NUMERO: 953

DATA: 05/05/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Orestano

MATERIA: Analisi Matematica I

Prof. Chiadò-Piat

ORESTANO SUSANNA ANALISI 1

ANALISI MATEMATICA 1 – 2013/14 (cognomi da NICP a PEREZ)

Lezioni: prof. Valeria Chiadò Piat, valeria.chiadopiat@polito.it
Esercitazioni: prof. Paola Arnaldi Suria, paola.suria@polito.it
Testo di riferimento per le lezioni: C. Canuto, A. Tabacco, Analisi Matematica , 3^ edizione, Springer, (CT)
Testi di riferimento per le esercitazioni: S. Lancelotti, Esercizi di Analisi Matematica I, Celid, 2010, (L). **Altro testo consigliato:** G. Quelali, Esercizi svolti si Analisi Matematica I, con quesiti di autovalutazione, CLUT 2013.
Altri testi, orario di consulenza, modalità d'esame: http://didattica.polito.it
Materiale per i prerequisiti: Corso di accompagnamento di matematica . http://elearning.polito.it/courses/2010_PRE_MATE/document/Videolezioni.html?cidReq=2010_PRE_MATE
Sito di riferimento per altro materiale didattico: http://didattica-online.polito.it

PROGRAMMA DELLE LEZIONI (ogni lezione è di 90 minuti, tot. 40 incontri)
Giovedì ore 10-13, Venerdì ore 14.30-16, aula 4, sede centrale

Per una migliore comprensione, gli studenti sono invitati a leggere il testo prima delle lezioni.

LEZ. 1 - Logica: richiami su proposizioni, connettivi logici, predicati, quantificatori. CT 1.2,

LEZ. 2, 3 - Insiemi, prodotto cartesiamo. Insiemi numerici, numeri razionali. Fattoriale e coefficienti binomiali. I numeri reali. L'assioma di completezza. Il numero e. CT 1.1, 1.5, 1.3

LEZ. 4, 5, 6 - Numeri complessi. Forma algebrica, operazioni di somma, prodotto, inverso, modulo, coniugato, semplificazione di espressioni algebriche. Confronto con i vettori del piano. Coordinate polari nel piano, forma trigonometrica, prodotto, potenza. radice n-esima. Forma esponenziale, teorema fondamentale dell'algebra, risoluzione di equazioni, sistemi, disequazioni in campo complesso. CT 8.1- 8.3

LEZ. 7, 8 - Relazioni e funzioni. Richiami su relazioni nel piano, funzioni, dominio, codominio, grafico, immagine e controimmagine di un elemento e di un insieme. Funzioni iniettive, suriettive, biiettive, funzione inversa, funzioni monotone, funzione composta, esempi di funzioni elementari CT 1.6, 2.1- 2.6

LEZ. 9 – Inotrni. Limiti di successioni. CT 3.1, 3.2.

LEZ. 10, 11, 12 - Limiti di funzioni, continuità, limiti all'infinito, limiti laterali, limiti di funzioni monotone. CT 3.10-3.12.

LEZ. 13, 14, 15 – Unicità e segno di un limite. Teoremi del confronto. Algebra dei limiti. Principio di sostituzione. Limiti notevoli e forme indeterminate di tipo esponenziale. CT 4.1, 4.2.

LEZ. 16, 17, 18 - Confronto locale di funzioni, simboli di Landau e loro proprietà. Uso di ~ ("equivale") in prodotti e quozienti. Principio di eliminazione dei termini trascurabili,

LOGICA

→ PROPOSIZIONI frasi dal contenuto inequivocabilmente vero/falso

connettivi:

1) NEGAZIONE ($\neg$) (NON) afferma il contrario

p	$\neg p$
V	F
F	V

binarie

2) CONGIUNZIONE ($\wedge$) (ET) afferma contemporaneamente 2 proposizioni

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
F	F	F
V	F	F
F	V	F

vera solo se entrambe vere

3) DISGIUNZIONE ($\vee$) (VEL) non esclusivo: afferma che si verifica ALMENO uno dei contenuti

p	q	$p \vee q$
V	V	V
F	F	F
V	F	V
F	V	V

F → solo se entrambe false es. $2 \leq 3$ $\begin{cases} 2<3 \ \text{V} \\ \vee \\ 2=3 \ \text{F} \end{cases}$ V

almeno una è vera

4) DISGIUNZIONE ESCLUSIVA (AUT) $(p \vee q) \wedge (\neg(p \wedge q))$

5) IMPLICAZIONE ($\Rightarrow$) p implica q
se vale p allora vale q
p è condizione sufficiente per q
q è condizione necessaria per q

p causa (Hp), q effetto (Th)

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
F	F	V
V	F	F
F	V	V

stessa tabella di $(\neg p) \vee q$

p	q	$\neg p$	$(\neg p) \vee q$
V	V	F	V
F	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V

es. p: il triangolo T è equilatero
q: il triangolo T è isoscele

p	q	?
V	V	V
F	F	V
V	F	F
F	V	V

→ $p \Rightarrow q$

6) DOPPIA IMPLICAZIONE ($\Leftrightarrow$) se e solo se (equivalenza logica)

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
F	F	V
V	F	F
F	V	F

vera quando hanno lo stesso valore di verità

$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

es: p: il triangolo T è equilatero
q: il triangolo T è equiangolo

INSIEMI

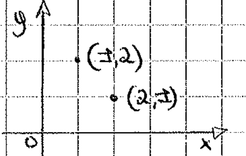
$\in$ appartenenza
$\subseteq$ inclusione ($\subset$ incluso strettamente)
$A-B$ o $A\setminus B$ differenza e complementare
$A\cap B$ intersezione
$A\cup B$ unione

$A\subseteq B$ se e solo se $\forall x \mid (x\in A) \Rightarrow (x\in B)$
$A=B$ se e solo se $\forall x \mid (x\in A) \Leftrightarrow (x\in B)$
$A-B=\{x\in A : \neg(x\in B)\}$
$A\cap B=\{x : (x\in A)\wedge(x\in B)\}$
$A\cup B=\{x : (x\in A)\vee(x\in B)\}$

→ PRODOTTO CARTESIANO $A\times B=\{(x,y) : x\in A, y\in B\}$

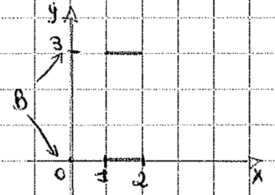
(x,y) è diverso da $\{x,y\}$, che non tiene conto dell'ordine
└ coppia ORDINATA

OSSERVAZIONI:
- in un insieme, se $x=y$ $\{1,1\}\rightarrow\{1\}$ e $\{x,y\}=\{y,x\}$
- invece $(x,y)\neq(y,x)$



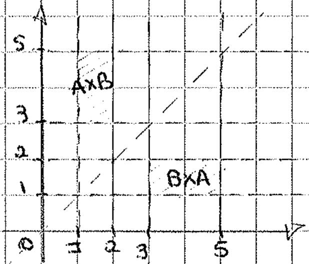
es.: $A=[1,2]=\{x\in\mathbb{R} \mid 1\leq x\leq 2\}$
$B=\{0,3\}$

$\{(x,y) \mid 1\leq x\leq 2,\ y\in\{0,3\}\}$



p.ti che appartengono alle rette $y=0$ o $y=3$ con $1\leq x\leq 2$

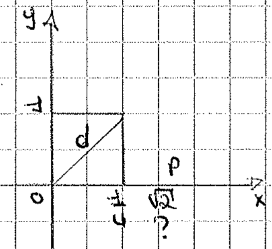
es.: $A=[1,2]$
$B=[3,5]$



→ INSIEMI NUMERICI

$\mathbb{N}$ numeri naturali $\{0,1,2\ldots\}$
$\mathbb{Z}$ numeri interi relativi $\{-2,-1,0,1,\ldots\}$
$\mathbb{Q}$ numeri razionali $\{\frac{p}{q} : p,q\in\mathbb{Z}, q\neq 0\}$
$\mathbb{R}$ numeri reali
$\mathbb{C}$ numeri complessi

→ NUMERI REALI



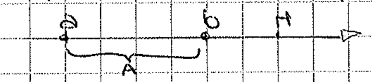
non tutti i numeri possono essere rappresentati su una retta.
solo $\forall x\in\mathbb{Q}$
$d^2=2$
$|OP|=\sqrt{2}$

TEOR SE IL NUMERO P SODDISFA $P^2=2$, ALLORA P NON È RAZIONALE.

dim. Per assurdo, si suppone che P abbia ascissa razionale; essa sarà $x=\frac{p}{q}$ con $p,q\in\mathbb{Z}$ e $q\neq 0$, con p e q per esempio primi tra loro (nessun fattore comune tranne 1).

—▷ MAGGIORANTI/MINORANTI, ESTREMI E MASSIMI/MINIMI

si considera $A \subseteq \mathbb{R}$



- $M \in \mathbb{R}$ è maggiorante di A se è il numero più grande di tutti gli elementi di A
  $M \geq x, \forall x \in A$

- $m \in \mathbb{R}$ è minorante di A se è il numero più piccolo di tutti gli elementi di A
  $m \leq x, \forall x \in A$

se un insieme ha almeno un MAGGIORANTE/MINORANTE è superiormente/inferiormente limitato

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ —▷ non valgono più regole come $0 \cdot x$ se $x = \pm\infty$

un insieme LIMITATO ≠ insieme FINITO —▷ riguarda il numero di elementi

- M è MASSIMO di A: 1) $M \in A$
  2) M è maggiorante di A

- m è MINIMO di A: 1) $m \in A$
  2) m è minorante di A

TEOR. IL MASSIMO ESISTE ED È UNICO (idem per il minimo)

dim: per assurdo si suppone che i massimi siano due, M e M', con $M \neq M'$

Per definizione: 1) $M, M' \in A$
2) M, M' maggioranti di A

per la proprietà 2, $M \geq x, \forall x \in A$ e $M' \geq x, \forall x \in A$; se $x = M'$, $M \geq M'$ e se $x = M$, $M' \geq M$

$\Rightarrow M' = M$

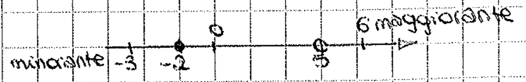
ma quindi non possono esistere due massimi (o minimi) diversi.

q.e.d.

- S è ESTREMO SUPERIORE di A se S è il minimo dei maggioranti di A, e se non ce ne sono è $+\infty$ ($S = \sup A = +\infty$)

- s è ESTREMO INFERIORE di A se s è il massimo dei minoranti di A, e se non ce ne sono è $-\infty$ ($s = \inf A = -\infty$)

es.1: $A = [-2;5) = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x < 5\}$



maggioranti $M_+(A) = [5;+\infty) = \{x \mid x \geq 5\}$

minoranti $M_-(A) = (-\infty;-2] = \{x \mid x \leq -2\}$

$\min A = -2 = \inf A$

$\max A \neq 5 = \sup A$

es.2 $B = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{\text{pari}\}$

B è superiormente illimitato

$M_-(B) = (-\infty;0]$

$\min B = 0 = \inf B$

$\nexists \max B \quad +\infty = \sup B$

es.3 $C = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}, n \neq 0\right\}$

$M_+(C) = [1;+\infty)$ } limitato
$M_-(C) = (-\infty;0]$

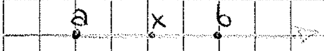
$\min C \neq 0 = \inf C$

$\max C = 1 = \sup C$

② TEOREMA DI DENSITÀ DEI NUMERI RAZIONALI NEI REALI

Tra due numeri reali qualsiasi esistono infiniti numeri razionali

$\forall a, b \in \mathbb{R}$, con $a<b$
$\exists x \in \mathbb{Q} \mid a<x<b$



es. $a = \sqrt{2}$ $(\in \mathbb{R})$
$b = \sqrt{2} + \frac{1}{10}$ $(\in \mathbb{R})$ $\sqrt{2} < x < \sqrt{2} + \frac{1}{10}$

=▷ ogni reale può essere approssimato per DIFETTO (x es. 1,41) o per ECCESSO (x es. 1,42) da numeri razionali

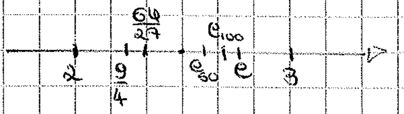
→ IL NUMERO DI NEPERO : e

$$e = \sup \underbrace{\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n : n \in \mathbb{R}, n \neq 0 \right\}}_{A}$$

- A non è vuoto : x es. se $n=1$, $\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2 \in A$
- per es. 3 ne è maggiorante : $\exists \sup A \in \mathbb{R} \to e$

$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ $n=1$, $e_1 = 2$
$\wedge$
$e_2 = \frac{9}{4}$
$\wedge$
$e_3 = \frac{64}{27}$
⋮

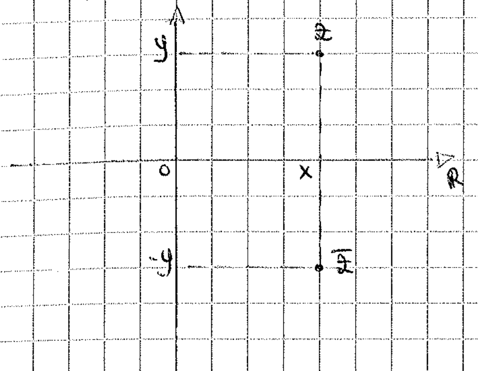
└ approssimano e dal basso: più cresce n, più si avvicinano i veri decimali di e



→ CONIUGATO DI UN NUMERO COMPLESSO

Se $z = x+iy$

$\boxed{\overline{z} = x-iy}$ ottenuto riflettendo rispetto all'asse reale e facendo il simmetrico di $z = x+iy$



- se z non ha parte immaginaria, $\overline{z}$ coincide con z
- se $z \in$ asse reale, il suo coniugato e' nello stesso punto
- $\overline{\overline{z}} = z$

• $\overline{z+w} = \overline{(a+ib)+(c+id)} = \overline{(a+c)+i(b+d)} = (a+c)-i(b+d)$

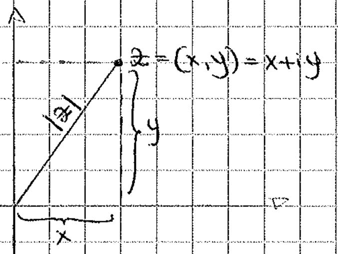
$\overline{z}+\overline{w} = (a-ib)+(c-id) = (a+c)-i(b+d)$

$\boxed{\overline{z+w} = \overline{z}+\overline{w}}$

• $\boxed{\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}}$

→ MODULO DI UN NUMERO COMPLESSO

e' il numero reale che misura la distanza euclidea del punto $z(x,y)$ dall'origine



$\boxed{|z| = \sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{(Re z)^2+(Im z)^2}$

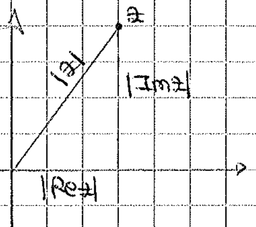
$|i| = 1$

es. $|2+3i| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$

$z \cdot \overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2 = |z|^2$

$\boxed{z \cdot \overline{z} = |z|^2}$ numero complesso per il suo coniugato = modulo al quadrato

e di conseguenza $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$



$|Re z| \leq |z|$ → $-|z| \leq Re z \leq |z|$

$|Im z| \leq |z|$

$|Re z| + |Im z| \geq |z|$

→ INVERSO DI UN NUMERO COMPLESSO

e' un numero z^{-1} tale per cui $z^{-1} \cdot z = 1$; e' uguale al numero coniugato a z fratto il modulo di z stesso

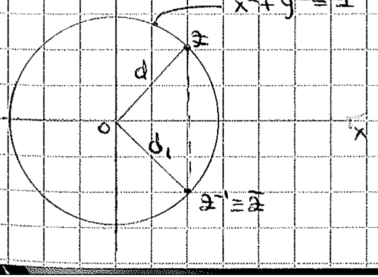
es. $z = 2+3i$

$z^{-1} = \frac{1}{2+3i} \cdot \frac{2-3i}{2-3i} = \frac{2-3i}{13} = \overset{Re z^{-1}}{\frac{2}{13}} - \frac{3}{13}i \; Im z^{-1}$

quindi se $z = x+iy$:

$z^{-1} = \frac{1}{x+iy} \cdot \frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2} i$

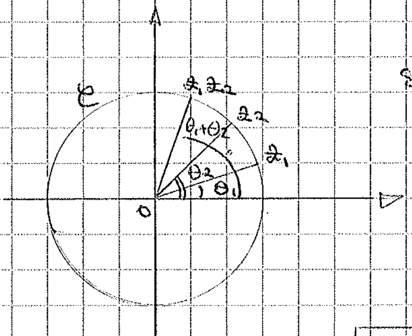
$\boxed{z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}}$



in una circonferenza goniometrica z^{-1} coincide con $\overline{z}$;

se la C fosse ad esempio $x^2+y^2 = \frac{1}{4}$, z^{-1} sarebbe sempre sullo stesso raggio di $\overline{z}$, ma con una distanza da 0 $d/{1/4}$, cioe' $4d = d_1$

es.:



se $|z_1| = |z_2| = 1$, $\mathcal{C} = x^2+y^2 = 1$

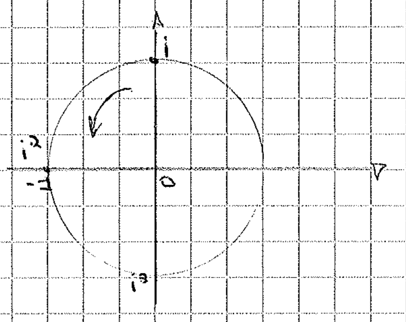
se $\rho_2 < \rho_1$ si restringe il raggio di $\mathcal{C}_2$ a cui appartiere $z_1 z_2$, se $\rho_2 > \rho_1$ viceversa.

x es se $z_1 = z_2 = \rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$
$z_1 z_2 = \rho^2(\cos 2\theta + i\,\text{sen}\,2\theta)$

④ POTENZA

$$\boxed{z^n = \rho^n(\cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta)}$$

$$i = 0 + 1i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right)$$



ogni volta che si moltiplica si aggiunge un angolo in senso antiorario (pari a quello iniziale)

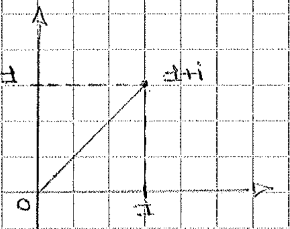
$i^3 = i^2 \cdot i \qquad +\frac{\pi}{2}$

$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$
$i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot -1 = 1$

$z^4 = 1$ • in $\mathbb{R}$ $z = \pm 1$
• in $\mathbb{C}$ $\left.\begin{matrix} z = -1 \\ z = +1 \end{matrix}\right\} \in \mathbb{R}$
$\left.\begin{matrix} z = +i \\ z = -i \end{matrix}\right\} \in \mathbb{C}$

---

es: $z = 1+i$ da scrivere in FORMA POLARE



$\rho = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{\rho} \\ \text{sen}\,\theta = \dfrac{x}{\rho} \end{cases} \qquad \begin{matrix} ① \\ ② \end{matrix}\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{sen}\,\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

① $\theta_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \qquad \theta_2 = \frac{-\pi}{4} + 2k\pi$
② $\theta_3 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \qquad \theta_3 = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$
$\Big]\ \theta = \frac{\pi}{4}$

$z = 1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$

es: PRODOTTO tra $z_1 = 1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$ e $z_2 = i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right)$

$z_1 z_2 = (1+i)i = i - 1 = -1+i$

$$z_1 z_2 = \sqrt{2} \cdot 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{3}{4}\pi\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1+i$$

es: POTENZA $(1+i)^{37}$?

