NUMERO: 951

DATA: 05/05/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Lo Curzio

MATERIA: Geometria

Prof. Cumino

CORSO DI

GEOMETRIA

2012/2013

Mario Lo Curzio

prof.ssa Caterina Cumino

Politecnico di Torino

Spesso la distinzione tra vettore riga e vettore colonna non e' importante; in particolare di solito si identificano gli insiemi $\mathbf{R}^{1,n}$ e $\mathbf{R}^{n,1}$ con $\mathbf{R}^n$, esattamente come quando si scrivono le coordinate cartesiane di un punto nel piano (vettori di $\mathbf{R}^2$) o nello spazio (vettori di $\mathbf{R}^3$).

Vettori riga e vettori colonna non sono solo casi particolari di matrici; infatti data una qualsiasi matrice $A \in \mathbf{R}^{m,n}$, possiamo considerare i suoi vettori riga $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_m \in \mathbf{R}^{1,n}$ e i suoi vettori colonna $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n \in \mathbf{R}^{m,1}$.

Somma di matrici, prodotto di un numero per una matrice. Con le matrici si possono eseguire operazioni algebriche che generalizzano quelle che si fanno abitualmente con i numeri.

Definizione. Se A e B sono matrici $m \times n$, si dice **matrice somma** $A+B$ la matrice $m \times n$ tale che il coefficiente che appartiene alla i-esima riga e alla j-esima colonna e' la somma dei coefficienti che appartengono alla i-esima riga e alla j-esima colonna di A e B.

Esempio.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad A+B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 6 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Definizione. Data la matrice A di tipo $m \times n$ e il numero k, la matrice kA e' la matrice di tipo $m \times n$ tale che il coefficiente che appartiene alla i-esima riga e alla j-esima colonna e' k volte il coefficiente che appartiene alla i-esima riga e alla j-esima colonna.

Esempio.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad k = 2, \quad kA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 12 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

In particolare se k e' zero, otteniamo la matrice nulla

$$0A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se $k = -1$ indichiamo kA con $-A$ e $A + (-A) = A - A = O$ e' la matrice nulla. Osserviamo che matrici nulle di tipo diverso sono diverse, anche se usiamo lo stesso simbolo O per indicarle.

E' immediato dimostrare il

Teorema. Le operazioni di somma e di prodotto per un numero soddisfano le seguenti proprieta':

- la somma e' commutativa (ossia $A + B = B + A$);
- la somma e' associativa (ossia $(A + B) + C = A + (B + C)$);
- il prodotto per un numero e' distributivo rispetto alla somma (ossia $k(A + B) = kA + kB$);
- dati i numeri k, m, $(k + m)A = kA + mA$;
- dati i numeri k, m, $(km)A = k(mA)$.

Prodotto di matrici. Oltre alle operazioni di somma e prodotto per un numero, e' possibile definire per le matrici anche un'operazione di prodotto: il prodotto righe per colonne tra una matrice A di tipo $m \times k$ e una matrice B di tipo $k \times n$. Per cominciare consideriamo il caso in cui $m = 1$ ed $n = 1$.

Definizione. Siano $\mathbf{a}$ un vettore riga e $\mathbf{b}$ un vettore colonna aventi entrambi k componenti. Il prodotto di $\mathbf{a}$ per $\mathbf{b}$ e' il numero

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 \ldots + a_k b_k$$

Definizione. Sia A una matrice di tipo $m \times k$ avente righe $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_m$ e B una matrice di tipo $k \times n$ avente colonne $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n$, allora AB e' la matrice di tipo $m \times n$ avente $\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{c}_j$ come coefficiente di posto i, j.

numero colonne = numero righe → prodotto ⇒ riga × colonne

Lemma. La matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e' invertibile se e solo se $ad - bc \neq 0$; in tal caso $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Esempi.

1) Calcolare $(A+B)^2$ nel caso in cui A e B sono matrici quadrate di ordine $k=1$ e nel caso in cui sono matrici quadrate di ordine $k=2$.

2) Calcolare $D = 2(A+B)C^2$, nel caso in cui $A = -1, B = 3, C = -\sqrt{2}$ e nel caso in cui $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

3) Calcolare l'inversa di $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; verificare che $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ non e' invertibile;

4) Date le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 6 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, trovare a, b, c tali che $AB = I_2$; dire se esiste una matrice C tale che $CA = I_3$.

Determinanti. Ad ogni matrice quadrata A di ordine n e' possibile associare un numero, detto il determinante di A, che si indica con $det(A)$ e si calcola a partire dai coefficienti di A con una regola ben precisa. Per esempio nel caso della matrice A di ordine 2 vista prima, il numero $ad - bc$ e' il determinante di A.

Esaminiamo per ora i casi $n = 1, 2, 3$.

