2) dt = \int_0^1 3t^2 dt = (t^3)_0^1 = 1$$

Calcolare il lavoro fatto dallo stesso campo lungo la parabola $y=x^2$

$$\gamma = \begin{cases} x=t \\ y=t^2 \end{cases} \quad t \in [0,1] \quad \gamma' = \begin{cases} x'=1 \\ y'=2t \end{cases}$$

$$I = \int_0^1 (t^4, 2t^3) \cdot (1, 2t) dt = \int_0^1 (t^4 + 4t^4) dt = \int_0^1 5t^4 dt = (t^5)_0^1 = 1$$

TEOREMA DELLE FORZE VIVE (O DELL'EN. CINETICA)

Calcoliamo il lavoro compiuto su una particella di massa m lungo l'itinerario $x(t)$ fatto dalla risultante di un campo di forze.

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{x}$$

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{\tau} ds = \int_a^b m \dot{x}(t) \cdot \ddot{x}(t) dt = m \int_a^b \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{x}(t) \cdot \dot{x}(t)) dt =$$

infatti si ha che $\dot{x} \cdot \ddot{x} + \ddot{x} \cdot \dot{x} = 2\dot{x} \cdot \ddot{x}$

$$= \frac{m}{2} \left[|\dot{x}(t)|^2 \right]_a^b = \frac{m}{2} |\dot{x}(b)|^2 - \frac{m}{2} |\dot{x}(a)|^2$$

L'integrale di linea di 2° specie di un campo conservativo non dipende dal percorso!

Inoltre nei campi conservativi si conserva l'energia totale.

$$F: A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$U: A \rightarrow \mathbb{R} \text{ di classe } C^2$$

$$\rightarrow \vec{\nabla} U = F$$

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{\tau} ds = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt =$$

$$\text{ma } \frac{d}{dt}(U(\gamma(t))) = \nabla U(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

$$\text{e } F = \nabla U$$

Quindi:

$$= \int_a^b \nabla U(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt}(U(\gamma(t))) dt = [U(\gamma(t))]_a^b = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a))$$

TEOREMA: Dato un campo $F: A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe C^1 , sono equivalenti:

1. F è conservativo

2. date due curve $\gamma_1, \gamma_2 \subseteq A$ aventi gli stessi estremi (nell'ordine), si ha che

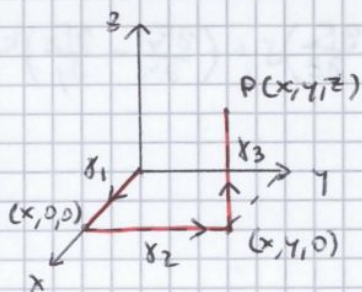
$$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot \vec{\tau} ds = \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot \vec{\tau} ds$$

3. data una curva chiusa $\gamma \subseteq A$ si ha: $\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{\tau} ds = 0$

Esempio

$F(x, y, z) = (2xy \sin z, x^2 \sin z, x^2 y \cos z)$ conservativo per ipotesi.

Qual è il suo potenziale?



Scegliamo un generico punto $P(x, y, z)$.

$$U(x, y, z) - U(0, 0, 0) = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{\tau} ds$$

Suddividiamo la γ per andare da 0 a P come in figura.

Lungo γ_1 :

$$\gamma_1 = \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$t \in [0, x]$$

$$\gamma_1' = \begin{cases} x' = 1 \\ y' = 0 \\ z' = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^x 0 dt = 0$$

Lungo γ_2 :

Per il teorema di Schwartz possiamo scrivere:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

Facendo lo stesso ragionamento per le altre derivate parziali, si ottiene:

$$\text{rot } F = 0$$

Se F non è irrotazionale, allora non è neanche conservativo.

(NB): Si può avere un campo irrotazionale non conservativo!

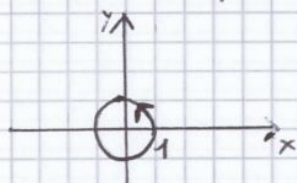
Esempio

$F = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}; \frac{x}{x^2+y^2} \right) \rightarrow$ campo magnetico generato da una corrente continua lungo un filo

È un campo irrotazionale, infatti:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{y}{x^2+y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2+y^2} \right) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Non è un campo conservativo, infatti:



$$\gamma = \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\gamma' = \begin{cases} x' = -\sin t \\ y' = \cos t \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \neq 0$$

Quindi F non è conservativo!

Il problema è il dominio.

TEOREMA: il dominio A è aperto e connesso; se γ è una curva chiusa e regolare contenuta in A , allora tutta la regione di piano delimitata da γ è contenuta in A (dominio semplicemente connesso).

Se $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e A è semplicemente connesso, se F è di classe C^1 e irrotazionale allora F è conservativo.

ISPEZIONE DIRETTA

È un altro metodo per ricavare il potenziale.

$$F = (y^2, 2xy)$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = 2y \quad \text{e} \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = 2y$$

Il campo è irrotazionale, ha un dominio semplicemente connesso (\mathbb{R}^2) e su quel dominio è di classe C^1 : F è conservativo.

Sia U un suo potenziale:

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = F_x = y^2$$

TEOREMA DI GAUSS-GREEN

Legge un integrale curvilineo a un integrale doppio (vale SOLO nel piano)

IPOTESI sul dominio:

- $D \subseteq \mathbb{R}^2$ deve essere l'unione di un numero finito di domini semplici sia rispetto a x sia rispetto a y e aventi in comune solo tratti di frontiera;
- la frontiera di D deve essere l'unione di un numero finito di curve chiuse regolari e tratti;
- la frontiera di D deve essere orientata positivamente, cioè percorrendo ciascuna curva della frontiera il dominio deve rimanere sulla sinistra: $\partial^+ D$.



