NUMERO: 956

DATA: 05/05/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Parvu

MATERIA: Analisi Matematica I

Prof. Chiadò - Piat

01/10/2013 1ª Lezione

LEZ 1 : Logica : richiami su proposizioni, connettivi logici predicati quantificatori

" 2, 3 : Insiemi, prodotto cartesiano, insiemi numerici, numeri razionali
Fattoriale, coefficienti binomiale
numeri reali
L'assioma di completezza
il numero "e"

4, 5, 6 : Numeri complessi

Servizio Consulenza : chiedere : VEN 11 →
Dipartimento DISMA
3° piano da ~~aula~~ 2

Tabacco
Analisi matematica sfondo nero

Sergio Lancelotti
Esercizi di Analisi Matematica I
Esercizi svolti " " " " sfondo giallo
con quesiti di autovalutazione

Cauchy 1821 def di limite

$$v_m = \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$$

Disgiunzione $\boxed{\vee}$ → simbolo (VEL)

Si verifica <u>almeno uno</u> dei due contenuti

p	q	p ∨ q
V	V	V
F	V	V
V	F	V
F	F	F

Es. $2 \leq 3$ → $2 < 3$ o $2 = 3$

AUT AUT

Ho $p \,|\, q$ voglio esprimere o l'uno o l'altro

$(p \vee q) \wedge \cancel{(p \vee q)} \; (\neg(p \wedge q))$

disgiunzione esclusiva

p	q	p $\dot{\vee}$ q
V	V	F
F	F	F
V	F	V
F	V	V

Implicazione

$p \Rightarrow q$ p implica q

"p è condizione sufficiente per q"

"se vale p allora vale anche q"

Al contrario ⇒ q è condizione necessaria per p

ipotesi ← p = causa q = conseguenza

↳ tesi

p	q	p ⇒ q
V	V	V
F	V	V
V	F	F
F	F	V

$p \Rightarrow q$ ha la stessa tabella di verità di → $(\neg p) \vee q$

p	¬p	q	¬p ∨ q
V	F	V	V
F	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V

TAUTOLOGIA → proposizione sempre vera.

$\neg(\neg p) \iff p$

$\Downarrow$

risaldetto

"2 negazioni affermano"

~~le propos~~

$p \wedge q \iff q \wedge p$? • Voglio sapere se è sempre vero

• Il simbolo $\wedge$ è commutativo

→ È distributivo?

→ " Associativo?

$P(x) =$ "x è pari"

$Q(x) =$ "$(x^2 - 1 = 0)$"

$P(x,y) = x + y = 0$

È predicato se ~~x~~ $\forall x$ io ho una proposizione ~~...~~ "valori di verità"

QUANTIFICATORI

$\forall$ "per ogni" → universale

$\exists$ "esiste" quantificatore esistenziale

↳ almeno un

$P(x)$ $x^2 - 1 = 0$

$\forall x \; P(x) \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \; P(x)$

Per ogni x, $x^2 - 1 = 0$

$\exists x \in \mathbb{R} / P(x)$

oppure niente

Esiste almeno un x reale tale che valga $P(x)$

03/10/2013 — 2ª Lezione

⇒ Didattico e guardo esercitazioni.

$\vee$ e $\wedge$ hanno la proprietà associativa

3) in modo corretto

$$(p \wedge q) \vee r \quad \text{diventa} \quad (p \vee r) \wedge (q \vee r)$$

5) in modo corretto

$$(\neg p) \vee (\neg q)$$

→ Guardare De Morgan

$P(x)$ = lo studente x ha i capelli rossi

$\forall x \; P(x)$ — Tutti gli studenti hanno i capelli rossi

$\exists x \,/\, P(x)$ — C'è almeno uno studente con i capelli rossi

* $\exists!$ → esiste ed è unico.

negazioni

$$\neg(\forall x \; P(x)) \iff \exists x \,/\, \neg P(x)$$

$$\neg(\exists x \,/\, P(x)) \iff \forall x \; \neg P(x)$$

VALE per Predicati con un solo quantificatore

$\mathbb{Q}$ = razionali forma $\frac{p}{q}$ $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$

$\mathbb{Z}$ = interi

$\mathbb{N}$ = naturali

$P(x, y)$ $\quad x + y = 0 \quad x, y \in \mathbb{Z}$

1) $\forall x, \forall y \quad x + y = 0$ — F

2) $\exists x, \exists y \,/\, x + y = 0$ — V

3) $\forall x \; \exists y \,/\, x + y = 0$ — V

4) $\exists x \,/\, \forall y \quad x + y = 0$ — F

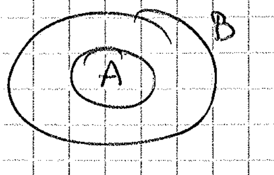
Dato uno, qualsiasi ne ci sommi dà zero

Insiemi ed elementi

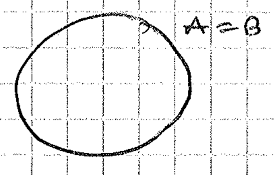
$\subseteq$ assomiglia al $\leq$

$\subset$ " " $<$

se ho $A \subseteq B$



oppure



$$A - B = \{ x \in A : \neg (x \in B) \}$$

$A \subseteq B$ se e solo se $\forall x \,/\, (x \in A) \Rightarrow (x \in B)$

$A = B$ se e solo se $\forall x \; (x \in A) \Leftrightarrow (x \in B)$

Sapere le proprietà dei simboli aiuta

PRODOTTO CARTESIANO

Coppia ordinata $(x;y)$

Dati gli insiemi A e B considero un elemento di A e uno di B.

Il simbolo $(x;y)$ indica la coppia in cui x è la prima componente e y seconda componente.

$(x,y) \neq \{x,y\}$ indica l'insieme formato da x e y, l'ordine non conta

quindi x è il primo e y è il secondo.

Osservazione

insiemi

se $x=y$ $\{1,1\} = \{1\}$ per non scriverlo 2 volte

Per la coppia non cambia il discorso

se $x \neq y$ $(x;y) \neq (y;x)$

$\{ (x,y) : y > x \}$

$\left\{ (x,y) : |x|+|y| \leq 1 \right\}$

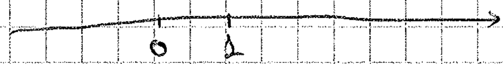
Numeri Reali $\mathbb{R}$

$\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ o $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sono quei numeri che non possono essere scritti sotto forma di frazione

$\Downarrow$

~~Fraz~~ Irrazionali

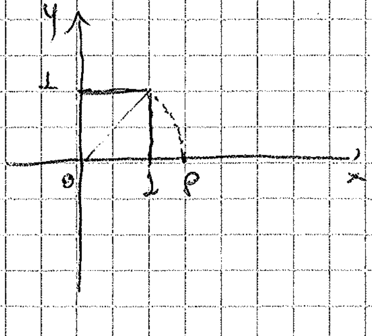
~~Indicare~~ Rappresentare $\mathbb{Q}$ sulla retta



$\forall x \in \mathbb{Q}$ esiste un unico punto P sulla retta avente ascissa x

Prendo P sulla retta

È vero che P ha un' ~~unica~~ ascissa $x \in \mathbb{Q}$?



P non ha ascissa razionale perché nel nostro caso l'ascissa è irrazionale.

$d^2 = 1 + 1 = 2$

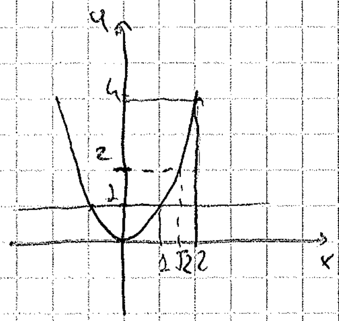
$d^2 = 2$

$|OP| = d$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 260

→ I numeri razionali da soli non ci bastano per attribuire ascisse a tutti i punti.

ALTRO ESEMPIO



$y = x^2$ Se nella retta ci sono solo razionali manca l'ascissa del punto avente ordinata 2

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ irrazionali e corrispondono ai decimali illimitati non periodici

Proprietà che si conservano passando da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ per tutte due i tipi

→ proprietà algebriche = associativa, commutativa, $\boxed{\text{neutro, opposto}}$ distributiva

→ " legate all' ordinamento:

posso stabilire se un numero è più grande, piccolo o uguale.

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ $\quad x = y$

$x < y$

$x > y$

Questo non vale per gli insiemi.

Assiomi di collegamento tra $\overset{\text{ord.}}{\leq}$ e $\overset{\text{alg.}}{+}$

1) $\forall x, y \,/\, x \leq y \quad \forall z \in \mathbb{R} \qquad x + z \leq y + z$

2) $\forall x, y \in \mathbb{R} \,/\, x \leq y \quad \forall z \in \mathbb{R}$

$z > 0 \qquad xz \leq yz$

$z < 0 \qquad xz \geq yz$

A è superiormente limitato se esiste almeno un maggiorante

A è inferiormente limitato " " " " minorante.

$B = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ numeri pari

0, 2, 4 . . . non ha maggioranti.
Non è superiormente limitato
È superiormente illimitato.

$M_-(B) \quad]-\infty ; 0]$

$C = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$ limitato

$M_+(B) \quad [1 ; +\infty[\qquad M_-(B) \quad]-\infty ; 0]$

$\downarrow$

$0 \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \neq 0$

limitato ≠ finito

finito = numero finito di elementi
si può mettere in corrispondenza
con i numeri naturali

M è max di A $\Leftrightarrow$
se $M \in A$
M è maggiorante di A

m è min di A $\Leftrightarrow$
se $m \in A$
m è minorante di A

$B = \{n : n \in \mathbb{N}\}$

$\sup B = +\infty$

$\inf B = 0$

$\min = 0$

$\max =$ non esiste

Attenzione

$\nexists$ $\not\forall$

Hp Th

~~nec~~ suff. ~~suff~~ nec.