$n = 1$

$$A = a, \quad det(A) = a$$

$n = 2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$n = 3$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} det(A) &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}\,det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12}\,det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13}\,det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$Det(KA) = K^n Det(A)$

Prodotto di matrici

Affinché si possa fare un prodotto di matrici il numero di colonne deve essere uguale al numero di righe.
Il prodotto si effettua RIGA X COLONNA

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = (1\ 0\ 3)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 4 \leftarrow \text{primo coeff.}$$

Matrice diagonale

Gli unici coeff. non nulli sono quelli che appartengono alla diagonale principale

Triangolare alta

se tutti i coefficienti al di sotto della diagon. principale sono nulli.

Matrice identità

se $a_{ij} = 1$ se $i = j$
$a_{ij} = 0$ se $i \neq j$

$\Downarrow$

Matrice inversa

Data una matrice quadrata A si dice invertibile se esiste una matrice quadrata B dello stesso ordine tale che
$$AB = BA = I, \quad \text{con } B = A^{-1}$$

Una matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è invertibile se $ad - bc \neq 0$,

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

Potenze

$$A^3 = AAA = A^2A = AA^2$$ le potenze commutano

$$A^nA^m = A^mA^n, \quad m, n \in \mathbb{N}$$

Determinante

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$(a_{11}a_{22}a_{33}) + (a_{12}a_{23}a_{31}) + (a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31}) - (a_{11}a_{23}a_{32}) - (a_{12}a_{21}a_{33})$$

Definizione. Dati i numeri reali $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, il vettore $a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots a_n\mathbf{v}_n$ si dice **combinazione lineare** dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ a coefficienti $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Definizione. I vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ si dicono **linearmente dipendenti** se uno di essi si può esprimere come combinazione lineare dei rimanenti, ossia se esistono n coefficienti reali $a_1, a_2, \ldots, a_n$ non tutti nulli tali che $a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$.

Sono complanari

Definizione. I vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ si dicono **linearmente indipendenti** se non sono linearmente dipendenti, ossia se l'unico modo per esprimere $\mathbf{0}$ come loro combinazione lineare è di assumere i coefficienti tutti nulli.

Casi particolari

1) $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sono linearmente dipendenti se si può scrivere $a_1\mathbf{u} + a_2\mathbf{v} + a_3\mathbf{w} = \mathbf{0}$ con almeno un coefficiente non nullo, per esempio a_1; si ha allora $\mathbf{u} = \frac{a_2}{a_1}\mathbf{v} + \frac{a_3}{a_1}\mathbf{w}$, quindi in particolare risulta che $\mathbf{u}$ e' complanare con $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.

2) $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sono linearmente dipendenti se si può scrivere $a_1\mathbf{u} + a_2\mathbf{v} = \mathbf{0}$ con almeno un coefficiente non nullo, per esempio a_1; si ha allora $\mathbf{u} = \frac{a_2}{a_1}\mathbf{v}$, quindi in particolare risulta che $\mathbf{u}$ ha la stessa direzione di $\mathbf{v}$.

3) $\mathbf{u}$ è linearmente dipendente se si puo' scrivere $a_1\mathbf{u} = \mathbf{0}$ con a_1 non nullo; si ha allora $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. ?

4) quattro vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{t}$, nello spazio della geometria, sono sempre linearmente dipendenti.

Componenti di un vettore. Fissato un sistema di riferimento cartesiano $R(O, x, y, z)$ di origine O, ad ogni punto $P(x, y, z)$ è associato un vettore $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$ e viceversa ad ogni vettore $\mathbf{v}$ è associato un unico segmento orientato di origine O ed estremo $P(x, y, z)$, quindi è possibile identificare ogni vettore applicato in O con le coordinate cartesiane del suo estremo.

In particolare i vettori $\mathbf{i} = (1,0,0), \mathbf{j} = (0,1,0), \mathbf{k} = (0,0,1)$ sono versori con la stessa direzione e con lo stesso verso degli assi coordinati; $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ si dicono versori fondamentali. Le coordinate (x, y, z) di P si dicono componenti di $\mathbf{v}$ rispetto al sistema di riferimento $R(O, x, y, z)$; risulta quindi che si può scrivere in modo unico $\boxed{\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.}$

Si può scrivere $\mathbf{v} = (x, y, z) = (x, y, 0) + (0, 0, z)$ e quindi, per il teorema di Pitagora applicato due volte, risulta che $\mathbf{v}$ ha modulo $\sqrt{(\sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Teorema. Dati i vettori $\mathbf{v_1} = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{v_2} = (x_2, y_2, z_2)$ e un numero reale m, si ha $\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$, $m\mathbf{v_1} = m(x_1, y_1, z_1) = (mx_1, my_1, mz_1)$.

Prodotto scalare. Dati due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ si dice prodotto scalare di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ il numero reale $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{v}||\mathbf{w}|cos\widehat{\mathbf{vw}}$ dove $0 \leq \widehat{\mathbf{vw}} \leq \pi$ e' l'angolo compreso tra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.