Dato un campo F piano di classe C^1 in un aperto contenente D si ha:

$$\oint_{\partial^+ D} F \cdot ds = \iint_D (\overbrace{\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}}^{\text{rot } F}) dx dy$$

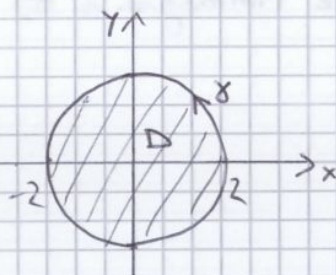
Oppure:

$$\oint_{\partial^+ D} (F_1 dx + F_2 dy) = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy$$

Esempio

$$I = \oint_{\gamma} (\sin x + y) dx + (-3x + e^{y^2}) dy$$

$$\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$$



$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$$

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = -16\pi$$

CONSEGUENZE DEL TEOREMA DI GAUSS-GREEN

1) Sia D ammissibile per G.G.

$$F = (-y, 0) \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial F_2}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F_1}{\partial y} = -1 \end{cases}$$

$$\iint_D dx dy = \oint_{\partial^+ D} -y dx$$

oppure:

$$F = (0, x) \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial F_2}{\partial x} = 1 \\ \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Le curve che abbiamo trovato hanno vettori tangenti, ottenuti tramite le derivate rispetto a un parametro:

vettore tangente a γ_1 :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix} = \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0, v_0)$$

vettore tangente a γ_2 :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \end{pmatrix} = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0, v_0)$$

SUPERFICIE REGOLARE: una superficie si dice regolare (o liscia) se ammette una parametrizzazione σ tale che:

- 1) σ sia di classe C^1 in D
- 2) $\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| \neq 0 \quad \forall (u, v) \in D$ (ovvero entrambe le derivate sono diverse da zero e tra di loro sono linearmente indipendenti. Si poteva anche chiedere che la Jacobiana avesse rango massimo)

VETTORE NORMALE alla superficie indotta dalla parametrizzazione:

$$N(u, v) = \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} \quad (\text{è normale al piano tangente alla superficie})$$

Esempio

Sia:
$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases} \quad \text{con } f \text{ di classe } C^1$$

Calcoliamo il vettore normale:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial u} \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \sigma}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial u} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial v} \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial f}{\partial u}, -\frac{\partial f}{\partial v}, 1 \right)$$

Notiamo che $N \neq 0 \quad \forall (u, v) \in D$, quindi σ è regolare.

$$x_G = \frac{1}{\iint_{\Sigma} \delta(x,y,z) d\sigma} \cdot \iint_{\Sigma} x \delta(x,y,z) d\sigma$$

↳ massa totale

$$y_G = \frac{1}{\iint_{\Sigma} \delta(x,y,z) d\sigma} \cdot \iint_{\Sigma} y \delta(x,y,z) d\sigma$$

$$z_G = \frac{1}{\iint_{\Sigma} \delta(x,y,z) d\sigma} \cdot \iint_{\Sigma} z \delta(x,y,z) d\sigma$$

Esempio

Due masse m sono distribuite uniformemente $\delta = \text{cost.}$ la prima su una lamina disposta lungo una superficie semisferica di raggio R , l'altra su un solido che occupa una semisfera di raggio R . Quale delle due ha baricentro più basso?

Per considerazioni sulla simmetria degli oggetti possiamo dire che $y_G = x_G = 0$

Lamina:

$$\sigma = \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \sqrt{R^2 - u^2 - v^2} \end{cases} \quad (u,v) \in D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leq R^2\}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = \left(1, 0, -\frac{u}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \right)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v} = \left(0, 1, -\frac{v}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \right)$$

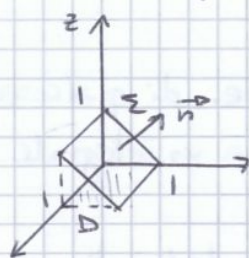
$$N(u,v) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -\frac{u}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \\ 0 & 1 & -\frac{v}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \end{vmatrix} = \left(\frac{u}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}, \frac{v}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}, 1 \right)$$

$$\|N(u,v)\| = \sqrt{\frac{u^2}{R^2 - u^2 - v^2} + \frac{v^2}{R^2 - u^2 - v^2} + 1} = \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - u^2 - v^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}$$

$$z_G = \frac{1}{\iint_{\Sigma} d\sigma} \cdot \iint_{\Sigma} z d\sigma = \frac{1}{2\pi R^2} \cdot \iint_D \sqrt{R^2 - u^2 - v^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} du dv =$$

↳ superficie della semisfera

Calcolare il flusso di F attraverso Σ , che è la superficie data dalla parte di piano di equazione $z=1-y$ al variare di $x \in [0,1], y \in [0,1]$ e con la normale tale che $\vec{n} \cdot \vec{k} > 0$ (ovvero l'angolo fra \vec{n} e \vec{k} è acuto).



$$z = 1 - y$$

$$N(x,y) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right) = (0, 1, 1)$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} F \cdot n \, d\sigma &= \iint_D (\cos(x-xy), xy, 1-y) \cdot (0, 1, 1) \, dx \, dy = \iint_D (xy + 1-y) \, dx \, dy = \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 (xy + 1-y) \, dy \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{x}{2} - 1 + \frac{1}{2} \right) dx = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Esempio

Calcolare il flusso del campo elettrico generato da una particella di carica Q posta nell'origine attraverso una superficie sferica Σ_A di raggio A

$$E = \epsilon \frac{Qr}{\|r\|^3}$$

$$n = \frac{r}{\|r\|}$$

$$E \cdot n = \epsilon \frac{Qr}{\|r\|^3} \cdot \frac{r}{\|r\|} = \epsilon Q \frac{1}{\|r\|^2}$$

Su Σ_A : $E = \epsilon Q \frac{1}{A^2}$

$$\iint_{\Sigma_A} E \cdot n \, d\sigma = \epsilon Q \frac{1}{A^2} \iint_{\Sigma_A} d\sigma = \epsilon Q \frac{1}{A^2} \cdot 4\pi A^2 = 4\pi \epsilon Q$$

↳ area sfera!

TEOREMA DI STOKES (o teorema del rotore)

Sia D un dominio d'integrazione piano che soddisfi le ipotesi del teorema di Gauss-Green. Sia $\sigma: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe C^1 . Sia $F = F(x,y,z)$ di classe C^1 su un aperto contenente $\Sigma = \sigma(D)$. Allora:

$$\oint_{\partial^+ \Sigma} F \cdot \tau \, ds = \iint_{\Sigma} (\nabla \times F) \cdot n \, d\sigma$$

↳ circolazione di F lungo il bordo di Σ

↳ Flusso del rotore di F attraverso Σ

Il verso di percorrenza di $\partial^+ \Sigma$ e la normale n sono scelti in modo che un osservatore che percorre il bordo di Σ disposto lungo n veda Σ alla propria sinistra.

TEOREMA DI GAUSS (o della divergenza)

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^3$ un dominio d'integrazione il cui bordo sia costituito da un numero finito di superfici semplici. Sia $F = F(x, y, z)$ un campo di classe C^1 su un aperto che contiene D .

$$\iiint_D \operatorname{div} F \, dx dy dz = \iint_{\partial D} F \cdot n \, d\sigma$$

Con n uscente dalla superficie.

N.B.: ∂D non ha un bordo perché è una superficie chiusa!