Teorema

$A \subseteq \mathbb{R}$, $S \in \mathbb{R}$

1) se S è massimo $\Rightarrow$ S è sup di A

2) se S è sup di A $\Rightarrow$ S è massimo se $S \in A$

Teorema Caratterizzazione di Sup

$S =$ sup di A

1) S è maggiorante

$S \geq x \quad \forall x \in A$

2) $\forall \varepsilon > 0$ $S - \varepsilon$ non è più un maggiorante

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A \ / \ x > (S - \varepsilon)$

P: n è multiplo di 6 ~~nec~~

Q: n è pari

$P \Rightarrow Q$

ARRIVO A DIRE CHE
Esiste estremo superiore e lo chiamo S

Devo dimostrare che S è soluzione dell'equazione $x^2=2$ cioè $S^2=2$.

- $S^2<2$ se prendo $(S+\varepsilon)^2<2$ con ε abbastanza piccolo riesco ancora a stare sotto 2.

sennò sarebbe un maggiorante

$$S^2+2S\varepsilon+\varepsilon^2<2$$

$$2S\varepsilon+\varepsilon^2<\underbrace{2-S^2}_{\text{positivo cioè } >0}$$

guardo se va bene come dim. + dire che S+E sta ancora in A

$$\lim_{\varepsilon\to 0} 2S\varepsilon+\varepsilon^2=0 \Rightarrow 0<2-S^2$$

che era positivo

$S^2>2$

se $S+\varepsilon\in A$

$S+\varepsilon>$ sup di A

- $(S-\varepsilon)^2>2 \rightarrow$ non sarebbe il più piccolo dei maggior.

$S-\varepsilon$ esiste in A ~~cosa~~ che va contro la definizione di estremo inferiore.

$\Longrightarrow S^2=2$

PARLIAMO DELLA DENSITÀ

Teorema di densità

$\forall\, a,b\in\mathbb{R}$ con $a<b$ $\exists\, x\in\mathbb{Q} \,/\, a<x<b$

Conseguenza: un qualunque numero reale si può approssimare bene quanto si vuole con un razionale ~~tra lo~~ che si trova tra loro

$\sqrt{2}<x<\sqrt{2}+\frac{1}{10}$ ↳ errore inferiore ad un decimo

$1{,}414<$

$a=\sqrt{2}-\frac{1}{10}$ $b=\sqrt{2}$

$a<y<b$

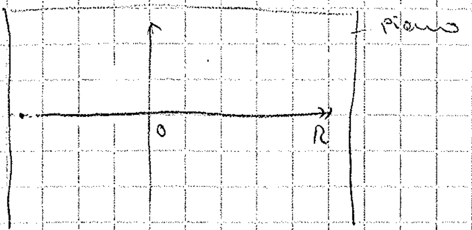
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 260

I NUMERI COMPLESSI — CAP 8

Idea geometrica:

$\mathbb{R}$ riempie la retta dei numeri.

$\mathbb{C}$ riempie il piano



$z = (x,y) \in \mathbb{C}$ z complesso

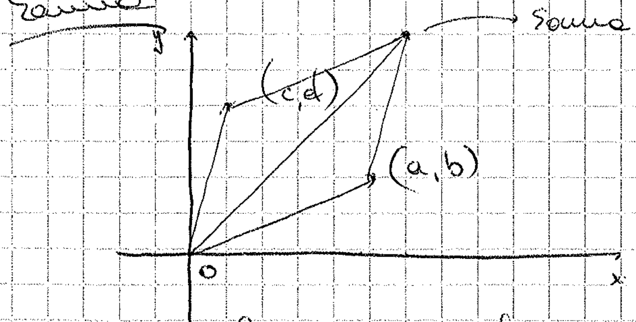
I numeri reali sono quelli con ordinata 0

$(x,0)$ è un numero reale.

SOMMA $(a,b) + (c,d) = (a+c\,;\, b+d)$

PRODOTTO $(a,b)(c,d) = (ac-bd,\ ad+bc)$

Somma

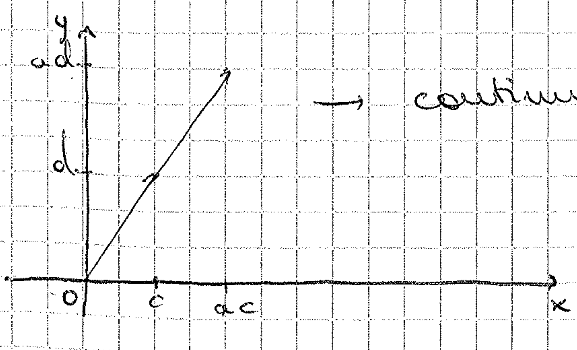


~~Rispetto~~ corrisponde alla somma di vettori che ha una serie di proprietà.

Questa definizione di somma è compatibile con quella del campo reale.

Prodotto

$\overset{\text{nr. reale}}{(a,0)} \cdot (c,d) = (ac, ad)$



→ continuano sulla stessa retta perché $\frac{ad}{ac} = \frac{d}{c}$

Il vettore è lungo ~~a modulo~~ a volte.

Es. commutativa

$(a,b) + (c,d) = (a+c\,,\ b+d)$

questi li posso scambiare xké reali

→ "Con la forma algebrica posso fare le operazioni tra complessi esattamente come se fossi ~~con il calcolo~~ in $\mathbb{R}$"

$(a,b) + (c,d) = (a+c\,,\ b+d) = (a+c) + i(b+d)$

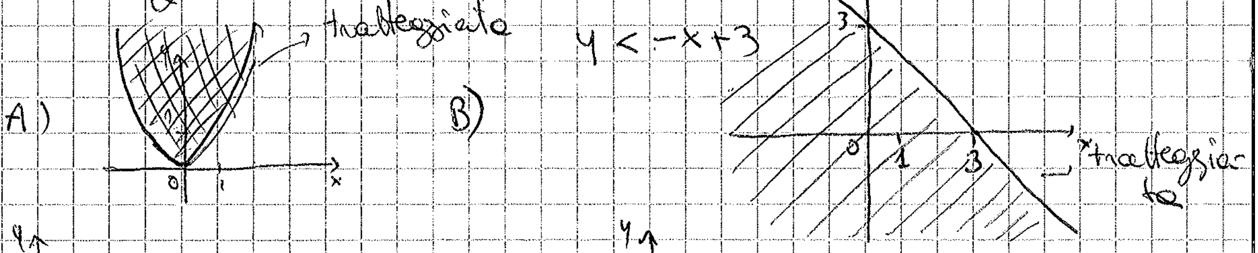
$(a+ib)\cdot(c+id) = ac + i\cdot a\cdot d + ibc - bd$

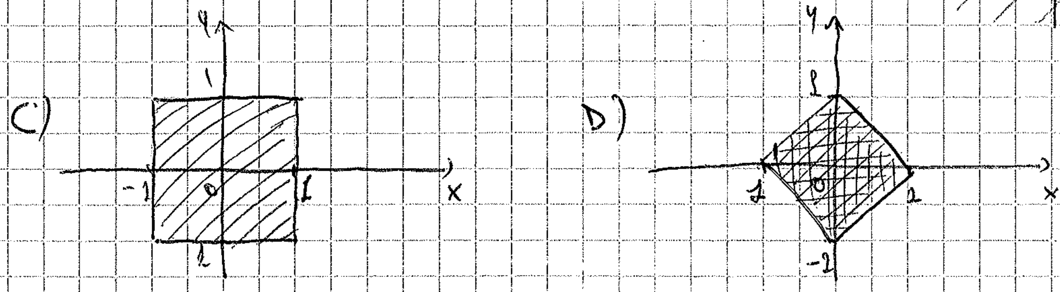
$(ac - bd) + i(ad+bc)$

Giovedì 10/10/2013

Esercizi da quelli online

Es. 3





$C' = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|\le 1\}$

y è libera

$D\ \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / |x|+|y|\le 1\}$

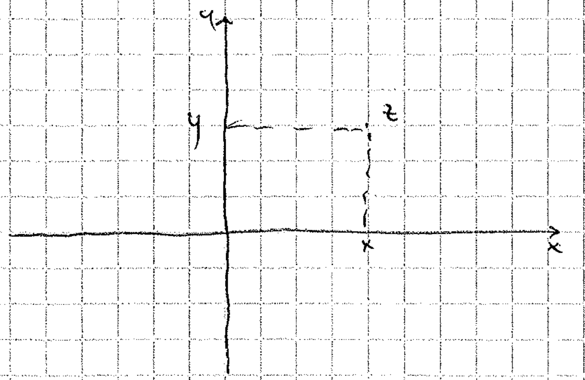
$D \cap I$ → primo quadrante

$x \ge 0 \quad y \ge 0$

$x + y < 1 \qquad y < -x + 1$

Si parte da uno spicchio poi si sfruttano le proprietà del valore assoluto

Dato (x_0, y_0) metto $(-x_0, y_0)$ e non succede niente perché il valore assoluto assorbe il cambiamento di segno



$z = (x, y) = x + iy$

x parte reale di z

y " immaginario di z

numero i

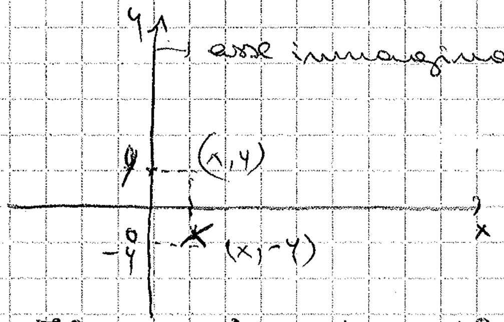
$Re(i) = 0$

$Im(i) = 1$

Coniugato del numero z

$z = x + iy$ coniugato $\bar{z} = x - iy$

Si cambia di segno alla parte immaginaria

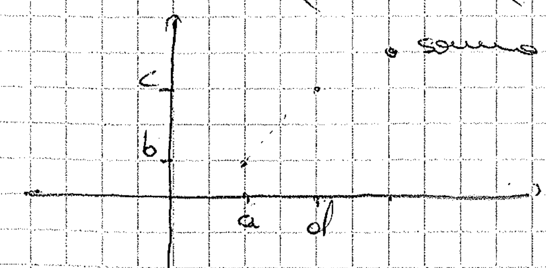


Il coniugato è il simmetrico di z rispetto all'asse reale.