Proprietà

1) (commutativa) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$;

2) $(m\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot (m\mathbf{w}) = m(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$;

3) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$.

Ricordiamo che due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ non nulli si dicono ortogonali se $\widehat{\mathbf{vw}} = \frac{\pi}{2}$, si dicono paralleli se $\widehat{\mathbf{vw}} = 0$ oppure $\widehat{\mathbf{vw}} = \pi$.

Osservazioni

1) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2$;

2) $|\mathbf{v} - \mathbf{w}|^2 = (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} - \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{v}|^2 - 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} + |\mathbf{w}|^2$;

3) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$ se e solo se uno dei due vettori è nullo oppure i due vettori sono ortogonali tra loro;

tale espressione si può riscrivere simbolicamente nel seguente modo:

$$\boxed{\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}}$$

Prodotto misto. Dati tre vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, si dice prodotto misto di $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ il numero reale $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$; ovviamente si esegue prima il prodotto vettoriale e poi il prodotto scalare, altrimenti $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w}$ non ha senso.

Supponiamo che $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ siano dati in componenti rispetto a un sistema di riferimento $R(O, x, y, z)$: $\mathbf{u} = (x_0, y_0, z_0), \mathbf{v} = (x_1, y_1, z_1), \mathbf{w} = (x_2, y_2, z_2)$. Allora , utilizzando come sopra la nozione di determinante determinante, si ottiene:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Dalla definizione segue che $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = 0$ se e solo se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{0}$ oppure $\mathbf{u}$ è ortogonale a $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$, nel qual caso risulta che $\mathbf{u}$ sta nel piano individuato da $\mathbf{v}$ e da $\mathbf{w}$, ossia $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono linearmente dipendenti.

Osservazione. Il volume del parallelepipedo avente per spigoli i vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ è uguale a $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}|$. Infatti il volume del parallelepipedo si ottiene moltiplicando l'area della base per l'altezza; consideriamo per esempio come base del parallelepipedo il parallelogramma che ha per lati $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$; l'area di tale base vale $|\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}|$, mentre l'altezza relativa a tale base è data dal modulo della proiezione ortogonale di $\mathbf{u}$ sulla direzione di un versore $\mathbf{n}$ ortogonale sia a $\mathbf{v}$ che a $\mathbf{w}$, ossia $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|$.

- Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono linearmente dipendenti $a_1\vec{u}+a_2\vec{v}=0$ allora $\vec{u}=\frac{a_2}{a_1}\vec{v}$ $\rightarrow$ $\vec{u}$ è parallelo a $\vec{v}$
- Quattro vettori nello spazio sono sempre linearm. dipendenti

Componenti: È possibile identificare ogni vettore applicato in O con le coordinate cartesiane del suo estremo.

I vettori $\vec{i}=(1,0,0)$, $\vec{j}=(0,1,0)$, $\vec{k}=(0,0,1)$ sono i versori fondamentali che hanno direzione e verso degli assi orientati

$$\boxed{\vec{v}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}$$

$$\boxed{|\vec{v}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$ per il teorema di Pitagora applicato due volte

$$(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)=\boxed{(x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2)}$$

$$m(x_1,y_1,z_1)=\boxed{(mx_1,\ my_1,\ mz_1)}$$

Prodotto scalare

$$\boxed{\vec{v}\cdot\vec{w}=|\vec{v}||\vec{w}|\cos\widehat{vw}}$$

gode di proprietà
- commutativa
- associativa
- distributiva

se conosciamo i moduli

Se $\widehat{vw}=\frac{\pi}{2}$ sono ortogonali

Se $\widehat{vw}=0$ sono paralleli

se conosciamo le coord.

$$\boxed{\vec{v}\cdot\vec{w}=(x_1,y_1,z_1)\cdot(x_2,y_2,z_2)=(x_1x_2,\ y_1y_2,\ z_1z_2)}$$

Se il prodotto scalare è uguale a 0 sono ortogonali

PRODOTTO MISTO

$\vec{u} = (x_0, y_0, z_0)$ $\quad \vec{v} = (x_1, y_1, z_1)$ $\quad \vec{w} = (x_2, y_2, z_2)$

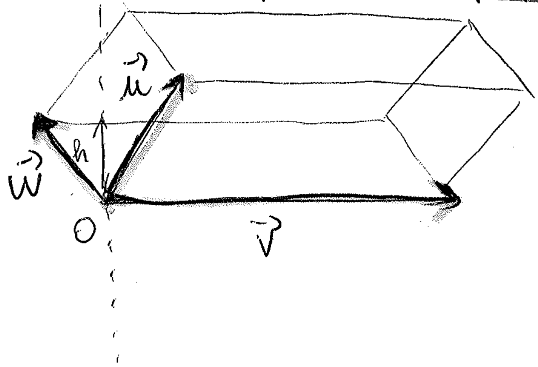
$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}}$$