FORMULA DI INTEGRAZIONE PER PARTI

Sia g un campo scalare e sia F un campo vettoriale, entrambi C^1 su \mathbb{R}^3 ; sia $E \subseteq \mathbb{R}^3$ una regione solida semplice rispetto a tutti gli assi. Supponiamo che ∂E sia una superficie regolare con normale esterna N_e .

$$\iiint_E \nabla g \cdot F \, dx dy dz = \iint_{\partial E} g F \cdot N_e \, d\sigma - \iiint_E g \operatorname{div} F \, dx dy dz$$

Dimostrazione:

$$\iint_{\partial E} g F \cdot N_e \, d\sigma = \quad (\text{è il flusso del campo } gF. \text{ Applichiamo Gauss})$$

$$= \iiint_E \operatorname{div}(gF) \, dx dy dz =$$

$$= \iiint_E (\nabla g \cdot F + g \operatorname{div} F) \, dx dy dz =$$

$$= \iiint_E \nabla g \cdot F \, dx dy dz + \iiint_E g \operatorname{div} F \, dx dy dz.$$

c.v.d.

SERIE NUMERICHE

Consideriamo una successione di numeri reali: $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \in \mathbb{R}$.

Una serie numerica è la somma formale della successione:

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Definiamo ndotte o somme parziali:

$$S_0 = a_0$$

$$S_1 = a_0 + a_1$$

\vdots

$$S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

Dim:

L'ipotesi è che la serie converge.

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \rightarrow a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$$

Ma poiché la serie converge, si ha:

$$S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S$$

$$S_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S$$

Da cui: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = S - S = 0$ c.v.d

Che a_n sia infinitesimo per $n \rightarrow \infty$ è anche condizione sufficiente? NO!

In fatti:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0 \quad \text{WFINITESIMA!}$$

$$S_1 = \log 2$$

$$S_2 = \log 2 + \log \frac{3}{2} = \log 2 + \log 3 - \log 2 = \log 3$$

$$S_3 = \log 2 + \log \frac{3}{2} + \log \frac{4}{3} = \log 4$$

$$S_n = \log 2 + \log \frac{3}{2} + \dots + \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \log(n+1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \log(n+1) = +\infty \quad \text{POSITIVAMENTE DIVERGENTE!}$$

Prendiamo di nuovo in considerazione la serie geometrica: $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$

$$S_n = \begin{cases} \frac{1-r^{n+1}}{1-r} & r \neq 1 \\ n+1 & r = 1 \end{cases}$$

Si ha che la serie:

converge per $|r| < 1$ e $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$

diverge positivamente per $r \geq 1$

è indeterminata per $r = -1$

Serie di Mengoli:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \dots$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

② $\sum a_n$ positivamente divergente $\Rightarrow \sum b_n$ positivamente divergente

Dim:

① Chiamiamo $S_n = a_0 + \dots + a_n$; $T_n = b_0 + \dots + b_n$.

Per ipotesi: $a_i \leq b_i \quad \forall i \Rightarrow S_n \leq T_n \quad \forall n \Rightarrow \sup_n \{S_n\} \leq \sup_n \{T_n\}$

Ma le serie sono a termini positivi, quindi l'estremo superiore coincide col limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sup_n \{S_n\} \leq \sup_n \{T_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n \leftarrow +\infty \rightarrow \text{per ipotesi}$$

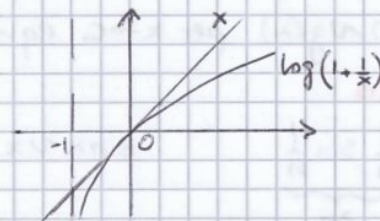
Quindi: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n < +\infty \Rightarrow \sum a_n$ converge. c.v.d.

② Se $\sum b_n$ convergesse, per ① anche $\sum a_n$ dovrebbe convergere, ma per ipotesi $\sum a_n = +\infty$. Poiché le serie sono a termini positivi, se $\sum b_n$ non converge l'unica altra opzione è che diverga positivamente.

Esempio

$$\sum_n \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \rightarrow \text{serie armonica}$$

$$\text{ma } \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 1$$



Abbiamo già dimostrato che $\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ diverge, quindi per il criterio del confronto anche la serie armonica diverge.

Esempio

$$\sum_n \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots$$

Osserviamo che: $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n+1)}$ \rightarrow serie di Mengoli

$$\text{Infatti: } n^2 + n \leq 2n^2 \Rightarrow n \leq n^2$$

Abbiamo già dimostrato che la serie di Mengoli converge, quindi per il criterio del confronto converge anche la serie in esame.

• **CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO:** siano $\sum a_n, \sum b_n$ con $a_n > 0, b_n > 0 \quad \forall n$. Supponiamo che esista e sia finito $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \neq 0$. Allora le due serie hanno lo stesso carattere, cioè o convergono entrambe o divergono entrambe.

Esempio

$$\sum_n \underbrace{\frac{n^3 + 2n}{3n^5 + 1}}_{a_n} \quad \text{La confrontiamo con: } \sum_n \underbrace{\frac{1}{3n^2}}_{b_n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3 + 2n}{3n^5 + 1} \right) (3n^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^5 + 6n^3}{3n^5 + 1} = 1$$

Quindi la serie in esame converge poiché b_n converge.

RICHIAMI SULLE SUCCESSIONI

• $a_n \sim b_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$

• **CRITERIO DEL RAPPORTO**: Sia $\sum_{n \geq 1} a_n$ con $a_n > 0 \forall n$. Esiste finito o infinito:

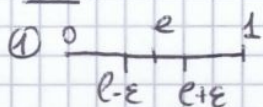
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l :$$

- ① se $l < 1 \rightarrow$ la serie converge
- ② se $l > 1 \rightarrow$ la serie diverge positivamente
- ③ se $l = 1$ non si può dire nulla

Esempio

$$\left. \begin{array}{l} \sum_n \frac{1}{n} \text{ diverge} \\ \sum_n \frac{1}{n^2} \text{ converge} \end{array} \right\} \text{ hanno } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \text{ entrambe}$$

Dim:



$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1 \rightarrow$ esiste $\epsilon > 0$ tale che per n sufficientemente grande ($n > N$):

$$l - \epsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \epsilon < 1 \quad \forall n > N$$

Consideriamo: $\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k$

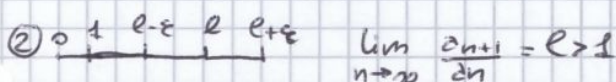
Si ha: $a_{N+1} < (l + \epsilon) a_N$

$a_{N+2} < (l + \epsilon) a_{N+1} = (l + \epsilon)^2 a_N$ e così via:

$$a_{N+1+n} < \underbrace{(l + \epsilon)^{n+1}}_{< 1} a_N$$

la serie geometrica di ragione $(l + \epsilon) < 1 \rightarrow$ converge

Quindi converge anche $\sum_k a_k$, cioè la nostra serie.