→ Se ho $(x, 0)$ resto allo stesso posto.

→ se faccio 2 volte il coniugato torno dove ero prima.

$\overline{z + w} = \overline{(a + ib) + (c + id)} = \overline{[(a+c) + i(b+d)]} = (a+c) - i(b+d)$

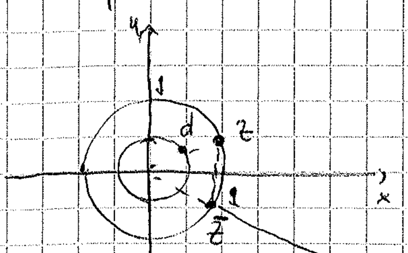


$= \bar{z} + \bar{w} = a - ib + c - id$

$(a+c) - i(b+d)$

somma

$x^2+y^2=1$ $\qquad |z|=1$

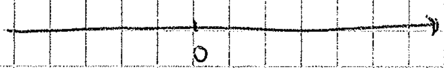


$|x^2+y^2|=\frac{1}{2}$

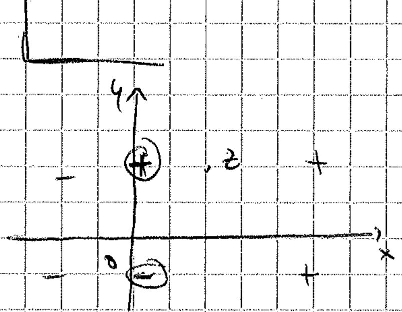
$\bar{d}$ nella circonferenza di raggio $\frac{1}{2}$

Ordinamento in C

→ in $\mathbb{R}$ è facile



decisa la freccia a sinistra dello 0 sono positivi a destra negativi.



Nel dare un segno devo vedere se è compatibile con le proprietà delle diseguaglianze.

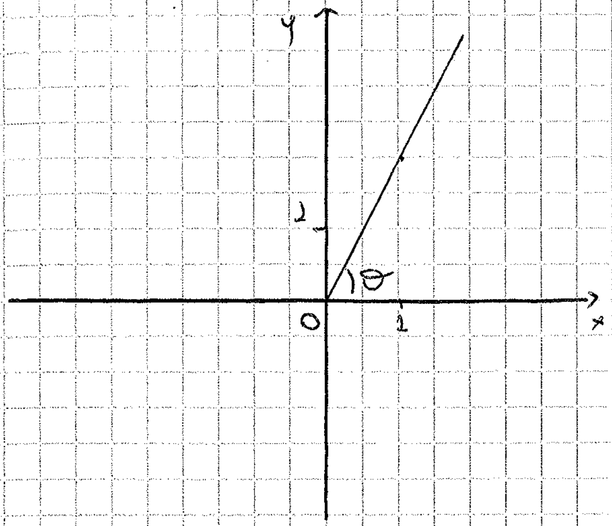
$i>0$ $\qquad 2i>0$ $\qquad i$ positivo $\quad -1>0$ non va bene

$i<0$ $\qquad$ moltiplico per i $\quad i^2>0$ $\quad -1>0$ non va bene.

il numero i non rispetta le regole delle diseguaglianze.

L'ordinamento si può introdurre ma non è compatibile con quello in $\mathbb{R}$ cioè che rispetti le regole delle diseguaglianze $\cancel{A}$ $-i<0$

FORMA TRIGONOMETRICA O POLARE



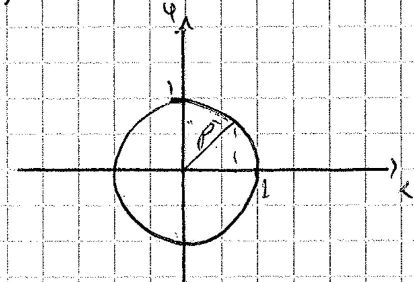
$z = (x, y) = x + iy$

coordinate polari

$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ e θ angolo che il semiasse passante per z forma con l'asse delle ascisse > 0

$x = \rho \cos\theta \quad y = \rho \,\mathrm{sen}\,\theta$

con $\rho = 1$



$z = \rho\cos\theta + i\rho\,\mathrm{sen}\,\theta$ al posto di $z = x + iy$

$z = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$

↳ rappresentazione ~~forma~~ trigonometrica o forma polare del numero complesso z.

$\rho = |z|$

Se $z = 0 \iff \rho = 0$ e si intende l'origine

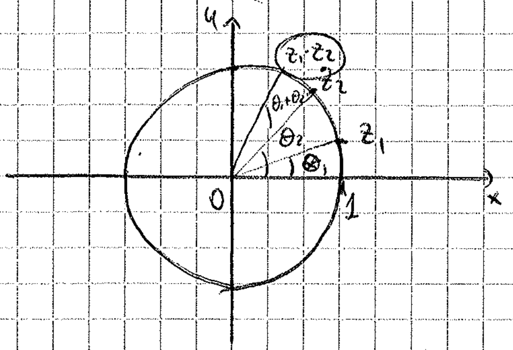
ρ è individuato in modo unico θ no!

$\theta = \arg z$ argomento di z ed è individuato a meno di multipli di 2π

a meno di aggiungere 2π.

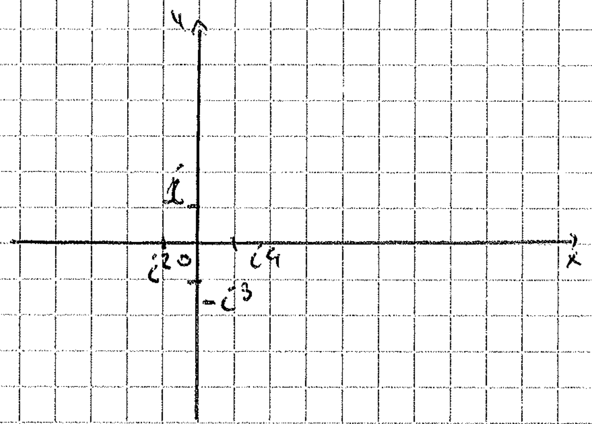
$\arg z_1 \cdot z_2 = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

(mod 2π)



Questo discorso vale anche per i quozienti

$i = 0 + 1 i = 1 \left(\cos \pi/2 + i \operatorname{sen} \pi/2\right)$



$z^4 = 1 \qquad i^4 = 1$

in campo reale ± 1 in campo compless c'è anche i.

$x^4 = 1$ in $\mathbb{R} \iff x = \pm 1$

$z^4 = 1$ in $\mathbb{C}$

$z = 1$

$z = -1$

$z = i$

$z = -i$

$z^n = w$ è vero che le soluzioni sono n

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 260

È un vantaggio ~~nell'elevamento a potenza~~

$$\underbrace{z_1 \cdot z_1 \cdot z_1 \ldots\ldots}_{n \text{ volte}} = \rho^n \left[\cos(n\cdot\theta) + i\sin(n\theta)\right]$$

$$\to (1+i)^{37} = (\sqrt{2})^{37} \left[\cos\left(37\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{37\cdot\pi}{4}\right)\right]$$

$$9\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$8\pi + \pi + \frac{\pi}{4}$$

multiplo di 2π

$$\frac{5\pi}{4}$$

$$2^{\frac{37}{2}} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$2^{18}\cdot\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2}\right)$$

~~$\Rightarrow$ Radici (con la forma polare)~~

Ricorda il comportamento delle potenze

$\arg_{z_1} + \arg_{z_2}$ quando ho $(z_1 \cdot z_2)$

$$e^2 \cdot e^4 = e^6$$

$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ per definizione.

se $\theta = \theta_1 + \theta_2 \Rightarrow e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta_2}$

per $\theta = 0$ $\qquad \cos 0 + i\sin 0 = 1 \qquad e^{i0} = 1$

$\theta = \frac{\pi}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i = e^{i\pi/2}$

$$(0,1) = i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = e^{i\pi/2}$$

Divisione

$$\frac{z}{w} = \frac{\rho e^{i\theta}}{r e^{i\sigma}} = \frac{\rho}{r} e^{i(\theta-\sigma)}$$

Radice

Dato $w \Rightarrow$ voglio risolvere $z^n = w$ $\quad n \geq 2$

Se $w = \rho e^{i\theta}$ con ρ e θ noti

$z = r e^{i\varphi}$ $\quad$ r e φ sono le incognite

$r^n e^{i(\varphi \cdot n)} = \rho e^{i\theta}$

Due nr. complessi sono uguali $\Leftrightarrow$ quando individuano lo stesso punto del piano.

$\rightarrow$ in forma algebrica

$z_1 = x_1 + i y_1 \qquad z_2 = x_2 + i y_2$

$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \underbrace{x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2}$

2 equazioni in campo reale

$\rightarrow$ " " polare

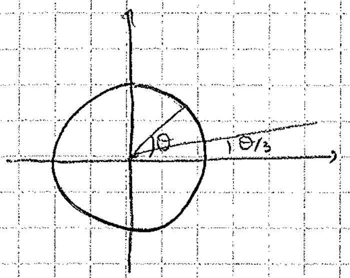
$z_1 = \rho_1 (\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1) \qquad z_2 = \rho_2 (\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \rho_1 = \rho_2 \\ \theta_1 = \theta_2 \end{cases} \mod 2\pi$$

11/10/2013

$z^n = w$ noto $w = \rho e^{i\theta}$

$|z| = \sqrt[n]{|w|}$ $\arg z = \frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}$ $\forall k \in \mathbb{Z}$



$n = 3$ qui con $\rho = 1$

a $k=n$ riparte il giro

$k = 0, 1, \dots (n-1), n$ $0 \leq k \leq n-1$

Tutti gli angoli sono equispaziati, i punti sono vertici di un poligono regolare di n lati.
Gli angoli differiscono di

Le soluzioni dell'equazione sono chiamate le radici ennesime.
Le radici quadrate sono 2
cubiche sono 3 ... etc.