$9\pi + \pi/4 = \cancel{8}\pi + \frac{5}{4}\pi$

$$z_1^{37} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)\right]^{37} = (\sqrt{2})^{37}\left(\cos\frac{37}{4}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{37}{4}\pi\right) =$$

$$= 2^{37/2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{5}{4}\pi\right) = \text{III quadrante}$$

$$= 2^{\frac{37}{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \varphi_k = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

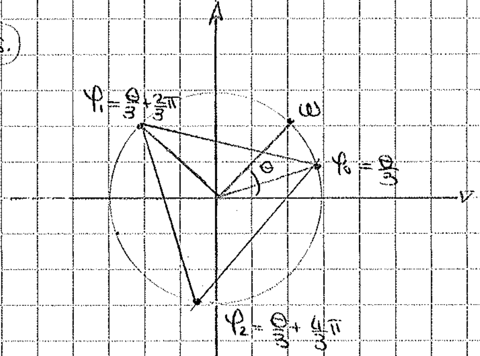
modulo della radice n-esima

argomento della radice n-esima, $\forall k \in \mathbb{Z}$

→ per avere n valori distinti sarà $k = 0, 1 \dots (n-1)$: dando a k un qualunque altro valore, si riottiene una delle radici $z_0, \dots z_{n-1}$

- le radici n-esime si trovano tutte sulla circonferenza di centro l'origine degli assi e raggio uguale a $\sqrt[n]{\rho}$; sono EQUIDISTANZIATE tra loro, cioè sono vertici di un POLIGONO REGOLARE di n lati.
- le soluzioni di $z^n = \omega$ saranno $\boxed{\sqrt[n]{\rho}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k}{n}\pi\right)}} = z_k$. (radici ennesime di ω)

es.



con n=3 TRIANGOLO EQUILATERO

$k=0, \quad \varphi_0 = \frac{\theta}{3}$

$k=1, \quad \varphi_1 = \frac{\theta}{3} + \frac{2}{3}\pi$

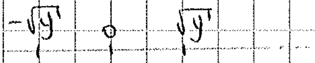
$k=2, \quad \varphi_2 = \frac{\theta}{3} + \frac{4}{3}\pi$

$k=3, \quad \varphi_3 = \frac{\theta}{3} + \frac{2\pi \cdot \cancel{3}}{\cancel{3}} = \frac{\theta}{3} = \varphi_0$ dopo n° "passi" si torna al pto di partenza

esempio per n=2:

in $\mathbb{R}$, $x^2 = y$ con $y > 0$, $x = \pm\sqrt{y}$

in $\mathbb{R}$



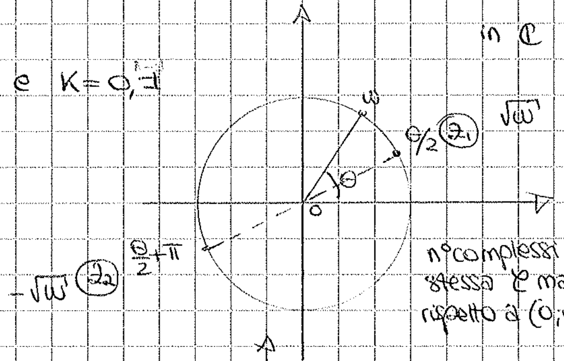
in $\mathbb{C}$, $z^2 = \omega \in \mathbb{C} \Rightarrow z_1, z_2$

$$|z| = \sqrt[2]{|\omega|} = \sqrt[2]{\rho}$$

$$\arg(z) = \frac{\theta}{2} + k\frac{2\pi}{2} = \frac{\theta}{2} + k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \text{ e } k = 0, 1$$

$k=0 \Rightarrow \arg(z_1) = \frac{\theta}{2}$

$k=1 \Rightarrow \arg(z_2) = \frac{\theta}{2} + \pi$

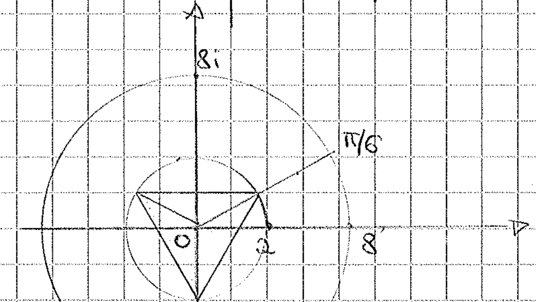


n° complessi opposti: stessa ρ ma simmetrici rispetto a (0;0)

es. $z^3 = 8i$

$\rho = 8 \qquad \theta = \frac{\pi}{2}$

$\sqrt[3]{\rho} = \sqrt[3]{8} = 2$



$k=0, \quad \arg(z_1) = \frac{\theta}{3} = \frac{\pi/2}{3} = \frac{\pi}{6}$

$k=1, \quad \arg(z_2) = \frac{\theta}{3} + \frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi = \frac{5}{6}\pi$

$k=2, \quad \arg(z_3) = \frac{\theta}{3} + \frac{4}{3}\pi = \frac{\pi}{6} + \frac{4}{3}\pi = \frac{3}{2}\pi$

$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i$

$z_2 = 2e^{i\frac{5}{6}\pi} = 2\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\,\mathrm{sen}\frac{5}{6}\pi\right) = -\sqrt{3} + i$

$z_3 = 2e^{i\frac{3}{2}\pi} = 2\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\,\mathrm{sen}\frac{3}{2}\pi\right) = -2i$

prova $(-2i)^3 = 8i$

proprieta' dei polinomi :

- TEOREMA di RUFFINI
  sia $P(x)$ un polinomio in x:
  $P(x_0)=0 \iff P(x)$ e' divisibile per $(x-x_0)$

ⓃⒷ "DIVISIBILE": $\exists$ un polinomio quoziente $Q(x)$ con resto nullo $\frac{P(x)}{x-x_0} = Q(x)$

- x_0 e' una radice di molteplicita' $m \in \mathbb{N}$ se il polinomio e' divisibile per $(x-x_0)^m$ ma non per $(x-x_0)^{m+1}$

es.: $P(x) = x^3-2x^2+x = x\,(x^2-2x+1) = x\,(x-1)^2$
$x_1 = 0$ molteplicita' 1 (rad. semplice)
$x_2 = 1$ molteplicita' 2 (rad. doppia)

TEOREMA FONDAMENTALE dell'algebra:

dato $P(z)$ a coefficienti complessi di grado $n \geq 1$:

1) $\exists\, z_0 \in \mathbb{C} \mid P(z_0)=0$
2) $\exists\, a \in \mathbb{C}$, $z_1 \dots z_k \in \mathbb{C}$
   con $z_1, \dots z_k$ radici di $P(z)$ di molteplicita' $m_1 \dots m_k$ tali che

$$P(z) = a\left(z-z_1\right)^{m_1} \dots \left(z-z_k\right)^{m_k}$$ FATTORIZZAZIONE del polinomio

PROPRIETA': sia $P(z)$ un polinomio di variabile z a coefficienti tutti reali

se $z_0 \in \mathbb{C}-\mathbb{R}$, $P(z_0)=0 \Rightarrow$ anche $\overline{z_0}$ verifica $P(\overline{z_0})=0$

└ se $P(z)=0$ ammette la radice complessa z_k di molteplicita' m_k, allora ammette anche la complessa coniugata con uguale molteplicita'.

(es) $z^3-2iz^2-(4+i)z-3=0$

$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} \dots = 0$

$\overline{P(z_0)} = \overline{a_n z_0^n + a_{n-1} z^{n-1}} = \overline{a_n z_0^n} + \overline{a_{n-1} z_0^{n-1}} \dots = \overline{a_n}\,\overline{z_0}^n + \overline{a_n}\,\overline{z_0}^{n-1} \dots =$

$= a_n \overline{z_0}^n + a_{n-1} \overline{z_0}^{n-1} \dots = 0$ avendo il polinomio con il coniugato di z_0 gli stessi coefficienti, avra' le stesse soluzioni.

* se il grado del polinomio e' DISPARI, l'equazione ammette almeno una radice reale

* se il grado del polinomio e' PARI, l'equazione puo' anche non avere radici reali

* se il polinomio manca di termine noto, allora una radice dell'equazione e' sicuramente la radice reale nulla

* se il polinomio ha solo potenze dispari, allora la funzione e' monotona strettamente crescente e quindi taglia Ox una sola volta $\rightarrow$ ammette solo una radice reale

* se il polinomio ha coefficienti complessi, non si puo' dire nulla a priori sulle sue radici, se non che almeno una sara' complessa

se $f[1,2)$, $\text{Im} f = (-1,0) \cup \{1\}$

$\underset{\text{ordinata}}{f^{-1}[0,1)} = (-1,0)$ $\qquad f^{-1}\{1\} = [0,1] \cup \{-1\}$

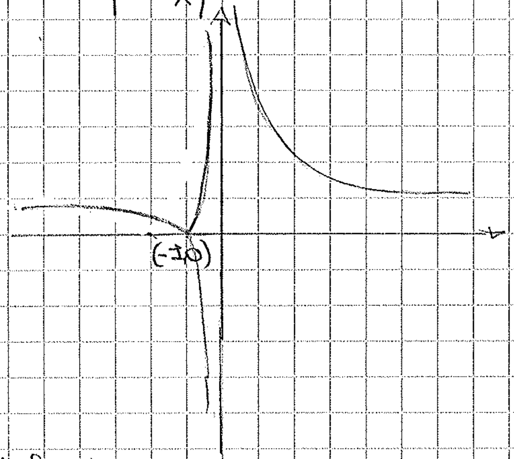
es. $f(x) = e^{2x} - 2e^x \quad f: \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$

$\text{dom} f(x) = \mathbb{R}$

- $f^{-1}(-1,8)$? $\quad -1 < f(x) < 8$

$$\begin{cases} f(x) > -1 \\ f(x) < 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} e^{2x} - 2e^x > -1 \\ e^{2x} - 2e^x < 8 \end{cases} \dots$$

es. $f(x) = \left| 1 + \frac{1}{x} \right|$ $\qquad \text{dom} f(x) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$



$$\left| 1 + \frac{1}{x} \right| = \begin{cases} 1 + \frac{1}{x} & \text{se } 1 + \frac{1}{x} \geq 0 \\ -\left(1 + \frac{1}{x}\right) & \text{se } 1 + \frac{1}{x} < 0 \end{cases}$$

$f(-\infty, -1] = [0, 1)$

$f^{-1}[1,2] \Rightarrow 1 \leq \left| 1 + \frac{1}{x} \right| \leq 2$

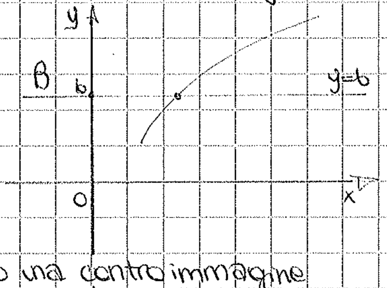
tipi di funzioni:

① INIETTIVA se ogni elemento del codominio ha AL PIU' una controimmagine

$\forall x_1, x_2 \in \text{dom} f \mid f(x_1) = f(x_2) \longrightarrow x_1 = x_2$

$\forall b \in B$, $f(x) = b$ ha al più una soluzione

l'iniettività si può ottenere tramite una restrizione



② SURIETTIVA se ogni elemento del codominio ha ALMENO una controimmagine

$\forall y \in B, \exists x \in A \mid f(x) = y$

$\forall b \in B$, $f(x) = b$ ha almeno una soluzione

la suriettività si può sempre ottenere scegliendo $B = \text{Im} f$

③ BIIETTIVA $<$ iniettiva o nessuna o 1 soluz. / suriettiva almeno una soluz. $\}$ 1 e una sola soluz.

$\forall y \in B$, l'equaz. $f(x) = y$ ha una e una sola soluzione

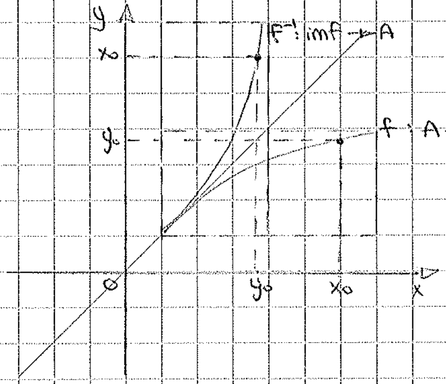
[se è iniettiva, si può avere la funzione INVERSA $f^{-1}(y) = x$]

$$\begin{aligned} f^{-1}: B &\longmapsto A \\ y &\longmapsto x \end{aligned}$$

—▷ FUNZIONE INVERSA

Se $f: A \rightarrow B$ è biettiva, si dice FUNZIONE INVERSA di f la funzione $f^{-1}: B \rightarrow A$ tale che

$$\boxed{f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x}$$



$(y_0, x_0) \in$ grafico di f^{-1}

$(x_0, y_0) \in$ grafico di f

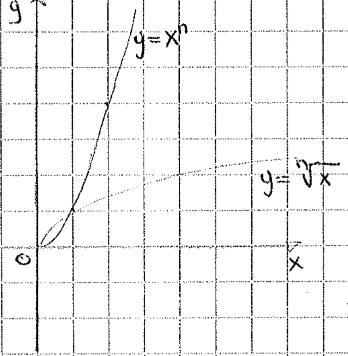
* se $f: A \rightarrow B$ è iniettiva, allora $f: A \rightarrow Imf$ è biettiva, ed è definita la funzione inversa

* se $f(x)$ è strettamente crescente, $f^{-1}(x)$ è ancora crescente $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

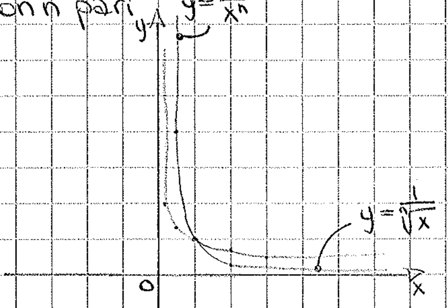
$f^{-1}: x \Leftarrow y$

esempi con funzioni elementari:

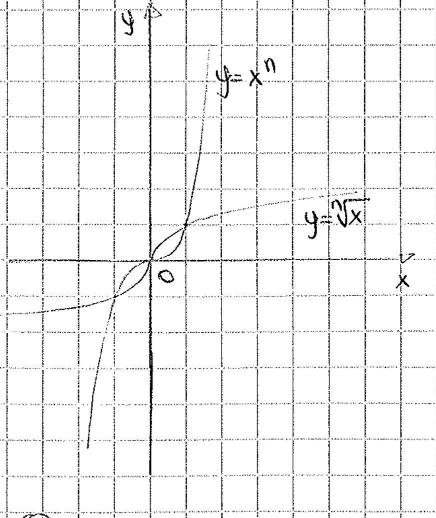
Ⓐ FUNZIONE POTENZA

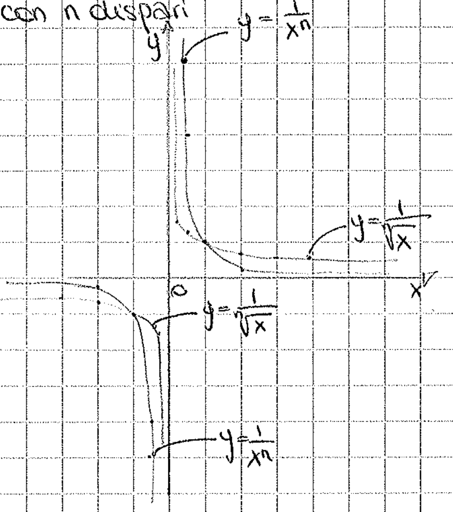


* con n pari

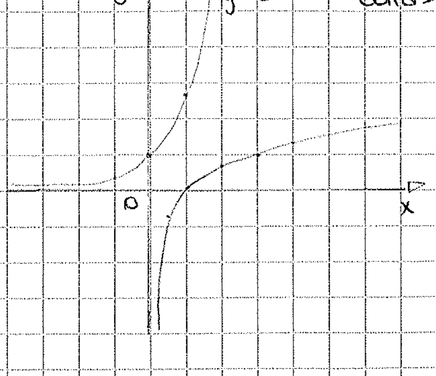


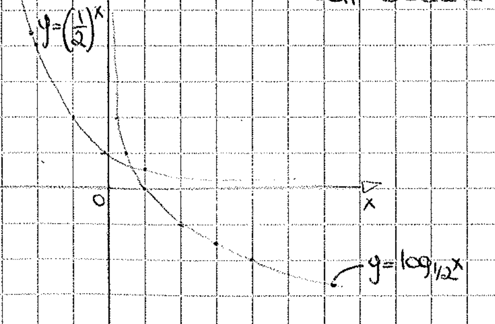
* con n dispari



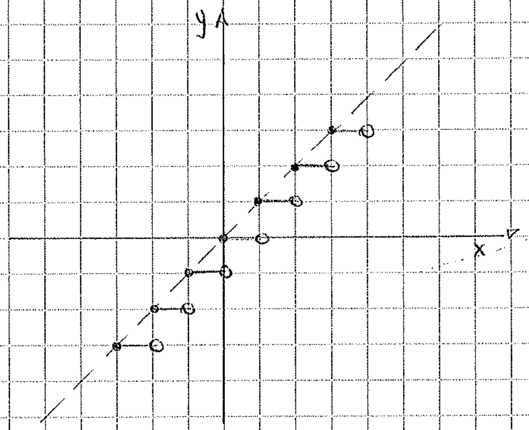


Ⓑ ESPONENZIALI e LOGARITMI





Funzione PARTE INTERA di x:



$f(x) = [x] = E(x) = \lfloor x \rfloor$

$[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} / n \leq x\}$

si prendono tutti gli interi a sinistra di x

$x_1 < x_2 \Rightarrow [x_1] \leq [x_2]$

$0 < x < 1 \quad [x] = 0$

$1 < x < 2 \quad [x] = 1$

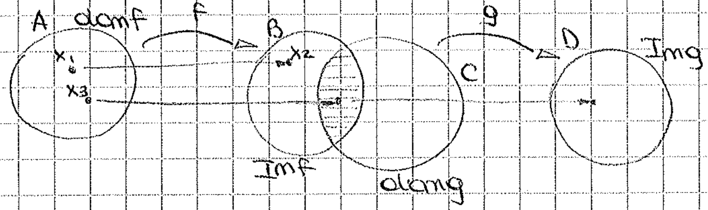
$-1 < x < 0 \quad [x] = -1$

→ FUNZIONE COMPOSTA $\boxed{h(x) = g[f(x)]}$

$f: A \rightarrow B, \quad g: C \rightarrow D$

$x \rightarrow f(x) = y, \; f(x) = y \rightarrow g(y) = z$

le funzioni si possono comporre a condizione che $Imf \cap domg \neq \emptyset$ [hanno elementi in comune]



$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$

$dom(g \circ f) = \{x \in domf / f(x) \in domg\} = f^{-1}(domg \cap Imf)$ controimmagini tramite f dei dominio di g

es.

$f(x) = x+1 \qquad A = \mathbb{R} \qquad B = \mathbb{R}$

$g(x) = x^2 \qquad C = \mathbb{R} \qquad D = [0, +\infty)$

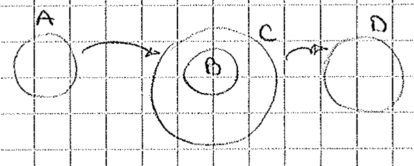
$x \in \mathbb{R} \xrightarrow{f} (x+1) \rightarrow g(x+1) = (x+1)^2$

$g[f(x)] = g \circ f = (x+1)^2$

es.

$f(x) = x^2 \qquad A = \mathbb{R} \qquad B = [0, +\infty)$

$g(x) = x+1 \qquad C = \mathbb{R} \qquad D = \mathbb{R}$



$g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1$

la funzione composta non è commutativa

es.