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l > 1$$

Scegliamo ϵ tale che $l - \epsilon > 1$ e $l - \epsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \epsilon \quad \forall n > N$

Quindi: $a_{n+1} > (l - \epsilon) a_n > a_n$.

Ne deriva che la successione a_n è necessariamente crescente $\forall n > N$. Quindi a_n non è infinitesima, dunque non può convergere: essendo a termini positivi, l'unica altra opzione è che diverge positivamente.

Esempio

$$\sum_n (e^{\frac{1}{n}} - 1)^2$$

$$e^{-ix} \approx x \text{ se } x \rightarrow 0 \Rightarrow e^{\frac{1}{n}} - 1 \approx \frac{1}{n} \text{ se } n \rightarrow \infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (e^{\frac{1}{n}} - 1)^2 \sim \frac{1}{n^2} \text{ se } n \rightarrow \infty$$

la converge \Rightarrow serie in esame converge

• **CRITERIO DELLA RADICE**: si abbia $\sum_{n \geq 1} a_n$ con $a_n \geq 0 \forall n$.

Allora esiste finito o infinito:

Dim:

definiamo: $b_n = \begin{cases} a_n & \text{se } a_n \geq 0 \\ 0 & \text{se } a_n < 0 \end{cases}$ e $c_n = \begin{cases} 0 & \text{se } a_n > 0 \\ -a_n & \text{se } a_n \leq 0 \end{cases}$

c_n e b_n sono serie a termini positivi. Quindi:

$$0 \leq b_n \leq |a_n|$$

$$0 \leq c_n \leq |a_n|$$

$\sum |a_n|$ converge per ipotesi, quindi per il criterio del confronto ~~$\sum b_n$ e $\sum c_n$~~ $\sum b_n$ e $\sum c_n$ convergono.

$$a_n = \underbrace{b_n}_{\text{converge}} - \underbrace{c_n}_{\text{converge}} \quad \forall n$$

Essendo differenza di due serie convergenti, anche $\sum a_n$ converge. c.v.d.

CRITERIO DI LEIBNIZ

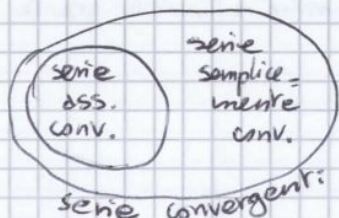
Sia $\sum_n (-1)^n \cdot b_n$ con $b_n > 0 \forall n$, cioè consideriamo una serie a termini alterni.

$$\begin{cases} b_{n+1} \leq b_n \quad \forall n \text{ (non crescente)} \\ b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ (infinitesima)} \end{cases} \Rightarrow \sum_n (-1)^n b_n \text{ converge}$$

Esempio

$$\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$$

$b_n = \frac{1}{n}$ è infinitesimo e non crescente \Rightarrow la serie converge



Non abbiamo analizzato proprietà commutativa e associativa, ma in generale non valgono.

SUCCESSIONI DI FUNZIONI

$f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ Funzioni caratterizzate dalla dipendenza da $n \in \mathbb{N}$.

Sono definite in uno stesso insieme $A \subseteq \mathbb{R}$.

Esempio

$$f_n(x) = e^{-nx}$$

$$n=0 \Rightarrow f_0(x) = 1$$

$$n=1 \Rightarrow f_1(x) = e^{-x}$$

$$n=2 \Rightarrow f_2(x) = e^{-2x}$$

eccetera

Successioni puntualmente convergenti: data una successione di funzioni del tipo $f_n(x)$ definite su $A \subseteq \mathbb{R}$ e una funzione f definita in A , si dice che $f_n(x)$ converge puntualmente ad $f(x)$ in A se:

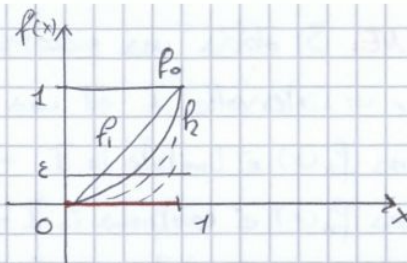
$$\forall x \in A, \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

cioè:

Esempio

$$f_n(x) = x^n \quad A = [0, 1]$$

Convergenza puntuale: $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$



Anche se n è grande, vediamo che le f_n escono dalla striscia compresa tra $0 + \epsilon$ e $0 - \epsilon$, quindi la convergenza non potrà essere uniforme. Infatti:

$$\sup_{x \in [0, 1]} |x^n - 0| = \sup_{x \in [0, 1]} |x^n| = 1 \quad \forall n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, 1]} |x^n - 0| = 1 \neq 0 \quad \forall n$$

Se però prendiamo $A = [0, a]$ con $0 < a < 1$:

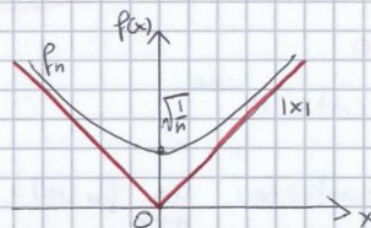
$$\sup_{x \in [0, a]} |x^n - 0| = \sup_{x \in [0, a]} x^n = a^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, a]} |x^n - 0| = \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0 \Rightarrow \text{converge uniformemente!}$$

Esempio

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \quad n \geq 1, x \in \mathbb{R}$$

convergenza puntuale: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} = \sqrt{x^2} = |x|$



convergenza uniforme:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| \right| = \sqrt{\frac{1}{n}} \quad (\text{si capisce dal grafico})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{n}} = 0$$

Esempio

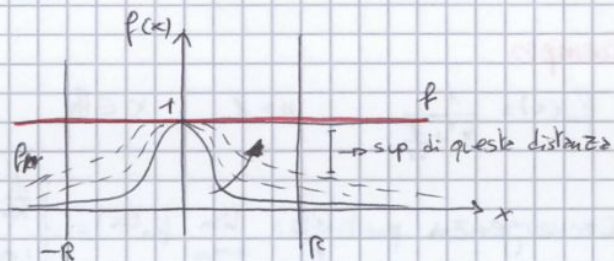
$$f_n(x) = e^{-\frac{x^2}{n^2}} \quad n \geq 1, x \in \mathbb{R}$$

conv. puntuale: $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{x^2}{n^2}} = 1$

Conv. uniforme:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| e^{-\frac{x^2}{n^2}} - 1 \right| = 1 \quad \forall n$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| e^{-\frac{x^2}{n^2}} - 1 \right| = 1 \neq 0 \rightarrow$ non converge uniformemente su \mathbb{R} .