Quella delle radici quadrate è come in $\mathbb{R}$

$x^2 = y \in \mathbb{R}$ $y > 0$ $x = \pm\sqrt{y}$

$z^2 = w \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ z_1, z_2

$|z| = \sqrt[2]{|w|}$

$\arg(z) = \frac{\theta}{2} + k\frac{2\pi}{2} = \frac{\theta}{2} + k\pi$ $\forall k \in \mathbb{Z}$

Si prende $[0, (n-1)]$

$k = 0$ $\frac{\theta}{2}$

$k = 1$ $\frac{\theta}{2} + \pi$

z_1 e z_2 $z_1 = -z_2$ e $z_2 = -z_1$

$z^2 = \underbrace{2+3i}_{w}$ $|w| = \sqrt{13}$ $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{w} = \dfrac{2}{\sqrt{13}} \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{y}{w} = \dfrac{3}{\sqrt{13}} \end{cases}$

$\Downarrow$

no forma esponenziale o trigonometrica

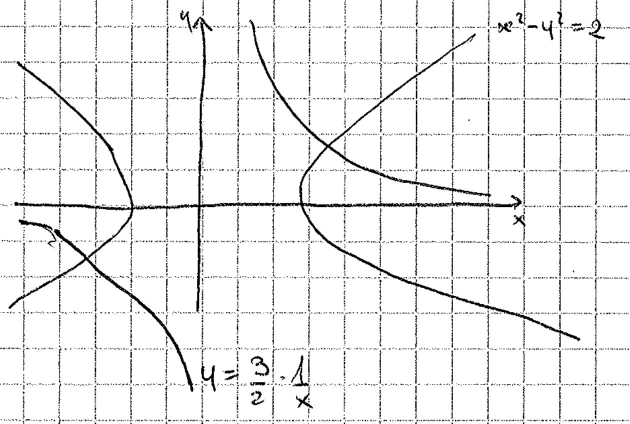
Cambio rappresentazione di $\mathbb{C}$

$z = x + iy$ forma algebrica.

$(x+iy)^2 = 2+3i$

$x^2 - y^2 + 2xiy = 2+3i$

$\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ 2xy = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ y = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{1}{x} \end{cases}$ $\Rightarrow$ intersezione di due iperboli



Deduco che troverò due soluzioni e che saranno simmetriche

$x^2 - \dfrac{9}{4x^2} - 2 = 0$ $x^4 - 2x^2 - 9 = 0$ $x \neq 0$ lo posso fare

$x^2 = t$ $t^2 - 2t - 9 = 0$

$\dfrac{\Delta}{4} = 1 + 9 = 10$ $1 - \sqrt{10} = t = -2$

non proprio tutto $1 + \sqrt{10} = t = 4$

$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

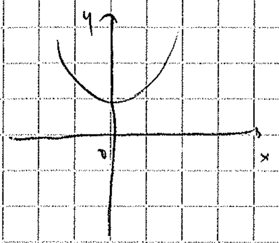
avrò $t_1 > 1$

$t_2 < 0$

$$\begin{cases} x < 0 \\ 1-2y > 0 \end{cases} \cup \quad \begin{cases} x > 0 \\ 1-2y < 0 \end{cases}$$

Teorema Fondamentale dell'algebra

$x^2+1=0$ no soluzioni in $\mathbb{R}$



$y = z^2+1$ $\qquad z = \pm i$

→ Proprietà dei polinomi

① teorema di Ruffini:

Sia $P(x)$ un polinomio in x, $P(x_0) = 0 \Leftrightarrow P(x)$ è divisibile per $(x-x_0)$.

vuol dire che se faccio la divisione il resto viene "0".

ovvero $\exists\, Q(x)$ quoziente mentre $R(x) = 0$

$$P(x) = \frac{1}{(x-x_0)\, Q(x)}$$

x_0 si dice che è una radice di P.

② Def x_0 è una radice di molteplicità $m \in \mathbb{N}$ se $P(x)$ è divisibile per $(x-x_0)^m$ ma non è divisibile per $(x-x_0)^{m+1}$.

Es. $P(x) = x^3 - 2x^2 + x = x(x^2-2x+1) = x(x-1)^2$

una radice è zero $\quad x_1 = 0$ molteplicità 1 radice semplice

$x_2 = 1$ " 2 radice doppia

15/10/2013

Relazioni e funzioni

Relazione : R $R \subseteq A \times B$

Definire un modo per associare agli elementi di A quelli di B.

A e B intervalli in questo caso

1° → prodotto cartesiano.

Per definire una relazione tra A e B basta scegliere un qualsiasi sottoinsieme del prodotto $R \subseteq A \times B$.
Può essere qualche punto, una linea ...

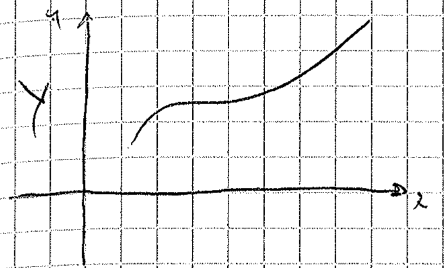
Prendo un'ascissa e vedo se in R c'è un elemento con quell'ascissa. $aRb \Rightarrow$ "a" è in relazione con "b".
Può capitare che ad uno stesso ascissa corrispondano più ordinate o nessuna.

Funzione:
Una relazione è una funzione se per ogni elemento di A esiste al più $b \in B$ tale che $(a, b) \in f$ → ho cambiato nome.

se $(a, b) \in f \subseteq A \times B$ e f è funzione
$b = f(a)$ perché b è unico ~~se esiste~~.

oppure $f : A \longrightarrow B$
$a \longmapsto b = f(a)$

Dato "a" $f(a) = b$ si chiama immagine dell'elemento "a" tramite f.
"a" si dice che è controimmagine dell'elemento b.



se faccio ~~..~~ incontrerò
$f^{-1}(Y) = X$

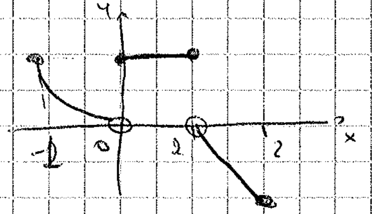
[Esercizio]

$\text{dom } f = [-1, 2]$

$\text{im } f = f(A)$ {tutte le immagini tramite f}

$b \in B \Rightarrow b$ ha almeno una controimmagine

$\text{im } f = [-1, 1] \setminus \{0\}$



$f([1, 2[) =]-1, 0[\cup \{1\}$

$f^{-1}(1) = \cancel{\{-1\} \cup \{0\} \cup \{1\}} = \cancel{\{-1, 0, 1\}}$ $[0, 1] \cup \{-1\}$

$f^{-1}([0, 1[) =]-1, 0[$

Es. $f(x) = e^{2x} - 2e^{x}$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cioè $A = \mathbb{R}$

$B = \mathbb{R}$

$\text{dom } f = \mathbb{R}$

$f^{-1}(]-1, 8[) =$

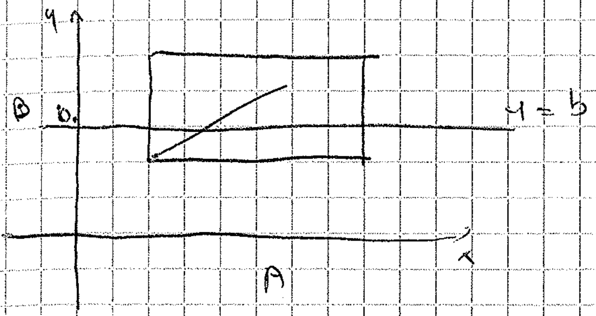
Cerco le $x \in \mathbb{R}$: $f(x) \in]-1, 8[$

cioè $-1 < f(x) < 8$

$$\begin{cases} f(x) > -1 \\ f(x) < 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{-2} - 2e^{-1} > -1 \\ e^{16} - 2e^{8} < 8 \end{cases}$$ lo limine

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 260

Funzione iniettiva



Una funzione si dice iniettiva se ogni elemento del codominio ha al più una controimmagine.

Cioè $x_1, x_2 \in \text{dom} f$ se $f(x_1) = f(x_2)$ segue $x_1 = x_2$

Funzione suriettiva

Ogni elemento del codominio ha almeno una controimmagine

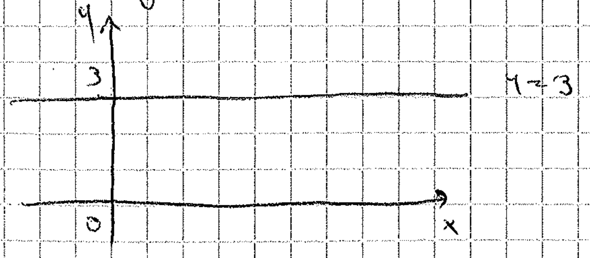
$B = \text{Im} f$

La suriettività si può sempre ottenere scegliendo $B = \text{Im} f$

Anche l'iniettività si può ottenere prendendo una restrizione
Non è sempre ottenibile.

Es.

$f(x) = 3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$



Per renderla suriettiva limito codominio a 3.

Se $f(x)$ è ~~iniettiva che~~ biiettiva è invertibile.