$f(x) = 2 - x^2 \qquad A = \mathbb{R} \qquad B = (-\infty, 2]$

$g(x) = \sqrt{x} \qquad C = [0, +\infty) \quad D = (0, +\infty)$

$B \cap C = (-\infty, 2] \cap [0, +\infty) = [0, 2] = \emptyset$

$dom(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} : 2 - x^2 \geq 0\} \qquad dom(g \circ f) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(2 - x^2) = \sqrt{2 - x^2}$

→ se f e g sono monotòne:

① f e g crescenti, $g \circ f$? CRESCE

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g[f(x_1)] = g[f(x_2)]$

$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow g[f(x_1)] \leq g[f(x_2)]$

② f e g decrescenti, $g \circ f$? CRESCE

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \qquad g[f(x_1)] \leq g[f(x_2)]$

se f cresce/decresce e g decresce/cresce, $g \circ f$ decresce

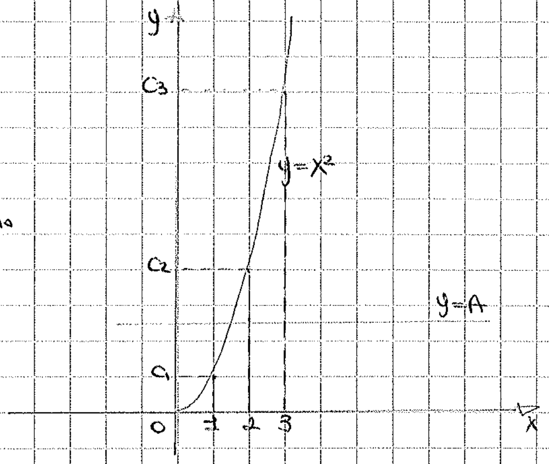
- $c_n = n^2, \ \forall n \in \mathbb{N}$

c_n divergente a $+\infty$ (positivamente)

$\lim_{n \to +\infty} c_n = +\infty \iff \forall A > 0, \forall A \in \mathbb{R}$

se per ogni $A \in \mathbb{R} \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid c_n > A, \forall n \geq n_0$

$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \overset{(>)}{\geq} n_0, \ c_n \overset{(>)}{\geq} A$



verifica: si fissa A

$n^2 > A$

se $A > 0, \ n > \sqrt{A}$

se $A = 0, \ \forall n > 0$

se $A < 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

e se $c_n = -n^2, \forall n \in \mathbb{N}$ la successione diverge negativamente

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty \iff \forall A > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0 \ a_n > A, A \in \mathbb{R}}$$

DEF. DI LIMITE A $+\infty$

- $a_n = (-1)^n$ non si stabilizza il comportamento della successione

$a_0 = 1 \quad a_1 = -1 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = -1$

il possibile candidato limite oscilla $\Rightarrow$ successione indeterminata o oscillante

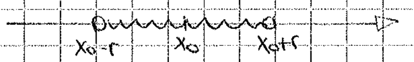
se $\varepsilon > 1$, OK la distanza e' $< \varepsilon$

se $\varepsilon < 1$, non ci si avvicina al presunto $\ell = 0$

$\to$ INTORNI E LIMITI

caso finito: dato $x_0 \in \mathbb{R}$, si dice intorno di x_0 di raggio $r > 0$ l'intervallo aperto

$$I_r(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}$$



caso infinito: dato $a \in \mathbb{R}$, si dice intorno di $+\infty$/$-\infty$ di estremo inferiore/superiore a l'intervallo aperto

$I_a(+\infty) = (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$

$I_a(-\infty) = (-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$

definizione di limite di successione:

sia $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, con $\overline{\mathbb{R}}$ che indica $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

si dice che a_n ha limite ℓ per n che tende a $+\infty$ e si scrive

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell}$$

se per ogni intorno $I(\ell)$ esiste un intorno $I(+\infty)$ tale che $a_n \in I(\ell)$ per ogni $n \in I(+\infty)$.

$$\boxed{\forall I(\ell) \ \exists I(+\infty) \mid a_n \in I(\ell) \ \forall n \in I(+\infty)}$$

$\hookrightarrow \overset{I_\varepsilon(\ell)}{\forall \varepsilon} \ \overset{I_{n_0}(+\infty)}{\exists n_0} \mid a_n \in \overset{(\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)}{I_\varepsilon(\ell)} \iff |a_n - \ell| < \varepsilon$

$\forall n \in I_{n_0}(+\infty) \iff \forall n > n_0$

(es.) $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2n}{n+1}\right) = 2$ successione convergente

$\ell = 2$

$a_n = \frac{2n}{n+1}$

DEF. per ogni intorno di 2, esiste un intorno di $+\infty$ tale che $\frac{2n}{n+1}$ appartiene all'intorno di 2 scelto all'inizio, per tutti gli n appartenenti all'intorno di $+\infty$

$\forall I(2) \ \exists I(+\infty) \mid \frac{2n}{n+1} \in I(2), \ \forall n \in I(+\infty)$

$I(2) = I_\varepsilon(2) = (2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R} : |y - 2| < \varepsilon\}$

LIMITI DI FUNZIONI

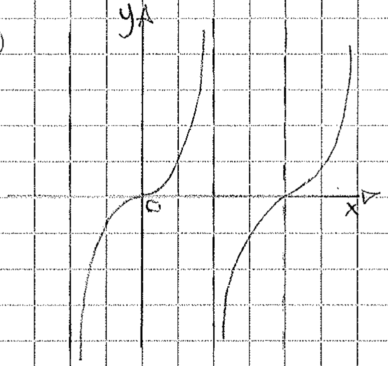
si considerano funzioni $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

(per una successione si hanno solo valori $\in \mathbb{N}$, per una funzione si hanno tutti)

si puo' parlare di:

- come si comporta $f(x)$ per x da un certo punto in poi ($x > a$) solo se domf contiene un $I(+\infty)$: $(a;+\infty) \subset$ domf $\rightarrow$ discutere f per $x \rightarrow +\infty$
- come si comporta per x vicini a x_0 ($x \neq x_0$) se in $I(x_0)$ ci sono infiniti punti del dominio di f $\rightarrow$ discutere f per $x \rightarrow x_0$

es.



$f(x) = tgx$ domf non contiene un $I(a;+\infty)$, pero' domf $\cap (a;+\infty)$ da' infiniti valori, quindi ci si puo' porre il problema del limite $x \rightarrow +\infty$

$\nexists \lim\limits_{x \rightarrow +\infty} tgx$ e' indeterminata

casi in cui domf contiene $I(+\infty)$:

con $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ e $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $I(+\infty) \subseteq$ domf

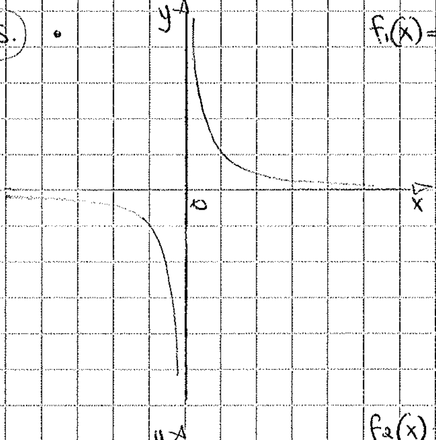
$\boxed{\forall I(\ell) \exists I(+\infty) \mid f(x) \in I(\ell) \ \forall x \in I(+\infty) \cap \text{domf}}$ $\boxed{\lim\limits_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell}$

comportamenti di $f(x)$ per $x \rightarrow +\infty$:

- CONVERGE: $\exists \lim\limits_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ limite finito
- DIVERGE: $\exists \lim\limits_{x \rightarrow +\infty} f(x) \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$
- INDETERMINATA: $\nexists \lim\limits_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

es.

-

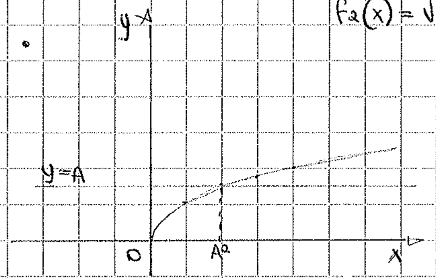


$f_1(x) = \frac{1}{x}$

$D = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$

$\lim\limits_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0^+ = \ell$

-



$f_2(x) = \sqrt{x}$

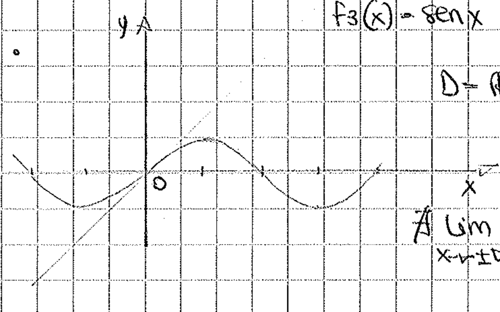
$D = [0;+\infty)$

$\begin{cases} y = A \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$ $x = A^2$

$\lim\limits_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

$\forall A > 0 \ \exists a = A^2 \mid \forall x > a = A^2 \ f(x) = \sqrt{x} > A$

-



$f_3(x) = \operatorname{sen} x$

$D = \mathbb{R}$

$\nexists \lim\limits_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{sen} x$

la condizione $\exists a \mid (a;+\infty) \subseteq$ domf e' soddisfatta in tutti e 3 i casi.

└ ci sono valori vicini a $+\infty$ dove si possa calcolare $f(x)$

$+\infty$ e' detto PUNTO DI ACCUMULAZIONE del dominio di f

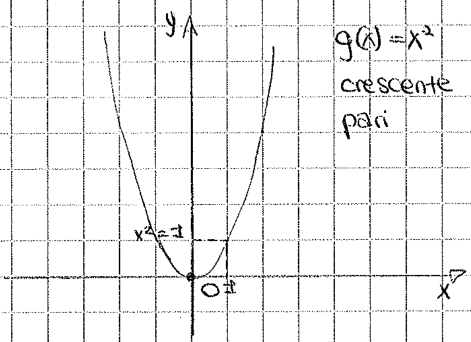
(vale lo stesso per $-\infty$)

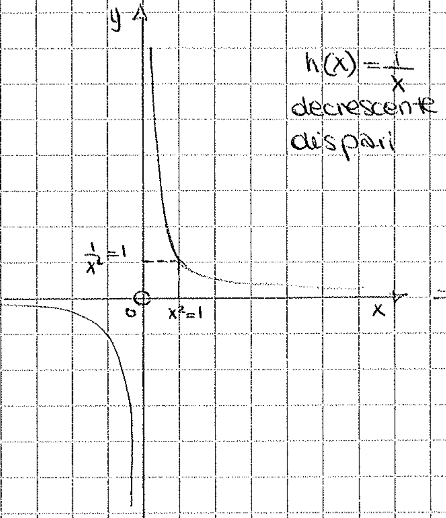
└ $(-\infty;a) \subseteq$ domf

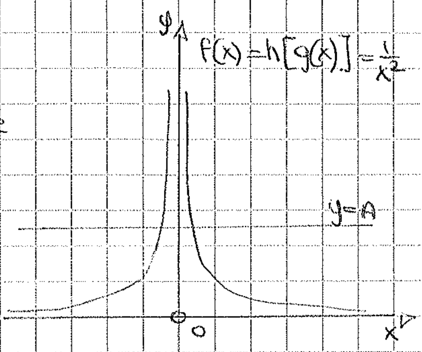
cioe' si studia la funzione per $x < a$

se $x \to 0$, ma il limite non e' finito:

(es) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$







$\llcorner\!\!\to$ decrescente e pari (io e' l'interna)

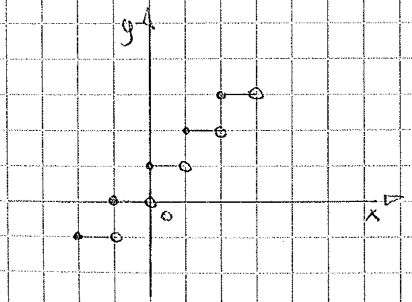
$\forall A > 0 \; \exists \delta > 0 \mid \forall x \in I\delta(0) \quad f(x) > A \qquad (\text{con } x \neq 0 \text{ e } x \in \text{dom} f)$

$\begin{cases} y = A \\ y = \frac{1}{x^2} \end{cases} \quad x = \pm \frac{\sqrt{A}}{A} \Rightarrow \delta = \frac{\sqrt{A}}{A}$

se $x \to 0$, ma il limite non esiste:

(es) • $f_1(x) = \frac{1}{x}$ $D = \mathbb{R} - \{0\}$ $\nexists \lim_{x \to 0} f_1(x)$

• $f_2(x) = [x]$



$\lim_{x \to 0^+} [x] = 0$

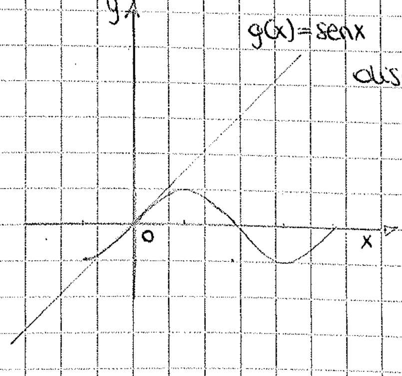
$\lim_{x \to 0^-} [x] = -1$

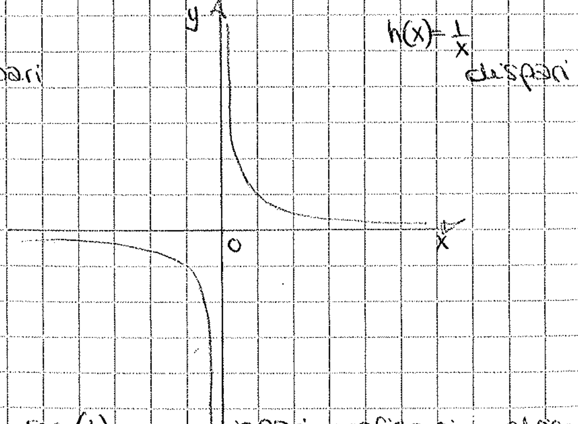
discontinuita' di 1° specie

$\lim_{x \to x_0^+}$ e $\lim_{x \to x_0^-}$ esistono, sono finiti ma diversi

$\lim_{x \to 0^+} [x] = 0 = f(0)$ continua da destra

• $f_3(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ $D = \mathbb{R} - \{0\}$





$\text{sen}\left(\frac{1}{-x}\right) = \text{sen}\left(-\frac{1}{x}\right) = -\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ dispari, grafico simmetrico a O(0,0)

dato che l'ultima funzione ad agire e' il seno, $-1 \leq f(x) \leq 1$

$\rightarrow$ SUCCESSIONI MONOTONE

CASO CRESCENTE

per le funzioni vale che $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$ $f(x_1) \leq f(x_2)$

per le successioni $a_n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $n_1 < n_2$ $a(n_1) \leq a(n_2)$

$\llcorner$ se la successione ha questa proprietà per indici qualunque, in particolare ce l'ha per indici consecutivi

$n_1 = n$
$n_2 = n+1$

se $a_n \leq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ la successione è MONOTONA CRESCENTE $\leftarrow\!\lrcorner$

Si fissano $n_1 < n_2$ qualunque:

$n_1 < n_1 + 1$

$n_1 + 1 < n_1 + 2$ $\qquad a_{n_1} < a_{n_1+1} < a_{n_1+2}$ $\qquad$ anche tra indici qualsiasi vale la disuguaglianza

(es.) $a_n = \frac{2n}{n+1}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$ $\quad$ è monotona?

$n = 0$, $a_n = 0$; $n = 1$, $a_n = 1$ $\qquad$ dovrebbe essere crescente: $a_n \leq a_{n+1}$?

$$\frac{2n}{n+1} \leq \frac{2(n+1)}{n+2} = \frac{2n+2}{n+2} \qquad \overset{\ulcorner > 0}{(n+2)}\, 2n \leq \underset{\llcorner > 0}{(n+1)}\, (2n+2)$$

$2n^2 + 4n - 2n^2 - 2n - 2n - 2 \leq 0$

$-2 \leq 0$ sì $\forall n$ $\quad \longrightarrow$ a_n è strettamente crescente (vale anche con il minore strettamente)

(es) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ con $n \geq 1$

si può dire che è strettamente crescente

$e_1 = 2 < e_n < 3$

$$e = \sup \left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n : n \geq 1 \right\}$$

TEOR. LIMITE DI SUCCESSIONI MONOTONE

1) se a_n è crescente e superiormente limitata $\exists \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = S$, con $S = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

2) se a_n è crescente e superiormente illimitata $\exists \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty = \sup(a_n)$

quindi se a_n è crescente $\exists \lim\limits_{n \to +\infty} a_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

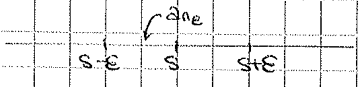
ad es. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ $\qquad$ se a_n è superiormente limitata, allora A è superiormente limitato

$a_0 \in A$, $a_0 \neq 0$

$\exists S = \sup A \in \mathbb{R}$ $\qquad$ a) S è maggiorante di A $\quad a_n \leq S$

b) S è il più piccolo dei maggioranti di A $\quad \forall \varepsilon > 0 \;\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid a_{n_\varepsilon} > S - \varepsilon$



$\forall n > n_\varepsilon$, $a_n \geq a_{n_\varepsilon}$

$S - \varepsilon < a_n \leq S < S + \varepsilon$

→ TEOREMI SUI LIMITI

DEF. di limite con $x_0, \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \forall I(\ell)\ \exists I(x_0) \mid \forall x \in I(x_0),\ x \neq x_0,\ x \in \text{dom} f \implies f(x) \in I(\ell)}$$

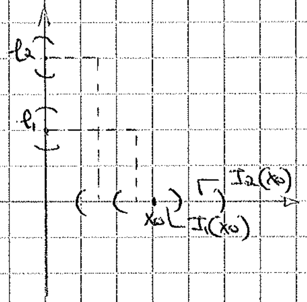
si suppone a priori che $[I(x_0) \cap \text{dom} f] - \{x_0\}$ sia diverso da zero: x_0 e' di accumulazione per il dominio di f. Non e' evidente che ℓ sia univocamente determinato da quelle condizioni

① TEOREMA DI UNICITA' DEL LIMITE $\boxed{\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1,\ \exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_2 \implies \ell_1 = \ell_2}$

Supponendo che f ammetta limite (finito o infinito) per x tendente a x_0, f non ha altri limiti per x tendente a x_0.

dim. - procedendo per assurdo, suppongo che esistano due limiti ℓ_1 e ℓ_2 e che $\ell_1 \neq \ell_2$

- quindi esisteranno $I(\ell_1)$ e $I(\ell_2)$ in modo che $I(\ell_1) \cap I(\ell_2) = \emptyset$



- utilizzo la def. di limite per ℓ_1:

dato $I(\ell_1)$: $\exists I_1(x_0) \mid \forall x \in I_1(x_0),\ x \neq x_0,\ x \in \text{dom} f \implies f(x) \in I(\ell_1)$

- utilizzo la def. di limite per ℓ_2:

dato $I(\ell_2)$ $\exists I_2(x_0) \mid \forall x \in I_2(x_0),\ x \neq x_0,\ x \in \text{dom} f \implies f(x) \in I(\ell_2)$

- L'intersezione dei due intorni di x_0 sara' un altro intorno di x_0

$I_1(x_0) \cap I_2(x_0) = I(x_0)$

- per $x \in I(x_0)$ valgono entrambe le due definizioni di limite e quindi, con $x \neq x_0$ e $x \in \text{dom} f$, $f(x) \in [I(\ell_1) \cap I(\ell_2)]$

ma $I(\ell_1)$ e $I(\ell_2)$ avevano intersezione vuota, quindi si giunge ad un assurdo.

q.e.d.

i problemi quindi sono:

a) dire se $\lim_{x \to x_0} f(x)$ esiste
- se f e' continua, x_0 e' di accumulazione per dom f
- se f e' monotona in $I(x_0)$, esistono i limiti laterali $\lim_{x \to x_0^+}$ e $\lim_{x \to x_0^-}$ → $I_+(x_0)$ e $I_-(x_0)$

b) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$?

