NUMERO: 958

DATA: 08/05/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Tortorici

MATERIA: Analisi Matematica I

Prof. Fagnani

Proposizioni logiche: enunciati di cui si può affermare senza ambiguità se sono veri o falsi.

Numeri naturali: N = {1, 2, 3,…}

Numeri interi relativi: Z = {0, ±1, ±2,…}

Numeri razionali: Q = {m/n| m, n ∈ Z, n ≠ 0}

N C Z C Q

TEOREMA: non esiste un numero razionale q tale che $q^2 = 2$.

Dim: supponiamo per assurdo che la tesi sia falsa, cioè che esistano m, n ∈ N tali che $(m/n)^2=2$. Senza perdere generalità ipotizziamo che m ed n siano primi tra loro: $m^2/n^2=2 \rightarrow m^2=2n^2$.

Allora m^2 è pari, quindi m è pari: dunque esiste r ∈ N tale che m = 2r. Sostituiamo nella relazione già scritta: $4r^2=2n^2 \rightarrow 2r^2=n^2$. Anche n^2 è pari, quindi n è pari. I due numeri non sono primi tra loro: questo contraddice l'ipotesi fatta, quindi la tesi dev'essere vera. ▪

Numeri reali: R = {$x=k_0,k_1k_2$… che non terminano con una coda infinita di 9}

Retta reale: oggetto con una natura algebrica e geometrica che esprime la corrispondenza biunivoca tra la retta e R.

Valore assoluto: |x| è uguale a x se x>0, a –x se x<0. |x|<a non ha soluzioni se a<0, mentre se a>0 vale –a<x<a. |x|>a vale per ogni x se a<0, mentre se a>0 vale x<-a U x>a.

DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE: $|x + y| \leq |x| + |y|$

Dim: $|x| \leq |x| \rightarrow -|x|\leq x \leq|x|$ e $|y|\leq|y| \rightarrow -|y|\leq y \leq|y|$. Sommo membro a membro e ottengo:
$-|x|-|y|\leq x+y \leq|x|+|y| \rightarrow -(|x|+|y|)\leq x+y \leq|x|+|y| \rightarrow |x+y| \leq |x| + |y|$

Massimo e minimo: se A C R, M ∈ A si dice il massimo di A se M ≥ x per ogni x ∈ A: M = maxA. Se A C R, m ∈ A si dice il minimo di A se m ≤ x per ogni x ∈ A: m = minA.

Maggioranti e minoranti: dato A, un maggiorante di A è un qualunque x ∈ R tale che x ≥ a per ogni a ∈ A. A^+ è l'insieme dei maggioranti. Un minorante di A è un qualunque x ∈ R tale che x ≤ a per ogni a ∈ A. A^- è l'insieme dei minoranti.

Insiemi limitati: A C R si dice superiormente (inferiormente) limitato se $A^+ \neq \emptyset$ ($A^- \neq \emptyset$). A si dice limitato se è sia superiormente che inferiormente limitato.

TEOREMA DEL CONFRONTO PER LE SUCCESSIONI: siano (a_n), (b_n) e (c_n) successioni tali che:

1. $a_n \leq b_n \leq c_n$ per ogni n
2. $\lim a_n = \lim c_n = l$

Allora $\lim b_n = l$.

Siano (a_n) e (b_n) successioni tali che $a_n \leq b_n$ per ogni $n \in N$. Allora:

1. se $a_n \to +\infty$ anche $b_n \to +\infty$
2. se $b_n \to -\infty$ anche $a_n \to -\infty$

PROPRIETÁ ALGEBRICHE DEI LIMITI: siano (a_n) e (b_n) successioni tali che $a_n \to l_1 \in R$ e $b_n \to l_2 \in R$. Allora:

1. $a_n \pm b_n \to l_1 \pm l_2$
2. $a_n b_n \to l_1 l_2$
3. se $b_n \neq 0$ per ogni n e $l_2 \neq 0$, $a_n/b_n \to l_1/l_2$

PROPOSIZIONE: Siano (a_n) e (b_n) successioni tali che $a_n \to 0$ e b_n è limitata. Allora $a_n b_n \to 0$.