~~$f(x)=y$~~ $f(x) = y$ biiettiva $\forall y$ l'equazione $f(x) = y$ ha sempre una ed una sola soluzione $f^{-1}(y) = x$

$f^{-1}: B \longrightarrow A$
$y \longmapsto x$ l'unica soluzione dell'equazione $f(x) = y$

$f^{-1}: [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

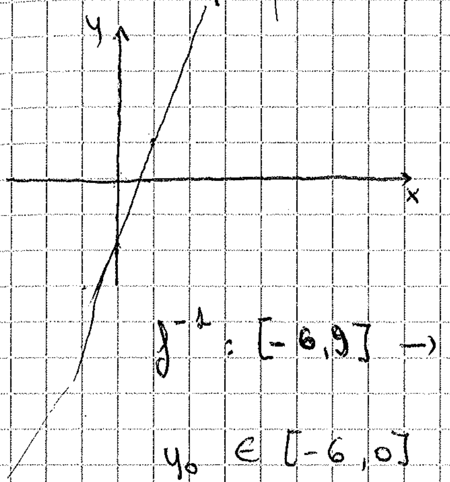
$y_0 \to f^{-1}(y_0) = x_0 = \arcsin(x_0)$

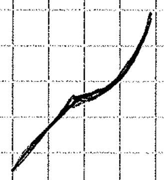
Esercizio.

$f: [-2,3] \to \mathbb{R}$

Determinare f^{-1}

$$f(x) = \begin{cases} 3x & -2 \le x \le 0 \\ x^2 & 0 < x \le 3 \end{cases}$$





Im $f = [-6, 9]$

è iniettivo

$f(x)$ è biettivo $\to f: [-2,3] \to [-6,9]$

$f^{-1}: [-6,9] \to [-2,3]$

$y_0 \in [-6,0]$ $\quad 3x = y_0$ $\quad x_0 = \frac{y_0}{3}$

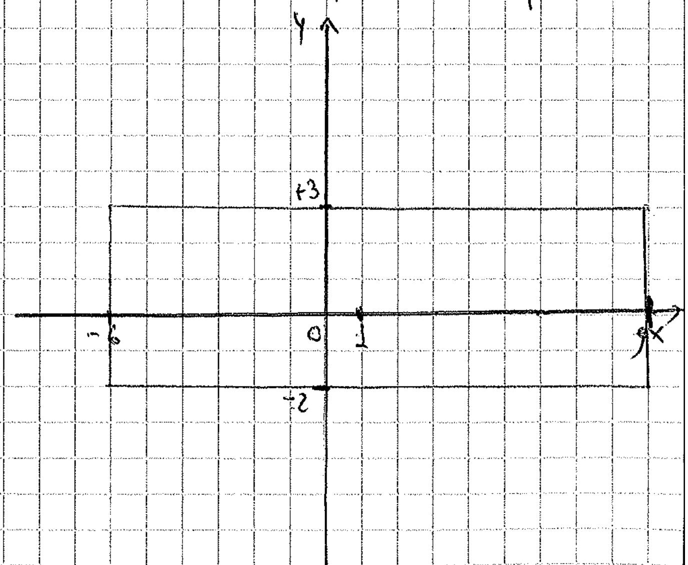
$y_0 \in [0,9]$ $\quad x_0^2 = y_0$ $\quad x_0 = +\sqrt{y_0}$ per come prendo x_0

ho costruito una nuova funzione prendendo le ascisse

$$f^{-1}(y_0) = \begin{cases} y_0/3 & -6 \le y_0 \le 0 \\ \sqrt{y_0} & 0 < y_0 \le 9 \end{cases}$$

$$f^{-1}(x) \begin{cases} x/3 & -6 \le x \le 0 \\ \sqrt{x} & 0 < x \le 9 \end{cases}$$

qualsiasi



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 260

Monotonia di f e quella di f^{-1}

f strettamente crescente ($\Rightarrow$ iniettiva)

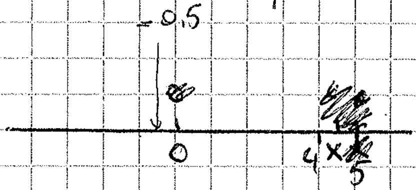
$$\forall\ x_1 < x_2 \Rightarrow \underbrace{f(x_1)}_{y_1} < \underbrace{f(x_2)}_{y_2}$$

$f^{-1}\quad y \mapsto x$ l'inverso di una funzione crescente è anche lei crescente

Parte intera di x

$f(x) = [x]$ oppure $E(x)$ ← in francese oppure $\lfloor x \rfloor$

$[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$

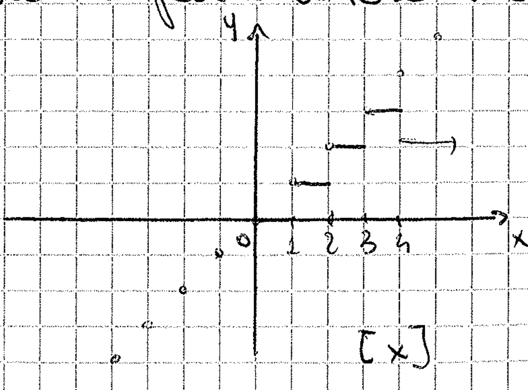


$[x] = 4 \qquad x = 4,12\ldots$

Se x è positivo → stare attenti per $x<0$

$[-0,5] = -1$

Con la parte intera viene un grafico a scalini.



$[n] = n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

$0 < x < 4$

$x_1 < x_2 \Rightarrow [x_1] \leq [x_2]$

$[x]$ Non strettamente crescente

Es. 2

$f(x) = x^2$ $\quad A = \mathbb{R} \quad B = [0, +\infty[$

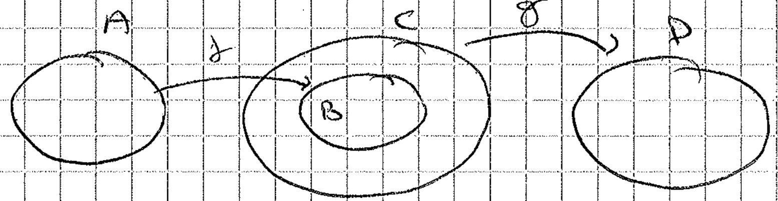
$g(x) = x+1$ $\quad C = \mathbb{R} \quad D = \mathbb{R}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2+1$

La composizione tra funzioni non è commutativa.

$\operatorname{im} f = [0, +\infty[$ $\qquad \operatorname{im} f \subseteq \operatorname{dom} g$

$\operatorname{dom}(g) = \mathbb{R}$



Es. 3

$f(x) = 2 - x^2$ $\quad A = \mathbb{R} \quad B =]-\infty, 2]$ $\quad \rightarrow B \cap C = [0, 2] \neq \emptyset$

$g(x) = \sqrt{x}$ $\quad C = [0, +\infty[\quad D = [0, +\infty[$

$\operatorname{dom}(g \circ f) = x \in \mathbb{R} : |x| \leq \sqrt{2}$ oppure $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

$g \circ f = \sqrt{2 - x^2}$ $\qquad f(x) \in \operatorname{dom} g$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 260

→ SUCCESSIONE ←

~~Def~~

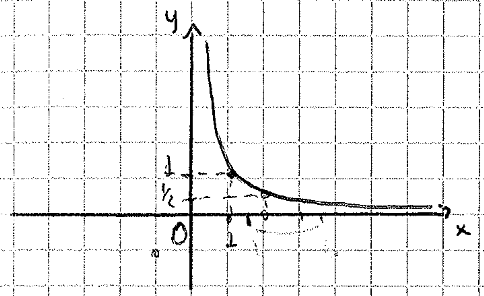
$f: \mathbb{N} \longrightarrow B$ successione

La variabile è ~~[illegible]~~ un numero discreto: ha un successivo in $\mathbb{N}$ si ha un successivo, in $\mathbb{R}$ ad esempio no.

$f(n) = a_n$

Successione: posso elencare gli elementi dell'immagine.

$a_n = \frac{1}{n} \quad n \in \mathbb{N} \setminus 0$



si disegna $\frac{1}{x}$ con $x \in \mathbb{R}$

$a_1 = 1 \quad a_2 = \frac{1}{2} \quad a_3 = \frac{1}{3} \ \ldots$ etc.

$[a, b] \cap \mathbb{N}$ è un insieme finito

~~Le restrizioni ad intervalli limitati~~

Lo studio di a_n per $n \in [a, b]$ corrisponde al calcolo di num° finito di valori.

Invece lo studio di a_n per $n \in [a, +\infty[$ corrisponde al calcolo di infiniti valori.

→ Studio di a_n per $n \geq a$ = studio del "comportamento limite" per n che tende a $+\infty$ (cioè per n da un certo punto in poi).

$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}$

Ci sono sostanzialmente 3 possibilità

convergente, divergente, indeterminata.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 260

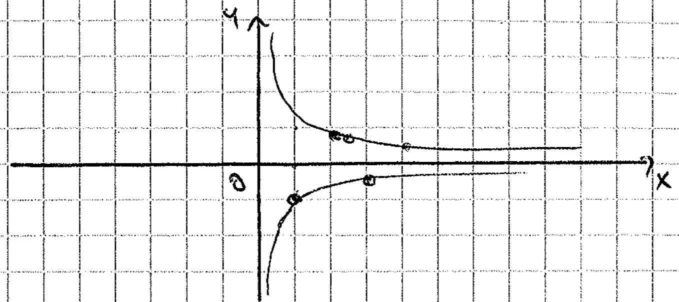
$\lim_{n\to+\infty} a_n = l \iff \forall \varepsilon>0 \ \exists\, n_0\in\mathbb{N} : \forall n \geq n \quad |a_n - l| < \varepsilon$

Esempio 2

$b_n = \frac{(-1)^n}{n}$ con $n \neq 0 \wedge n \in \mathbb{N}$

$b_1 = -1$

$b_2 = 1/2$



~~I dispari~~

I dispari tendono a salire

I pari a scendere

C'è una stabilizzazione xké l'ampiezza delle oscillazioni tende a 0.

