NUMERO: 957

DATA: 08/05/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Tortorici

MATERIA: Analisi dei Segnali

Prof. Visintin

SEGNALE: grandezza fisica che varia nel tempo (quindi una funzione del tempo). Ha una unità di misura!

CLASSIFICAZIONE:

- SEGNALI
  - DETERMINATI
    - tempo continui
      - Energia finita
      - periodici
      - (non periodici a potenza finita)
    - tempo discreti
      - Energia finita
      - periodici
      - (non periodici a potenza finita)
  - CASUALI (processi)
    - tempo continui
      - processi stazionari
      - (processi ciclo-stazionari)
    - (tempo discreti
      - processi stazionari
      - processi ciclostazionari)

SISTEMI:

- SISTEMI
  - tempo continui
  - tempo discreti

SISTEMA LINEARE: un sistema è lineare se e solo se vale la sovrapposizione degli effetti:

$x_1[n] \rightarrow \boxed{\text{sist.}} \rightarrow y_1[n]$

$x_2[n] \rightarrow \boxed{\text{sist.}} \rightarrow y_2[n]$

$$x[n] = a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] \Rightarrow y[n] = a_1 y_1[n] + a_2 y_2[n]$$

SISTEMA TEMPO INVARIANTE: un sistema è tempo invariante se, essendo $y[n] = \mathcal{T}\{x[n]\}$, l'uscita $y'[n]$ per l'ingresso $x'[n] = x[n-N]$ è: $y'[n] = y[n-N]$

Un sistema <u>non può</u> essere tempo invariante se nella "scatola" c'è qualcosa che dipende dal tempo.

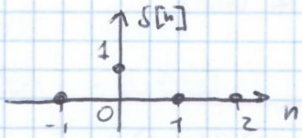
In un sistema tempo invariante ritardo e "scatola" possono essere scambiati senza che cambi l'uscita:

$$x_1[n] \rightarrow \boxed{\text{sist.}} \xrightarrow{y_1[n]} \boxed{\text{rit. } N} \rightarrow y_1[n-N] \quad \equiv \quad x_1[n] \rightarrow \boxed{\text{rit. } N} \xrightarrow{x_1[n-N]} \boxed{\text{sist.}} \rightarrow y_2[n]$$

$$y_2[n] = y_1[n-N]$$

$\delta[n]$:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & , n=0 \\ 0 & , n \neq 0 \end{cases}$$



RISPOSTA ALL'IMPULSO: la risposta all'impulso $h[n]$ è l'uscita di un sistema quando in ingresso c'è $\delta[n]$:

$$\delta[n] \rightarrow \boxed{\text{sist. LTI}} \rightarrow h[n]$$

PROPRIETÀ COMMUTATIVA:

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

Dim:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \quad \text{pongo } t-\tau = u$$

$$= \int_{+\infty}^{-\infty} -x(t-u)\, h(u)\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-u)\, h(u)\, du = h(t) * x(t)$$

TRASFORMATA DI LAPLACE:

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau \quad , s \in \mathbb{C} \quad , \quad H(s): \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

$w_s(t) = e^{st}$ è una autofunzione ed è tale che:

$$w_s(t) * h(t) = w_s(t) \cdot H(s)$$

TRASFORMATA DI FOURIER

È una sottoclasse della trasformata di Laplace che si ottiene se si pone $s = j2\pi f$, $f \in \mathbb{R}$.

$$w_f(t) = e^{j2\pi f t}$$

$$w_f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, w_f(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, e^{j2\pi f(t-\tau)}\, d\tau = e^{j2\pi f t} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, e^{-j2\pi f \tau}\, d\tau}_{H(f)} =$$

$$= w_f(t) \cdot H(f)$$

$$\boxed{H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt} \to \text{trasformata di Fourier di } h(t) \quad : \quad H(f): \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

$H(f) \to$ funzione di trasferimento o risposta in frequenza

PROPRIETÀ:

- linearità
- se $x(t) \in \mathbb{R}$ allora: $X^*(f) = X(-f)$

Dim:

perché $x \in \mathbb{R}$

$$X^*(f) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt \right]^* = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)\, e^{j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{j2\pi f t}\, dt = X(-f)$$

DOMANDA D'ESAME

c.v.d.

- se $x(t) \in \mathbb{R}$ allora:

$$\begin{cases} |X(f)| = |X(-f)| \\ \angle X(f) = -\angle X(-f) \end{cases}$$

Dim:

$$X(f) = M(f)\, e^{j\varphi(f)}$$

$$X(-f) = X^*(f) \Rightarrow M(-f) \cdot e^{j\varphi(-f)} = \left[M(f)\, e^{j\varphi(f)} \right]^* \Rightarrow M(-f)\, e^{j\varphi(-f)} = M(f)\, e^{-j\varphi(f)} \Rightarrow \begin{cases} M(f) = M(-f) \\ \varphi(f) = -\varphi(-f) \end{cases}$$

c.v.d.

$$f \neq 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f t}\,dt = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi f t}\,dt$$

Si ha:

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi f t}\,dt = \left.\frac{e^{-j2\pi f t}}{-j2\pi f}\right|_{-T/2}^{T/2} = \frac{e^{-j\pi f T} - e^{j\pi f T}}{(-2j)\,\pi f} = \frac{sen(\pi f T)}{\pi f}\cdot\frac{T}{T} = T\,\frac{sen(\pi f T)}{\pi f T}$$

Quindi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f t}\,dt = \lim_{T\to\infty} T\,\frac{sen(\pi f T)}{\pi f T} = \delta(f) \quad \text{(per la definizione di } \delta\text{)} \qquad \text{c.v.d.}$$

- $\mathcal{F}\{e^{j2\pi f_0 t}\} = \delta(f-f_0)$

Dim:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f_0 t}\cdot e^{-j2\pi f t}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi (f-f_0)t}\,dt = \delta(f-f_0) \qquad \text{c.v.d.}$$