$\boxed{= 0}$
- se $\boxed{|\vec{u}| = 0}$
- se $\boxed{|\vec{v} \wedge \vec{w}| = 0}$
- se $\vec{u}$ è $\perp$ a $\vec{v} \wedge \vec{w}$ il quale è $\perp$ al piano di $\vec{v}$ e $\vec{w}$

$\Downarrow$

$\vec{u}$ è complanare a $\vec{v}$ e $\vec{w}$ (sono linearm. dip)

- Si effettua prima il prodotto scalare
- Volume parallelepipedo



$$\boxed{\text{Volume} = |u \cdot v \wedge w|}$$

$h = |\vec{w} \cdot \text{vers}(\vec{u} \wedge \vec{v})|$

$\downarrow$

proiezione ortogonale di $\vec{w}$ sulla direzione ortogonale a $\vec{v} \wedge \vec{u}$ passante per O.

$(\vec{OP} - \vec{OP_0}) = t\vec{v}$

(1) si dice *equazione vettoriale* della retta r, $\mathbf{v}$ si dice vettore direttore di r e le componenti l, m, n di $\mathbf{v}$ si dicono *parametri direttori* di r. Da (1), passando alle componenti, si deducono le *equazioni parametriche* di r:

$$(2) \qquad \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

da cui segue l'eguaglianza dei rapporti:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

che, a rigore, avrebbe senso solo se $l \neq 0, m \neq 0, n \neq 0$; tuttavia, osservando le equazioni parametriche di r, si vede che quando è nullo un denominatore, è nullo anche il corrispondente numeratore.

Eguagliando ora due coppie di tali rapporti, per esempio i primi due e il primo e il terzo, si trovano le equazioni di due piani, di cui r è intersezione; il sistema lineare:

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} & \text{è eq di un piano} \\ \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{z - z_0}{n} \end{cases}$$

è la *rappresentazione cartesiana* di r.

Nel caso (b), sono dati due piani non paralleli $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ e $\alpha' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$, che hanno come intersezione la retta r; le coordinate dei punti di r sono le soluzioni del sistema lineare:

$$(3) \qquad \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Per ottenere una rappresentazione parametrica di r, a partire dalla rappresentazione cartesiana (3), dobbiamo trovare un punto di r, cioè una soluzione particolare (x_0, y_0, z_0) del sistema (3) e un vettore $\mathbf{v}$ parallelo ad r; per fare ciò basta osservare che $\mathbf{v} = (l, m, n)$ deve essere ortogonale a entrambi i vettori $\mathbf{n} = (a, b, c)$ e $\mathbf{n}' = (a', b', c')$, quindi si può scegliere $\mathbf{v} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{n}' = (bc' - b'c, a'c - ac', ab' - a'b)$.

Nel caso (c) se vogliamo determinare la retta che passa per $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e $P_1(x_1, y_1, z_1)$, possiamo ricondurci al caso (a), cercando la retta che passa per uno dei due punti, per esempio per P_0, parallela al vettore $\mathbf{v} = (\vec{OP_1} - \vec{OP_0})$. Si ottengono le equazioni parametriche:

P_0P_1

$$(4) \qquad \begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0) \\ z = z_0 + t(z_1 - z_0) \end{cases}$$

Quanto visto finora per le rette nello spazio può ripetersi per analogia nel piano, ricordando che nel piano la scelta del riferimento permette di identificare i vettori applicati nell'origine con coppie ordinate di numeri reali; per ottenere quindi una rappresentazione parametrica della retta r passante per il punto P_0 e parallela al vettore $\mathbf{v} = (l, m)$ basta sopprimere la coordinata z nelle (2):

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$$

da cui, eliminando il parametro t, si ottiene una rappresentazione cartesiana della retta r data da un'unica equazione del tipo in particolare r e α sono ortogonali quando r è parallela alla retta p, mentre r e α sono paralleli quando r è ortogonale alla retta p.

Distanza tra due punti

Dati due punti $P(x, y, z)$ e $P'(x', y', z')$, la distanza di P da P' è il modulo del vettore $(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP'})$, ossia (per il teorema di Pitagora):

$$d(P, P') = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

Distanza di un punto da un piano

Dato un piano α di equazione cartesiana $ax + by + cz + d = 0$ e un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, la distanza di P_0 da α è la distanza di P_0 dal punto H proiezione ortogonale di P_0 sul piano α :

$$d(P_0, \alpha) = d(P_0, H) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Distanza di un punto da una retta nel piano

Data l'analogia tra l'equazione di una retta nel piano e quella di un piano nello spazio, con un procedimento del tutto simile al precedente, si ottiene la distanza di un punto $P(x_0, y_0)$ da una retta $r : ax + by + c = 0$:

$$d(P_0, r) = d(P_0, H) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Distanza di un punto da una retta nello spazio

Dati la retta r e il punto P_0 , la distanza di P_0 da r può essere determinata con un procedimento geometrico, che segue dai casi precedenti: basta determinare il piano α passante per il punto P_0 e ortogonale alla retta r e considerare il loro punto di intersezione $H = r \cap \alpha$; si ha infatti $d(P_0, r) = d(P_0, H)$.