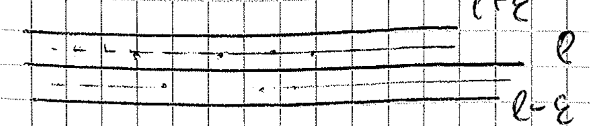
$|b_n - 0| < \varepsilon$

$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \qquad \frac{1}{n} < \varepsilon \qquad n > \frac{1}{\varepsilon}$

$-\varepsilon < b_n < +\varepsilon$

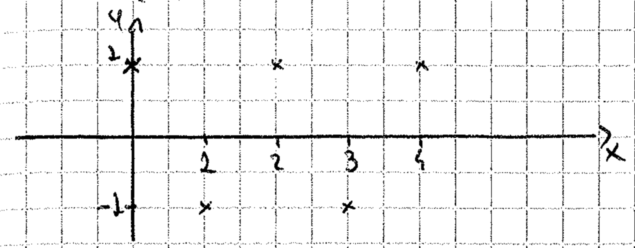
se b_n sta dentro va bene

$|a_n - l| < \varepsilon \qquad l-\varepsilon < a_n < l+\varepsilon$



Esempio 4

$a_n = (-1)^n$ sono i valori 1 e -1 che si alternano.



Se scelgo $l=0$ i miei valori distano 1

con $\varepsilon > 1$ è tutto ok

$\varepsilon < 1$ non c'è nessun modo per avvicinarsi.

È oscillante → successione oscillante o indeterminata.

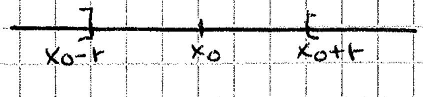
È comodo usare l'intorno.

$x_0 \in \mathbb{R}$ ($x_0 = l$ in caso successioni convergenti)

$r > 0$

$I_r(x_0) =$ intorno di centro x_0 e raggio $]x_0 - r, x_0 + r[$

$I_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}$

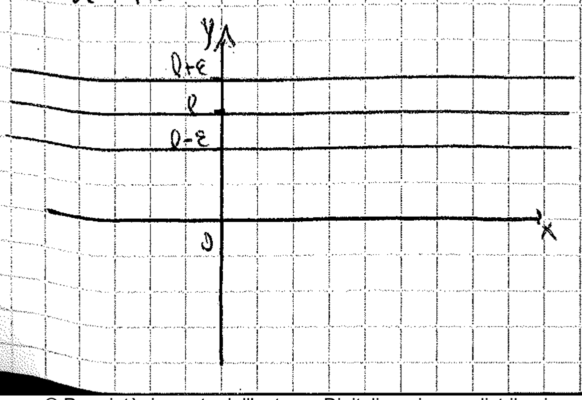


Intorno di $+\infty$ $I_a(+\infty)$ semirette da a in poi

" " $-\infty$ $I_b(-\infty)$ semirette da $-\infty$ a b.

contiene $+\infty$ e $-\infty$

$\lim_{n \to +\infty} a_n = l \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \forall I(l)$ ~~$\exists n_0 \in \mathbb{N}$~~ $\exists I(+\infty) / a_n \in I(l) \; \forall n \in I(+\infty)$



Esempi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{n+1} = \frac{\cancel{n}(2)}{\cancel{n}(1+\frac{1}{n})} = 2$$

$l = 2 \qquad a_n = \frac{2n}{n+1}$

Per ogni intorno di 2, esiste un intorno di più infinito, tale che ~~$\left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| <$~~ $\frac{2n}{n+1}$ appartiene all'intorno di

~~distanza tra a_n e l~~

2 per ogni n dell'intorno di più infinito.

$$\boxed{\forall I_{(2)} \; \exists I(+\infty) : \frac{2n}{n+1} \in I_2 \quad \forall n \in I(+\infty)}$$

→ Cambio forma

$I(2) = I_\varepsilon(2) =]2-\varepsilon, 2+\varepsilon[= \{ y \in \mathbb{R} \,/\, |y-2| < \varepsilon \}$

$I(+\infty) = I_{n_0}(+\infty) =]n_0, +\infty[= \{ x \in \mathbb{R} : x > n_0 \}$

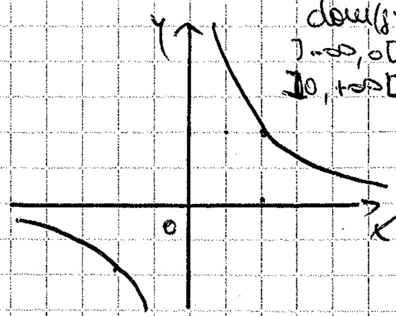
$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| < \varepsilon \quad \forall n > n_0}$$

→ $\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \frac{3n^2}{2+n} > A \quad \forall n > n_0$

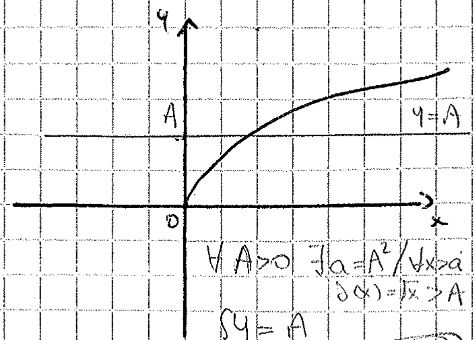
$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2}{2+n} = +\infty$ limite divergente

$f(x) = \frac{1}{x}$

dom(f)
$]-\infty, 0[$
$]0, +\infty[$



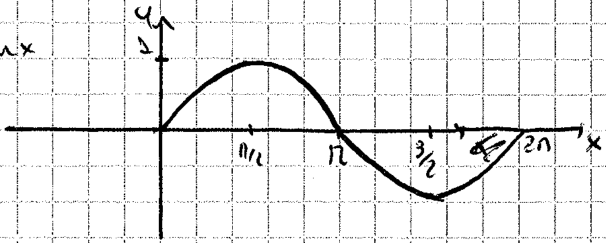
$f(x) = \sqrt{x}$
$[0, +\infty[$



$\forall A>0 \; \exists a = A^2 / \forall x>a$
$f(x) = \sqrt{x} > A$

$\begin{cases} y = A \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$ $x = A^2$

$f(x) = \sin x$



→ indeterminata

$\lim_{x\to+\infty} tg(x)$ = non esiste il limite.

$x<a$ $\quad]-\infty, a[\; \in$ dom(f)

Studio il comportamento per $x<a$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)$ anche qui ho le 3 possibilità

1°) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

2°) non ha senso discutere $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x}$ perché $-\infty$ è lontano dal dom(f) cioè $-\infty$ non è un punto di accumulazione del dominio.

3°) $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen} x$ = non esiste

$\lim_{x\to 0} 1-x^2 = 1$ $\qquad \lim_{x\to 0} [1-x^2] = 0$ $\qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0$

$\begin{cases} y = 1-\varepsilon \\ y = 1-x^2 \end{cases}$

$1-x^2 = 1-\varepsilon$

se voglio trovare x → $x = \pm\sqrt{\varepsilon}$

$-\sqrt{\varepsilon} < x < \sqrt{\varepsilon}$

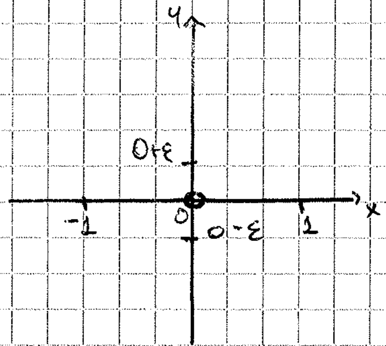
$l-\varepsilon < f(x) < l+\varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ / \ \forall x \in I_\delta(0) \ (x \neq 0,\ x \in \text{dom} f) \quad f(x) \in I_\varepsilon(1)$

$\sqrt{\varepsilon}$

nelle successioni era automatico

$\forall I(l) \ \exists I(x_0) \ / \ \forall x \in I(x_0) \ (x \neq x_0,\ x \in \text{dom} f) \quad f(x) \in I(l)$.



$f_1(0) = \lim_{x\to 0} f_1(x)$ $\qquad f_3(0)$ non esiste perché $0 \notin \text{dom} f_3$

$f_2(0) \neq \lim_{x\to 0} f_2(x)$ → discontinuità eliminabile.

f_1 è una funzione continua in $x_0 = 0$

f_2 modificata $\qquad f_2(x) = \begin{cases} f_2(x) & x \neq 0 \\ l & x = 0 \end{cases}$

↓

me la trasformo in continua.

f_3 la estendo $\qquad f_3(x) = \begin{cases} f_3(x) & x \neq 0 \\ \lim_{x\to 0} f_3(x) & x = 0 \end{cases}$

Calcolo $f(x) = 1$

$\sin\frac{1}{x} = 1 \iff \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$

$x_0 = \frac{2}{\pi} \qquad x_1 < x_0 \qquad x_2 < x_1$

$\sin\left(\frac{1}{x}\right) = -1 \qquad \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad x_1 = \frac{2}{3\pi}$

gli "zeri" si infittiscono e in mezzo ~~prima~~ $f(x) = 1$ e -1 alternativamente

Ritorniamo all'esercizio

$\nexists \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \longrightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

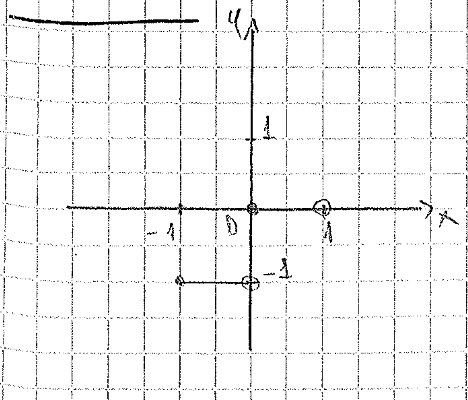
$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

fare il limite destro (oppure sinistro) significa fare $\lim_{x\to x_0} f(x)$ della restrizione di $f(x)$ all'intervallo

$]x_0, +\infty[$ o $]-\infty; x_0[$

Teorema

$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \bar{\mathbb{R}} \iff \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = l \in \bar{\mathbb{R}}$



$\lim_{x\to 0^-} [x] = -1 \qquad \lim_{x\to 0^+} [x] = 0$

$f(x)$ in x_0 ha una discontinuità di prima specie.

tutte le volte che

$\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ esiste $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ esiste $\wedge \nexists \lim_{x\to x_0}$ [illegible]

Quanto detto prima ci permette di dire che ogni numero naturale ammette ~~un~~ successivo.