Quindi è anche: $\mathcal{F}\{e^{-j2\pi f_0 t}\} = \delta(f+f_0)$

- $\mathcal{F}\{\cos(2\pi f_0 t)\} = \frac{1}{2}\left[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right]$

Dim:

$$\mathcal{F}\{\cos(2\pi f_0 t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\left[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right] \qquad \text{c.v.d.}$$

- $\mathcal{F}\{sen(2\pi f_0 t)\} = \frac{1}{2j}\left[\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0)\right]$

- $\mathcal{F}\{\cos(2\pi f_0 t + \vartheta)\} = \frac{1}{2}\left[e^{j\vartheta}\delta(f-f_0) + e^{-j\vartheta}\delta(f+f_0)\right]$

Dim:

$$\mathcal{F}\{\cos(2\pi f_0 t + \vartheta)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{e^{j(2\pi f_0 t+\vartheta)} + e^{-j(2\pi f_0 t+\vartheta)}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{F}\left\{e^{j\vartheta}\cdot e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j\vartheta}e^{-j2\pi f_0 t}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{j\vartheta}\delta(f-f_0) + e^{-j\vartheta}\delta(f+f_0)\right] \qquad \text{c.v.d.}$$

- $\mathcal{F}\{p_T(t)\} = T\,\frac{sen(\pi f T)}{\pi f T}$

Dim:

$$\mathcal{F}\{p_T(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} p_T(t)\,e^{-j2\pi f t}\,dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi f t}\,dt = \left.\frac{e^{-j2\pi f t}}{-j2\pi f}\right|_{-T/2}^{T/2} = \frac{e^{-j\pi f T} - e^{j\pi f T}}{-j2\pi f} =$$

$$= \frac{e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T}}{2j}\cdot\frac{1}{\pi f} = \frac{sen(\pi f T)}{\pi f}\cdot\frac{T}{T} = T\,\frac{sen(\pi f T)}{\pi f T} \qquad \text{c.v.d.}$$

PRODOTTO

$$z(t) = x(t) \cdot y(t) \Rightarrow \boxed{Z(f) = X(f) * Y(f)}$$

Dim:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f_1)\, e^{j2\pi f_1 t}\, df_1 \quad ; \quad y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f_2)\, e^{j2\pi f_2 t}\, df_2$$

Quindi:

$$Z(f) = \int_t \int_{f_1} \int_{f_2} X(f_1)\, e^{j2\pi f_1 t} \cdot Y(f_2)\, e^{j2\pi f_2 t} \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt\, df_1\, df_2 =$$

$$= \int_{f_1} \int_{f_2} X(f_1)\, Y(f_2) \underbrace{\left[\int_t e^{-j2\pi t(f - f_1 - f_2)}\, dt \right]}_{\delta(f - f_1 - f_2)} df_1\, df_2 =$$

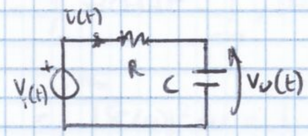
$$= \int_{f_1} \int_{f_2} X(f_1)\, Y(f_2)\, \delta(f - f_1 - f_2)\, df_1\, df_2 = \int_{f_1} X(f_1) \left[\int_{f_2} Y(f_2)\, \delta(f - f_1 - f_2)\, df_2 \right] df_1 =$$

$$= \int_{f_1} X(f_1) \left[\int_{f_2} Y(f - f_1)\, \delta(f - f_1 - f_2)\, df_2 \right] df_1 = \int_{f_1} X(f_1)\, Y(f - f_1) \underbrace{\left[\int_{f_2} \delta(f - f_1 - f_2)\, df_2 \right]}_{1} df_1 =$$

$$= \int_{f_1} X(f_1)\, Y(f - f_1)\, df_1 = X(f) * Y(f)$$

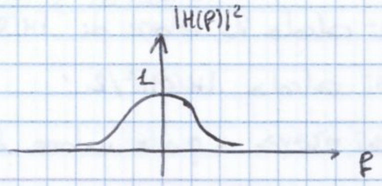
c.v.d.

CIRCUITO PASSA BASSO

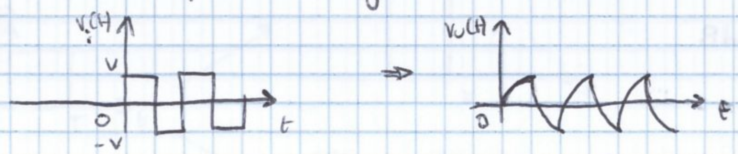


$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f RC}$$

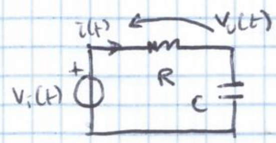
$$h(t) = \frac{1}{RC}\, e^{-\frac{t}{RC}}\, u(t)$$



Elimina i fronti ripidi dei segnali e fa transitare i livelli costanti

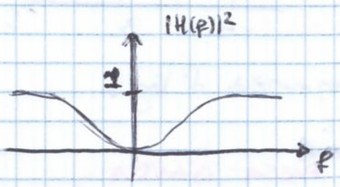


CIRCUITO PASSA ALTO

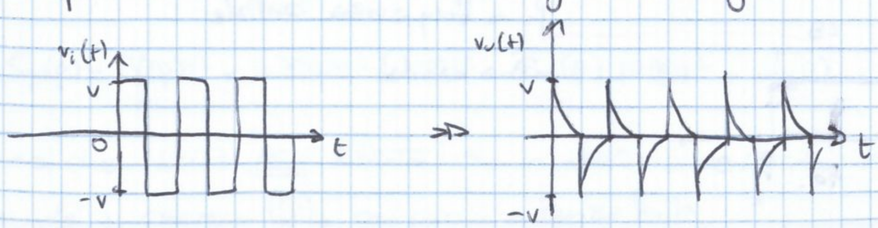


$$H(f) = 1 - \frac{1}{1 + j2\pi f CR}$$

$$h(t) = \delta(t) - \frac{1}{RC}\, e^{-t/RC}\, u(t)$$



Lascia passare le discontinuità del segnale e toglie i valori medi



ENERGIA DI UN SEGNALE

$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt$$

SEGNALI A ENERGIA FINITA: segnali tali che $\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$

L'energia deve essere sempre positiva!!