Distanza tra piani paralleli

Per calcolare tale distanza, ci si può ricondurre al calcolo della distanza tra un punto e un piano: dati i piani paralleli $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ e $\alpha' : ax + by + cz + d' = 0$ si ha

$$d(\alpha, \alpha') = d(Q, \alpha)$$

dove Q è un punto qualsiasi del piano α'. Ne segue:

$$d(\alpha, \alpha') = \frac{|d - d'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Distanza tra rette sghembe

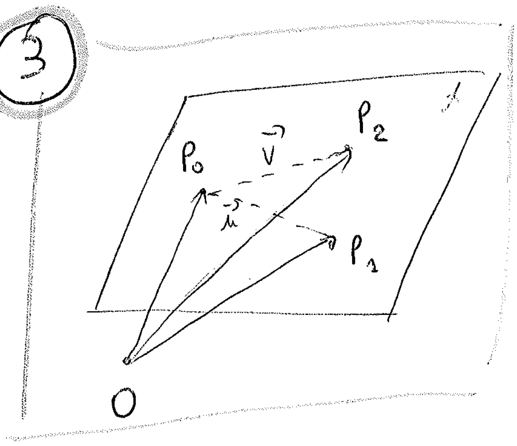
Date due rette sghembe r ed s esistono due punti (P_1 su r e P_2 su s) tali che la retta passanre per P_1 e P_2 è ortogonale e incidente sia con r, sia con s; il segmento P_1P_2 è quello che ha la lunghezza minima tra tutti i segmenti aventi un estremo su r e un estremo su s; si definisce distanza tra r ed s la distanza tra P_1 e P_2.

Per calcolare tale distanza, ci si può ricondurre al calcolo della distanza tra un punto e un piano: sia α il piano che contiene una delle due rette, per esempio s, ed è parallelo alla retta r, allora

$$d(r, s) = d(r, \alpha) = d(R, \alpha)$$

dove R è un punto qualsiasi della retta r.

3



$\vec{u} = \vec{OP_1} - \vec{OP_0}$

$\vec{v} = \vec{OP_2} - \vec{OP_0}$

$P_1 = (x_1, y_2, z_1)$

$P_2 = (x_2, y_2, z_2)$

Il piano α è parallelo a P_0P_2 e a P_0P_1 e quindi ortogonale al vettore $\vec{v} = (\vec{OP_1} - \vec{OP_0})(\vec{OP_2} - \vec{OP_0})$

Quindi il piano è determinato da:

$$\boxed{(\vec{OP} - \vec{OP_0})(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix}}$$

si riconduce nel caso 2

Parallelismo tra piani

I piani $\alpha: ax + by + cz + d$

$\alpha': a'x + b'y + c'z + d'$

Sono paralleli se sono paralleli $v = (a, b, c)$ e $v' = (a', b', c')$

Quindi se $(a, b, c) = k(a', b', c')$

Inoltre se $(a, b, c, d) = (a', b', c', d')$ i piani coincidono

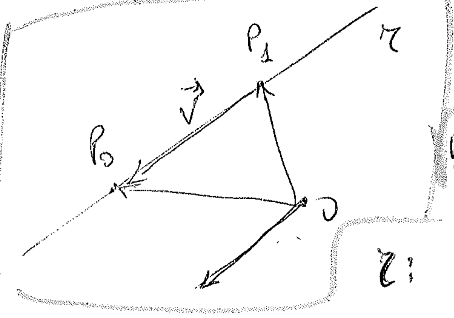
(2) Due piani che si intersecano lungo una retta

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$

Per ottenere una rappresentazione parametrica di r dobbiamo trovare una soluzione particolare del sistema P_0 e un vettore $\vec{v}$ parallelo a r; $\vec{v}$ deve essere ortogonale sia a $\vec{n}=(a,b,c)$ che a $\vec{n}'=(a',b',c')$ per cui

$$\boxed{\vec{v}=\vec{n}\wedge\vec{n}'=(bc'-b'c,\ a'c-ac',\ ab'-a'b)}$$

(3)



$$r:\ \vec{OP}-\vec{OP_0}=t(\vec{OP_1}-\vec{OP_0})$$

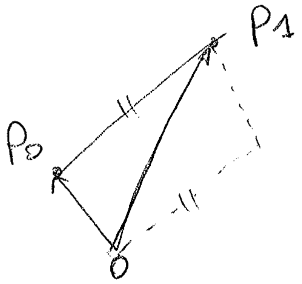
$$r:\ (x-x_0, y-y_0, z-z_0)=t(x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0)$$

$$r: \begin{cases} x-x_0=t(x_1-x_0) \\ y-y_0=t(y_1-y_0) \\ z-z_0=t(z_1-z_0) \end{cases}$$