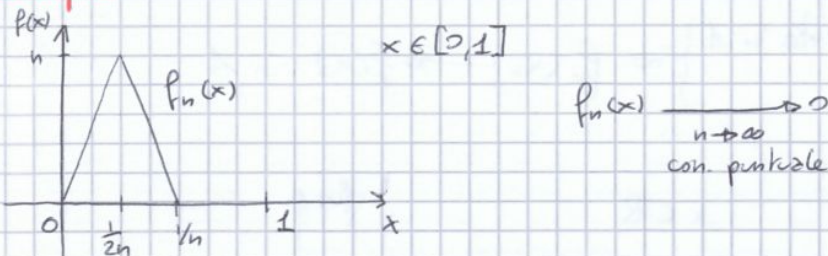


Studiamo la funzione per $x \in [-R, R]$ con $R > 0$.

$$\sup_{x \in [-R, R]} \left| e^{-\frac{x^2}{n^2}} - 1 \right| = \sup_{x \in [-R, R]} \left(1 - e^{-\frac{x^2}{n^2}} \right) = 1 - e^{-\frac{R^2}{n^2}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [-R, R]} \left(1 - e^{-\frac{x^2}{n^2}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - e^{-\frac{R^2}{n^2}} \right) = 0 \rightarrow \text{converge uniformemente su } [-R, R]$$

Esempio



Abbiamo già visto che l'integrale del limite è diverso dal limite degli integrali, quindi non c'è convergenza uniforme. Infatti:

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = n \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = +\infty$$

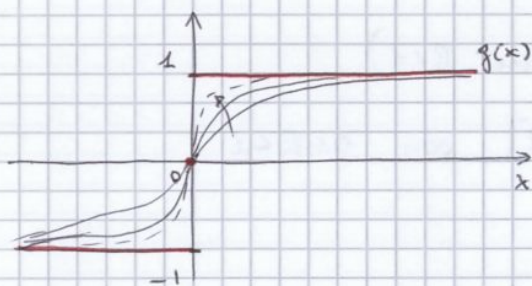
Esempio

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{conv. puntuale}} |x| \quad x \in \mathbb{R}$$

$f_n(x)$ converge uniformemente su \mathbb{R} .

Ma la funzione limite $f(x)$ non è derivabile, quindi la successione delle derivate non converge uniformemente. Infatti:

$$f'_n(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{conv. puntuale}} \begin{cases} 0 & \text{se } x=0 \\ \frac{x}{|x|} & \text{se } x \neq 0 \end{cases} \quad (\text{funzione segno})$$



$f'_n(x)$ non converge uniformemente perché la funzione limite $g(x)$ non è continua.

Potevamo capirlo dal fatto che la funzione limite $f(x) = |x|$ non è derivabile.

Infatti:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f'_n(x) - g(x)| = 1$$

Infatti prendiamo per esempio $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$:

$$f'_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Quindi: } \left| f'_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - 1 \right| = \underbrace{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}_{> 0} \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'_n(x) - g(x)|$$

Di conseguenza il limite del sup non può essere 0 e la convergenza non può essere uniforme.

$$f_n(x) - f(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1} - 1 = \frac{x^{2n} - 1 - x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1} = -\frac{2}{x^{2n} + 1}$$

$$\sup_{x \in [R, +\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [R, +\infty)} \left| -\frac{2}{x^{2n} + 1} \right| = \frac{2}{R^{2n} + 1}$$

Quindi: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [R, +\infty)} \left| -\frac{2}{x^{2n} + 1} \right| = 0$ (perché $R > 1$)

Dunque c'è convergenza uniforme in $[R, +\infty)$ e per simmetria in $(-\infty, -R]$.

In $x \in (1, +\infty)$:

$$\sup_{x \in (1, +\infty)} |f_n(x) - f(x)| = 1 \quad \text{distintivamente}$$

Scegliamo: $x_n = 1 + \frac{1}{2n}$ Infatti: $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x = 1$

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} + 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{e + 1} > 0$$

Quindi il limite del sup è diverso da zero e non c'è convergenza uniforme.

SERIE DI FUNZIONI

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \quad f_n: A \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{somma formale})$$

Per ogni fissato x sono una serie numerica.

Somme parziali: $S_0(x) = f_0(x)$

$$S_1(x) = f_0(x) + f_1(x)$$

\vdots

$$S_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x)$$

Definizione: si dice che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$:

- converge puntualmente in A se la successione delle somme parziali $S_n(x)$ converge puntualmente su A ;
- converge assolutamente su A se $\forall x \in A$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$ converge puntualmente su A ;
- converge uniformemente su A se la successione delle somme parziali $S_n(x)$ converge uniformemente su A .

Le proprietà delle successioni di funzioni possono essere trasferite alle serie di funzioni. Per esempio, se $f_n(x)$ è composta da funzioni continue su $[a, b]$ e $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente su $[a, b]$, allora la funzione somma $S(x)$ è continua su $[a, b]$.

Esempio

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = 1 + e^{-x} + e^{-2x} + \dots \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-x})^n$$

convergenza uniforme: per la convergenza puntuale, abbiamo che la funzione somma $S(x)$ è ben definita.

$$S(x) = f_0(x) + f_1(x) + \dots$$

$$S_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x)$$

$$|S_n(x) - S(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k \quad \forall x \in A$$

Quindi:

$$\sup_{x \in A} |S_n(x) - S(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k$$

$$M_n: \sum_{k=0}^{\infty} M_k = \sum_{k=0}^n M_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k$$

\parallel $\downarrow n \rightarrow \infty$ \Rightarrow $\downarrow n \rightarrow \infty$
 M M 0

Perciò:

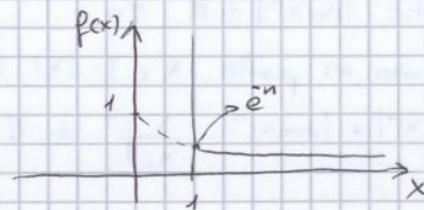
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} |S_n(x) - S(x)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} |S_n(x) - S(x)| = 0$$

Quindi c'è convergenza uniforme su A .

c.v.d.