OSSERVAZIONE: per come è definita la trasformata di Fourier si ha:

$$f = 0 \Rightarrow Y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\, dt$$

TEOREMA DI PARSEVAL

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df}$$

!!

Dim:

Pongo $y(t) = x^2(t)$ con $x(t)$ reale

Allora:

$$Y(f) = X(f) * X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(u)\, X(f-u)\, du$$

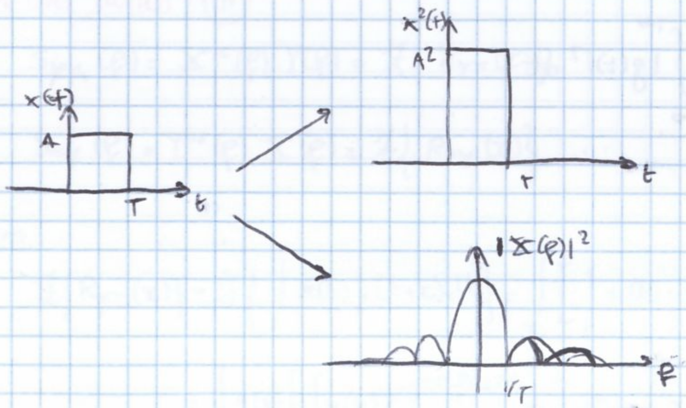
Si ha:

posso farlo perché x è reale!!

$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) dt = Y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(u) \cdot X(0-u)\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} X(u) \cdot X^*(u)\, du =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |X(u)|^2 du = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

c.v.d.



per il teo di Parseval, l'area sottesa al grafico delle due curve è la stessa.

SPETTRO DI ENERGIA:

Per i segnali a energia finita, si definisce spettro di energia: $|X(f)|^2 = S_x(f)$

Se $y(t) = x(t) * h(t)$, allora:

$$S_y(f) = |Y(f)|^2 = |X(f)|^2\, |H(f)|^2 = S_x(f)\, |H(f)|^2 = S_y(f)$$

Notiamo che $\delta^2(t)$ NON ESISTE! Se lo ritrovo in un calcolo vuol dire che ho scambiato un segnale a energia finita con uno a potenza finita.

ENERGIA DEL SEGNALE ERRORE:

$$\mathcal{E}_e = \int_{-\infty}^{+\infty} e^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t) - x(t+\tau)]^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} [x^2(t) + x^2(t+\tau) - 2x(t)x(t+\tau)]\,dt = \mathcal{E}_x + \mathcal{E}_x - 2R_x(\tau)$$

$$\mathcal{E}_e = 2\left[\mathcal{E}_x - R_x(\tau)\right]$$

$\mathcal{E}_e$ è piccola se $R_x(\tau) \simeq \mathcal{E}_x$, cioè se $x(t)$ è molto simile a $x(t+\tau)$. Questo implica che il segnale varia lentamente. Se il segnale varia lentamente, la sua energia è concentrata alle basse frequenze.

PROPRIETÀ DI UN SEGNALE CHE VARIA LENTAMENTE:

1. trasformata di Fourier con banda stretta;
2. spettro di energia con banda stretta (la maggior parte dell'energia del segnale è confinata alle basse frequenze);
3. funzione di autocorrelazione che varia lentamente.

FUNZIONE DI MUTUA CORRELAZIONE

Si ha: $z(t) = \alpha x(t) + \beta y(t)$ $\qquad \alpha, \beta, x(t), y(t) \in \mathbb{R}$

$$R_z(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t)\, z(t+\tau)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} [\alpha x(t) + \beta y(t)][\alpha x(t+\tau) + \beta y(t+\tau)]\,dt =$$

$$= \alpha^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x(t+\tau)\,dt + \beta^2 \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\, y(t+\tau)\,dt + \alpha\beta \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y(t+\tau)\,dt + \alpha\beta \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau) y(t)\,dt =$$

$$= \alpha^2 R_x(\tau) + \beta^2 R_y(\tau) + \alpha\beta \underbrace{R_{yx}(\tau) + \alpha\beta R_{xy}(\tau)}_{\text{funzioni di mutua correlazione}}$$

SPETTRI MUTUI !!

$$S_{yx}(f) = X^*(f)\, Y(f) = \mathcal{F}\{R_{yx}(\tau)\}$$

$$S_{xy}(f) = Y^*(f)\, X(f) = \mathcal{F}\{R_{xy}(\tau)\}$$

Dim:

$$\mathcal{F}\{R_{yx}(\tau)\} = \mathcal{F}\left\{\int_t x(t)\, y(t+\tau)\,dt\right\} = \int_\tau \left[\int_t x(t)\, y(t+\tau)\,dt\right] e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad = \quad \text{porgo } t+\tau = u$$

$$= \int_t x(t) \left[\int_u y(u)\, e^{-j2\pi f(u-t)} du\right] dt = \int_t x(t) e^{j2\pi f t} \Big[\underbrace{\int_u y(u) e^{-j2\pi f u} du}_{Y(f)}\Big]\, dt =$$

$$= Y(f) \int_t x(t)\, e^{j2\pi f t} dt = Y(f)\, X^*(f)$$

c.v.d.