$$\boxed{r:\ \frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}}$$

DISTANZE

• DISTANZA TRA DUE PUNTI



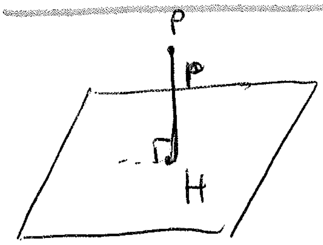
$P_0(x_0, y_0, z_0)$

$P_1(x_1, y_1, z_1)$

$$\boxed{d(P_0, P_1) = \sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}}$$

$$\| \overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0} \|$$

• DISTANZA DI UN PUNTO DA UN PIANO



$\pi : ax+by+cz+d=0$

$P_0(x_0, y_0, z_0)$

Cerco $H = \pi \cap p$ → retta passante per P_0 e $\perp$ ad H

$$p \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$ → rappresentazione parametrica della retta p

$\pi \cap p$:

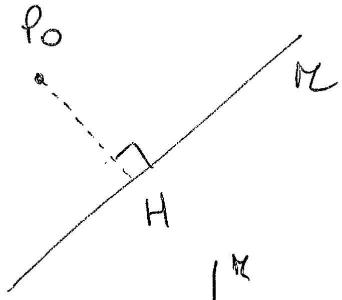
$$a(x_0+at) + b(y_0+bt) + c(z_0+ct) + d = 0$$

$$(a^2+b^2+c^2)t + ax_0+by_0+cz_0+d = 0$$

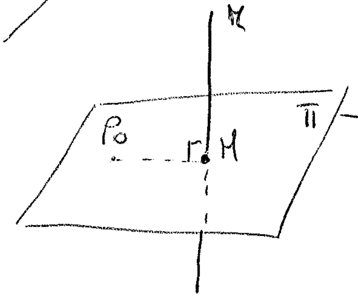
$$t = -\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}$$

$$H : \begin{cases} x = x_0 + a\left(-\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}\right) \\ y = y_0 + b(\dots) \\ z = z_0 + c(\dots) \end{cases}$$

• DISTANZA DI UN PUNTO DA UNA RETTA NELLO SPAZIO



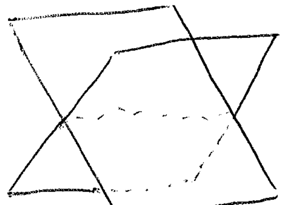
$$d(P_0, r) = d(P_0, H)$$



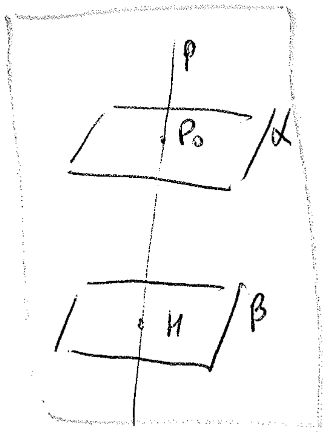
π : piano per P_0 ortogonale ad r

$H = \pi \cap r$

• DISTANZA TRA DUE PIANI



piani incidenti $\rightarrow d(\alpha, \beta) = 0$



$\alpha \parallel \beta$ $\quad d(\alpha, \beta) = d(P_0, H)$

$\forall P_0 \in \alpha$, $H = p \cap \beta$, dove p = retta per P_0, $\perp \beta$

Se i generici piani sono

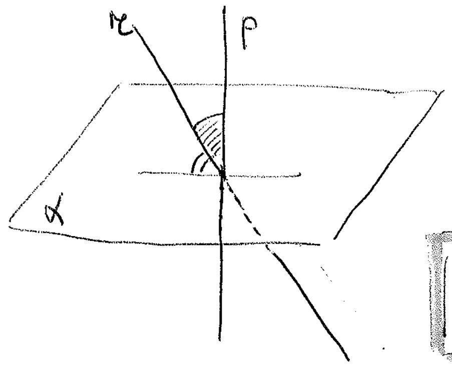
$\alpha: ax + by + cz + d = 0$

$\beta: a'x + b'y + c'z + d' = 0$

$$\Rightarrow \boxed{d(\alpha, \alpha') = \frac{|d - d'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

Oppure si può trovare riconducendosi alla distanza tra punti $d(P_0, H)$.

ANGOLO TRA RETTA E PIANO



$p \perp \alpha$, passante per $r \cap \alpha$

So calcolare $\widehat{rp}$ conoscendo $\vec{v}_{\perp\alpha}$

$$\boxed{\widehat{r\alpha} = \frac{\pi}{2} - \widehat{rp}}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 130

Supponiamo che esista una relazione $a_1\mathbf{r}_1+a_2\mathbf{r}_2+a_3\mathbf{r}_3=\mathbf{0}$ tra le righe non nulle di M; sviluppando i calcoli si ottiene: $2a_1=0$, $3a_1+7a_2=0$, $3a_2=0$, $aa_1+8a_2+2a_3=0$, $6a_1+a_2+4a_3=0$, da cui $a_1=a_2=a_3=0$. Le colonne di M invece non sono linearmente indipendenti: per esempio $\mathbf{c}_4=-\frac{9}{14}\mathbf{c}_2+\frac{3}{7}\mathbf{c}_3$. Il fatto è che riusciamo sempre a esprimere una colonna priva di indicatori come combinazione lineare delle precedenti, trovando i coefficienti con il procedimento usato prima. Allo stesso modo si vede che le colonne con indicatore sono linearmente indipendenti.