Esempio

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} \quad x \in [1, +\infty)$$



$$|e^{-nx}| = e^{-nx} \leq e^{-n} \quad \forall x \in [1, +\infty),$$

$\forall n$ fissato

$e^{-n} = M_n$ studiammo la convergenza:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n \rightarrow \text{serie geometrica di ragione } \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \text{converge!}$$

Quindi $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$ converge totalmente su $[1, +\infty)$.

Su $[0, 1]$ abbiamo già visto che non c'è convergenza uniforme, quindi non ci sarà nemmeno su $(0, +\infty)$.

Esempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} \quad \text{con } x \in \mathbb{R}$$

$$\left| \frac{\cos(nx)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} = M_n \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Poiché $\frac{1}{n^2}$ converge, la nostra serie converge totalmente su \mathbb{R} .

$$R = \begin{cases} +\infty & \text{se } l = 0 \\ \frac{1}{e} & \text{se } 0 < l < +\infty \\ 0 & \text{se } l = +\infty \end{cases}$$

Formula del rapporto: $a_n \neq 0 \forall n$. Se $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l$, allora $R = \frac{1}{e}$

Dim del Teo sulla convergenza di una serie di potenze:

① $R=0$: la serie non può convergere su $x > 0$ per la definizione di raggio di convergenza; la serie non può convergere su $x < 0$, altrimenti per il lemma dovrebbe convergere anche per $-x > 0$, cosa che abbiamo visto essere impossibile. Quindi l'unico punto in cui la serie converge è $x=0$.

② $0 < R < +\infty$:

• convergenza assoluta: prendiamo in considerazione un $x \in (-R, R)$. Per la definizione di raggio di convergenza, sicuramente $\exists x_1 \in \mathbb{R}$ con $0 < x_1 < R$ e $|x| < x_1$, tale che la serie converge in x_1 . Ma se la serie converge in x_1 , per il lemma converge assolutamente nell'intervallo $(-|x_1|, |x_1|)$ e questo implica che la serie converge assolutamente in x .

• convergenza uniforme su $[-K, K]$ con $0 < K < R$: possiamo scrivere che

$$|a_n x^n| = |a_n| |x|^n \leq |a_n| \cdot K^n \quad \forall x \in [-K, K]$$

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot K^n$ è una serie numerica convergente puntualmente, infatti dal punto prima sappiamo che converge assolutamente su $(-R, R)$. Per il criterio di Weierstrass, la nostra serie di partenza converge uniformemente $\forall x \in [-K, K]$.

• non convergenza per $|x| > R$: la serie non può convergere per $x > R$ perché ciò implicherebbe che R non sia ben definito.

③ $R = +\infty$: si dimostra come al punto 2 prendendo R qualsiasi.

OSSERVAZIONE: Si abbia la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ con $R > 0$. Allora la somma della serie, $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, è ben definita su tutto $(-R, R)$ ed è continua su $[-K, K]$ con $0 < K < R$.

La serie $S(x)$ è continua su tutto $(-R, R)$? Sì, perché la proprietà di continuità è puntuale. Non si può, invece, dire che $S(x)$ converga uniformemente su tutto l'intervallo.

Esempio

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{se } |x| < 1, \quad R=1$$

genza uniforme su $[-K, K]$ con $0 < K < 2$.

Studiamo gli estremi:

$$x=2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \cdot 2^n = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \Rightarrow \text{non converge}$$

$$x=-2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} (-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 (-1)^n \Rightarrow \text{non converge}$$

La serie converge assolutamente ^{uniformemente} su $(-2, 2)$.

TEOREMA DI ABEL

Si abbia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ con $0 < R < +\infty$. Se la serie converge in $x=R$, allora la serie converge uniformemente in tutti gli intervalli $[-K, R]$, con $0 < K < R$. Se la serie converge in $x=-R$, allora converge uniformemente in tutti gli intervalli $[-R, K]$ con $0 < K < R$. Se la serie converge in $x=-R$ e in $x=R$, allora la serie converge uniformemente su $[-R, R]$.

Somma di Serie di Potenze: si abbiano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Allora si può

definire:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

TEOREMA: se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ha raggio di convergenza R_1 e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ ha raggio di convergenza R_2 , allora $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ ha raggio di convergenza $R = \min\{R_1, R_2\}$. In particolare, se $R_1 \neq R_2$, allora $R = \min\{R_1, R_2\}$.

Esempio

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) x^n \quad \text{è composta da: } \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} x^n, R_1 = 1 \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n, R_2 = 2 \end{cases}$$

$$R = \min\{R_1, R_2\} = \min\{1, 2\} = 1$$

Esempio

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{n=0}^{\infty} x^n, R_1 = 1 \\ \sum_{n=0}^{\infty} -x^n, R_2 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (1-1)x^n \equiv 0 \Rightarrow R = +\infty$$

Prodotto alla Cauchy: si abbiano:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots$$

Poiché c'è convergenza uniforme in $[0, x]$, si ha:

$$\int_0^x S(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{d^n}{n+1} x^{n+1} dt \quad \begin{matrix} \text{integrare} \\ \text{con } R > 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{dei termini della serie} \\ \forall x \in (-R, R) \end{matrix}$$

Esempio

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n = \frac{1}{1+t}, \quad R=1$$

Scegliamo $x \in (-1, 1)$:

$$\int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \log(1+x)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-t)^n dt = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n} (-1)^{n+1} \rightarrow \text{Sviluppo di Taylor di } \log x!!$$

AMAZING!



Esempio

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n = S(x) \quad \forall x \in [-1, 1)$$

C'è convergenza uniforme su tutto $[-1, 1)$?

$$x S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n \right) dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\log(1-x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S(x) = -\frac{\log(1-x)}{x}$$

Dunque non c'è convergenza uniforme su $[-1, 1)$ perché avvicinandoci a 1 la $S(x)$ non è limitata, mentre le funzioni di partenza lo sono.

SERIE DI TAYLOR

Si abbia un aperto $I \subseteq \mathbb{R}$, f di classe C^∞ su I ; fissiamo $x_0 \in I$. Si dice serie di Taylor della funzione centrata in x_0 :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \quad (*)$$

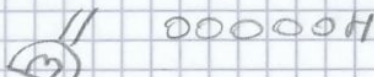
Esempio

$$\left. \begin{matrix} f(x) = e^x & x_0 = 1 \\ f^{(n)}(x) = e^x & f^{(n)}(1) = e \end{matrix} \right\} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!} (x-1)^n$$

La serie (*) è una serie di potenze: qual è il suo R ? In generale, non è

detto che la serie di Taylor di una funzione di classe C^∞ abbia $R > 0$.