Se invece parto da:

$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq a_{n+1}$ cioè che ogni numero naturale ammette successivo, posso arrivare a $a_{n_1} < a_{n_2}$ con n_1 e n_2 qualsiasi.

Fisso $n_1 \leq n_2$ qualsiasi

n_1 ho un successivo $n_1+1 \rightarrow a_{n_1} \leq a_{n_1+1}$

$n_1+1 < n_1+2 \longrightarrow a_{n_1+1} \leq a_{n_1+2}$

fino a che non arrivo a n_2 cioè a:

$a_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall n_1 < n_2 \Rightarrow a_{n_1} \leq a_{n_2}$

Esercizio: $a_n = \frac{2n}{n+1}$ dom$(f) = \mathbb{N}$

Vediamo se è strettamente crescente: $a_n \leq a_{n+1}$

$$\frac{2n}{n+1} \leq \frac{2(n+1)}{n+2}$$

posso moltiplicare perché so che i denominatori sono maggiori di zero

$$2n(n+2) \leq 2(n+1)^2$$

$$\cancel{2n^2} + \cancel{4n} - \cancel{2n^2} - \cancel{4n} - 2 \leq 0$$

$-2 \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ dunque $a_n = \frac{2n}{n+1}$ è strettamente crescente

Esempio:

$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ si può dimostrare che è strettamente crescente.

Il suo sup è "e"

→ Nel caso delle successioni monotone il limite esiste sempre: può essere finito o infinito.

1) Se a_n è crescente e superiormente limitata allora il limite è il sup.

Esempio:

$\frac{2n}{n+1} = a_n$ è monotona crescente

limite = Sup e viceversa

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{n+1} = S = \sup\left\{\frac{2n}{n+1}\right\}$$

→ Verificare che 2 è il sup di a_n ←

- Verificare che sia un maggiorante

$\frac{2n}{n+1} \le 2$ $\quad \cancel{2n}-\cancel{2n}-2 \le 0 \to -2 \le 0$

- Verificare che è il più piccolo dei maggioranti

$\forall \varepsilon > 0$ $\quad 2-\varepsilon$ non è più maggiorante

$$\frac{2n}{n+1} > 2-\varepsilon$$

$$2n-(2-\varepsilon)(n+1) > 0$$

$$\cancel{2n}-\cancel{2n}-2+\varepsilon n+\varepsilon > 0$$

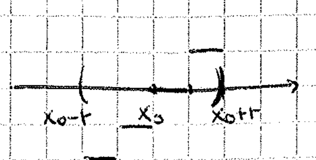
$2 < \varepsilon(n+1)$ $\quad$ Per infiniti valori di ε e n la disuguaglianza non è verificata.

2 è quindi il più piccolo dei maggioranti ⇒ Sup.

CASO DELLE FUNZIONI

- prese $f(x)$ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente nell'intorno sinistro allora esiste $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l$ e $l = \sup f(x)$ con $x \in]x_0-r, x_0[$
- se f è crescente in tutto $I_r(x_0)$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \le f(x_0) \le \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$



ammette limite finito.

Cioè quando una funzione è monotona in un intervallo può avere discontinuità al massimo di prima specie

31/10/2013 Regole per il calcolo dei limiti.

Nella definizione non si dice come si calcola.

$\forall\ I(l)\quad \exists\, I(x_0)\ /\ \forall\ x \in I(x_0)\quad \exists\ f(x) \in I(l)$

$x \neq x_0$
$x \in dom\, f$

Si suppone a priori che $\cancel{I(x_0)} \neq \emptyset$ $\quad x_0$ è di accumulazione

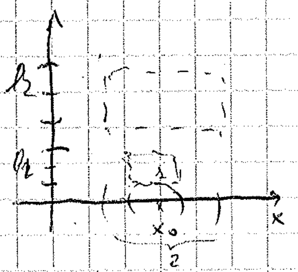
Non è evidente che l è unico

Teorema dell'unicità del limite

Se esistono il ~~limite~~ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1$ e $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_2$

allora $l_1 = l_2$

dim. per assurdo $\rightarrow$ suppongo che ci siano due limiti ma nego la tesi $\Rightarrow$ $l_1 \neq l_2$



Posso scegliere un intorno di l_1 e di l_2 in modo che $I(l_1) \cap I(l_2) = \emptyset$

$\rightarrow$ Adesso uso la definizione per i 2 casi

Dato $I_1(l_1)$ $\exists\ I_1(x_0)\ /\ \forall\, x \in I_1(x_0) \rightarrow f(x) \in I_1(l_1)$

$x \in dom(f)$
$x \neq x_0$

Dato $I(l_2)$ $\exists\ I_2(x_0)\ /\ \forall\, x \in I_2(x_0) \rightarrow f(x) \in I(l_2)$

$x \neq x_0$
$x \in dom\, f$

$I_1(x_0) \cap I_2(x_0) = I(x_0)$

Se $x \in I(x_0)$ valgono entrambe le due definizioni di limite, quindi $f(x)$ va a cadere in $I(l_1)$ e in $I(l_2)$.

$x \neq x_0$
$x \in dom(f)$

$\rightarrow$ Questo va contro la prassi $I(l_1) \cap I(l_2) = \emptyset$

Anzi $I(l_1) \cap I(l_2) = f(x) \quad \forall\, x \in I(x_0)$

In generale dom (f) di x^2 è $[0,+\infty[$

In casi particolari come $\sqrt[3]{x}$, $\frac{1}{x}$

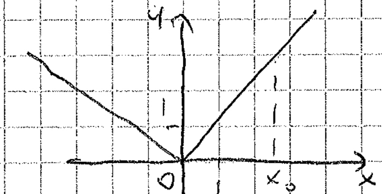
→ esponenziale

a^x l'inverso $\log_a(x)$

$a>1$

$a<1$

Nell'elenco del libro non c'è il valore assoluto.



$f(x) = |x_0|$ è continua in x_0 $\forall x_0 \in \mathbb{R}$.

→ Proprietà del valore assoluto

- disuguaglianze triangolari

1) $\forall x, \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow |x+y| \leq |x|+|y|$

2) $\forall x, \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow |x-y| \geq \big||x|-|y|\big|$

Dim che $f(x) = |x|$ è continua in x_0

$$\lim_{x\to x_0} |x| = |x_0|$$

$\forall \varepsilon>0$ $\exists \delta>0$ t.c. $\forall x \in I_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in I_\varepsilon(f(x_0))$

se $|x-x_0|<\delta \Rightarrow \big||x|-|x_0|\big|<\varepsilon$

Devo trovare δ

$$\big||x|-|x_0|\big| \leq |x-x_0| < \varepsilon \quad \rightarrow \quad |x-x_0|<\varepsilon \quad \delta=\varepsilon$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 260

Se prendo $x \in \left(I_1(x_0) \cap I_2(x_0)\right)$ valgono tutti e due

$$\begin{cases} I(x_0) = I_1(x_0) \cap I_2(x_0) \\ |(f+g) - (l+m)| < \varepsilon \end{cases}$$

Es: devo accertarmi che sono continue

$$\lim_{x \to 4} \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right) = 9/4$$

$$\lim_{x \to \pi/3} x \sin x = \frac{\pi}{3} \sqrt{3}/2$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2^x}{3+x} = \frac{1}{3}$$

Se prendo 2 funzioni continue in x_0

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) + g(x)\right) = f(x_0) + g(x_0)$$

Quindi, date f e g continue $f+g$ è continua

Anche la funzione prodotto è continua.

Se $g(x_0) \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$ e quindi anche la funzione quoziente è continua in x_0.

COROLLARIO: somma, prodotto, quoziente sono continue in tutto il dominio.

Questo vale anche se $f(x) \geq 0$ in $I(x_0) \setminus \{x_0\}$ e ovviamente ammette limite finito per $x \to x_0$

CONFRONTO TRA FUNZIONI

1° CASO: confronto tra 2 funzioni

Siano $f(x) \underset{<}{\leq} g(x) \quad \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$

a) $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ $\quad l, m \in \mathbb{R} \Rightarrow l \leq m$ vale sia per $f(x) \leq g(x)$

$\lim_{x \to x_0} g(x) = m$ $\quad$ che per $f(x) < g(x)$

b) se $g(x) \to +\infty \quad f(x) \leq g(x) \to l < +\infty$

se $f(x) \to +\infty \Rightarrow g(x) \to +\infty$

ci dice che il limite esiste

c) se $f(x) \to -\infty$ ok

se $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

Dimostrazione "caso a" per assurdo $(l \geq m)$

Considero $h(x) = f(x) - g(x)$ che tende a $l-m$ per il teorema della differenza

$\lim_{x \to x_0} h(x) > 0 \quad I_1(x_0)$

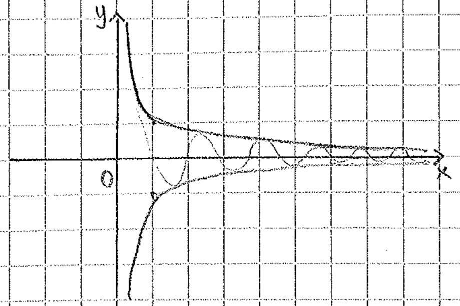
limite positivo, funzione positiva in $I(x_0)$

$f(x) - g(x) > 0 \longrightarrow f(x) > g(x)$

Arrivo ad un assurdo.