FUNZIONI CONTINUE

tutte le funzioni elementari (polinomi, funz. razionali, potenze, esponenziali, funz. trigonometriche e le loro inverse) sono continue in tutti i punti del dominio

- $P(x) = a_m x^n + a_{m-1} x^{n-1} \ldots + a_1 x + a_0$ funzione polinomiale

- $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ con P, Q polinomi funzione razionale

- $f(x) = x^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ ⟨ $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ funzione potenza algebra dei limiti: (nel caso finito)

siano $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = m$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$; $\ell, m \in \mathbb{R}$

- $\boxed{\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \ell \pm m}$ per es. $\lim_{x \to 4} \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right) = \frac{9}{4}$

dim. - per $\forall x \in I(x_0)$, $x \neq x_0$, $x \in (\text{dom}f \cap \text{dom}g)$ si avrà che:

$$|[f(x)+g(x)] - (\ell+m)| < \varepsilon$$

$$|(f(x)-\ell) + (g(x)-m)| < \varepsilon$$

- fissato $\varepsilon > 0$, si consideri l'intorno di ℓ e m di raggio $\frac{\varepsilon}{2}$; per la definizione di limite:

$\exists I_1(x_0) \mid \forall x \in I_1(x_0), x \neq x_0, x \in \text{dom}f \Rightarrow |f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\exists I_2(x_0) \mid \forall x \in I_2(x_0), x \neq x_0, x \in \text{dom}g \Rightarrow |g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2}$

$|(f(x)-\ell) + (g(x)-m)| \underset{\text{disug. triangolare}}{\leq} |f(x)-\ell| + |g(x)-m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ in $I(x_0) = I_1(x_0) \cap I_2(x_0)$

- per $\forall x \in I(x_0)$ valgono entrambe le relazioni $\Rightarrow$ il limite della somma e' uguale alla somma dei limiti

- $\boxed{\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \ell m}$

per es. $\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} (x \,\text{sen} x) = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{6}$

- se $m \neq 0$, $g(x) \neq 0$, $\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{m}}$

corollario: se $f(x)$ e $g(x)$ sono continue nel punto x_0, le loro funzioni somma algebrica, prodotto e quoziente lo sono nello stesso punto.

② TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ e $x > 0$ $(x \in \overline{\mathbb{R}})$
$\Rightarrow \exists I(x_0) \mid \forall x \in I(x_0) \Rightarrow f(x) > 0$ con $x \neq x_0$, $x \in \text{dom}f$

se $f(x)$ ammette limite (finito o infinito) ℓ per x tendente a x_0, se $\ell > 0$ o $\ell = +\infty$, $\exists I(x_0)$ tale che $f(x)$ e' strettamente positiva in esso $(x \neq x_0)$; vale allo stesso modo per il limite negativo.

dim. supponiamo che sia $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell > 0$;

per ipotesi, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists I(x_0) \mid \forall x \in I(x_0), x \neq x_0, x \in \text{dom}f \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \Rightarrow \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$

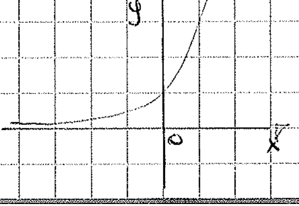
se ho scelto $\ell - \varepsilon > 0$, $\varepsilon < \ell$, $\underbrace{0 < \ell - \varepsilon < f(x)}$ $< \ell + \varepsilon$

quindi $f(x) > 0$, $\forall x \in I(x_0)$. q.e.d.

se ℓ fosse uguale a zero: $\left.\begin{matrix} \ell + \varepsilon = \varepsilon \\ \ell - \varepsilon = -\varepsilon \end{matrix}\right\}$ non si sa più se stanno sopra lo zero: la tesi non vale per $\ell = 0$

Analogamente, se $\ell < 0$, $\ell \in \mathbb{R}$, si trova $f(x) < 0$ in un opportuno $I(x_0)$

oss. dal segno del limite si può ricavare il segno della funzione, ma non vale il viceversa: $f(x) > 0 \not\Rightarrow \lim f(x) = \ell > 0$



ad esempio, $f(x) = e^x > 0$, $\forall x$

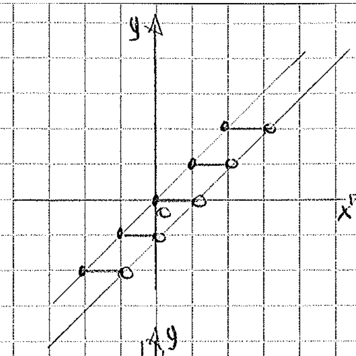
$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 = \ell$ e non e' positivo es. $\lim_{x \to +\infty} [x] = +\infty$

$$x - 1 < [x] \leq x$$

$+\infty \leftarrow$ (sotto $x-1$) $\qquad$ $x \to +\infty$

$$\downarrow$$

$$\ell = +\infty$$

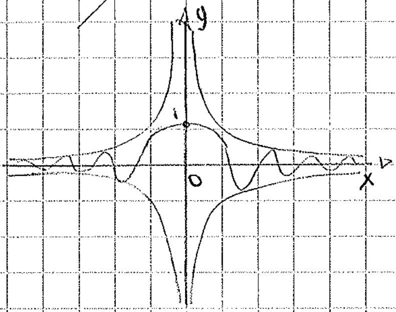


es. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

$0 \leftarrow$ $\qquad \downarrow \qquad$ $\to 0$

$$\ell = 0$$



es. $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1}$ non si possono usare i teoremi precedenti
1° LIMITE NOTEVOLE

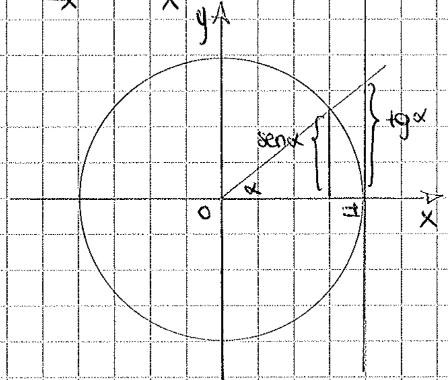
dim.: - la funzione e' PARI, dato che $f(-x) = \frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x} = \frac{-\operatorname{sen} x}{-x} = \frac{\operatorname{sen} x}{x} = f(x)$, quindi basta far tendere x a valori positivi

$\to 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$$\operatorname{sen}\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha$$

$$\downarrow \qquad\qquad \to \alpha < \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} < 1 \qquad\qquad \cos\alpha < \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}$$



$$\cos\alpha < \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} < 1$$

$1 \leftarrow$ $\qquad\qquad$ $\to$ funz costante

$$\downarrow$$

$\ell = 1, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ per $x \to 0^+$ $\qquad$ q.e.d.

- essendo pari la funzione, inoltre, $\lim_{x \to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = 1 = \lim_{x \to 0^+}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)$

④ TEOREMI DELL'ALGEBRA DEI LIMITI ESTESA (cioe' $\ell, m \in \overline{\mathbb{R}}$)

SOMMA ALGEBRICA

1) $+\infty + n = +\infty$ $\qquad$ es. $\lim_{x \to +\infty} (x+1) = +\infty$

2) $-\infty + n = -\infty$ $\qquad$ es $\lim_{x \to -\infty} (x+1) = -\infty$

3) $+\infty + \infty = +\infty$ $\qquad$ es. $\lim_{x \to +\infty} [3x^2 + (x+1)] = +\infty$

4) $-\infty - \infty = -\infty$ $\qquad$ es. $\lim_{x \to 0^+} \left(\log x - \frac{1}{x}\right) = -\infty$

forma indeterm.! 5) $\boxed{\pm\infty - (\pm\infty)}$ $\qquad$ es. $\lim_{x \to +\infty} (x^2 - x) = +\infty$ $\quad$ parabola con concavita' verso l'alto

$$\lim_{x \to +\infty} (x - x^2) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left[(x^2 + x) - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2\right] = -\frac{1}{4}$$

3) $\frac{s}{0} = \infty$ con $s \in \mathbb{R} - \{0\} \vee s = \pm\infty$ $\left|\frac{s}{0}\right| = +\infty \quad \forall s \in \overline{\mathbb{R}} - \{0\}$

$\boxed{\text{TEOR.}}$ SE $\underset{\text{con } x \to x_0}{g(x) \to 0}$, ALLORA $\frac{1}{|g(x)|} = +\infty$

dim.: - si vuole dimostrare che
$\forall M > 0 \; \exists I_1(x_0) \mid \forall x \in I_1(x_0) \wedge \text{dom}\left(\frac{1}{g}\right), x \neq x_0 \Rightarrow \frac{1}{|g(x)|} > M$

- per ipotesi si sa che $g(x)$ tende a zero per $x \to x_0$, quindi
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists I_2(x_0) \mid \forall x \in I_2(x_0) \wedge \text{dom} f, x \neq x_0 \Rightarrow |g(x) - 0| < \varepsilon, \; \frac{1}{|g(x)|} > \frac{1}{\varepsilon}$

- ci potrà essere un M per cui

$$\underbrace{\frac{1}{|g(x)|}} > \frac{1}{\varepsilon} \underbrace{> M}$$

$\frac{1}{|g(x)|} > M$, quindi è vero che la funzione tende a $+\infty$.

q.e.d.

⚠ può anche non esistere il limite

- $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad g(x) = x, \; x \to 0$ per $x \to x_0 = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^{\pm}} \frac{1}{x} = \pm\infty$ esistono solo limite destro e sinistro, ma non sono uguali

- $g(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ oscilla in modo sempre più fitto per x che tende a zero, ma non c'è il limite perchè i valori hanno segni positivi e negativi

4) $\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$ forma indeterminata Si raccoglie il termine di grado massimo

es. $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2n}{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = 2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x^2+1}{x-2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^{\cancel{2}}\left(1 + \frac{1}{3x^2}\right)}{\cancel{x}\left(1 - \frac{2}{x}\right)} = -\infty$

5) $\boxed{\frac{0}{0}}$ forma indet. si scompone in FATTORI:
se $P(x_0) = 0$, $P(x)$ è divisibile per $(x - x_0)$
$P(x) = (x - x_0) \, Q(x)$

es. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}} = 2$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3}{x^2+x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}(1+x)} = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^{\pm}} \frac{x^3+x^2}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0^{\pm}} \frac{\cancel{x^2}(x+1)}{x^{\cancel{3}}} = \pm\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cancel{x^2}(x+1)}{x^{4+2}} = +\infty$ (la funzione è positiva nell'intorno di 0)

OSSERVAZIONI per le forme $f(x)\cdot g(x)$, se $f(x)\to 0$ e $g(x)$ e' localmente limitata in $I(x_0)$:

$\exists m, M \mid m \le g(x) \le M, \forall x \in I(x_0) - \{x_0\}$

se $f(x)>0$ $\quad \underset{\overset{\downarrow}{0}}{mf(x)} \le \underset{\overset{\Downarrow}{0}}{f(x)\cdot g(x)} \le Mf(x) \to 0$

se $f(x)<0$ $\quad \underset{\overset{\downarrow}{0}}{mf(x)} \ge \underset{\overset{\Downarrow}{0}}{f(x)\cdot g(x)} \ge Mf(x) \to 0$

es. per $x\to 0$, $f(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ $\quad -1 \le g(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x} \le 1$ FATTORE LIMITATO

$f(x) = x \to 0$ fattore infinitesimo $\quad \underset{\overset{\downarrow}{0}}{-x} \le \underset{\overset{\Downarrow}{0}}{x \operatorname{sen}\frac{1}{x}} \le \underset{\overset{\downarrow}{0}}{x}$ INFINITESIMO · LIMITATO = INFINITESIMO

→ FORME INDETERMINATE DI TIPO ESPONENZIALE

$$a^b = \begin{cases} 0 & a=0 \wedge b>0 \\ e^{b\ln a} & a>0, \forall b \end{cases}$$

date invece due funzioni $f(x)$ e $g(x)$:

$$f(x)^{g(x)} = \begin{cases} 0 & f(x)=0 \wedge g(x)>0 \\ e^{g(x)\ln f(x)} & f(x)>0 \end{cases}$$

domf^g

se $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ e $\exists \lim\limits_{x\to x_0} g(x)\log f(x) = \ell$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \begin{cases} e^{\ell} & \ell\in\mathbb{R} \\ +\infty & \ell=+\infty \\ 0 & \ell=-\infty \end{cases}$$

forme indeterminate

$\boxed{\infty^0}$ $\begin{cases} g\to 0 \\ f\to +\infty \end{cases}$

$\boxed{0^0}$ $\begin{cases} g\to 0 \\ f\to 0^+ \end{cases}$

$\boxed{1^\infty}$ $\begin{cases} g\to \pm\infty \\ f\to 1 \end{cases}$

es. $\lim\limits_{n\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \quad [1^{\pm\infty}]$

$h(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \quad \operatorname{dom} h = \left\{x\in\mathbb{R}: \left(1+\frac{1}{x}\right)>0\right\} \cup \left\{x\in\mathbb{R}: \frac{1}{x}+1=0, x>0\right\}$

$\begin{cases} x=-1 \\ x>0 \end{cases}$ impox

$1+\frac{1}{x}>0 \quad \frac{x+1}{x}>0$

$$\begin{array}{c|c|c|c} & -1 & 0 & \\ \hline x>-1 & - & + & + \\ x>0 & - & - & + \\ & \oplus & - & \oplus \end{array}$$

$(-\infty,-1)\cup(0;+\infty)$

es. $\lim\limits_{x\to 0^\pm} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \quad [1^{\pm\infty}]$

$\frac{1}{x}=y$ se $x\to 0^+$, $y\to+\infty$ $\quad \lim\limits_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e$

se $x\to 0^-$, $y\to-\infty$ $\lim\limits_{y\to-\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e$

→ ALTRI LIMITI DI SUCCESSIONI

se si ha una funzione $y=a^x$, per $x \to +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} a^x \begin{cases} +\infty & a>1 \\ 1 & a=1 \\ 0 & 0<a<1 \end{cases}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}, a>0$

se si considera invece la successione $a_n = a^n$

$$\lim_{n\to+\infty} a^n \begin{cases} 0 & |q|<1 \to \text{se } q=0 \vee q=1 \text{ la successione e' costante in zero} \\ 1 & q=1 \\ +\infty & q>1 \\ \nexists & q\leq -1 \to \text{se } q=-1, \text{successione indeterminata} \end{cases}$$

se $a>1$, $a=1+b$ con $b>0 \to a^n=(1+b)^n \to (1+b)^n \geq 1+nb \to +\infty$, $a_n \to +\infty$ (disuguaglianza di Bernoulli)

TEOR. CRITERIO DEL RAPPORTO

Sia a_n una successione per cui definitivamente valga $a_n>0$. Supponiamo che esista, finito o infinito, il

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ \text{se } q<1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0 \\ 2)\ \text{se } q>1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty \end{array}}$$

dim.: si consideri il caso in cui $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q<1$

per la definizione di limite si avrà che

$$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n>n_0 \Rightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - q \right| < \varepsilon$$

quindi per ogni r con $q<r<1$, ponendo $\varepsilon = r-q$, si avrà che

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - q \right| < r-q$$

$$0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < r$$

$0 < a_{n+1} < r a_n$ e, procedendo $< r(r a_{n-1}) = r^2 a_{n-1} < \dots < r^n a_1$

ciò mostra che a_n tende a zero quanto più q è piccolo.

q.e.d

applicazioni:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^\alpha}$ $\quad a>1$ $\quad$ utilizzo il criterio del rapporto < tutti i termini sono maggiori di 0 / controllo che esista il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)^\alpha}}{\frac{a^n}{n^\alpha}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a^{\cancel{n+1}}}{(n+1)^\alpha} \cdot \frac{n^\alpha}{\cancel{a^n}} = \lim_{n\to+\infty} a \overbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha}^{1^\alpha=1} = a>1 \text{ esiste,}$$

allora sarà $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = +\infty$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!}$ $\quad \forall a \in \mathbb{R}, a>0$ (termini maggiori di zero)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^{n+1}}{a^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a^{\cancel{n+1}}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{\cancel{a^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a}{n+1} = 0 = q<1 \to \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

→ CONFRONTO LOCALE DI FUNZIONI

date $f(x)$ e $g(x)$ definite in $I(x_0)-\{x_0\}$, si considera $\frac{f(x)}{g(x)}$, supponendo che esista $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

$\boxed{\text{DEF.}}$ se $\ell \in \mathbb{R}$, si scrive $f = \underset{x \to x_0}{O}(g)$ e si legge "f e' o grande di g" oppure "f e' dominata da g" per $x \to x_0$

ci sono 3 casi:

a) $\ell \neq 0$, $f \underset{x \to x_0}{\asymp} g$ f e g sono dello stesso ordine o EQUIGRANDI

b) $\ell = 1$, $f \underset{x \to x_0}{\sim} g$ f e g sono EQUIVALENTI

c) $\ell = 0$, $f \underset{x \to x_0}{=} o(g)$: f e' "o piccolo" di g per $x \to x_0$, cioe' e' trascurabile

OSSERVAZIONI: 1) a e c si escludono a vicenda

2) b e c si escludono

3) b e' un caso particolare di a: $f \underset{x \to x_0}{\sim} g \Rightarrow f \underset{x \to x_0}{\asymp} g$

es. 1 $f(x) = 3x^5 + x$ $x_0 = +\infty$
$g(x) = 2x^5 - x^2$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^5+x}{2x^5-x^2} = \frac{3}{2}$$ caso a) $f \underset{x \to +\infty}{\asymp} g$

$(3x^5+x) \underset{x \to +\infty}{\asymp} (2x^5-x^2)$ $f \sim \frac{3}{2} g$

$\frac{f}{\frac{3}{2}g} \to 1$

$$\boxed{\text{se } f \underset{x \to x_0}{\asymp} g \text{ e se } \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \quad (\ell \in \mathbb{R}-\{0\}) \Rightarrow f \underset{x \to x_0}{\sim} \ell g}$$

es. 2. $f(x) = \operatorname{sen} x$ $x_0 = 0$
$g(x) = x$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ $\operatorname{sen} x \underset{x \to 0}{\sim} x$

es. 4 $f(x) = \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$ $\alpha > \mathbb{R}$ $x_0 = 0$ $[(1+x)^\alpha - 1] \underset{x \to 0}{\sim} \alpha x$

$\alpha = \frac{1}{2}$ $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \frac{1}{2}$ $(\sqrt{1+x} - 1) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{2} x$

$\alpha = -1$ $\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{x} = -1$

$\alpha = -\frac{1}{2}$ $\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1}{x} = -\frac{1}{2}$

es. 5 $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ $f(x) = 1$ $g(x) = x$

$1 \underset{x \to +\infty}{=} o(x)$ $1 \underset{x \to +\infty}{=} O(x)$ sono entrambe vere per es., se $f=o(3x) \Rightarrow f=\underset{x\to0}{o}(x)$?