ECOGRAFIA SUGLI APPUNTI

AUTOCORRELAZIONE DI $h(t)$

$$\boxed{R_y(\tau) = R_x(\tau) * R_h(\tau)}$$

Quindi si può definire la base ortonormale:

$$B = \{\varphi_k(t)\}_{k=-\infty}^{+\infty} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

B è una base completa per i segnali $x_T(t)$, cioè $x_T(t)$ è esprimibile esattamente come combinazione lineare dei segnali di B.

$$x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \varphi_k(t) \qquad \text{con } c_k = \langle x_T(t), \varphi_k(t)\rangle$$

Infatti:

$$x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \varphi_k(t)$$

Quindi calcolo:

$$\langle x_T(t), \varphi_e(t)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\varphi_k(t)\right]\varphi_e^*(t)\,dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_k(t)\varphi_e^*(t)\,dt =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \langle \varphi_k(t), \varphi_e(t)\rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \cdot \underbrace{\delta_{ke}}_{\substack{1 \text{ se } k=e \\ 0 \text{ altrove}}} = a_e$$

Quindi è vero che: $a_e = \langle x_T(t), \varphi_e(t)\rangle$

Dunque:

$$c_k = \langle x_T(t), \varphi_k(t)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t)\frac{1}{\sqrt{T}}e^{-j2\pi k\frac{t}{T}}dt = \frac{1}{\sqrt{T}}\int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t)e^{-j2\pi k\frac{t}{T}}dt = \frac{1}{\sqrt{T}}X_T(f)\Big|_{f=k/T}$$

Da cui:

$$x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{T}}\int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t)e^{-j2\pi k\frac{t}{T}}dt}_{c_k} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{T}}e^{j2\pi k\frac{t}{T}}\cdot p_T(t)}_{\varphi_k(t)} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t)e^{-j2\pi kt/T}dt}_{\mu_k} \cdot e^{j2\pi k\frac{t}{T}}\cdot p_T(t) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mu_k e^{j2\pi k\frac{t}{T}} p_T(t)$$

Il segnale periodico $x(t)$ vale $x_T(t)$ nel periodo fondamentale $t \in [-T/2, T/2]$.
Il segnale $x(t)$ è periodico di periodo T e anche il segnale $e^{j2\pi kt/T}$ è periodico di periodo T $\forall k$. Quindi si può scrivere:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mu_k e^{j2\pi k\frac{t}{T}} \qquad t \in (-\infty, +\infty)$$

c.v.d.

TRASFORMATA DI FOURIER DI UN SEGNALE PERIODICO

$$\boxed{X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mu_k \,\delta\!\left(f-\frac{k}{T}\right) = \frac{1}{T}X_T(f)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\!\left(f-\frac{k}{T}\right)}$$

Dim:

Dim:

$$\mu_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{-j2\pi kt/T} dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)\, e^{-j2\pi kt/T} dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)\cdot 1\, dt = \frac{1}{T} \quad \forall k$$

Quindi la serie di Fourier è:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi kt/T}$$

Quindi la trasformata di Fourier è:

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mu_k \delta\left(f-\frac{k}{T}\right) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$$

c.v.d.

N.B: La trasformata di Fourier di un treno di δ è un treno di δ!!

N.B.: $\sum \delta(t-kT) \longrightarrow \boxed{h(t)} \xrightarrow{y(t)}$ il segnale in uscita è ancora un segnale periodico! Normalmente (ma non sempre) ha lo stesso periodo dell'ingresso.

PROPRIETÀ DI SEGNALI REALI:

$x(t)$ reale $\Rightarrow x_T(t)$ reale

Se $x(t)$ è reale, allora:

- $X_T(-f) = X_T(f)^*$
- $X(f) = X_T(f)\ \frac{1}{T}\sum_k \delta\left(f-\frac{k}{T}\right) \Rightarrow \begin{cases} |X(f)| & \text{funzione pari} \\ \angle X(f) & \text{funzione dispari} \end{cases}$
- $\mu_k = \frac{1}{T} X_T(f)\big|_{f=k/T} \Rightarrow \begin{cases} |\mu_{-k}| = |\mu_k| \\ \angle \mu_{-k} = -\angle \mu_k \end{cases}$

POTENZA DI UN SEGNALE PERIODICO - ANALOGIA ALL'UGUAGLIANZA DI PARSEVAL

$$\boxed{P_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\mu_k|^2}$$

Dim:

La potenza è definita come: $P_x = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$

Esprimo $x(t)$ tramite la sua serie di Fourier, ricordando che $|x(t)|^2 = x(t)\cdot x(t)^*$

$$P_x = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mu_k e^{j2\pi kt/T}\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n e^{j2\pi nt/T}\right)^* dt =$$

$$= \frac{1}{T}\sum_k \sum_n \mu_k \mu_n^* \underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi kt/T}\, e^{-j2\pi nt/T} dt}_{\delta_{kn} = \begin{cases} 1 & \text{se } k=n \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}} =$$

$$= \frac{1}{T}\sum_k \sum_n \mu_k \mu_n^* T\delta_{kn} = \sum_k \mu_k \mu_k^* = \sum_k |\mu_k|^2$$

c.v.d.

* $R_y(\tau) = R_h(\tau) * R_x(\tau)$

Dim:

$$R_y(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{G_y(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{|H(f)|^2 \cdot G_x(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{|H(f)|^2\} * \mathcal{F}^{-1}\{G_x(f)\} = R_h(\tau) * R_x(\tau)$$

c.v.d.

ATTENZIONE!!

$$R_h(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h^*(t)\, h(t+\tau)\, dt$$ perché $h(t)$ è a energia finita

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^*(t)\, x(t+\tau)\, dt$$ perché $x(t)$ è periodico

TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO

Se $x(t)$ è strettamente limitato in banda e ha banda B_x, è possibile ricostruirlo esattamente dai suoi campioni a patto che la frequenza di campionamento sia $f_s > 2B_x$ e il filtro di ricostruzione abbia funzione di trasferimento $G(f)$ di tipo passabasso con banda maggiore di B_x.