Monotonia successioni: una successione (a_n) si dice monotona crescente (decrescente) se $a_{n+1} \geq a_n$ $(a_{n+1} \leq a_n)$ per ogni $n \in N$. se le disuguaglianze sono strette, la successione è strettamente crescente (strettamente decrescente).
Le successioni costanti sono sia crescenti che decrescenti.

TEOREMA: sia (a_n) una successione crescente. Allora esiste sempre il limite della successione per $n \to +\infty$ e coincide con l'estremo superiore del suo supporto, cioè $\lim a_n = \sup\{a_n | n \in N\}$.
Sia (a_n) una successione decrescente. Allora esiste sempre il limite della successione per $n \to +\infty$ e coincide con l'estremo inferiore del suo supporto, cioè $\lim a_n = \inf\{a_n | n \in N\}$.

PROPOSIZIONE: sia (a_n) tale che $a_n > 0$ per ogni n e tale che esiste $\lim a_{n+1}/a_n = q$. Allora:

1. se $q > 1$, $a_n \to +\infty$
2. se $q < 1$, $a_n \to 0$

la proposizione non può essere applicata ai polinomi, ma solo agli andamenti geometrici.

Funzioni: siano A e B insiemi. Una funzione $f: A \to B$ è una qualunque legge che permette di associare ad ogni elemento $a \in A$ uno ed un solo elemento $b \in B$. Quest'ultimo è detto l'*immagine* di a tramite f e si scrive $b = f(a)$. L'insieme A è detto *dominio* della funzione, l'insieme B è detto *codominio* della funzione. L'immagine della funzione è l'insieme definito come $\text{imf} = \{b \in B |$ esiste $a \in A: f(a) = b\}$. Se l'immagine coincide con il codominio, f si dice <u>suriettiva</u>. Se $f(a_1)=f(a_2) \to a_1 = a_2$ f si dice <u>iniettiva</u>. Se $f: A \to B$ è sia iniettiva che suriettiva si dice che è *invertibile*. In tal caso si può

Chiusura e interno di un insieme: sia A unione di intervalli. $\bar{A}$ è detto chiusura di A ed è uguale all'insieme A inclusi i suoi estremi. Int(A) è detto interno di A ed è uguale all'insieme A esclusi gli estremi.

Limite per $x \to x_0$: siano A unione di intervalli, $x_0 \in \bar{A}$, $f:A \to R$. Si dice che f(x) tende a l quando $x \to x_0$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x) - l| < \varepsilon$ per ogni $x \in A \setminus \{x_0\}$ con $|x - x_0| < \delta$.
Sia $f:A \to R$, $x_0 \in \bar{A}$. Si dice che f tende a $+\infty$ ($-\infty$) per $x \to x_0$ se accade che per ogni $L \in R$ esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) > L$ ($f(x) < L$) per ogni $x \in A \setminus \{x_0\}$ con $|x - x_0| < \delta$.
Se il limite esiste, è unico.

TEOREMA DEL CONFRONTO PER FUNZIONI: siano $f,g,h:A \to R$, $x_0 \in \bar{A}$, tali che:

1. $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ per ogni $x \in A$
2. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l \in R$

Allora $\lim_{x \to x_0} g(x) = l$.
Il teorema vale anche nel caso in cui $x_0 = \pm\infty$ e f, g, e h siano definite su un'opportuna semiretta destra o sinistra.

Proprietà algebriche dei limiti di funzioni: sono le stesse dei limiti di successioni.

Limiti destro e sinistro: sia A unione di intervalli, $x_0 \in \bar{A}$, esista $\delta' > 0$ tale che $]x_0 - \delta', x_0 + \delta'[\subset \bar{A}$, sia $f:A \to R$. Si dice che f tende a l per $x \to x_0$ dalla destra (sinistra) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x) - l| < \varepsilon$ per ogni $x \in A \setminus \{x_0\}$ con $x_0 < x < x_0 + \delta$ ($x_0 - \delta < x < x_0$).
Il normale limite di f per $x \to x_0$ esiste se e solo se esistono i limiti destro e sinistro di f e per $x \to x_0$ coincidono.

SIMMETRIE DEI LIMITI: sia $f:R \to R$ pari tale che $\lim_{x \to 0^+} f(x) = l$. Allora $\lim_{x \to 0^-} f(x) = l$.
Sia $f:R \to R$ dispari tale che $\lim_{x \to 0^+} f(x) = l$. Allora $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -l$.