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$? $\Rightarrow \lim_{x\to0} 3\cdot\underbrace{\frac{f(x)}{3x}}_{\to0}=0$ vale anche per 3x

PROPRIETÀ $\boxed{o(g)=o(cg)\quad \forall c\neq0}$

$f=o(g) \Leftrightarrow f=o(cg);\ \forall c, c\neq0$

$f=o(g) \Leftrightarrow f=c\,o(g)$ x es. $\lim_{x\to\infty}\frac{f}{g}=-\sqrt{3}$ $\lim_{x\to\infty}\frac{f}{-\sqrt{3}g}=1$ $f\sim-\sqrt{3}g$

$\frac{f}{c}=o(g)$

USO dei simboli di landau per semplificare i limiti

USO DELL'EQUIVALENZA IN PRODOTTI E QUOZIENTI

TEOR Se f e g sono funzioni tali che $f\underset{x\to x_0}{\sim}f_1$ e $g\underset{x\to x_0}{\sim}g_1$, allora varrà che

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f}{g}=\lim_{x\to x_0}\frac{f_1}{g_1}$$

$$\lim_{x\to x_0}fg=\lim_{x\to x_0}f_1g_1$$

nelle stesse ipotesi è vero che $\frac{f}{g}\sim\frac{f_1}{g_1}$ e $fg\sim f_1g_1$

dim. [CASO QUOZIENTE]

si sa che $\lim_{x\to x_0}\frac{f}{f_1}=1$, $\lim_{x\to x_0}\frac{g}{g_1}=1 \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{g_1}{g}=1$

si calcola $\lim_{x\to x_0}\frac{f}{g}=\lim_{x\to x_0}\frac{f}{f_1}\cdot\frac{f_1}{g}=\lim_{x\to x_0}\overset{1}{\frac{f}{f_1}}\cdot\frac{f_1}{g_1}\cdot\underbrace{\frac{g_1}{g}}_{\to1}=\frac{f_1}{g_1}$

q.e.d.

es. $f(x)=x=f_1(x)$

$g(x)=x^2-x \quad g_1(x)=x^3-x$

$g\underset{x\to0}{\sim}g_1$? $\lim_{x\to0}\frac{x^2-x}{x^3-x}=\lim_{x\to0}\frac{\cancel{x}(x-1)}{\cancel{x}(x^2-1)}=1$ sono equivalenti

$\lim_{x\to0}\frac{f+g_1}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x+x^3-x}{3x^2}=0$

$\lim_{x\to0}\frac{f+g}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x+x^2-x}{3x^2}=\frac{1}{3}$

$\neq$ non vale per somme/differenze

TEOR USO DELL'EQUIVALENZA CON SOMME ALGEBRICHE [PRINCIPIO DI ELIMINAZIONE DEI TERMINI TRASCURABILI]

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f+o(f)}{g+o(g)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f}{g}$$

$$\lim_{x\to x_0}(f+o(f))(g+o(g))=\lim fg$$

dim. (per il quoziente)
poniamo $f_1=f+o(f)$ e $g_1=g+o(g)$,
e quindi $f\sim f_1$ e $g\sim g_1$.
Allora $\lim_{x\to x_0}\frac{f_1}{g_1}=\lim_{x\to x_0}\frac{f+o(f)}{g+o(g)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f}{g}$ -
q.e.d.

es. $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+\mathrm{sen}x}{x-\cos x+3}=?$

$\mathrm{sen}x=\underset{x\to+\infty}{o}(3x^2)$ infatti $\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{sen}x}{3x^2}=0$

$-\cos x+3=\underset{x\to+\infty}{o}(x)$ infatti $\lim_{x\to+\infty}\frac{-\cos x+3}{x}=0$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+o(x^2)}{x+o(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{\cancel{x}}=+\infty$

→ INFINITESIMI E INFINITI

INFINITESIMI $\left(\frac{f}{g}, \left[\frac{0}{0}\right]\right)$

DEF.

$$\lim_{x\to x_0} \begin{cases} 0 & \text{f infinitesimo di ordine superiore a g} \\ \ell \in \mathbb{R}-\{0\} \quad f=\ell g+o(g) & \text{f e g infinitesimi dello stesso ordine} \\ \pm\infty & \text{g infinitesimo di ordine superiore a f} \quad \left(\frac{g}{f}\to 0\right) \end{cases}$$

infinitesimi campione

$x\to x_0 \in \mathbb{R}$ $\quad u(x)=|x-x_0|$

$x\to\pm\infty$ $\quad u(x)=\frac{1}{x}$

INFINITI $\left(\frac{f}{g}, \left[\frac{\infty}{\infty}\right]\right)$

DEF.

$$\lim_{x\to x_0} \begin{cases} 0 & \text{f infinito di ordine inferiore a g} \quad f=o(g) \\ \ell \in \mathbb{R}-\{0\} & \text{f e g infiniti dello stesso ordine} \\ \pm\infty & \text{f infinito di ordine superiore a g} \end{cases}$$

infiniti campione

$x\to x_0 \in \mathbb{R}$ $\quad u(x)=\frac{1}{|x-x_0|}$

$x\to\pm\infty$ $\quad u(x)=|x|$

$$\underset{a\neq 1, a>0}{\log_a n} < \underset{\alpha>0}{n^\alpha} < b^n < n! < n^n \quad \text{per } n\to+\infty$$

per questo $\frac{\log_a n}{n^\alpha}\to 0$ $\qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n+\cancel{\lg_3 n}}{n^n+\cancel{n^{1/2}}}=0$

$$\underset{a\neq 1, a>0}{\log_a x} < \underset{\alpha>0}{x^\alpha} < \underset{b>1}{b^x}$$

(es.) $x\to 0$

$f(x)=3x+x^2=3x+\underset{x\to 0}{o(x)} \sim 3x$ $\qquad \lim_{x\to 0}\frac{f}{g}=3$ hanno lo stesso ordine

$g(x)=x-x^3=x+o(x) \sim x$

$x\to+\infty$

$f(x)=3x+x^2=x^2+\underset{x\to+\infty}{o(x^2)} \sim x^2$

$g(x)=x-x^3=-x^3+\underset{x\to+\infty}{o(x^3)} \sim -x^3$ $\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{-x^3}=0$ f ha ordine inferiore a g per $x\to+\infty$

<u>altri</u> <u>limiti</u> <u>notevoli</u>:

- $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \lg_a x = 0 \quad \alpha>0 \quad [0\cdot\infty]$

  $\frac{1}{x}=y\to+\infty \quad x=\frac{1}{y}$

  $\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{y}\right)^\alpha \log_a\left(\frac{1}{y}\right)=\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y^\alpha}\left(\overset{0}{\cancel{\log_a 1}}-\log_a y\right)=\lim_{y\to+\infty}\frac{-\log_a y}{y^\alpha}=0$

  y^α ordine superiore

- $\lim_{x\to-\infty} b^x|x|^\alpha=[0\cdot\infty]=0$ $\qquad y=-x\to+\infty$

$\lim_{y\to+\infty} b^{-y}|-y|^\alpha=\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{b^y}|y|^\alpha=0$

infinitesimo di ordine superiore a $\log_a y$

b^y infinito di ordine superiore a $\frac{1}{|x|^\alpha}$ $\quad \alpha>0$

→ ASINTOTI $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dom $f \subseteq \mathbb{R}$

a) ASINTOTO VERTICALE

se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ o $-\infty$, $x = x_0$ si dice as verticale da destra o da sinistra

└ più o meno, $x_0 \in \mathbb{R}$

b) ASINTOTO ORIZZONTALE

se $\lim_{x \to \infty} f(x) = c \in \mathbb{R}$, $y = c$ si dice as orizzontale completo se è sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$ o solo destro o sinistro

c) ASINTOTO OBLIQUO

Date due funzioni f e g definite in $I(+\infty)$ si dice che f è ASINTOTICA per $x \to +\infty$ se e solo se $f - g = o(1)$ per $x \to +\infty$

[e quindi è anche $g - f = o(1)$]

se g è un polinomio di primo grado, $g = mx + q$ con $m \neq 0$, allora è asintoto obliquo per il grafico di f

$\boxed{\text{TEOR.}}$ ESISTENZA E FORMULA DELL'ASINTOTO OBLIQUO

(1) se $\exists \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R} - \{0\}$ $f(x) \sim mx$ per $x \to +\infty$

(2) e se $\exists \lim_{x \to +\infty} f(x) - mx = q \in \mathbb{R}$ $f(x) = mx + q + o(1)$

dim. $\lim_{x \to +\infty} \left(\underbrace{(f(x) - mx)}_{\to q \text{ per ipotesi}} - q \right) = 0$

OSSERV. - se $f(x) = mx + q + o(1)$ valgono la (1) e la (2)

- se esiste l'asintoto obliquo, allora f è un infinito di ordine 1 (non vale il viceversa)

es. $f(x) = x + \sqrt{x} \underset{x \to +\infty}{\sim} x$ infinito di ordine 1, ma non ha asintoto perché $\sqrt{x}$ non tende a zero per x che tende a più infinito allora ne esisteranno i limiti ℓ_1 e $\ell_2 \in \mathbb{R}$ per $n \to +\infty$: $\lim_{n\to+\infty} a_n = \underset{(\ell_1)}{x_0^-}$, $\lim_{n\to+\infty} b_n = \underset{(\ell_2)}{x_0^+}$

- facendo il limite $\begin{matrix} a \le a_n < b_n \le b \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ a \le \ell_1 \le \ell_2 \le b \end{matrix}$ (al limite le disuguaglianze si attenuano)

$$\ell_1 - a_1 = \frac{b-a}{2} \qquad b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2}$$

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$$

ma dato che il limite della differenza e' la differenza dei limiti, $\ell_1 - \ell_2 = 0$,
$\ell_1 = \ell_2 \to$ le due successioni hanno lo stesso limite per l'unicita' del limite.

- $f(a_n) < 0 < f(b_n)$
$\downarrow$ teor. sostituzione $\quad\downarrow$
$f(\ell) \qquad f(\ell)$ $\qquad f(\ell) \le 0 \le f(\ell) \Rightarrow f(\ell) = 0$, $x_0 = \ell$ per il teor. del confronto.

quindi il punto limite del processo di bisezione e' uno zero della funzione.

Se f e' strettamente monotona (iniettiva) lo zero sara' unico.

q.e.d.

OSSERV. - la procedura usata per dimostrare il teorema e' un algoritmo di calcolo approssimato dello zero, il METODO DI BISEZIONE
- x_0 e' approssimata da a_n per difetto e da b_n per eccesso

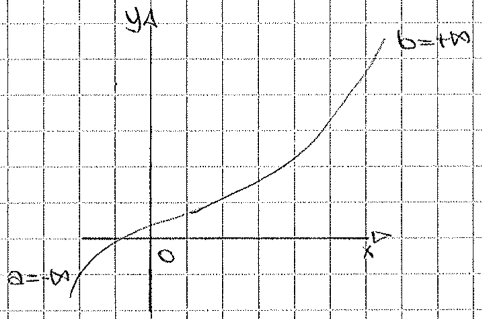
COROLLARIO Sia f continua in un intervallo I, se per x che tende a ciascuno degli estremi dell'intervallo, ammette limiti (finiti o infiniti) diversi da zero e di segno opposto, allora f ha uno zero in I (e' unico se f e' strettamente monotona).

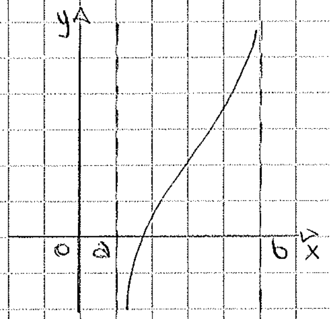
Hp: 1) $f: (a,b) \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}(a,b)$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$

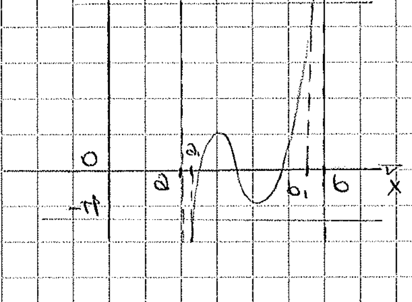
2) $\exists \lim_{x\to a^+} f(x) = y_1$, $\exists \lim_{x\to b^-} f(x) = y_2$ con y_1 e y_2 finiti o meno e discordi

Th: $\exists x_0 \in (a,b) \mid f(x_0) = 0$

(es) $y_1 = -\infty$
$y_2 = +\infty$







in I(a) la funzione deve essere < -M
in I(b) la funzione deve essere > M

$f(a_1) < -M < 0 \qquad f(b_1) > M > 0$

$[a_1, b_1] \subset (a,b)$ si puo' usare il teorema dell'esist. degli zeri

es
- $f(x) = [x]$ $I = \mathbb{R}$ e' un intervallo
  $f(I) = Imf = \mathbb{Z}$ non e' più intervallo
  la funzione non e' continua: se si traccia una r // Ox non c'e' sempre un'intersezione
- $f(x) = M(x)$ l'immagine e' l'intervallo $[0, 1)$
- $f(x) = \frac{1}{x}$ continua in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

  la funzione e' continua nel dominio, ma il dominio non e' un intervallo (e' unione di due)

  $f(x) = y_0$ ha soluzione solo nell'immagine

3. LEGAME TRA CONTINUITA' E MONOTONIA

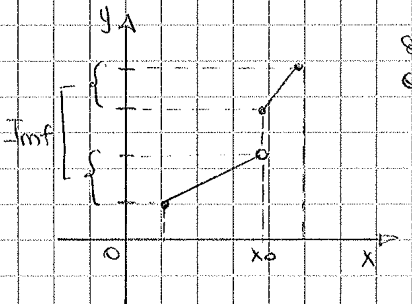
Sia f una funzione continua su un intervallo I - Allora f e' iniettiva su I se e solo se e' strettamente monotona su I

$$\text{strett. monotona} \overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow} \text{iniettiva}$$

1) se $f \in \mathcal{C}(I)$ e I e' un intervallo
f monotona in I $\Rightarrow$ f iniettiva in I

Controesempio: $\frac{1}{x}$ e' iniettiva nel dominio, ma non e' strettamente decrescente globalmente

2) se $f: I \to \mathbb{R}$, e f e' monotona su I intervallo
f e' continua in I $\Leftrightarrow$ l'immagine e' un intervallo



se l'immagine non e' un intervallo e il dominio lo e' si crea una discontinuita'

se x_0 e' interno all'intervallo I e f e' crescente

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_- = \sup_{x < x_0} f(x)$$

$$\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell_+ = \inf_{x > x_0} f(x)$$

per assurdo, se f fosse discontinua in x_0, $\underset{\forall x_1 < x_0}{f(x_1)} \le \ell_- < \ell_+ \le \underset{\forall x_2 > x_0}{f(x_2)}$

ma per ipotesi Imf e' un intervallo $\to$ assurdo -

4. TEOREMA DI CONTINUITA' DELLA FUNZ. INVERSA

Sia f una funzione continua e invertibile su un intervallo I - Allora la funzione inversa f^{-1} e' continua sull'intervallo $J = f(I)$

Hp.: $f \in \mathcal{C}(I)$ con I intervallo, f iniettiva

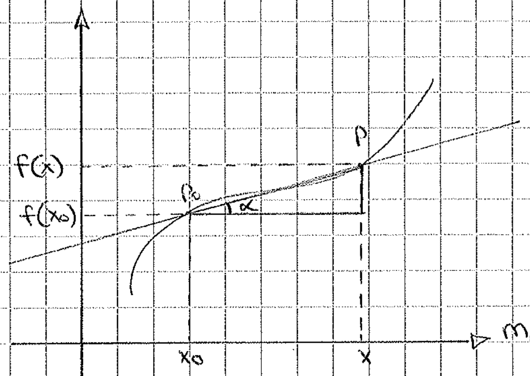
Th.: $\exists f^{-1}: Imf \to \mathbb{R}$ ed e' continua

dim. se f e' continua su un intervallo, f(I) e' un intervallo; per la proprieta' 1), f e' monotona -
per l'ipotesi che la funzione e' iniettiva, $\exists f^{-1}: f(I) \to \mathbb{R}$ ed e' ancora monotona e $Imf^{-1} = I$; per la proprieta' 2) applicata alla funzione inversa, f^{-1} e' continua - q.e.d.

altre proprieta' di Imf:

es. $f(x) = \operatorname{sen} x$
scegliere $I \subseteq \mathbb{R}$ in modo che:
a) f(I) sia aperto $I = (0, \pi)$ $f(I) = (0, 1)$
$f(x) = tg x$ b) f(I) sia chiuso $I = [0, \pi/4]$ $f(I) = [0, 1]$

DERIVATE



Data una funzione f(x) definita in un intervallo [a,b], si chiama DERIVATA della funzione nel punto x₀ interno all'intervallo il limite, se esiste ed e' finito, del rapporto incrementale della funzione relativo a x₀.

$$\boxed{f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell}$$

$m_1=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ coeff. angolare della retta secante per P e P₀ (tg α)

$m_2=f'(x_0)$ coeff. angolare della retta tangente a f nel pto di ascissa x₀

retta TANGENTE $\boxed{t(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)}$

OSSERVAZIONI: 1) se $\ell=0 \Rightarrow f(x)-f(x_0)=\underset{x\to x_0}{o}(x-x_0)$

2) se $\ell\in\mathbb{R}-\{0\} \Rightarrow f(x)-f(x_0)\underset{x\to x_0}{\asymp}(x-x_0) \Leftrightarrow f(x)-f(x_0)\underset{x\to x_0}{\sim}\ell(x-x_0)$

$\Leftrightarrow f(x)-f(x_0)=\ell(x-x_0)+\underset{x\to x_0}{o}(x-x_0)$

PROPR. una funzione e' derivabile in x₀ se e solo se $\exists\,\ell\in\mathbb{R}$ $\boxed{f(x)=f(x_0)+\ell(x-x_0)+\underset{x\to x_0}{o}(x-x_0)}$
[1° formula dell'incremento finito]

$(\Leftarrow)$ voglio dimostrare che f e' derivabile in x₀, quindi calcolo

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\ell(x-x_0)+o(x-x_0)}{x-x_0}=\ell,\text{ e' proprio } f'(x).$$

funz derivabili $f(x)=ax+b$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{ax+b-(ax_0+b)}{x-x_0}=\frac{a\cancel{(x-x_0)}}{\cancel{(x-x_0)}}=a$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=a=f'(x)\ \forall x,x_0 \text{ considerati}$$

notazione $\begin{cases} f'(x_0) \\ \frac{df}{dx}(x_0)\end{cases}$

PROPR. se f e' derivabile in x₀, allora f e' continua in x₀ (e quindi se f e' discontinua in x₀, f non e' derivabile in x₀) CONTINUITA' DELLE FUNZ. DERIVABILI

dim. se f e' derivabile in x₀, avremo che

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=\lim_{x\to x_0}\frac{(f(x)-f(x_0))(x-x_0)}{(x-x_0)}=\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=$$
$$=f'(x_0)\cdot 0=0$$

la continuita' si esprime come $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, o anche $\lim_{x\to x_0}f(x)-f(x_0)=0$.

quindi se la f e' derivabile, allora e' continua.

q.e.d.

la derivata DESTRA e' il $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell_+$ e si scrive $\ell_1=f'_+(x_0)$; quella SINISTRA e' il $\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell_-$ e si scrive $\ell_2=f'_-(x_0)$.