Es.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \cdot \sin x$$

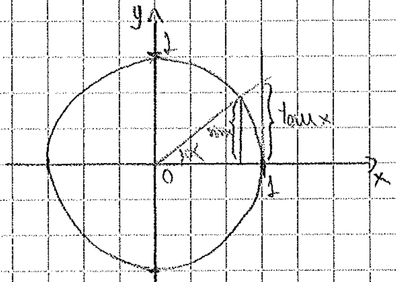


$$-\frac{1}{x} < \frac{1}{x} \cdot \sin x < \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

Es.

$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x}$? $\quad l, m \in \mathbb{R}$, $m = 0$ non possiamo usare il teorema del quoziente



$0 < \alpha < \pi/2$

$\sin \alpha < \alpha < \tan \alpha$

$\frac{\sin \alpha}{\alpha} < 1 \quad e \quad \alpha < \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

$\cos \alpha < \frac{\sin \alpha}{\alpha} < 1 \longrightarrow \alpha = x$

$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \qquad 0 < x < \pi/2$

$\lim_{x \to 0^+} \cos x = 1 \qquad \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$

sostituisco perché è continua

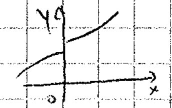
Allora anche $\frac{\sin x}{x} = 1$ e poiché la funzione è pari allora anche $\lim_{x \to 0^-}$ vale 1.

Concludiamo: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 260

7/11/2013

- Il limite è sempre unico se esiste
- Se f è continua in x_0 $\in$ dom(f) (di acc.) $\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- Le "funzioni elementari" sono continue
- Se f è monotona (crescente) $I_R(x_0) \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup \{ f(x) : x < x_0 \}$



$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf \{ f(x) : x > x_0 \}$

- Algebra finita

$f \to l \in \mathbb{R}$ $\quad \Rightarrow \quad f \pm g \to l \pm m$

$g \to m \in \mathbb{R}$ $\quad \quad f \cdot g \to l \cdot m$

per $x \to x_0$ $\quad$ se $m \neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g} \to \frac{l}{m}$

$f \pm g$, $f \cdot g$, f/g sono continue dove lo sono sia f che g.

- Segno

Se $f \to l > 0 \Rightarrow f > 0$ in $I_R(x_0)$

Se $f > 0$ in $I \Rightarrow l \geq 0$

o

$f \geq$

- Confronto

$f \leq g \Rightarrow l \leq m$ in $I(x_0)$

$$\begin{array}{ccccc} f & \leq & g & \leq & h \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ l & \to & l & \leftarrow & l \end{array}$$

in $I(x_0)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 260

Se invece $f(x) \to \cancel{+}\infty$ si ha una f. i.

$\frac{s}{0} = \infty \quad (\cancel{\forall} \; s \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad o \quad s = \pm\infty)$

$\Downarrow$ l'assenza del segno ci dice

$\left|\frac{s}{0}\right| = +\infty$

$\hookrightarrow \forall s \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$

$\boxed{\text{Teorema}}$ (caso $f = 1$)

Se $g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0 \qquad \frac{1}{|g(x)|} \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$

$\boxed{\text{dimostraz.}}$

$H_p = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$

- $\forall M > 0 \quad \exists I(x_0) \;/\; \forall x \in I(x_0),\ x \neq x_0,\ x \in \text{dom}\left(\frac{1}{g(x)}\right) \Rightarrow \frac{1}{|g(x)|} > M$

- $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I^1(x_0) \;/\; \forall x\ \cancel{I}(x_0),\ x \neq x_0,\ x \in \text{dom}(g(x)) \Rightarrow |g(x) - 0| < \varepsilon \to$ quello che so

So che $|g(x)| < \varepsilon$ e devo dire che $\frac{1}{|g(x)|} > M$

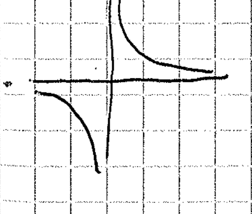
$\frac{1}{|g(x)|} > \frac{1}{\varepsilon}$

Il valore di verità dipende da M e ε che posso scegliere in modo arbitrario e tra le quali sussiste la relazione

$\frac{1}{|g(x)|} > \frac{1}{\varepsilon} > M$ prima prendo M poi ε in modo che $\frac{1}{\varepsilon}$ sia maggiore

Comunque io prenda M esisterà sempre una ε in grado di verificare la disequazione.

Es. $\frac{1}{x} \qquad g(x) : x \xrightarrow[x \to x_0]{} 0 \qquad \frac{1}{g(x)}$ per $x \to 0$ non ha limite



$\not\exists \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \qquad \lim_{x \to 0^\pm} \frac{1}{x} = \pm\infty$

Teorema (limite di funzioni composte)

Hp)

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

g ~~ff~~ definita in $I(l) \setminus \{l\}$

Supponiamo che

a) $l \in \mathbb{R}$ e g continua in l con g def. in l

b) $l = \pm\infty$ ed esiste $\lim_{y \to \pm\infty} g(y)$ $\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to l} g(y)$

Conseguenze: (corollario)

- f continua in x_0 e g continua in $y_0 = f(x_0)$
  $g(f(x))$ è continua in x_0
  le combinazioni e le composizioni di funzioni elementari sono continue.

Hp

$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$>$ le condizioni del teorema sopra

$\exists \lim_{y \to y_0 = f(x_0)} g(y) = g(f(x_0))$

$\Rightarrow$ deduciamo $g \circ f$ è continua in x_0.

$x \to 0 \qquad -1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1 \qquad A\ g(x) = \sin x$

$f(x) = x$

$$-x \le x \sin\frac{1}{x} \le x$$

$$\underset{0}{\downarrow} \qquad \underset{0}{\downarrow} \qquad \underset{0}{\downarrow}$$

$\longrightarrow$

Limiti di $[f(x)]^{g(x)}$

Ricordiamo

a^b

$b \in \mathbb{R}$, $a \ge 0$

$$a^b = \begin{cases} e^{b \log a} & a > 0 \quad \forall b \in \mathbb{R} \\ 0 & b = 0 \quad a = 0 \end{cases}$$

Date f, g

$$(f^g) = \begin{cases} e^{g(x) \log f(x)} & \text{se } f(x) > 0 \\ 0 & \text{se } f(x) = 0,\ g(x) > 0 \end{cases} \to \operatorname{dom}(f^g)$$

Se $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ e $\exists \lim_{x \to x_0} g(x) \log(f(x)) = l$

$$\lim_{x \to x_0} (f^g)(x) = \begin{cases} e^l & \text{se } l \in \mathbb{R} \\ +\infty & l = +\infty \\ 0 & l = -\infty \end{cases}$$

$\begin{cases} g \to 0 \\ f \to +\infty \end{cases} \to \infty^0 \qquad \begin{cases} g \to 0 \\ f \to 0^+ \end{cases} \quad 0^0 \qquad \begin{cases} g \to \pm\infty \\ f \to 1 \end{cases} \quad 1^{\pm\infty}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 260

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left[(1+x)^{\alpha}-1\right]}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha\log(1+x)}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{e^{\alpha\log(1+x)}-1}{\alpha\log(1+x)}\right] \cdot \left[\frac{\alpha\log(1+x)}{x}\right] = \alpha$$

QUALCHE SUCCESSIONE

$$\lim_{n\to+\infty} a^n =$$

in $\mathbb{R}$ no $a<0$: a^x con $x=\frac{1}{2}$ è una radice con argomento negativo

"a va bene negativo in $\mathbb{N}$
Nel caso a^x no perché mi devo muovere solo in $\mathbb{R}$ dove la radice quadrata non si può fare."

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & a>1 \\ 1 & a=1 \\ 0 & 0<a<1 \\ 0 \quad 1>|a| & a=0 \\ 0 & -1<a<0 \end{cases}$$

$|a|<1$

$|a| = \frac{1}{b} \qquad b>1$

$|a|^n = \frac{1}{b^n} = 0$

$a=-1 \rightarrow$ il limite non esiste

$|a|>1$ è oscillante
il limite non esiste

se n pari $+\infty$
se n dispari $-\infty$

8/11/2013

$$a^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} +\infty & a>1 \\ 1 & a=1 \\ 0 & |a|<1 \\ \nexists & a=-1 \\ \nexists & a<-1 \end{cases}$$

$a^n = (1+b)^n \geq 1+nb$ $\quad a_n \to +\infty$ per il primo teorema del confronto

$$a^{1/n} = e^{\frac{1}{n}\log a} \xrightarrow[n\to+\infty]{} = 1$$

$$\frac{a^n}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} +\infty & a>1 \\ 0 & |a|\leq 1 \\ \nexists & a<-1 \end{cases} \qquad \alpha>0$$

$$|a|\leq 1 \Rightarrow \left|\frac{a^n}{n^\alpha}\right| = \frac{|a|^n}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{a^n}{n^\alpha}\right| < \frac{1}{n^\alpha} \longrightarrow -\frac{1}{n^\alpha} < \frac{a^n}{n^\alpha} < \frac{1}{n^\alpha}$$

$-\frac{1}{n^\alpha} \to 0$, $\frac{1}{n^\alpha} \to 0$, $\frac{a^n}{n^\alpha} \to 0$ $\to$ x il 2° criterio del confronto

CRITERIO DEL RAPPORTO

Sia $a_n > 0$ $\forall n$ oppure $\forall n > n_0$

Supponiamo che $\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

1) se $\ell < 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

2) se $\ell > 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

3) $\ell = 1$ non dico nulla

Es.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

uso il criterio del rapporto se $a > 0$

$$a_n = \frac{a^n}{n!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} = a \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{a}{n+1}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a}{\underbrace{n+1}_{\to +\infty}} = 0 < 1 \implies$$ la successione tende a zero.

$a < 0$

$$\left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^n}{n!} \to 0$$

$$a_n \to 0 \iff |a_n| \to 0$$

$$f(x) \to 0 \iff |f(x)| \to 0$$

$\lim \frac{n!}{n^n} = 0$ da trovare