Forme indeterminate dei limiti:

- $+\infty - \infty$
- $\pm\infty \cdot 0$
- $\pm\infty / \pm\infty$
- $0/0$
- 0^0
- 1^∞

PROPOSIZIONE: siano $f,g:A \to R$, $x_0 \in \bar{A}$. Se $\lim f(x) = 0$ e g(x) è limitata, allora $\lim f(x)g(x) = 0$.

Parte principale: fissiamo Φ:A→R tale che sia un'infinitesima (o un infinito) per $x \to x_0$, con $x_0 \in \bar{A}$. Sia f:A→R un'infinitesima per $x \to x_0$. Si dice che f ha grado k rispetto a Φ per $x \to x_0$ se esiste $c \neq 0$ tale che $f = c\Phi(x)^k + o(\Phi(x)^k)$ per $x \to x_0$, cioè se $f(x) \sim c\Phi(x)^k$. Inoltre $c\Phi(x)^k$ si dice parte principale di f rispetto a Φ per $x \to x_0$.

Derivate: siano f:R→R, $y_0 = f(x_0)$. Si voglia determinare la tangente al grafico in (x_0, y_0). Consideriamo la retta passante per $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$, usando t come variabile indipendente.
$Y - f(x_0) = (f(x) - f(x_0))/(x - x_0) \cdot (t - x_0)$ è la retta che indica la pendenza media della curva tra x e x_0. Se esiste finito il $\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0))/(x - x_0) = l$, allora $y - f(x_0) = l(t - x_0)$ è la retta tangente al grafico nel punto $(x_0, f(x_0))$. Quando tale limite esiste finito viene detto derivata di f nel punto x_0 e la funzione f(x) si dice derivabile.

CARATTERIZZAZIONE EQUIVALENTE DELLA DERIVABILITÁ: sia f:A→R, $x_0 \in A$. Sono fatti equivalenti:

1- f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = m$
2- vale che $f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + \omega(x)$, dove $\omega(x) = o(x - x_0)$ per $x \to x_0$

PROPOSIZIONE: se f è derivabile in x_0, allora f è continua in x_0. Non vale viceversa: se f è continua in x_0, non è detto che sia derivabile in x_0.

REGOLE ALGEBRICHE SULLE DERIVATE: Siano f,g:A→R, $c \in R$, $x_0 \in A$ e supponiamo f e g derivabili in x_0. Allora:

1. $f \pm g$ è derivabile in x_0 e $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
2. cf è derivabile in x_0 e $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$
3. fg è derivabile in x_0 e $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ (*formula di Leibinitz*)
4. se g non si annulla, f/g è derivabile in x_0 e $(f/g)'(x_0) = [f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)]/g(x_0)^2$

DERIVATA DI FUNZIONI COMPOSTE: siano f:A→B e g:B→R, $x_0 \in A$. Supponiamo che f sia derivabile in x_0 e che g sia derivabile in $y_0 = f(x_0)$. Allora g°f è derivabile in x_0 e vale $(g°f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$.

DERIVATA DI FUNZIONI INVERSE: siano I e J intervalli. Sia f:I→J suriettiva e strettamente monotona. Sia $x_0 \in I$, $y_0 = f(x_0)$. Allora se f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) \neq 0$, la funzione inversa f^{-1} è derivabile in y_0 e vale $(f^{-1})(y_0) = 1/f'(x_0) = 1/f'(f^{-1}(y_0))$.

PROPOSIZIONE: sia f:]a,b[→R derivabile su]a,b[, allora:

1. f crescente su]a,b[→ $f'(x) \geq 0$ per ogni x
2. f decrescente su]a,b[→ $f'(x) \leq 0$ per ogni x

PROPOSIZIONE: sia f:I→R derivabile su I. Allora:

Polinomio di Taylor: $P_n(x) = \Sigma^n_{k=0} f^{(k)}(x_0)/k! \cdot (x - x_0)^k$

FORMULA DI TAYLOR CON RESTO DI PEANO: $f(x) = P_n(x) + o((x-x_0)^n)$

FORMULA DI TAYLOR CON RESTO DI LAGRANGE: $f(x) = P_{n-1}(x) + f^{(n)}(c_x)/n! \cdot (x - x_0)^n$ con c_x compreso tra x e x_0.