→ DERIVATE DI FUNZIONI ELEMENTARI

K funz. costante	0		
x	1		
$\|x\|$	$\frac{x}{\|x\|}=\frac{\|x\|}{x}$		
x^n	nx^{n-1}		
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$		
$\operatorname{sen}x$	$\cos x$		
$\cos x$	$-\operatorname{sen}x$		
$\operatorname{tg}x$	$\frac{1}{\cos^2x}=1+\operatorname{tg}^2x$		
$\operatorname{cotg}x$	$-\frac{1}{\operatorname{sen}^2x}$		
e^x	e^x		
a^x	$a^x\log a$		
$\ln x$	$\frac{1}{x}$		
$\log_a x$	$\frac{1}{x}\cdot\log_a e$		
$\operatorname{arcsen}x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$		
$\operatorname{arctg}x$	$\frac{1}{1+x^2}$		
$\operatorname{arccotg}x$	$\frac{-1}{1+x^2}$		
$\operatorname{senh}x$	$\cosh x$		
$\cosh x$	$\operatorname{senh}x$		

$\underline{f(x)=x^n}$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x^n-x_0{}^n}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(x^{n-1}+x^{n-2}x_0+\ldots+x_0{}^{n-1})}{(x-x_0)}=nx_0{}^{n-1}$$

$(x^n)'=nx^{n-1},\ \forall x\in\mathbb{R}$

se $n=-1$, $f(x)=\frac{1}{x}$ $\quad f'(x)=-1\,x^{-1-1}=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$

se $n=1/2$, $f(x)=\sqrt{x}$ $\quad f'(x)=\frac{1}{2}x^{1/2-1}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad$ domf $[0,+\infty)$ punti interni: $x>0$

se $n=1/3$, $f(x)=\sqrt[3]{x}$ $\quad f'(x)=\frac{1}{3}x^{-2/3}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ $\quad$ domf $=\mathbb{R}$, domf': $x\neq0$

→ DERIVATA DELLA FUNZIONE COMPOSTA

Sia f derivabile in x_0 e g derivabile in $f(x_0)$; $g \circ f$ è derivabile in x_0 e

$$\boxed{(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)}$$

verifica: $\lim_{x \to x_0} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} =$

$= \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \overset{y = f(x)}{=}$

posso perché è derivabile e quindi continua

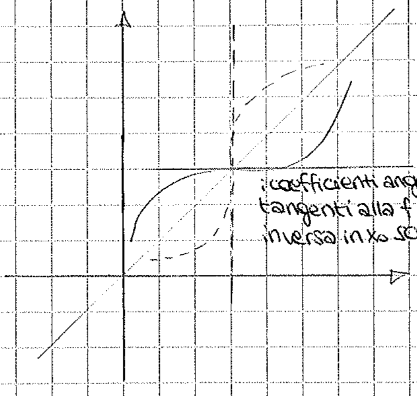
$= f'(x_0) \lim_{y \to f(x_0)} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

$$[h(g(f(x)))]' = h'(g(f(x_0))) \cdot g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

→ DERIVATA DELLA FUNZIONE INVERSA

Sia f derivabile in x_0 e $f'(x_0) \neq 0$, f invertibile in $I_\delta(x_0)$; è detto y_0 il punto $f(x_0)$:

$$\exists \boxed{(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}}$$



i coefficienti angolari delle tangenti alla f diretta e inversa in x_0 sono reciproci

dim.: $\lim_{y \to y_0} \frac{(f^{-1})(y) - (f^{-1})(y_0)}{y - y_0} \overset{y = f(x)}{=}$ $x = (f^{-1})(y)$ tende a $f^{-1}(y_0) = x_0$

$= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right]} = \frac{1}{f'(x_0)}$

$\left.\begin{array}{l}\text{f continua in } x_0 \\ \text{invertibile}\end{array}\right] \Rightarrow f^{-1}$ continua in y_0

(es.) $y = f(x) = e^{\sqrt{x+1}} + x^3$ è continua e derivabile in $(-1; +\infty)$
$D = [-1; +\infty)$

in $x_0 = 0$?   f è crescente strettamente, quindi invertibile

$f(0) = e^1 + 0 = e = y_0$

$f'(x) = (e^{\sqrt{x+1}})' + (x^3)' = \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{x+1}} + 3x^2$

$f'(0) = \frac{e}{2} \neq 0$ → si calcola $(f^{-1})'$

$(f^{-1})\left(\underset{y_0}{\frac{e}{2}}\right) = \frac{1}{e/2} = \frac{2}{e}$

derivate di funzioni inverse elementari:

- $y = f(x) = e^x$

$(e^x)' = e^x \neq 0, \forall x$
$x = f^{-1}(y) = \log y$

$(\log y)'|_{y_0} = \frac{1}{(e^x)'_{x_0}} = \frac{1}{e^x|_{x_0}} = \frac{1}{e^{x_0}} = \frac{1}{y_0}$

$\log y_0 = x_0$
$e^{x_0} = y_0$

$(\log y)' = \frac{1}{y}$ $(y > 0)$

→ PUNTI CRITICI E $\underbrace{\text{PUNTI DI ESTREMO}}$

└ di massimo/minimo < assoluto (globale) / relativo (locale)

DEF. data $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\text{dom} f \subseteq \mathbb{R}$:
$x_0 \in \text{dom} f$ si dice punto di MASSIMO/MINIMO ASSOLUTO $\Longleftrightarrow f(x_0) \geq f(x) \,/\, f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in \text{dom} f$

x_0 e' punto di massimo assoluto $\Longleftrightarrow$ $\text{Im} f$ ha massimo $M \in \mathbb{R}$ e x_0 e' una controimmagine di $M = \max \text{Im} f = \max f$

$f(x) = M$, $x_0 \in f^{-1}(\{M\})$

DEF. x_0 e' punto di MASSIMO RELATIVO (o locale) di $f \Longleftrightarrow \exists\, I_\delta(x_0)$ intorno di x_0 in cui $f(x_0) \geq f(x), \forall x \in I_\delta(x_0) \cap \text{dom} f$

x_0 e' punto di MINIMO RELATIVO di $f \Longleftrightarrow \exists\, I_\delta(x_0) \mid f(x_0) \leq f(x), \forall x \in I_\delta(x_0) \cap \text{dom} f$

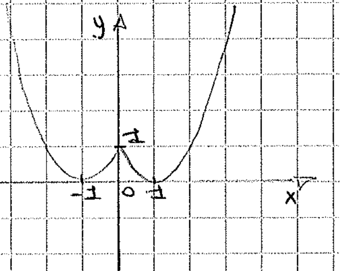
es. • $f(x) = (|x| - 1)^2$ $\quad \text{Im} f = [0, +\infty)$

$m = \min f = 0 \qquad f^{-1}(0) = \{+1, -1\}$

$(|x| - 1)^2 = 0 \quad x = \pm 1$ punti di min assoluto (e quindi anche relativo)
dall'immagine si possono ricavare solo max/min globali

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & x \geq 0 \\ (-x-1)^2 & x < 0 \end{cases}$$

$f(x) = f(-x)$ funzione pari



$x_0 = 0 \quad f(x_0) = 1$ massimo relativo

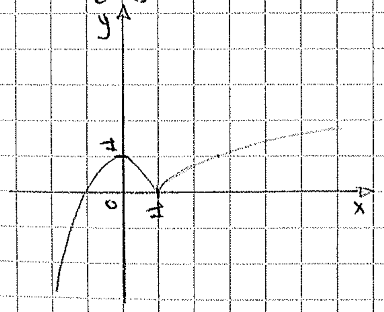
$f'(1)$ e $f'(-1) = 0$, $\nexists f'(0)$

• $$g(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x \leq 1 \\ \log x & x > 1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) = \pm\infty \qquad J = (-\infty, +\infty)$

g e' continua su $\mathbb{R} \Rightarrow g'(\mathbb{R}) = J$ intervallo

$x_0 = 0$ massimo relativo
$x_1 = 1$ minimo relativo



es. il punto (b) e' essenziale

$m = \min f = 0 \rightarrow x_0 = 0$
$M = \max f = 1 \rightarrow x_0 = 1$

$f(x) = x \quad [0,1] \quad \operatorname{Im} f = [0,1]$
$f'(x) = 1 \quad \forall x \in (0,1)$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim \frac{x}{x} = 1$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x-1}{x-1} = 1$$

2) TEOREMA DI ROLLE (caso particolare di lagrange)

sia $f(x)$ una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ e derivabile nei punti interni di esso. Sia $f(a) = f(b)$, esiste almeno un punto interno all'intervallo in cui la derivata di f sia annulla, cioe' esiste $c \in (a,b)$ tale che $f'(c) = 0$.

Hp.: ① $f(x)$ continua in $[a,b] \rightarrow f \in \mathcal{C}[a,b]$
② $f(x)$ derivabile in (a,b)
③ $f(a) = f(b)$

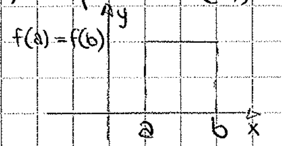
Th: $\exists c \in (a,b) \mid f'(c) = 0$

dim: - per l'ipotesi (1) vale il teorema di Weierstrass, cioe' la funzione ammette massimo e minimo assoluti nell'intervallo, cioe' $f[a,b] = [m, M]$; quindi esisteranno x_1, x_2 punti di minimo/massimo assoluto.

- ci saranno due casi:

1) nessuno dei due punti e' interno all'intervallo, quindi x_1 coincide con a e x_2 con b. Quindi per l'ipotesi 3, $f(a) = f(b)$ e quindi $f(x_1) = f(x_2)$

La funzione sara' costante in $[a,b]$
$\Rightarrow f'(x) = 0, \forall x$



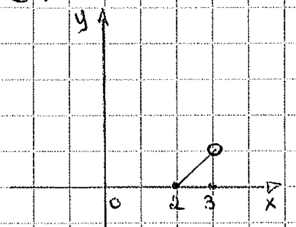
2) almeno uno dei due punti e' interno all'intervallo, cioe' per esempio $x_1 \in (a,b) \rightarrow$ per fermat $f'(x_1) = 0$, essendo un punto di estremo relativo.

q.e.d.

e' cond. sufficiente → non e' detto che se non ci sono le ipotesi non si abbia comunque la tesi

controesempi:

a) $f(x)$ non e' continua agli estremi

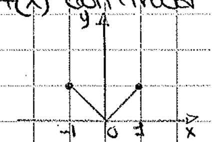


$$f(x) = \begin{cases} x-2 & 2 \le x < 3 \\ 0 & x = 3 \end{cases}$$

- derivabile
- $f(2) = f(3)$
- non continua in $x = 3$

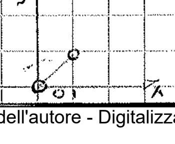
$\nexists f'(c) = 0$

b) $f(x)$ continua ma non derivabile, $f(a) = f(b)$



$f(x) = |x| \quad$ in $[-1,1] \rightarrow \nexists f'(c) = 0$

c) $f(a) \neq f(b)$, $f(x)$ continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b).



$f(x) = x \quad (0,1) \rightarrow \nexists f'(c) = 0$

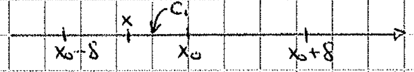
condizione sufficiente per x_0 minimo relativo

se $\exists f'(x)$ in I intervallo aperto, $x_0 \in I$ e $f'(x_0)=0$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)\le 0,\ \forall x\in(x_0-\delta;x_0) \\ f'(x)\ge 0,\ \forall x\in(x_0;x_0+\delta)\end{array}\right. \Longrightarrow x_0 \text{ è un punto di minimo relativo per } f$$

dim.: $f(x_0)\le f(x),\ \forall x\in I_r(x_0)$

uso la formula n°2 dell'incremento finito in $(x_0-\delta;x_0)$ e in $(x_0;x_0+\delta)$



1) $\forall x\in(x_0-\delta;x_0),\ \exists c_1\in(x,x_0)$ tale che $\underbrace{f(x)-f(x_0)}_{\ge 0}=\underbrace{f'(c_1)}_{\le 0}\underbrace{(x-x_0)}_{\le 0}$

2) $\forall x\in(x_0;x_0+\delta),\ \exists c_2\in(x_0,x)$ tale che $\underbrace{f(x)-f(x_0)}_{\ge 0}=\underbrace{f'(c_2)}_{\ge 0}\underbrace{(x-x_0)}_{\ge 0}$

quindi $\forall x\in I_\delta(x_0),\ f(x)-f(x_0)\ge 0 \longrightarrow x_0$ minimo relativo

qed

per il massimo relativo si ha che: $f'(x)\ge 0$ in $(x_0-\delta;x_0)$
$f'(x)\le 0$ in $(x_0;x_0+\delta)$

Cond. NECESSARIA se x_0 e' interno a dom f e se $\exists f'(x_0) \Rightarrow f'(x_0)=0$ (x_0 punto critico)

4) TEOREMA DELLA MONOTONIA DI UNA FUNZIONE DERIVABILE

Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in I intervallo aperto; allora valgono le seguenti implicazioni:

a) se $f'(x)\ge 0$ in $I \iff f$ e' crescente in I
a') se $f'(x)>0$ in $I \Rightarrow f$ e' strettamente crescente in I
a'') se $f'(x)\ge 0$ in I e $f'(x)$ non e' identicamente nulla in nessun intervallo $J\subset I$
$\Rightarrow f$ e' strettamente crescente in I

b) $f'(x)\le 0$ in $I \iff f$ e' decrescente in I
b') se $f'(x)<0$ in $I \Rightarrow f$ e' strettamente decrescente in I

c) se $f'(x)\equiv 0$ in $I \iff f$ costante in I

(c) vale in I se I e' un singolo intervallo

per esempio in questo caso la derivata e' nulla ma la funzione non e' costante (lo e' solo a tratti)

dim.: • (a) e (a') $\Rightarrow$

si sa che $f'(x)\ge 0$ ($f'(x)>0$) in I; voglio dimostrare che f e' (strettamente) crescente in I, per $\forall x_1,x_2\in I$, calcolo $f(x_1)\le f(x_2)$ $[x_1<x_2]$

$$f(x_2)-f(x_1)=\underset{\substack{\uparrow\\ \exists c\in(x_1,x_2)}}{f'(c)}\underbrace{(x_2-x_1)}_{>0} \qquad f(x_2)-f(x_1)\ge 0 \Rightarrow f \text{ e' crescente (strettamente)}$$

• (a) $\Leftarrow$

si sa che f e' crescente in I, e si deve dimostrare che $f'(x)\ge 0$ in I; fisso $x_0\in I$ arbitrario e dimostro che $f'(x_0)\ge 0$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right]$$

└ ne studio il segno

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\begin{cases}\dfrac{\le 0}{<0}\ge 0 & x<x_0\\[2mm] \dfrac{\ge 0}{>0}\ge 0 & x>x_0\end{cases}$$

il rapporto incrementale e' ≥ 0 per una monotona crescente; $x<x_0$, $f(x)\le f(x_0)$ crescente

→ DERIVATE DI ORDINE SUPERIORE

DERIVATA SECONDA supponiamo che f sia derivabile in I, x_0 sia interno a I; $f, f': I \to \mathbb{R}$ ci si chiede se f' sia derivabile in x_0, cioe' se $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \ell \in \mathbb{R}$; se lo e', f e' derivabile 2 volte: $\boxed{\ell = f''(x_0) = (f')'(x_0)}$.

Analogamente se $\exists f''(x)$, $\forall x \in I$, si può definire $f'''(x)$ come $\lim_{x \to x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0}$.

PROPRIETA' se $\exists f^{(n)}(x_0)$, allora $f^{(n-1)}$ e' continua in x_0.

$f \in \mathcal{C}(I) \to$ $f \in \mathcal{C}^1(I)$: f e f' continue in I
$f \in \mathcal{C}^2(I)$: f, f' e f'' continue in I
$f \in \mathcal{C}^n(I)$: $f, f', \dots f^k$ continue in I

se $\exists f^{(k)}$ in I, $\forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow f \in \mathcal{C}^\infty(I)$

⚠ per il calcolo delle derivate n-esime le regole di derivazione sono le stesse che per la derivata prima.
La maggior parte delle funzioni elementari sono $\mathcal{C}^\infty$ nel loro dominio

(es) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$ $f'(x) = \begin{cases} 2x & > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases}$

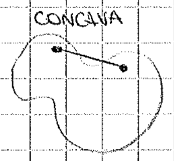
f continua in R, in particolare $\exists \lim_{x \to 0^\pm} f(x) = 0$, $f(0) = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = 0 = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$f''(x) = \begin{cases} 2 & x > 0 \\ \nexists & x = 0 \\ -2 & x < 0 \end{cases}$ punto angoloso

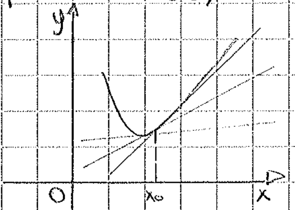
convessita' e concavita' in un punto

in geometria piana



prendendo due punti a caso, il segmento che li unisce resta dentro l'insieme

data $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0 interno a dom f, e si suppone che $\exists f'(x_0)$, quindi $\exists t(x)$, con $t(x) = f(x) + f'(x_0)(x - x_0)$



DEF 1) f convessa in $x_0 \iff \exists \delta > 0 \mid \forall x \in I_\delta(x_0)$, $f(x) \geq t(x)$
[$f(x) > t(x)$ per $x \neq x_0$, convessa strettamente]

2) f concava in $x_0 \iff \exists \delta > 0 \mid \forall x \in I_\delta(x_0)$, $f(x) \leq t(x)$
[$f(x) < t(x)$ per $x \neq x_0$, concava strettamente]

3) x_0 e' punto di flesso per f $\iff \exists \delta > 0 \mid \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ $f(x) \leq t(x)$ flesso ascendente
$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ $f(x) \geq t(x)$
$\exists \delta > 0 \mid \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ $f(x) \geq t(x)$ flesso discendente
$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ $f(x) \leq t(x)$

se f e' convessa in I $\iff$ f e' convessa $\forall x_0 \in I$

TEOR. LEGAME TRA SEGNO DI F'' E CONVESSITA' DI F

Supponiamo che esistano f, f' e f'' in I intervallo.

$$\frac{f'}{g'} = \frac{\cos x + 2x \operatorname{sen}\frac{1}{x} + \cancel{x}^2 \cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{1} \longrightarrow \nexists$$

TEOR CONDIZIONE SUFFICIENTE PER LA DERIVABILITA'

Data $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ con I intervallo, x_0 interno ad esso ed f continua in x_0, e $\exists f'(x)$ in $I - \{x_0\}$ (quindi f e' anche continua negli stessi punti):

se $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = \ell \in \mathbb{R} \longrightarrow \exists f'(x_0) = \ell$ (vale anche per i limiti laterali $\ell_+ \neq \ell_- \longrightarrow f'_+ = \ell_+ ,\ f'_- = \ell_-$)

dim: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \left[\frac{0}{0}\right]$ ← dato che e' continua

chiamo $f(x) - f(x_0) = F(x)$ e $(x-x_0) = G(x)$ con F e G derivabile.

applico de l'Hôpital $\frac{F'(x)}{G'(x)} = \frac{f'(x) - 0}{1 - 0} = f'(x)$, allora $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{F'}{G'} = \ell \in \mathbb{R}$

e quindi $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell = f'(x_0)$.

c.v.d.

es $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$ $\exists f'(0)$?

f continua in $x=0$, $\exists f'(x)$ in $\forall x, x \neq 0$

$f'(x) = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases}$ $\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (-2x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (2x) = 0 = \ell \implies \exists f'(0) = 0$

OSSERV. f' non può avere discontinuità di I° specie in x_0

→ FORMULA DI TAYLOR

Lo sviluppo di Taylor di una funzione in $I(x_0)$ e' la rappresentazione della funzione come somma di un polinomio e di un infinitesimo di ordine superiore al grado del polinomio utile per approssimarla.

$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{t(x)} + \underset{x \to x_0}{o}(x-x_0)$ si vuole calcolare l'ordine di infinitesimo della differenza $f(x) - t(x)$

si prova con $\alpha = 2$: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-t(x)}{(x-x_0)^2} = \left[\frac{0}{0}\right]$ con $\alpha = 1$ si avrebbe $\ell = 0$

l'ipotesi e' che $\exists f'(x)$ in $I_\delta(x_0)$, quindi posso applicare De l'Hôpital dato che $f(x) - t(x)$ e' derivabile, e lo e' anche $(x-x_0)^2$

← dato che la derivata di una retta e' il suo coefficiente angolare

$$\frac{f'(x) - t(x)}{2(x-x_0)^1 \cdot 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{2} \frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{2} f''(x_0) \text{ se } \exists f''(x_0)$$

$$\implies \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-t(x)}{(x-x_0)^2} = \frac{f''(x_0)}{2} \quad \text{se } \frac{f''(x_0)}{2} \neq 0 \implies f(x) - t(x) \underset{x \to x_0}{\sim} (x-x_0)^2$$

quindi $f(x) - t(x) \sim \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2$ oppure $f(x) - t(x) = \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2)$

se $f''(x_0) = 0$, $f(x) - t(x) = o(x-x_0)^2$

FORMULA DI TAYLOR PER IL 2° ORDINE se $\exists f''(x_0)$, e di conseguenza $\exists f'(x_0)$ in $I_\delta(x_0)$, allora

$$f(x) - t(x) = \frac{f''(x)}{2}(x-x_0)^2 + o\left((x-x_0)^2\right)$$

$$\boxed{f(x) = \underbrace{\left[f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)\right]}_{t(x)} + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + o\left((x-x_0)^2\right)}$$

3) $f(x)=\operatorname{sen}x$ Funz. dispari

$f'(x)=\cos x$ $f'(0)=1$

$f''(x)=-\operatorname{sen}x$ $f''(0)=0$

$f'''(x)=-\cos x$ $f'''(0)=-1$

$$\boxed{\operatorname{sen}x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\underset{x\to0}{o}\left(x^{2n+1}\right)}$$

4) $f(x)=\cos x$ $f(0)=1$ funzione pari $\to$ il polinomio di Mac Laurin contiene solo potenze pari

$f'(x)=-\operatorname{sen}x$ $f'(0)=0$

$f''(x)=-\cos x$ $f''(0)=-1$

$f'''(x)=\operatorname{sen}x$ $f'''(0)=0$

$f^{IV}(x)=\cos x$

o anche $\underset{x\to0}{o}\left(x^{2n+1}\right)$

$$\boxed{\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\underset{x\to0}{o}\left(x^{2n}\right)}$$

Lo sviluppo del coseno si può ottenere anche derivando quello del seno:

$(\operatorname{sen}x)'=\cos x$

$$[T_n(x)]'=1-\frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{3}\cdot2!}+\frac{\cancel{5}x^4}{\cancel{5}\cdot4!}\dots$$

PROP. se $\exists f^{(n)}(x_0)\Longrightarrow(T_nf)'=T_{n-1}f'$

OSS. se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è pari e derivabile, allora f' è dispari; se $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è dispari e derivabile $\to$ g' è pari

dim. f è pari, cioè $f(x)=f(-x)$ per $\forall x\in\mathbb{R}$;

$f'(-x)(-1)=f'(x)$ $f'(-x)=-f'(x)$, cioè f' è dispari.

q.e.d.