Supponiamo di avere una serie di Taylor con $R > 0$: in generale essa NON converge a $f(x)$!!



$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ si ha $|f^{(n)}(x)| \leq 1$

Vale $\forall \delta$, quindi vale $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$A=1$$

$$B=1$$

Quindi la funzione è analitica.

$$x_0=0 \Rightarrow \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad R=+\infty$$

Quanto visto vale anche per $\cos x$:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \log(x+1)$$

$$\log(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \quad \forall x \in [-1, 1]$$

$$f(x) = \sinh(x)$$

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \cosh(x)$$

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Esempio

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-8x+12} \quad x_0=0$$

Qual è il polinomio di Taylor? Quanto vale R ? Qual è $f^{(n)}(0) \forall n$?

$$\frac{x+2}{x^2-8x+12} = \frac{A}{x-6} + \frac{B}{x-2} \Rightarrow \frac{(A+B)x - 2A - 6B}{(x-6)(x-2)} = \frac{x+2}{(x-6)(x+2)}$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -2A-6B=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1-B \\ -1+B-3B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1-B \\ 2B=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-1 \end{cases}$$

$$\frac{x-2}{x^2-8x+12} = \frac{2}{x-6} - \frac{1}{x-2}$$

Primo membro:

$$\frac{2}{x-6} = 2 \cdot \frac{1}{x-6} = 2 \cdot \frac{1}{\frac{x}{6}-1} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{6}} \rightarrow \text{è la somma di una serie geometrica di ragione } \frac{x}{6}$$

$$-\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{6}} = -\frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{6}\right)^n$$

Questa serie converge per $|\frac{x}{6}| < 1 \Rightarrow |x| < 6$

$$\bullet \cos^4 t = \cos^3 t \cos t = \frac{1}{8} [\cos(4t) + 4 \cos(2t) + 3]$$

E così via.

Esempio

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^6 \cos(nx)}{n!} \quad a_n = \frac{n^6}{n!} \quad \text{per } n \geq 1$$

Converge?

$$\left| \frac{n^6 \cos(nx)}{n!} \right| \leq \left| \frac{n^6}{n!} \right| = \frac{n^5}{(n-1)!}$$

↳ serie numerica che converge \Rightarrow per Weierstrass converge anche serie di partenza

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^{3/2}} \quad a_n = \frac{1}{n^{3/2}}$$

Converge?

$$\left| \frac{\cos(nx)}{n^{3/2}} \right| \leq \frac{1}{n^{3/2}}$$

↳ converge \Rightarrow per Weierstrass converge anche serie di partenza

TEOREMA: Se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| < \infty$, allora la serie $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ converge assolutamente e uniformemente su tutto \mathbb{R} (si deriva dal criterio di Weierstrass).

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \rightarrow \text{serie di Fourier}$$

Supponiamo di avere $f(x)$ periodica di periodo 2π : $f(x+2\pi) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Supponiamo anche che $f(x)$ sia la somma di una certa serie di Fourier:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

Che relazione c'è tra $f(x)$, a_0 , a_n , b_n ?

① Integriamo tra $-\pi$ e π e supponiamo che la convergenza della serie sia tale da permetterci di scambiare integrale con somma:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) dx \right)$$

$$\text{Quindi: } a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi a_0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx = \left[\frac{\sin(nx)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad \forall n \geq 1$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) dx = \left[-\frac{\cos(nx)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad \forall n \geq 1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$\forall n \geq 1$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

- Se f è pari: (ricordiamo che dispari \times pari = dispari)

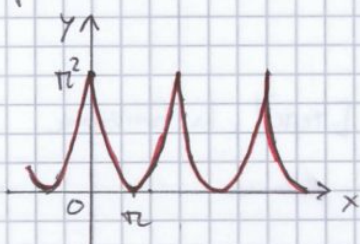
$$\begin{cases} b_n = 0 \\ a_n, a_0 \neq 0 \end{cases}$$

- Se f è dispari:

$$\begin{cases} a_n = 0 \\ a_0 = 0 \\ b_n \neq 0 \end{cases}$$

Esempio

$$f(x) = (x - \pi)^2 \quad \text{su } (0, \pi]$$



f pari $\Rightarrow b_n = 0 \quad \forall n \geq 1$

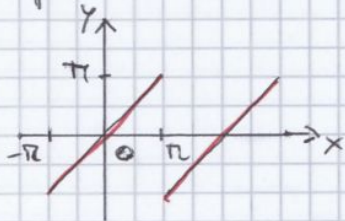
$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (x - \pi)^2 dx = \frac{1}{6\pi} \left[(x - \pi)^3 \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (x - \pi)^2 \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{4\pi}{n^2} = \frac{4}{n^2}$$

Serie di Fourier: $\frac{1}{3} \pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$

Esercizio

$$f(x) = x \quad \text{su } (-\pi, \pi]$$



f dispari $\Rightarrow a_0, a_n = 0 \quad \forall n \geq 1$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left\{ \left[-x \frac{\cos(nx)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nx)}{n} dx \right\} = \frac{1}{\pi} \left\{ \left[-\pi \frac{\cos(n\pi)}{n} + \pi \frac{\cos(-n\pi)}{n} \right] + \frac{1}{n} \left[\frac{\sin(nx)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} \right\}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left\{ -\frac{2\pi}{n} \cos(n\pi) + \frac{1}{n^2} [0] \right\} = -\frac{2}{n} \cos(n\pi) \quad ?$$

$$= \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx}_{\text{non contiene } p: \text{ è fissata}} - \pi \sum_{k=1}^n b_k^2 + \underbrace{\pi \sum_{k=1}^n (t_k - b_k)^2}_{\text{sempre } \geq 0}$$

Il valore minimo si ha per $t_k = b_k \quad \forall k \geq 1$

② Supponiamo f pari. Il ragionamento è analogo al caso precedente, con $b_k = 0$ e P_n spazio dei p pari di grado $\leq n$. Attenzione: $c_0 \neq 0$ e $s_0 \neq 0$.

③ f qualsiasi.

$$f = f_p + f_D$$

$$f_p = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \rightarrow \text{pari}; \quad f_D = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \rightarrow \text{dispari}$$

$$q = p + d$$

Quindi: $\forall q \in T_n$

$$\begin{aligned} \|f - q\|_2^2 &= \|f_p + f_D - p - d\|_2^2 = \|f_p - p + f_D - d\|_2^2 = \\ &= \|f_p - p\|_2^2 + \|f_D - d\|_2^2 + 2 \int_{-\pi}^{\pi} (f_p - p)(f_D - d) dx \end{aligned}$$

≥ 0 perché: pari \times dispari = dispari
funzioni dispari = 0 sul periodo

Quindi $\|f - q\|_2^2$ si minimizza se sono minime sia $\|f_p - p\|_2^2$ che $\|f_D - d\|_2^2$.