Definizione. Sia M una matrice ridotta a scala; si dice **rango** di M, $rg(M)$, il numero delle sue righe non nulle o equivalentemente il numero degli indicatori.

La matrice a scala M considerata nell'esempio precedente ha rango 3.

Sistemi lineari

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\qquad\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & |b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & |b_2 \\ \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & |b_m \end{pmatrix}$$

Un sistema lineare di m equazioni in n incognite a coefficienti in $\mathbf{R}$ si può scrivere come equazione matriciale $AX=B$, dove $A=(a_{ij})\in\mathbf{R}^{m,n}$ è la matrice dei coefficienti, $X=(x_j)\in\mathbf{R}^{n,1}$ è la colonna delle incognite, $B=(b_i)\in\mathbf{R}^{m,1}$ è la colonna dei termini noti. Ogni riga della matrice completa $(A|B)\in\mathbf{R}^{m,n+1}$ corrisponde a un'equazione del sistema.

Una soluzione del sistema è una n-upla di numeri $(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbf{R}$ che soddisfano contemporaneamente tutte le sue equazioni; un sistema può avere una sola o infinite soluzioni (sistema compatibile) oppure nessuna soluzione (sistema incompatibile).

In particolare un **sistema omogeneo** (cioè con tutti i temini noti nulli) è sempre compatibile, infatti ha sempre almeno la soluzione che si ottiene assegnando a tutte le incognite il valore 0 (soluzione banale).

Esempi.

$$(1)\ \begin{cases} x-2y=0 \\ 2x+y=0 \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} x-2y=0 \\ 2x-4y=0 \end{cases}$$

$$(3)\ \begin{cases} x-2y=2 \\ 2x+y=-1 \end{cases} \qquad (4)\ \begin{cases} x-2y=2 \\ 2x-4y=-1 \end{cases}$$

I sistemi (1), (2) sono omogenei; si vede facilmente che (1) ha un'unica soluzione $(x,y)=(0,0)$, mentre (2) ha infinite soluzioni del tipo $(x,y)=(2y,y)$ che dipendono dall'incognita libera y; il sistema (3) non è procedimento una matrice $M' = (A'|B')$ ridotta a scala. Per il Lemma, il sistema cosi' ottenuto è equivalente al sistema $AX = B$. Successivamente si risolve (se è possibile) il sistema di matrice $M' = (A'|B')$, per esempio con il metodo di sostituzione dal basso verso l'alto.

Attenzione: il procedimento deve essere applicato sull'intera riga, compreso il termine noto!

Proposizione. Un sistema lineare $AX = B$ di m equazioni in n incognite è compatibile se e solo se in una sua qualunque riduzione a scala $A'X = B'$, detto r il rango di A', gli ultimi $m - r$ coefficienti di B sono nulli.

Osservazione. Gli indicatori di M' dipendono dalle scelte arbitrarie che si effettuano nel procedimento di riduzione a scala, ma il loro numero $r = rg(M)$ (cio è il numero delle righe non nulle di M') non dipende della scelta delle operazioni.

Le considerazioni precedenti ci permettono di definire il rango di una matrice qualsiasi:

Definizione. Si dice **rango** di una matrice M il rango di una matrice M' ridotta a scala ottenuta da M con una opportuna successione di operazioni elementari sulle righe.

Osserviamo che se $(A'|B')$ è a scala, lo è in particolare la matrice A', si ha quindi per definizione:

$$rg(A) = rg(A'), \quad rg(A|B) = rg(A'|B')$$

Teorema di Rouchè-Capelli

Utilizzando la nozione di rango per una matrice qualsiasi, possiamo formulare un risultato fondamentale che ci permette di:

- capire se un sistema ha soluzioni o no (anche senza calcolarle)
- dire quante sono le soluzioni nel caso in cui il sistema sia compatibile .

Teorema. Il sistema lineare $AX = B$, con $A \in \mathbf{R}^{m,n}$, $X \in \mathbf{R}^{n,1}$, $B \in \mathbf{R}^{m,1}$

(a) è incompatibile se e solo se $r(A) < r(A|B)$.

(b) se è compatibile, poniamo $r = rg(A) = rg(A|B)$; allora ci sono ∞^{n-r} soluzioni, che si possono scrivere in funzione di $n - r$ incognite libere. Se $n = r$ la soluzione è unica.