5) $f(x)=(1+x)^\alpha$ $x_0=0$, $\alpha\in\mathbb{R}$ $(1+x)>0$, $x>-1$

$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$ $f'(0)=\alpha$

$f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$ $f''(0)=\alpha(\alpha-1)$

$f'''(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}$ $f'''(0)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$

$f^{(n)}(x)=\underbrace{\alpha(\alpha-1)(\alpha-(n-1))}_{\text{n fattori}}(1+x)^{\alpha-n}$ $f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))$

$$\boxed{(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\dots+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n+\underset{x\to0}{o}(x^n)}$$

se $\alpha\in\mathbb{N}$, $\alpha\geq n$ ha senso l'espressione

$$\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha!}{(\alpha-n)!\,n!}=\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}$$

per gli α interi, ma si definisce allo stesso modo per gli α non interi

per es. se $\alpha=-1$

$$(1+x)^{-1}=1-x+\frac{(-1)(-2)}{2!}x^2+\frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}x^3+\underset{x\to0}{o}(x^3)=1-x+x^2-x^3+\underset{x\to0}{o}(x^3)$$

se fosse $(1-x)^{-1}=1-(-x)+(-x)^2-(-x)^3\dots=1+x^2+x^3+x^n+\underset{x\to0}{o}(x^n)$

applicazioni della formula di Taylor allo studio locale di una funzione:

serve per trovare: - ordine, parte principale per $x \to x_0$

- se in x_0 ha punto critico, di estremo, o di flesso

(es) • $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} 7x^6$

$\lim_{x \to 0} \left(\frac{f(x)}{7x^6}\right) = 1 > 0$

└ positiva in $I(0) - \{0\}$

$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ $f(0)$ non definito

se f e' continua in $x = 0$, $f(0) = \ell = 0$

$\Rightarrow$ $x = 0$ e' un punto di minimo relativo per f

se fosse stato $-3x^6$: $\frac{f(x)}{-3x^6} > 0$ $f(x) < 0$ in $I(0)$ $\to$ $x = 0$ punto di massimo

• $g(x) \underset{x \to 0}{\sim} 3x^5$

$\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{3x^5} = 1$ $\frac{g(x)}{3x^5} > 0$ in $I(0) - \{0\}$

se $g(0) = 0$ $x = 0$ non e' ne' massimo ne' minimo

se $\exists\, g'(0)$, $g(x) \underset{x \to 0}{=} o(x)$ $g'(0) = 0$

$g(x) = g(0) + g'(0)\,x + \underset{x \to 0}{o(x)}$

$x = 0$ e' punto di flesso

$\boxed{\text{TEOR}}$ NATURA DI UN PUNTO CRITICO

se $\exists\, f^{(n)}(x_0) \neq 0$ e $f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ e quindi $f(x) = f(x_0) + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o(x - x_0)^n$:

$(n \geq 2)$

1) se n e' pari, x_0 e' un punto di estremo per f, ed e' punto di massimo se $f^n(x_0) < 0$, punto di minimo se $f^n(x_0) > 0$

2) se n e' dispari, x_0 e' un punto di FLESSO A TANGENTE ORIZZONTALE per f, e precisamente e' punto di flesso discendente se $f^n(x_0) < 0$, ascendente se $f^n(x_0) > 0$

dim. $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)^n \left[\frac{f^n(x_0)}{n!} + \underbrace{\underset{x \to x_0}{o(1)}}_{\frac{o(x - x_0)^n}{(x - x_0)^n}}\right]$ raccolto il fattore $(x - x_0)^n$

se $f(x) - f(x_0) \geq 0 \iff (x - x_0)^n$ e $\frac{f^n(x_0)}{n!}$ concordi

se $f(x) - f(x_0) \leq 0 \iff (x - x_0)^n$ e $\frac{f^n(x_0)}{n!}$ discordi

q.e.d.

$\boxed{\text{TEOR.}}$ RICERCA DEI PUNTI DI FLESSO

se $\exists\, f^n(x_0) \neq 0$ e $f''(x_0) = \ldots = f^{n-1}(x_0) = 0$ e $f(x) = t(x) + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o(x - x_0)^n$

con $t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ allora:

$(n \geq 3)$

1) se n e' pari, x_0 non e' un punto di flesso per f (f convessa in x_0 se $f''(x_0) > 0$)

2) se n e' dispari, x_0 e' PUNTO DI FLESSO per f, e precisamente e' punto di flesso discendente se $f^n(x_0) < 0$, ascendente se $f^n(x_0) > 0$.

dim. raccogliendolo, si ottiene che $f(x) - t(x) = (x - x_0)^n \left[\frac{f^n(x_0)}{n!} + \underset{x \to x_0}{o(1)}\right]$, e studiando i segni dei termini a secondo membro si ottiene la tesi.

q.e.d.

c) COMPOSIZIONE

$f(x) = \sqrt{\cos x} \quad x_0 = 0 \quad n = 5$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + 0(x^5) + o(x^5) = y$

$(1+y)^\alpha = 1 + \alpha y + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} y^2 + \dots$

$(1+y)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{16}y^3 - \frac{5}{128}y^4 + \frac{7}{256}y^5 + o(y^5)$

$f(x) = 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) - \frac{1}{8}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^2 + \dots$

$\downarrow$

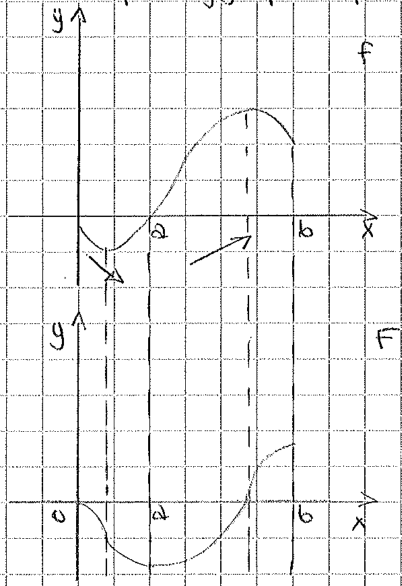
$y = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$

proprietà qualitative:

$F' = f$ se f è derivabile, $F'' = f'$:

- se $f \geq 0 \Rightarrow$ F è crescente (e viceversa)
- se f crescente $\Rightarrow F'' \geq 0 \Rightarrow$ F è convessa

(es) • ricavare il grafico di F da quello di f, sapendo che F è primitiva di f ($F' = f$) e almeno il passaggio per un punto di F



$f(0) = 0$; le informazioni su monotonia e convessità di F sono corrette, non si sa nulla sugli zeri della funzione

• $f(x) = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ 1 & x < 1 \end{cases}$ $\quad F(x) = \begin{cases} F_1 \text{ primitive di } x \text{ più } C_1 & x \geq 1 \\ F_2 + C_2 & x < 1 \end{cases}$

devo costruire F in modo che $F' = f$ in $\mathbb{R}$: F deve essere derivabile, e quindi continua

$F'(x) = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ 1 & x < 1 \end{cases}$ $\quad F_1 = \frac{x^2}{2} + C_1$ $\quad F_2 = x + C_2$ $\quad F = \begin{cases} x^2/2 + C_1 & x \geq 1 \\ x + C_2 & x < 1 \end{cases}$

bisogna imporre che F sia continua in $x = 1$

$\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{x^2}{2} + C_1 \right) = \frac{1}{2} + C_1$ $\quad \lim_{x \to 1^-} (x + C_2) = 1 + C_2$ $\quad f(1) = \frac{1}{2} + C_1$

$\frac{1}{2} + C_1 = 1 + C_2 \quad C_2 = C_1 - \frac{1}{2}$ $\quad F = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + C_1 & x \geq 1 \\ x + C_1 - \frac{1}{2} & x < 1 \end{cases}$

f continua in 1, $\lim_{x \to 1}$ F' sono uguali $\Rightarrow \exists F'(1)$

→ CALCOLO DI PRIMITIVE

1) primitive dalla tabella delle derivate delle funzioni elementari

2) "inversione" delle regole di derivazione

3) classi particolari di funzioni (per es. le funzioni razionali, e alcune irraz. e trascend.)

il problema si pone per funzioni continue la cui primitiva non è esprimibile con un numero finito di composizioni di funzioni elementari

x es. $\int e^{-x^2} dx$

TEOR. PRIMITIVA DELLA FUNZ COMPOSTA

se F è primitiva di $f: J \to \mathbb{R}$ e $\varphi: I \to J$ derivabile, allora

$$\boxed{\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x))+c}$$

dim. so che $F' = f$; calcolo $\left(F(\varphi(x))\right)' = F'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x) = f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$

es. $\varphi(x) = \operatorname{sen} x$

$$\int \operatorname{sen}^{10}x\cos x\,dx = \frac{\operatorname{sen}^{11}x}{11}+c$$

$$\int \operatorname{tg}^3 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}+c$$

$$\int \varphi(x)^{\alpha}\cdot\varphi'(x)\,dx = \frac{\varphi(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

$$\int \sqrt{x+1}\,dx = \int (x+1)^{1/2}\,dx = \frac{(x+1)^{3/2}}{3/2}+c$$

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = -\log|\cos x|+c$$

regola del cambio di variabile:

$f: J \to \mathbb{R}$ e $\varphi: I \to J$ derivabile e invertibile; supponiamo di conoscere $\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x) = G(x)$

$$\Longrightarrow \int f(y)\,dy = G\left(\varphi^{-1}(y)\right) \qquad \begin{cases}\varphi(x) = y\\ x = \varphi^{-1}(y)\end{cases}$$

per calcolare $\displaystyle\int f(y)\,dy \underset{\substack{\uparrow\\ y=\varphi(x)}}{=} \left(\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx\right)\Big|_{x} = \varphi^{-1}(y)$

es. $\displaystyle\int \sqrt{e^y-1}\,dy \underset{\uparrow}{=} \left(\int x\cdot\frac{2x}{x^2+1}\,dx\right)\Big|_{x=\sqrt{e^y-1}}$

$\sqrt{e^y-1} = x$

$e^y-1 = x^2$

$y = \log(x^2+1) = \varphi(x)$

$$\varphi'(x) = \left(\log(x^2+1)\right)' = \frac{1}{x^2+1}\cdot 2x$$

$$\int \frac{2x^2}{x^2+1}\,dx = 2\int\left(\frac{x^2+1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx = 2x - 2\operatorname{arctg} x + c = 2\sqrt{e^y-1} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{e^y-1}+c$$

→ EQUAZIONI DEL 1° ORDINE

1) $y' = A(x)B(y)$ equazione a variabili separabili

2) $y' = g\left(\frac{x}{y}\right)$ equazione omogenea

3) $y' = a(x)y + b(x)$ eq. lineare a coefficienti $a(x)$ e $b(x)$

1) EQUAZIONE A VARIABILI SEPARABILI

$y' = A(x)B(y)$

si vuole dividere per $B(y)$: prima si cerca perche valori $B(y)=0$)
ad esempio per y_1, y_2, y_k...

calcolo $y = \varphi'(x) = 0$, $y' = 0$ $A(x)B(y) = 0$
le soluzioni sono gli zeri della funzione B: tutti gli zeri generano soluz. costanti $y = y_k$
└ per gli intervalli tra uno zero e l'altro ha senso dividere

$$\frac{y'}{B(y)} = A(x) \quad \text{con } y \in (y_1, y_2)$$

$$\int \frac{y'(x)}{B(y(x))}\,dx = \int A(x)\,dx + c$$

se sono CONTINUE si può fare il procedimento (nei loro domini)

1° membro $\int \frac{1}{B(y(x))} \cdot y'(x)\,dx = \beta(y(x))$

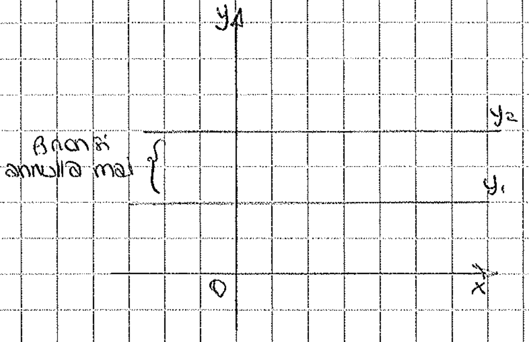
2° membro $\int A(x)\,dx = \alpha(x) + c$

esplicito $y(x)$ se esiste β^{-1}; se β è strettamente cresc/decresc in qualche intervallo, calcolo $\beta'(y) = \frac{1}{B(y)}$
└ se B è continua, ha segno costante nell'intervallo tra due zeri consecutivi $(y_1, y_2) \Rightarrow \beta$ invertibile in ciascuno di questi intervalli

$$y(x) = \beta^{-1}(\alpha(x) + c) \quad \text{con } y \in (y_1, y_2)$$

$y' = xy$ esempio

per $y=0$ $y = y' = 0$



$\frac{y'}{y} = x$ per $y<0$ o $y>0$ $\frac{y'(x)}{y(x)} = x$

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}\,dx = \int x\,dx + c$$

1° membro $\int \frac{1}{y(x)} \cdot y'(x)\,dx = \log|y(x)|$

2° membro $\frac{x^2}{2} + c$

$\log|y(x)| = \frac{x^2}{2} + c$ forma implicita

$|y(x)| = e^{\frac{x^2}{2}+c} = e^c \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$ $\begin{cases} y = e^c \cdot e^{x^2/2} & y>0 \\ y = -e^c \cdot e^{x^2/2} & y<0 \end{cases}$

$y = Ke^{\frac{x^2}{2}}$, $\forall K \in \mathbb{R}$

$y = A(x)B(y)$ si cambia notazione: $y = \frac{dy}{dx}$, $\boxed{\frac{dy}{dx} = A(x)B(y)}$

Si vuole separare le variabili: prima di dividere per $B(y)$, bisogna mettere da parte le soluzioni costanti $y = y_1$, $y = y_k$ che provengono dagli zeri di B.
Continuo e separo le variabili $\frac{dy}{dx} = A(x)B(y)$ $y \neq y_k$

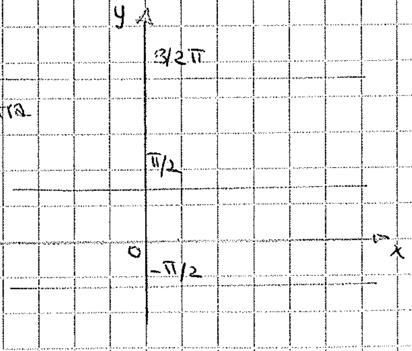
$$\boxed{\int \frac{dy}{B(y)} = \int A(x)\,dx} + c^{dx}$$

es. $y' = \cos^2 y$ $A(x) = 1$ $B(y) = \cos^2 y$ ┌ è continua, non si annulla più tra due zeri consecutivi

zeri di B $y_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\forall k \in \mathbb{Z}$

$\frac{dy}{dx} = \cos^2 y$ $\int \frac{dy}{\cos^2 y} = \int dx + c$

$tg\,y = x + c$
└ è periodica $y = arctg(x+c)$ se $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$



se $y \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right)$ $tg\,y = tg(y-\pi) + c$ $y = arctg(x+c) + \pi$ $y = k\pi + arctg(x+c)$ $\forall k \in \mathbb{Z}$

in generale $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$ $\quad z + xz' = g(z) \quad xz' = g(z) - z \quad x \neq 0$

$$z' = \frac{1}{x}\left(g(z) - z\right) = A(x) \cdot B(z)$$ variabili separabili

3) EQ. LINEARI A COEFFICIENTI a(x) e b(x)

a) $y' = a(x)y + b(x)$ lineare completa

b) se $b(x) = 0$, $y' = a(x)y$ lineare omogenea (e' a variabili separabili)

b) $y = 0$ e' una soluzione costante dell'equazione $y' = a(x)y$; per $y \neq 0$ voglio separare le variabili $y' = \frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y \qquad \int \frac{dy}{y} = \int a(x)\,dx + c$$

$$\log|y| = A(x) + c \qquad (A' = a)$$

$$|y| = e^{A(x)+c} = e^{A(x)} \cdot e^{c} \begin{matrix} \nearrow y>0 \\ \searrow y<0 \end{matrix} \qquad \begin{cases} y = e^{c}e^{A(x)} & y>0 \\ y = -e^{c}e^{A(x)} & y<0 \\ y = 0 & y=0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} y = Ke^{A(x)} \\ K \in \mathbb{R},\ A' = a \end{matrix}$$

a) $y = a(x)y + b(x)$ METODO della VARIAZIONE DELLA COSTANTE ARBITRARIA

Si parte dalla soluzione dell'eq omogenea $y = Ke^{A(x)}$; K e' funz. incognita $K = K(x)$?