1. $x(t)$ strettamente limitato in banda (B_x)
2. frequenza di campionamento $f_s > 2B_x$
3. filtro di ricostruzione passa basso con banda $> B_x$ (di solito $f_s/2$)

Infatti:

Vogliamo che sia esattamente: $x(t) = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)}_{\text{campioni di } x(t)} g(t-nT_s)$

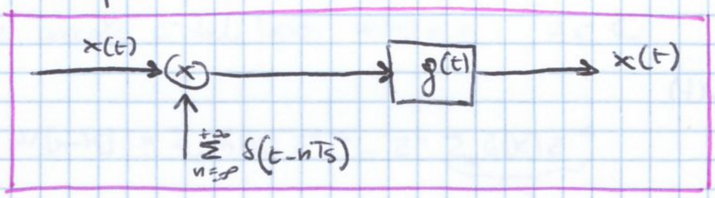
$g(t)$ è l'incognita.

$f_s = \frac{1}{T_s}$ → frequenza di campionamento

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\, g(t-nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\left[g(t) * \delta(t-nT_s)\right] = \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\,\delta(t-nT_s)\right] * g(t) =$$

$$= \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t)\,\delta(t-nT_s)\right] * g(t) = \left[x(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_s)\right] * g(t) = x(t)$$

Quindi un campionamento ideale equivale al sistema:



In frequenza:

$$\mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\, g(t-nT_s)\right\} = \mathcal{F}\left\{\left[x(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_s)\right] * g(t)\right\} = \mathcal{F}\left\{x(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_s)\right\}\cdot G(f) =$$

$$= \left[X(f) * \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f-\frac{n}{T_s}\right)\right]\cdot G(f) = \frac{1}{T_s}\underbrace{\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f-\frac{n}{T_s}\right)\right]}_{\text{periodica di periodo } 1/T_s}\cdot G(f) = X(f)$$

SEGNALI A TEMPO DISCRETO

Dato un segnale $x[n]$ la sua energia è:

$$\boxed{\mathcal{E}_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2}$$

Un segnale $x[n]$ è periodico di periodo M se: $x[n] = x[n+M]$, $M \in \mathbb{N}$

Dato un segnale $x[n]$ periodico di periodo M la sua potenza è:

$$\boxed{P_x = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} |x[n]|^2}$$

Dato un segnale $x[n]$ a energia finita la sua funzione di autocorrelazione è:

$$\boxed{R_x(m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*[n] \cdot x[n+m]}$$

Dato un segnale $x[n]$ periodico di periodo M la sua funzione di autocorrelazione è:

$$\boxed{R_x(m) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} x^*[n]\, x[n+m]}$$

SISTEMI A TEMPO DISCRETO

Si definisce la risposta all'impulso $h[n]$ del sistema come l'uscita del sistema quando al suo ingresso c'è $\delta[n]$.

Un sistema è fisicamente realizzabile se:

- $h[n] = 0$ per $n<0$
- $h[n] \in \mathbb{R}$

Un sistema con risposta all'impulso $h[n]$ è stabile se: $\boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty}$

Un segnale generico $x[n]$ si può scrivere come: $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-k]$

Se $x[n]$ è l'ingresso di un sistema LTI con risposta all'impulso $h[n]$, l'uscita $y[n]$ è:

$$y[n] = \mathcal{T}\{x[n]\} = \mathcal{T}\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-k]\right\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\mathcal{T}\{\delta[n-k]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,h[n-k] = x[n] * h[n]$$

TRASFORMATE ZETA

Cerchiamo l'autofunzione $w[n]$ tale che: $w[n] * h[n] = \sum_k w[k]\,h[n-k] = \lambda\, w[n]$

Il segnale cercato è del tipo: $w[n] = z^n$, $z \in \mathbb{C}$

Infatti:

$$\sum_k h[k]\, w[n-k] = \sum_k h[k]\, z^{n-k} = z^n \underbrace{\sum_k h[k]\, z^{-k}}_{\lambda}$$

Si definisce:

$$\lambda = \boxed{\sum_k h[k]\, z^{-k} = H(z)} \rightarrow \text{trasformata zeta di } h[n]$$

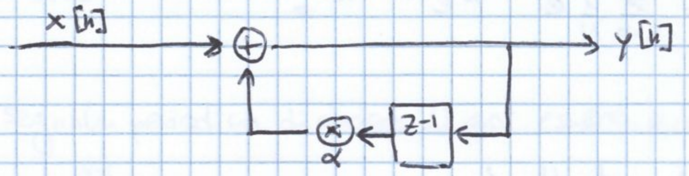
Se $x[n]$ è un segnale tempo discreto, allora si definisce la sua trasformata zeta come:

$$\boxed{X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, z^{-n}}$$

SISTEMA IIR

(Infinite Impulse Response o retroazionato o Feed Back)

Esempio:



ESPANSIONE IN FRATTI SEMPLICI

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k}{b_0 + b_1 x + \dots + b_N x^N} = \frac{a_0 + \dots + a_k x^k}{b_N (x-p_1)(x-p_2)\dots(x-p_N)}$$

Ipotizziamo: ① $k < N$

② $p_i \neq p_s \quad \forall i \neq s$ (cioè poli distinti)

Si può scrivere:

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{c_1}{x-p_1} + \frac{c_2}{x-p_2} + \dots + \frac{c_N}{x-p_N}$$

Con:

$$\boxed{c_i = \lim_{x \to p_i} \frac{N(x)}{D(x)} \cdot (x - p_i)}$$

CONDIZIONI DI STABILITÀ

① ognuno dei poli di $H(z)$ deve avere modulo minore di 1

② $\sum_n |h[n]| < \infty$

POLI DOPPI

Consideriamo per esempio $H(z) = \frac{(z-z_1)z}{(z-p_1)^2}$

Possiamo scrivere:

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{z-z_1}{(z-p_1)^2} = \frac{A}{z-p_1} + \frac{B}{(z-p_1)^2}$$

Con:

$$\boxed{B = \lim_{z \to p_1} \frac{H(z)}{z} \cdot (z-p_1)^2}$$

$$\boxed{A = \lim_{z \to p_1} \frac{d}{dz}\left[\frac{H(z)}{z}(z-p_1)^2\right]}$$

TRASFORMATA DI FOURIER DISCRETA: DFT

Per i segnali periodici a tempo discreto <u>NON</u> esiste la trasformata zeta!