Per ① sappiamo che $\|f_D - d\|_2^2$ è minima se d è il polinomio di Fourier di f_D ; per ② sappiamo che $\|f_p - p\|_2^2$ è minima se p è il polinomio di Fourier di f_p . Il polinomio di Fourier di f_p sommato a quello di f_D dà il polinomio di Fourier di f .

$$\|f - S_n\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|^2 dx \rightarrow \text{SCARTO QUADRATICO MEDIO}$$

$$\|f - S_n\|_2^2 = \|f - [a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]\|_2^2 =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx + \int_{-\pi}^{\pi} [a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]^2 dx - 2 \int_{-\pi}^{\pi} f [a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)] dx$$

$$= \|f\|_2^2 + a_0^2 2\pi + \pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) - 4\pi a_0^2 - 2\pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) =$$

$$= \|f\|_2^2 - 2\pi a_0^2 - \pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2)$$

Quindi: $\|f - S_n\|_2^2 = \|f_p\|_2^2 - 2\pi a_0^2 - \pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \Rightarrow$

DEFINIZIONE: Una serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ su $[a,b]$ con f_n integrabile su $[a,b]$ si dice convergente in L^2 o in media quadratica se la successione delle sue ridotte converge in L^2 .

TEOREMA DI CONVERGENZA QUADRATICA: data una funzione f periodica di periodo 2π e integrabile sul periodo, la sua serie di Fourier converge ad f in L^2 , cioè:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n\|_2 = 0$$

Dove:

$$S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

$$a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \cdot \frac{1}{2\pi}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx$$

FORMULA DI PARSEVAL: sia f periodica di periodo 2π e integrabile su $[-\pi, \pi]$:

allora:
$$\|f\|_2^2 = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

Dim:

Abbiamo già dimostrato che:

$$\|f\|_2^2 = \|f - S_n\|_2^2 + 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2)$$

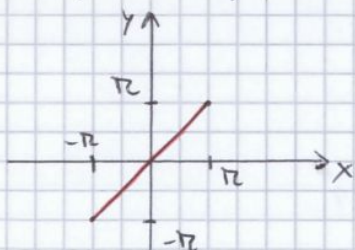
\downarrow
 $n \rightarrow \infty$
 \downarrow
 0
 per teorema di
 conv. quadratica

\downarrow
 $n \rightarrow \infty$
 \downarrow
 $\pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$

c.v.d.

Esempio

Data $f(x) = x$, $x \in (-\pi, \pi]$, calcolare $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ usando formula di Parseval.



f dispari $\Rightarrow a_0, a_k = 0$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = \frac{2}{k} (-1)^{k+1}$$

$$\|f\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \left(\frac{1}{3} x^3\right)_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^3}{3} = \frac{2}{3} \pi^3$$

f dispari $\Rightarrow a_0 = a_k = 0$

dispari \times dispari = pari

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = 2 \left(-\frac{\cos(kx)}{k} \right)_0^{\pi} =$$

$$= 2 \left(\frac{-\cos(k\pi) + 1}{k} \right) = 2 \frac{1 - (-1)^k}{k} = \begin{cases} 0, & k = \text{pari} \\ \frac{4}{k}, & k = \text{dispari} \end{cases}$$

Quindi: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k} \sin(kx)$ con k dispari $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{2n+1} \sin[(2n+1)x] \quad \forall n$

Convergenza della serie di Fourier di f :

- f integrabile su $[-\pi, \pi]$ \Rightarrow la serie converge in L^2 a f stessa
- f regolare a tratti su $[-\pi, \pi]$ \Rightarrow convergenza puntuale a:

$f(x)$ nei punti di continuità: $\forall x \neq k\pi$

0 nei punti di discontinuità: $\begin{cases} x = 2k\pi & \forall k \in \mathbb{Z} \\ x = (2k+1)\pi \end{cases}$

- no convergenza uniforme su $[-\pi, \pi]$; convergenza uniforme sugli intervalli contenuti nei tratti di funzione continua.

$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ è una serie numerica derivata dalla serie di Fourier di f .

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{2n+1} \sin\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\right] = \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \left(\frac{\pi}{4}\right)$$

PROPOSIZIONE: f periodica di periodo 2π e continua e regolare a tratti su $[-\pi, \pi]$

$\Rightarrow k a_k = -b'_k$ e $k b_k = a'_k \quad \forall k \geq 1$, dove a'_k e b'_k sono i coefficienti di Fourier della funzione f' derivata di f e a_k, b_k sono i coefficienti della serie di Fourier di f .

Dim:

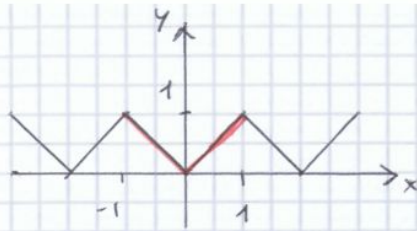
$$k a_k = \frac{k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx =$$

$$= \frac{k}{\pi} \cdot \frac{1}{k} \sin(kx) f(x) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin(kx) dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin(kx) dx = -b'_k$$

Analogamente si procede per la seconda uguaglianza.

c.v.d.



$$f \text{ pari} \Rightarrow b_k = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 |x| dx = \frac{2}{2} \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

$$a_k = 1 \cdot \int_{-1}^1 |x| \cos(\pi k x) dx = 2 \int_0^1 x \cos(\pi k x) dx =$$

$$= 2 \left[\frac{x}{\pi k} \sin(\pi k x) \right]_0^1 - 2 \frac{1}{\pi k} \frac{1}{\pi k} \left[\cos(\pi k x) \right]_0^1 =$$

$$= \frac{2}{\pi^2 k^2} \left[\cos(\pi k) - 1 \right] = \frac{2}{\pi^2} \frac{(-1)^k - 1}{k^2} = \begin{cases} 0, & k \text{ pari} \\ -\frac{4}{\pi^2 k^2}, & k \text{ dispari} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos[\pi(2n+1)x] \quad \text{con } k = 2n+1$$

f integrabile \Rightarrow serie convergente in L^2 a f stessa

$\left. \begin{array}{l} f \text{ regolare e tratti} \\ f \text{ continua} \end{array} \right\} \Rightarrow$ serie uniformemente convergente su \mathbb{R}