$\quad\quad$ ↳ se ne cercano le soluz. nella forma

$$y = K(x)e^{A(x)} \quad (A' = a)$$

Si impone che questa y sia soluzione dell'equazione completa; prima di sostituire y nell'equazione occorre calcolare y'

$$y = \left(K(x) \cdot e^{A(x)}\right)' = K'e^{A} + Ke^{A} \cdot A'$$

$y' = K'e^{A} + Ke^{A}a$ 1° membro

2° membro $a(x)y + b(x) = a(x) \cdot \underbrace{Ke^{A(x)}}_{y} + b(x) = aKe^{A} + b$

$$K'e^{A} + Ke^{A} \cdot a = aKe^{A} + b$$

$$K'e^{A} = b \quad K' = e^{-A}b \quad K'(x) = e^{-A(x)}b(x)$$

$K(x) = \int e^{-A(x)} b(x)\,dx + c$; si trovano le soluzioni $y = e^{A(x)} \cdot \left(\int e^{-A(x)} b(x)\,dx + c\right) \quad \forall c \in \mathbb{R} \quad (A' = a)$

(es.) $y' = \underbrace{\frac{2}{x+1}}_{a(x)} y + \underbrace{(x+1)^3}_{b(x)}$

$$A(x) = \int a(x)\,dx = \int \frac{2}{x+1}\,dx = 2\ln|x+1| = \ln(x+1)^2$$

$$e^{-A(x)} = \frac{1}{e^{A(x)}} = \frac{1}{e^{\ln(x+1)^2}} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\int \frac{1}{\cancel{(x+1)^2}} \cdot (x+1)^3\,dx = \frac{x^2}{2} + x + C \qquad y = (x+1)^2\left(\frac{x^2}{2} + x + C\right)$$

(es.) $*$ $\begin{cases} y' = e^{x+y} = e^{x} \cdot e^{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $\quad A(x) = e^{x} \quad B(y) = e^{y}$ a variabili separabili

$$\frac{dx}{dy} = e^{x}e^{y} \qquad \int \frac{dy}{e^{y}} = \int e^{x}dx + c$$

$$\int -e^{-y}dy = \int e^{x}dx + c$$

$$-e^{-y} = e^{x} + c \qquad e^{-y} = -e^{x} - c$$

$$-y = \log(\underset{\to -\infty}{-e^{x} - c}) \qquad \begin{cases} y = -\log(-e^{x} - c) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(2) L e' un OPERATORE LINEARE cioe' $\forall y_1, y_2 \quad L(y_1, y_2) = L(y_1) + L(y_2)$

$\forall y, \forall c \in \mathbb{R} \quad L(cy) = cL(y)$

per trovare soluzioni, se ne provano a cercare di tipo esponenziale $y = e^{\lambda x}$ con λ parametro da determinare; si impone $y = e^{\lambda x}$ che risolve l'equazione omogenea (2)

calcolo $y' = \lambda e^{\lambda x}$

$y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

$$y'' + ay' + by = 0$$
$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + b e^{\lambda x} = 0$$
$$e^{\lambda x}\left[\lambda^2 + a\lambda + b\right] = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$ polinomio CARATTERISTICO dell'equaz.

se λ_0 annulla $P(\lambda)$, allora $y = e^{\lambda x}$ e' una soluzione; ci sono 3 casi:

1) $\Delta > 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ reali
2) $\Delta = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2$ reali
3) $\Delta < 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$

$\boxed{\Delta > 0}$ 2 soluzioni $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ dell'eq. omogenea (2) $\Rightarrow L(y_1) = L(y_2) = 0$

si cercano altre soluzioni: $L(cy_1) = cL(y_1) = 0$

$L(cy_2) = cL(y_2) = 0$

$L(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1L(y_1) + c_2L(y_2)$ combinazione lineare

la soluzione in questo caso e' $y = c_1y_1 + c_2y_2$ $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ in cui $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ e $y_2 = e^{\lambda_2 x}$, e $P(\lambda_1) = P(\lambda_2) = 0$

(es.) $y'' + y' - 6y = 0$

$$P(y) = \lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \quad \lambda = \frac{-1 \pm 5}{2} \begin{cases} -3 = \lambda_2 & y_2 = e^{-3x} \\ 2 = \lambda_1 & y_1 = e^{2x} \end{cases} \Bigg\} \text{ soluzioni particolari}$$

soluzioni generali: $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$ $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} y'' + y' - 6y = 0 \\ y(0) = 1 & \text{posiz. iniziale} \\ y'(0) = 0 & \text{veloc. iniziale} \end{cases}$$

impongo che $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$ soddisfi i dati iniziali:

$y(0) = c_1e^0 + c_2e^0 = 1 = c_1 + c_2$

$y'(x) = 2c_1e^{2x} - 3c_2e^{-3x} \longrightarrow y'(0) = 2c_1 - 3c_2 = 0$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 2c_1 - 3c_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = 1 - c_2 \\ 2 - 2c_2 - 3c_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = 3/5 \\ c_2 = 2/5 \end{cases}$$

$y = \frac{3}{5}e^{2x} + \frac{2}{5}e^{-3x}$ soluzioni del problema di Cauchy

$y = e^{\lambda x}$ e' una soluzione $\Leftrightarrow P(\lambda) = 0$

$\boxed{\Delta = 0}$ $P(\lambda)$ ha una sola soluzione reale λ_0 $\quad y_1 = e^{\lambda_0 x}$

$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad \lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{\Delta}}{2} = -\frac{a}{2} \longrightarrow e^{-\frac{a}{2}x}$

anche $y = xe^{\lambda_0 x}$ e' una soluzione.

soluz. generale $y = c_1 e^{\lambda_0 x} + c_2 x e^{\lambda_0 x} = (c_1 + c_2 x)e^{\lambda_0 x}$

(es) $4y'' + 12y' + 9y = 0$

$y'' + 3y' + \frac{9}{4}y = 0 \qquad \lambda^2 + 3\lambda + \frac{9}{4} = 0$

$$\left(\lambda + \frac{3}{2}\right)^2 = 0 \quad \lambda_0 = -\frac{3}{2} \quad y_1 = e^{-3/2 \cdot x} \quad y_2 = xe^{-3/2x}$$

soluz. generale $y = e^{-3/2x}\left[c_1 + c_2 x\right]$

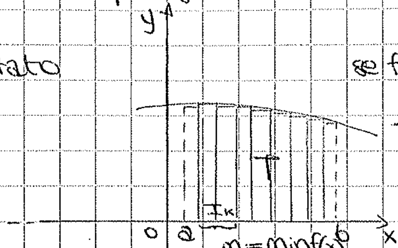
$\boxed{\Delta < 0}$ non ha radici reali $\quad \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

$z_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x}\left[\cos\beta x + i\,\mathrm{sen}\,\beta x\right] \qquad z_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

$z_2 = e^{\alpha x}\left[\cos(-\beta x) + i\,\mathrm{sen}(-\beta x)\right] = e^{\alpha x}\left[\cos\beta x - i\,\mathrm{sen}\,\beta x\right]$ sono coniugate

* → INTEGRALE DEFINITO
- di CAUCHY per funzioni continue a tratti
- di RIEMANN più generale

[INTEGRALE DI CAUCHY]
$f[a,b] \to R$ continua, con $[a,b]$ limitato e f limitata

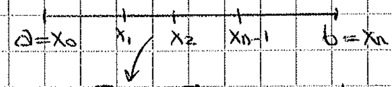


se $f>0$

T trapezoide di f su $[a,b]$: approssimato con rettangoli di altezza pari al massimo/minimo della funz. in quella zona

$m_k = \min f(x)$
$M_k = \max f(x)$ $x \in I_k$

si fissa un numero $n \in \mathbb{N}$ e si divide $[a,b]$ in n parti uguali



$[x_{n-1}, x_n] = I_k \Rightarrow \frac{b-a}{n} = \Delta k$

somma inferiore $s_n = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta k$

somma superiore $S_n = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta k$

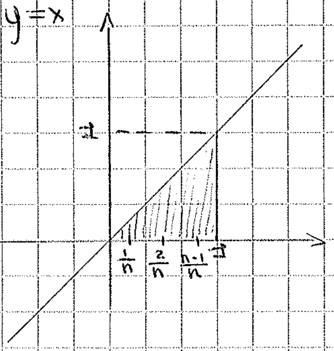
$\boxed{\text{TEOR.}}$ se f è continua ($\in \mathcal{C}[a,b]$) allora $\exists \lim_{n\to+\infty} s = \ell = \lim_{n\to+\infty} S$ con $\ell \in \mathbb{R}$ -

$\int_a^b f = \ell$ è detto integrale definito di f su $[a,b]$; vale anche per $f<0$ o se f cambia di segno.

se $f \geq 0$ l'integrale rappresenta una misura dell'area dell'insieme $T = \{(x,y) : x \in [a,b], 0 \leq y \leq f(x)\}$, se $f<0$ si avrà $f(x) \leq y \leq 0$ -

area T: $\int_a^b |f|$, se $f \leq 0$ $\int_a^b f = -\text{area}\,T$

es. $y=x$



area $T = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$ $M_k = \frac{k}{n}$ valori massimi $\Delta k = \frac{1}{n}$

$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k$

$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2 \ldots + n = a_n$

li sommo partendo dal fondo

$2a_n = 1+2+\ldots+n + n+(n-1)+\ldots+2+1 = n(n+1)$

$a_n = \frac{n(n+1)}{2}$

$S = \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2}$ $\lim_{n\to+\infty} S = \frac{1}{2}$ la definizione di integrale è scomoda per il calcolo anche in casi molto semplici

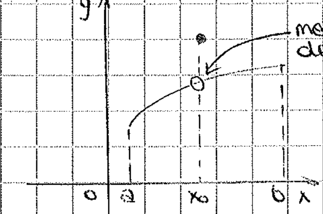
1) se $f \in \mathcal{C}[a,b] \Rightarrow$ f ha una primitiva F TEOR. FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE
2) se F è primitiva di f $\Rightarrow \int_a^b f = F(b) - F(a) = f(x) \Big|_{x=a}^{x=b}$

es. $f(x) = x$ $I = [0,1]$ f è continua → $F(x) = \frac{x^2}{2}$

$\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

$\ell = \int_a^b f(x)\,dx \xleftrightarrow{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} M_k \overset{dx}{\Delta k}$

un altro caso è quello in cui $f[a,b] \to \mathbb{R}$ è CONTINUA A TRATTI, cioè f ha al più un numero finito di punti di discontinuità di 1° specie o eliminabili -



$\tilde{f} = \begin{cases} f(x) & x < x_0 \\ \ell_0^- & x = x_0 \end{cases}$ continua $[a, x_0]$

$\tilde{\tilde{f}} = \begin{cases} f(x) & x_0 < x \leq b \\ \ell_0^+ & x = x_0 \end{cases}$ continua $[x_0, b]$

$\int_a^b f = \int_a^{x_0} \tilde{f} + \int_{x_0}^b \tilde{\tilde{f}}$

$\mathcal{M}(f,b,a) = \frac{1}{a-b}\int_b^a f = \frac{-1}{b-a}\left(-\int_a^b f\right) = \frac{1}{a-b}\int_a^b f$ se si scambiano gli estremi non cambia nulla

- se $f = cost = c$ $\int_a^b c = c(b-a)$ $\frac{\int_a^b c}{b-a} = c$

- sia $f \geq 0, a<b$: $\mathcal{M} = \frac{area T}{b-a}$ $area T = \mathcal{M}(b-a)$

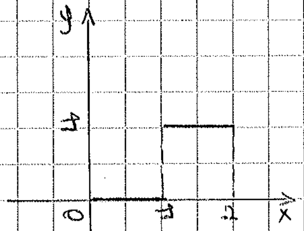
corrisponde all'altezza di un rettangolo di base $(b-a)$ avente la stessa area del trapezoide

TEOR. DELLA MEDIA INTEGRALE

1) se f è integrabile su $[a,b]$ e $m = \inf_{[a,b]} f$ e $M = \sup_{[a,b]} f$ (e sono finiti) $\Rightarrow m \leq \mathcal{M} \leq M$

2) se inoltre $f \in \mathcal{C}[a,b]$, $\exists c \in [a,b] \mid \mathcal{M} = f(c)$

controesempio a (2)



$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$Im f \{0, 1\}$

$\int_0^2 f = \int_0^1 f + \int_1^2 f = 1/1 = 1$ $\mathcal{M} = \frac{1}{2} \notin Im f$

dim (1): si sa che $m \leq f(x) \leq M$ $\forall x \in [a,b]$; si ha monotonia in $[a,b]$ con $a<b$

$$\int_a^b m \leq \int_a^b f \leq \int_a^b M$$

$$\frac{m\cancel{(b-a)}}{\cancel{b-a}} \leq \frac{\int_a^b f}{b-a} \leq \frac{M\cancel{(b-a)}}{\cancel{b-a}}$$

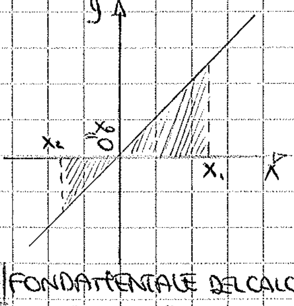
dim (2): f è continua $\Rightarrow$ assume tutti i valori tra m e M

Ma per (1) $\mathcal{M} \in [m, M] = Im f \Rightarrow \exists c \mid f(c) = \mathcal{M}$

FUNZIONE INTEGRALE

sia $f: I \to \mathbb{R}$ integrabile in I intervallo; fissato $x_0 \in I$, si definisce la funzione $\mathcal{F}: I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \mathcal{F}(x) = \int_{x_0}^x f$ funz. INTEGRALE di f su I con punto iniziale x_0

es



$y = x = f(x)$ $x_0 = 0$

$\mathcal{F}(x) = \int_0^x f = \frac{x^2}{2}$ $x \geq 0$

$\mathcal{F}(x) = -\frac{x^2}{2}$ $x \leq 0$

TEOR. FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

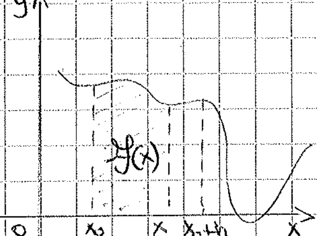
se $f: I \to \mathbb{R}$ è continua, $x_0 \in I$ e $\mathcal{F}$ è la funzione integrale con punto iniziale x_0:

1) $\mathcal{F}$ è derivabile in I

2) $\mathcal{F}' = f$ in I

(corollario: se f è continua in I, ha una propria primitiva $\mathcal{F}$)

dim (1)+(2):

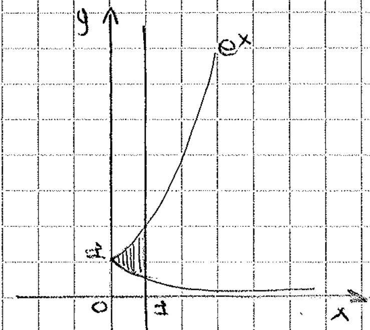


si vuole calcolare il limite $\lim_{h\to 0} \frac{\mathcal{F}(x+h) - \mathcal{F}(x)}{h}$

$\mathcal{F}(x+h) = \int_{x_0}^{x+h} f$

$\mathcal{F}(x+h) - \mathcal{F}(x) = \int_{x_0}^{x+h} f - \int_{x_0}^{x} f \overset{additività}{=} \cancel{\int_{x_0}^{x} f} + \int_{x}^{x+h} f - \cancel{\int_{x_0}^{x} f} = \int_x^{x+h} f$

$\frac{\mathcal{F}(x+h) - \mathcal{F}(x)}{h} = \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f$



es. $\int_0^1 \underset{f}{(\text{arcsen}x)} \cdot \underset{g'}{1}\, dx = x \,\text{arcsen}x \Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

es. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, \frac{1}{1+x^2} \le y \le e^x\}$

$y = \frac{1}{1+x^2} \quad y = e^x$

$\text{Area}\, A = \int_0^1 e^x dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx = e^x\Big|_0^1 - \text{arctg}x\Big|_0^1 = e - 1 - \pi/4 > 0$

PROPR. sia f una funzione continua in I e infinitesima per $x \to x_0, x_0 \in I$: $f = \underset{x \to x_0}{o}(x-x_0)^\alpha$;

se F è la primitiva di f e $F(x_0) = 0 \Rightarrow \underset{x \to x_0}{o}((x-x_0)^{\alpha+1}) = F(x)$

dim. $\lim_{x \to x_0} \frac{F(x)}{(x-x_0)^{\alpha+1}} \overset{H}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{F'(x)}{(\alpha+1)(x-x_0)^\alpha} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(\alpha+1)(x-x_0)^\alpha} = 0$ per Hp.

es. $\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \int_0^x \cos t^2\, dt}{1 - \cos x} \qquad \cos t^2 = 1 - \frac{t^4}{2} + \underset{t \to 0}{o}(t^4)$

$\int_0^x \cos t^2 dt = \int_0^x 1 dt - \frac{1}{2}\int_0^x t^4 dt + \int_0^x o(t^4) = x - \frac{1}{2}\frac{x^5}{5} + o(x^5)$

$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2/2} = 2$

es. $H = \int_0^{\sqrt{x}} e^{t^2} dt \quad H'?$

$F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt \quad F'(x) = e^{x^2} \qquad H(x) = F(\sqrt{x})$

$H'(x) = F'(x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = e^{(\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^x}{2\sqrt{x}} \quad (x \ge 0)$

→ INTEGRALE IMPROPRIO
- intervallo illimitato
- funzione illimitata
- combinazione

DEF. $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ è detta LOCALMENTE INTEGRABILE in $[a,+\infty) \Leftrightarrow$ f è integrabile secondo Cauchy in ogni $I \subseteq [a,+\infty)$, I intervallo limitato.

$\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\, dt$

a) CONVERGENTE se $\exists \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f \in \mathbb{R}$

b) DIVERGENTE se $\exists \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f \in \{\pm\infty\}$

c) OSCILLANTE se $\nexists \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f$

es. • $y = \frac{1}{x^\alpha} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$

$\alpha = 1$ DIVERGE
$\alpha > 1$ CONVERGE
$0 < \alpha < 1$ DIVERGE

$\alpha = 1 \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \to +\infty} [\log b - \cancel{\log 1}] = +\infty$

$\alpha \ne 1 \quad \lim_{b \to +\infty} \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right] = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{b^{-1+\alpha}} - 1$

$1 - \alpha > 0 \quad \alpha < 1 \quad l = +\infty$
$1 - \alpha < 0 \quad l = 0$

• $\int_0^{+\infty} \text{sen}x\, dx = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \text{sen}x\, dx = \lim_{b \to +\infty} [-\cos x]_0^b = \lim_{b \to +\infty} (1 - \cos b) = \nexists$

CRITERIO 1 se $f \ge 0$ e localmente integrabile in $[a,+\infty) \Rightarrow \int_a^{+\infty} f$ non è indeterminato

dim. ho $x_1 < x_2$; si vuole dimostrare che la $\mathcal{F}(x)$ è crescente, con $\mathcal{F}(x_1) = \int_a^{x_1} f$.
- se f è continua $\Rightarrow \mathcal{F}' = f \ge 0$, $\mathcal{F}$ è crescente
- se f è continua a tratti $\mathcal{F}(x_2) = \int_a^{x_2} f = \int_a^{x_1} f + \overbrace{\int_{x_1}^{x_2} f}^{\ge 0}$

$\mathcal{F}(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} f \ge \mathcal{F}(x_1)$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \quad f(x) \sim \frac{1}{x^3} \quad \alpha > 1, \ \alpha = 3$

- $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}} dx$ $f(x) \geq 0$ non indeterminato

$\lim_{x \to +\infty} f = 0 \quad \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x} \quad \alpha = 1$ diverge

- $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log x} dx \quad \lim_{b \to +\infty} \int_2^b \frac{1}{x \log x} dx = \lim_{b \to +\infty} \left| \log |\log x| \right|_2^b = \lim_{b \to +\infty} \log|\log b| - \log|\log 2| = +\infty$ diverge

CRITERIO 2 f infinitesima per $x \to 0$

a) se f e' di ordine superiore di $g = \frac{1}{x^\alpha}$, con $\alpha > 1 \Rightarrow \int_a^{+\infty} f$ converge assolutamente

b) se f e' di ordine inferiore o pari a $\frac{1}{x}$ e $f \geq 0 / \leq 0 \Rightarrow \int_a^{+\infty} f$ diverge (positivamente se / c'e' val. assoluto)

(es) • $\int_0^{+\infty} \frac{x e^{-x}}{2+x^2+\operatorname{sen} x} dx$ $f \geq 0 \Rightarrow$ I non e' indeterminato

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x e^{-x}}{2+x^2+\operatorname{sen} x} = 0 \quad f \sim \frac{x e^{-x}}{x^2} \sim \frac{e^{-x}}{x} = \frac{1}{x e^x}$ ordine superiore a $\frac{1}{x^2}$

- $\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x} dx$ $f \geq 0$ non indet.

$\lim_{x \to +\infty} f = 0$ infinitesimo di ordine superiore a $1/x \Rightarrow$ diverge a $+\infty$

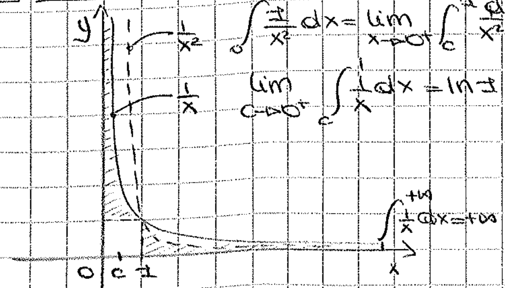
→ se f non e' limitata su [a,b]

$f [a,b) \to \mathbb{R}$ localmente integrabile in $[a,b)$

caso modello

$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{x \to 0^+} \int_c^1 \frac{dx}{x^2} = \left| -\frac{1}{x} \right|_c^1 = -1 + \frac{1}{c} = +\infty$ diverge

$\lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x} dx = \ln 1 - \ln c = +\infty$



$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = +\infty \quad \alpha > 1$ diverge

$0 < \alpha < 1$ converge

confronto asintotico: $f [a,b) \to \mathbb{R}$ infinita

$\varphi(x) = \frac{1}{b-x}$ se $f \sim \ell \varphi^\alpha$ con $\alpha < 1$ converge

$f \sim \ell \varphi^\alpha$ con $\alpha \geq 1$ diverge