Un segnale tempo discreto periodico di periodo N può essere espresso nel suo periodo fondamentale come combinazione lineare dei segnali discreti:

$$\varphi_k[n] = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{j2\pi k \frac{n}{N}} \qquad \text{con } n \in [0, N-1]$$

Con: $h_N[n] = x_\delta[n] * h[n]$

e: $x_\delta[n] = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \delta[n-sN]$

Dim:

Un generico segnale periodico di periodo N può essere scritto come:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]\, x_\delta[n-k]$$

Si ha:

$$h_N[n] = x_\delta[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_\delta[k]\, h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{s=-\infty}^{+\infty} \delta[k-sN]\right] h[n-k] =$$

$$= \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[k-sN]\, h[n-k]\right] = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} h[n-sN] \quad \rightarrow \text{segnale periodico di periodo } N$$

Quindi:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \Big[\sum_{k=0}^{N-1} x[k]\, \underbrace{x_\delta[n-k]\Big] * h[n]}_{h_N[n-k]} = \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} x[k]\, h_N[n-k]}_{\text{normale convoluzione con } N \text{ termini}} \triangleq x[n] \circledast h_N[N]$$

c.v.d.

PROPRIETÀ:

$$\boxed{Y(k) = X(k)\, H_N(k)}$$

Dim:

$$Y(k) = DFT\{y[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} y[n]\, e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(x[n] \circledast h_N[n]\right) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{s=0}^{N-1} x[s]\, h_N[n-s]\right) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} = \sum_{s=0}^{N-1} x[s] \left(\sum_{n=0}^{N-1} h_N[n-s]\, e^{-j2\pi \frac{kn}{N}}\right) =$$

$$= \sum_{s=0}^{N-1} x[s] \left(\sum_{n=0}^{N-1} h_N[n-s]\, e^{-j2\pi \frac{k(n-s)}{N}}\right) e^{-j2\pi \frac{ks}{N}} = \sum_{s=0}^{N-1} x[s]\, e^{-j2\pi \frac{ks}{N}} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} h_N[n-s]\, e^{-j2\pi \frac{k(n-s)}{N}} =$$

pongo $\ell = n-s$

$$= X(k) \cdot \sum_{\ell=-s}^{N-1-s} h_N[\ell]\, e^{-j2\pi \frac{k\ell}{N}} = X(k)\, H_N(k)$$

NON IMPORTA TANTO È PERIODICA

c.v.d.

N.B.: se $x[n]$ ha N_x campioni e $h[n]$ ha N_h campioni, il numero di campioni diversi da zero per $y[n]$ è: $N_y = N_x + N_h - 1$

LEGGI DI DE MORGAN

A, B insiemi:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

DEFINIZIONE ASSIOMATICA DELLA PROBABILITÀ

1. La probabilità $P\{A\}$ di un evento A è sempre maggiore o uguale a zero;
2. La probabilità di un evento certo è 1: $P\{\Omega\} = 1$;
3. Se A e B sono due eventi mutuamente esclusivi ($A \cap B = \emptyset$ insieme vuoto) si ha:

$$P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\}$$

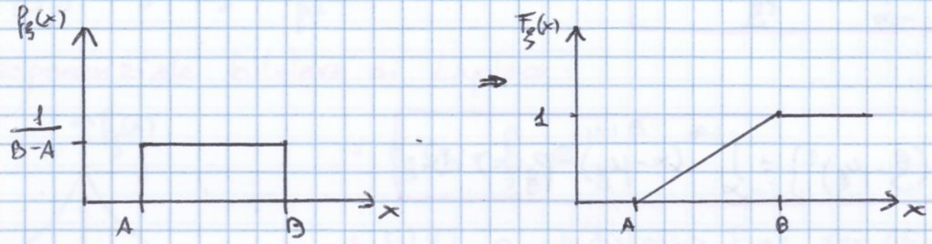
- $\lim_{x \to +\infty} F_\xi(x) = 1$
- $F_\xi(x)$ è crescente da 0 a 1 e, in presenza di discontinuità, è continua da destra.

DENSITÀ DI PROBABILITÀ (ddp o pdf)

$$\boxed{f_\xi(x) \triangleq \frac{d}{dx} F_\xi(x)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)\,dx = 1$$

Densità di probabilità uniforme: $\xi \in \mathcal{U}(A,B)$



$$\boxed{P\{\xi \in]x_1, x_2]\} = F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f_\xi(u)\,du}$$

Dim:

Consideriamo il caso in cui $A \leq x_1 \leq x_2 \leq B$, ma la formula vale sempre.

$$P\{\xi \in]x_1, x_2]\} = P\{\xi \leq x_2\} - P\{\xi \leq x_1\} = F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1)$$

Teniamo conto che:

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(u)\,du$$

Quindi:

$$P\{\xi \in]x, x_2]\} = \int_{-\infty}^{x_2} f_\xi(u)\,du - \int_{-\infty}^{x_1} f_\xi(u)\,du = \int_{x_1}^{x_2} f_\xi(u)\,du$$

c.v.d.

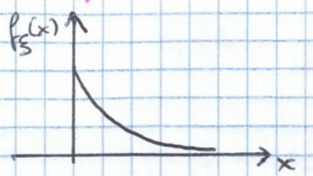
N.B.: La probabilità che una variabile aleatoria ξ continua assuma esattamente un valore x_0 è nulla perché è l'integrale di un punto: bisogna sempre considerare degli intervalli.

Variabili aleatorie discrete: assumono solo valori discreti (anche in numero infinito) in $\mathbb{R}$. Hanno distribuzione di probabilità cumulativa $F_\xi(x)$ a gradini e densità di probabilità $f_\xi(x)$ con δ di Dirac.