Convessità e concavità: una funzione f derivabile in x_0 si dice convessa (concava) in x_0 se vale che esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ $[f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]$ per ogni x tale che $|x - x_0| < \delta$.

PROPOSIZIONE: sia $f:I \rightarrow R$ di classe C^2, con $x_0 \in I$, tale che $f''(x_0) > 0$ $[f''(x_0) < 0]$. Allora f è convessa (concava) in x_0.

Punti di flesso: sia $f:I \rightarrow R$ derivabile, $x_0 \in int(I)$. Si dice che x_0 è punto di flesso per f se esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in]x_0 - \delta, x_0[$ f è convessa (o concava) e per ogni $x \in]x_0, x_0 + \delta[$ f è concava (o convessa).

PROPOSIZIONE TAPPA BUCHI: sia $f:I \rightarrow R$ con $x_0 \in I$. Sia f continua in I e derivabile in $I \backslash \{x_0\}$. Se esiste $\lim_{x \rightarrow x0} f'(x)=l$, allora esiste $\lim_{x \rightarrow x0} [f(x) - f(x_0)]/(x - x_0)=l$. La funzione non può avere discontinuità eliminabili.

PROPOSIZIONE: sia I intervallo e siano f e g funzioni derivabili su I. Sono fatti equivalenti:

1. esiste $c \in R$ tale che $g(x) = f(x) + c$ per ogni $x \in I$
2. $g'(x) = f'(x)$ per ogni $x \in I$

Primitive di una funzione: data una funzione h(x) definita su I, se riusciamo a trovare una funzione f(x) su I derivabile tale che $f'(x) = h(x)$ per ogni $x \in I$, allora tutte e sole le funzioni la cui derivata è h(x) sono date dalla famiglia f(x)+c con $c \in R$. Le funzioni f(x)+c sono dette primitive di h(x). In simboli: $\int h(x)dx = f(x)+c$ (*integrale indefinito*).
Notiamo che: $d/dx(\int f(x)dx) = f(x)$ ma $\int d/dx\, f(x)dx = f(x)\underline{+c}$.

LINEARITÁ DEGLI INTEGRALI: siano $f,g:I \rightarrow R$ e $\lambda, \mu \in R$. Allora:

$$\int(\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda\int f(x)dx + \mu\int g(x)dx$$

INTEGRAZIONE PER PARTI: siano $f,g:I \rightarrow R$ derivabili. Sappiamo che $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$.
Quindi: $f'(x)g(x) = (fg)'(x) - f(x)g'(x) \rightarrow \int f'(x)g(x) = \int[(fg)'(x) - f(x)g'(x)]dx$. Concludendo:

$$\int f'(x)g(x) = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)$$

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE: $\int f(\Phi(t)) \cdot \Phi'(t)\, dt = \int f(x)dx$

2- per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $r > 0$ tale che per ogni $\delta \in \Delta_{[a,b]}$ e $r_\delta < r$ si ha che $S_\delta - s_\delta < \varepsilon$.

COROLLARIO: $f:[a,b]\rightarrow R$ limitata. Sono fatti equivalenti:

1- f è integrabile su [a,b]
2- indicando con δn^{uni} la partizione uniforme in n sottointervalli, si ha che $\lim_{n\to\infty} (S_{\delta uni} - s_{\delta uni})=0$

Inoltre in tal caso si ha che ${}_a\int^b f(x)dx = \lim S_{\delta uni} = \lim s_{\delta uni}$

TEOREMA: sia $f:[a,b]\rightarrow R$ limitata e monotona. Allora f è integrabile su [a,b].

ADDITTIVITÁ DELLE AREE: Sia $f:[a,b]\rightarrow R$, $c \in]a,b[$. Se f è integrabile su [a,c] e su [c,b] è anche integrabile su tutto [a,b] e si ha: ${}_a\int^b f(x)dx = {}_a\int^c f(x)dx + {}_c\int^b f(x)dx$.

PROPOSIZIONE: siano $f,g:[a,b]\rightarrow R$ tali che $f(x) = g(x)$ eccettuato un numero finito di punti. Allora f è integrabile se e solo se lo è g e i loro integrali coincidono.
In virtù di questa proposizione anche le funzioni che presentano un numero finito di discontinuità eliminabili sono integrabili e anche quelle che presentano un numero finito di salti.