Variabili aleatorie continue: assumono tutti i possibili valori in $\mathbb{R}$. Hanno distribuzione di probabilità cumulativa $F_\xi(x)$ continua e monotonicamente crescente da 0 a 1 e densità di probabilità $f_\xi(x)$ continua (senza δ) e sempre positiva.

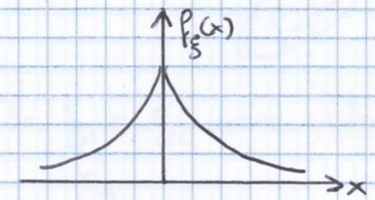
Vedi N.B. precedente.

ddp esponenziale unilatera:



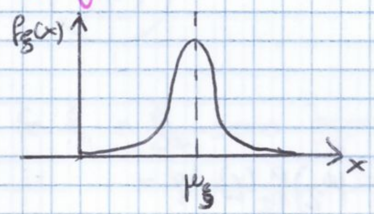
- $f_\xi(x) = \beta e^{-\beta x} u(x)$ con $\beta > 0$
- $E\{\xi\} = \int_0^{+\infty} x \beta e^{-\beta x} dx = \frac{1}{\beta}$ → REGALATO
- $\sigma_\xi^2 = \int_0^{+\infty} \left(x - \frac{1}{\beta}\right)^2 \beta e^{-\beta x} dx = \frac{1}{\beta^2}$ → REGALATO
- $E\{\xi^2\} = \sigma_\xi^2 + \mu_\xi^2 = \frac{2}{\beta^2}$

ddp esponenziale bilatera di Laplace:



- $f_\xi(x) = \frac{\beta}{2} e^{-|x|\beta}$
- $E\{\xi\} = 0$ → discorso funz. pari/dispari

ddp gaussiana:



$$\boxed{f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\xi^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_\xi^2}(x-\mu_\xi)^2}}$$ → A MEMORIA!!

Con $\xi \in \mathcal{N}(\mu_\xi, \sigma_\xi^2)$
↳ normale

COPPIE DI VARIABILI ALEATORIE

Distribuzione di probabilità cumulativa congiunta:

$$\boxed{F_{\xi,\eta}(x,y) \triangleq P\{\xi \le x, \eta \le y\}}$$

Densità di probabilità congiunta:

$$\boxed{f_{\xi,\eta}(x,y) \triangleq \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{\xi,\eta}(x,y)}$$

Nel caso di variabili aleatorie statisticamente indipendenti si può scrivere:

$$\boxed{F_{\xi,\eta}(x,y) = F_\xi(x) \cdot F_\eta(y)}$$

$$\boxed{f_{\xi,\eta}(x,y) = f_\xi(x) \cdot f_\eta(y)}$$

Dim:

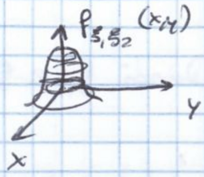
$$f_{\xi,\eta}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[F_\xi(x) \cdot F_\eta(y)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(F_\xi(x) \cdot F_\eta(y)\right)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[F_\xi(x) \cdot f_\eta(y)\right] = f_\eta(y) \cdot f_\xi(x)$$

c.v.d.

Si ha:

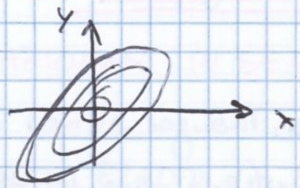
$$f_{\underline{\xi}}(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det \underline{\underline{L}}}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\underline{x}-\underline{m})^T \underline{\underline{L}}^{-1}(\underline{x}-\underline{m})\right]$$

Consideriamo il caso di una coppia di variabili: $\underline{\xi} = [\xi_1, \xi_2]$



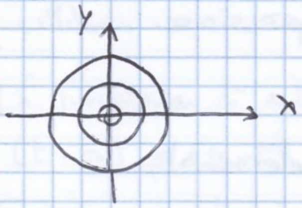
$\xi_1 \to \mu_1$ e σ_1^2 e $\xi_2 \to \mu_2$ e σ_2^2

- Se ξ_1 e ξ_2 sono statisticamente dipendenti le curve di livello di $f_{\underline{\xi}}(\underline{x})$ sono:

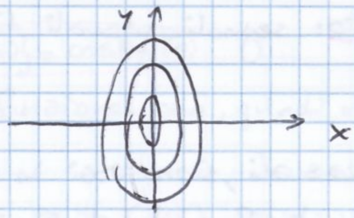


$\to$ ellissi non riferite agli assi

- Se ξ_1 e ξ_2 sono statisticamente indipendenti le curve di livello sono:



$\to \sigma_1^2 = \sigma_2^2$



$\to \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

- Se ξ_1 e ξ_2 sono scorrelate ($\rho = 0$):

$$f_{\xi_1\xi_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \underline{\underline{L}}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}[x_1-\mu_1, x_2-\mu_2] \cdot \underline{\underline{L}}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x_1-\mu_1 \\ x_2-\mu_2 \end{bmatrix}\right\}$$

Dove:

$$\underline{\underline{L}} = E\left\{\begin{bmatrix} \xi_1-\mu_1 \\ \xi_2-\mu_2 \end{bmatrix}[\xi_1-\mu_1, \xi_2-\mu_2]\right\} = E\left\{\begin{bmatrix} (\xi_1-\mu_1)^2 & (\xi_1-\mu_1)(\xi_2-\mu_2) \\ (\xi_1-\mu_1)(\xi_2-\mu_2) & (\xi_2-\mu_2)^2 \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

Ma: $\rho = 0 \Rightarrow \underline{\underline{L}} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$

Quindi:

$$\det \underline{\underline{L}} = \sigma_1^2\sigma_2^2 - \cancel{\rho^2\sigma_1^2\sigma_2^2}^{\,0} = \sigma_1^2\sigma_2^2 \quad \Rightarrow \sqrt{\det \underline{\underline{L}}} = \sigma_1\sigma_2$$

Inoltre:

$$\underline{\underline{L}}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{\underline{L}}}\begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\begin{bmatrix} \sigma_2^2 & 0 \\ 0 & \sigma_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sigma_1^2 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

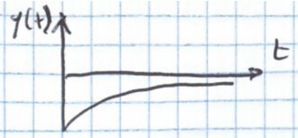
Quindi:

$$f_{\xi_1\xi_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left\{-\frac{1}{2}[x_1-\mu_1, x_2-\mu_2]\begin{bmatrix} 1/\sigma_1^2 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1-\mu_1 \\ x_2-\mu_2 \end{bmatrix}\right\}$$

Svolgiamo il prodotto all'esponente:

$$[x_1-\mu_1, x_2-\mu_2]\begin{bmatrix} (x_1-\mu_1)/\sigma_1^2 \\ (x_2-\mu_2)/\sigma_2^2 \end{bmatrix} = \frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}$$

Da cui:



$\notin$ al processo casuale

FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE PER PROCESSI CASUALI

$$\boxed{R_x(t_1, t_2) \triangleq E\{x(t_1) \cdot x(t_2)\}}$$

In generale $x(t_1)$ e $x(t_2)$ non sono né statisticamente indipendenti né scorrelate perché dipendono dalla stessa variabile aleatoria.

PROCESSI STAZIONARI IN SENSO LATO (WSS)

Sono processi con le seguenti caratteristiche:

1. hanno media $E\{x(t)\} = m_x(t)$ costante (cioè indipendente dal tempo)
2. hanno funzione di autocorrelazione $R_x(t_1, t_2) = E\{x(t_1) \cdot x(t_2)\}$ dipendente solo da $(t_1 - t_2)$

$$\Downarrow$$

$$E\{x^2(t)\} = \text{costante}$$

La funzione di autocorrelazione è una funzione pari, quindi non importa se si scrive $(t_1 - t_2)$ o $(t_2 - t_1)$.

Esistono anche i processi casuali in senso stretto (SSS). → VEDI APPUNTI

Per i processi WSS la funzione di autocorrelazione è definita come:

$$\boxed{R_x(\tau) \triangleq E\{x(t)\, x(t+\tau)\}}$$

Notiamo che:

$$\tau = 0 \Rightarrow R_x(0) = E\{x^2(t)\} \rightarrow \text{valor quadratico medio di } x(t)$$

Si definisce:

$$\mathcal{F}\{R_x(\tau)\} = G_x(f) \rightarrow \text{spettro del valor quadratico medio}$$

RUMORE

Consideriamo, per esempio, il movimento degli elettroni in un corpo non attraversato da corrente.

C'è una: $i(t) \rightarrow$ corrente di rumore

$i(t)$ è un processo casuale WSS e si ha: $i(t_0) = \sum_k i_k(t_0)$ con k = k-esimo elettrone.

Nell'ipotesi che gli elettroni non si scontrino, $i_k(t_0)$ è statisticamente indipendente da $i_e(t_0)$.

Per il teorema limite centrale $i(t_0)$ è gaussiana.

Costruiamo un modello matematico in cui $i(t)$ e $i(t+\tau)$ sono sempre statisticamente indipendenti anche se $\tau \to 0$. Si ha:

$$R_i(\tau) = E\{i(t) \cdot i(t+\tau)\} = \underbrace{E\{i(t)\}}_{0 \text{ perché WSS}} \cdot E\{i(t+\tau)\} = 0 \quad \forall \tau \neq 0$$

Calcolo:

$E\{x(t-\tau_1)x(t+\tau-\tau_2)\} = R_x(\cancel{t}+\tau-\tau_2-\cancel{t}+\tau_1) = R_x(\tau-\tau_2+\tau_1)$ → funzione pari

Quindi:

$R_y(\tau) = \iint h(\tau_1)h(\tau_2)\, R_x(\tau-\tau_2+\tau_1)\, d\tau_2 d\tau_1 =$ pongo $\tau_1-\tau_2=u \Rightarrow \tau_1 = u+\tau_2$

$$= \iint h(u+\tau_2)h(\tau_2)R_x(\tau+u)\,du = \int_u R_x(\tau+u)\left[\int_{\tau_2} h(\tau_2)\,h(\tau_2+u)\,d\tau_2\right]du =$$

$$= \int_u R_x(\tau+u)\,R_h(u)\,du = R_x(\tau) * R_h(\tau)$$

c.v.d.

→ SPETTRO:

$$\boxed{G_y(f) = G_x(f)\,|H(f)|^2}$$

Dim:

$$G_y(f) = \mathcal{F}\{R_y(\tau)\} = \mathcal{F}\{R_x(\tau) * R_h(\tau)\} = \mathcal{F}\{R_x(\tau)\}\cdot\mathcal{F}\{R_h(\tau)\} = G_x(f)\cdot|H(f)|^2$$

c.v.d.

- Se l'ingresso è un segnale gaussiano bianco, l'uscita è ancora un segnale gaussiano con:

$$G_y(f) \propto |H(f)|^2$$

PROCESSI ERGODICI

Un processo casuale è ergodico se le medie temporali effettuate su una specifica realizzazione del processo coincidono con le corrispondenti medie statistiche del processo.

Quindi, se $x(t;s_0)$ è una realizzazione del processo:

$$\int u f_x(u)\,du = \boxed{E\{x(t)\} = \langle x(t;s_0)\rangle} = \lim_{a\to\infty}\frac{1}{a}\int_{-a/2}^{a/2} x(t;s_0)\,dt$$

$$\boxed{E\{x^2(t)\} = \langle x^2(t;s_0)\rangle} = \lim_{a\to\infty}\frac{1}{a}\int_{-a/2}^{a/2} x^2(t;s_0)\,dt$$

Si ha dunque:

$\boxed{\text{valor quadratico medio del processo = potenza della singola realizzazione}}$

Il rumore gaussiano bianco è ergodico.

$n(t) \to \boxed{H(f)} \to w(t)$ ⇒ $w(t)$ è ancora ergodico