Media integrale: se $f:[a,b]\rightarrow R$ è una qualunque funzione integrabile, la quantità $1/(b-a) \cdot {}_a\int^b f(x)dx$ è detta la media integrale di f su [a,b].

TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE: sia $f:[a,b]\rightarrow R$ <u>continua</u>, allora esiste $c \in [a,b]$ tale che:

$${}_a\int^b f(x)dx = (b-a) \cdot f(c)$$

Funzione integrale: fissato $x_0 \in [a,b]$, la funzione $F:[a,b]\rightarrow R$ definita come $F(x) = {}_{x0}\int^x f(t)dt$ è detta la funzione integrale di f(x).

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE: Se f è continua su [a,b], F è derivabile su [a,b] e $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a,b]$.

COROLLARIO: se f(x) è continua, essa ammette sempre primitiva.

COROLLARIO: sia $f:[a,b]\rightarrow R$ continua e sia $G:[a,b]\rightarrow R$ una <u>qualunque</u> primitiva di f(x). Allora:

$${}_a\int^b f(t)dt = G(b) - G(a)$$

Integrabilità locale: sia $f:[a, +\infty[\rightarrow R$. Si dice che f è localmente integrabile se è integrabile su ogni intervallo $[x_1, x_2]$ contenuto in $[a, +\infty[$.

Integrabilità impropria: sia $f:[a, +\infty[\rightarrow$ localmente integrabile. Si dice che f è integrabile (in senso generalizzato o improprio) su $[a, +\infty[$ se esiste finito: $\lim_{x\to\infty} {}_a\int^x f(t)dt = {}_a\int^\infty f(t)dt$.

Coniugato: $\bar{z} = a - ib$

Reciproco: $z^{-1} = \bar{z} / |z|^2$
Modulo: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Potenza: $z = \rho\, e^{i\vartheta} \rightarrow z^n = \rho^n\, e^{in\vartheta}$

Radice: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i \cdot (\vartheta + 2k\pi)/n}$ con $k = 0,1,\dots, n-1$.

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA: dato un polinomio di grado n $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ con $a_i \in C$ e $a_n \neq 0$, esso ha esattamente n zeri su C contando la loro molteplicità.
Se P(z) è a coefficienti reali e $z \in C$ è un suo zero, allora anche $\bar{z}$ è uno zero di P(z).

Equazioni differenziali di 1° ordine: $y' = f(t,y)$ con $t \in I$, $y \in J$, I e J intervalli.

Risolvere y' = f(y):

- Si cercano gli zeri di f: $y_1, y_2, \dots, y_k \in f$ tali che $f(y_i) = 0$. Allora $y(t) = y_i$ è soluzione dell'equazione differenziale. Le y_i vengono dette punti di equilibrio.
- Si cercano le soluzioni per $f(y) \neq 0$, che non intersecheranno mai le soluzioni già trovate. Si deve risolvere: $\int dy/f(y) = \int dt$. Sia G(y) una primitiva di 1/f(t): allora $y(t) = G^{-1}(t + c)$

Equazioni differenziali del 1° ordine a variabili separabili: $y' = g(t)f(y)$

Risolvere y' = g(t)f(y):

- Si cercano le soluzioni di equilibrio: $f(y_i) = 0 \rightarrow y(t) = y_i$
- Si cercano le soluzioni per $f(y) \neq 0$ risolvendo $\int dy/f(y) = \int g(t)dt$

Equazioni differenziali del 1° ordine lineari: $y' = a(t)y + b(t)$

Risolvere y' = a(t)y (caso omogeneo: b(t) = 0):

- $y = 0$ è una soluzione di equilibrio
- quando $y \neq 0$, si trova che l'integrale generale è $y = k\, e^{A(t)}$, dove $A(t) = \int a(t)dt$.

Risolvere y' = a(t)y + b(t):

- non esistono soluzioni di equilibrio
- si trova che l'integrale generale è $y(t) = e^{A(t)} \cdot \int e^{-A(t)} b(t)dt$, dove $A(t) = \int a(t)dt$.

Equazioni differenziali del 2° ordine a coefficienti costanti: $y'' + ay' + by = f(t)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 16