Dimostrazione. Riducendo a scala la matrice completa del sistema dato, si ottiene la matrice $M' = (A'|B')$; visto che anche A' è ridotta a scala si vede che ci sono due possibilità:

(a) $r(A) < r(A|B)$. Poichè il rango è uguale al numero degli indicatori, $rg(A|B) = rg(A) + 1$. In questo caso $(A'|B')$ ha una riga del tipo $(0 \cdots 0|c)$ con $c \neq 0$, il sistema è quindi incompatibile.

(b) $r(A) = r(A|B)$. In questo caso basta considerare il sistema ridotto a scala $A'X = B'$ e risolverlo rispetto alle incognite corrispondenti alle colonne prive di indicatore (che sono $n - r$); infatti, supponendo che le r colonne linearmente indipendenti di A' (quelle con indicatore) siano le prime r, data una soluzione $(a_1, \cdots a_n)$, si ha

$$a_1\mathbf{c}_1 + \cdots a_n\mathbf{c}_n = B$$

$$a_1\mathbf{c}_1 + \cdots a_r\mathbf{c}_r = B - a_{r+1}\mathbf{c}_{r+1} + \cdots - a_n\mathbf{c}_n$$

dove le incognite che compaiono a secondo membro si dicono libere.

Corollario. Se $B = \mathbf{0}$, siamo nel caso (b), cioè un sistema omogeneo ha sempre soluzione; se inoltre $n = r$, esiste l'unica soluzione $X = \mathbf{0}$ (soluzione banale).

Osservazione. È chiaro che il numero m delle equazioni del sistema dato è in definitiva irrilevante; quello che conta è il numero r delle equazioni linearmente indipendenti. Ognuna di queste permette di esprimere una delle n incognite in funzione delle altre.

SISTEMI LINEARI

$ax = b$, $a, b \in \mathbb{R}$

Se $a \neq 0$, $b \neq 0$, $x = \frac{b}{a}$

Se $a = 0$, $b = 0$ ∞ sol.

Se $a = 0$, $b \neq 0$ $\nexists$ sol.

- $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$ $\nexists$ sol.

- $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ sistema lineare OMOGENEO

  $\begin{cases} x = y \\ 2y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $(0, 0)$ 1 soluzione.

- $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = y \\ 0 = 0 \end{cases}$ Infinite coppie (x, x) o (y, y) al variare di $y \in \mathbb{R}$, ∞^1 soluzioni.

- $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$ Sistema a 2 eq. in 3 incognite non omogeneo

  $\begin{cases} 2y - z = 1 \\ x = y \end{cases}$ $\begin{cases} z = 2y - 1 \\ x = y \end{cases}$ sol. $(x, x, 2x - 1)$, $(y, y, 2y - 1)$, $\forall y \in \mathbb{R}$

  ∞^1 soluzioni

Definizione Due sistemi lineari si dicono equivalenti se hanno le stesse soluzioni

Es. $\begin{cases} x-y=0 \\ x+y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-2y=0 \\ 3x-y=1 \end{cases}$

METODO DI ELIMINAZ. DI GAUSS

Per passare da un dato sistema a uno equivalente si possono effettuare tre tipi di operazioni. Questo processo è volto ad ottenere una matrice a scale di facile risoluzione favorendo l'eliminazione del basso.

(1) Scambio: $\boxed{R_i \leftrightarrow R_j}$

Es. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) Moltiplicazione per una costante $\boxed{R_i \rightarrow kR_i}$ $k \in \mathbb{R}$

Es. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}_{(\times 4)}$

(3) Aggiungere ad una riga un'altra moltiplicata per una costante $\boxed{R_i \rightarrow R_i + kR_j}$

Es. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

TEOREMA: Dato un sistema lineare di matrice completa $(A|B)$ posso ottenere un sistema equivalente. Se eseguo sulle righe di $(A|B)$ operazioni del tipo (1), (2), (3). In particolare posso operare in modo da ottenere un sistema equivalente $(A'|B')$ con matrice di coefficienti A' a scala.

DIMOSTRAZIONE

È sufficiente il sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = b_2 \end{cases}$$

(1) $(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \end{array}\right)$

Scambio $\boxed{R_1 \leftrightarrow R_2}$

$(A'|B') = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \end{array}\right)$ È ovvio che le soluzioni sono le stesse.

(2) $\boxed{R_i \to kR_j}$, $k \neq 0$

$(A'|B') = \left(\begin{array}{cccc|c} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1m} & kb_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \end{array}\right)$ È ovvio che le soluzioni sono le stesse

(3) $\boxed{R_i \to R_i + kR_j}$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{2m}x_m + k(a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m) = b_2 + kb_1 \end{cases}$$

Siano $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m)$ soluzioni del sistema di partenza, esse sono anche soluzioni del sistema di partenza

$$\begin{cases} a_{11}\bar{x}_1 + \dots + a_{1m}\bar{x}_m = b_1 \\ a_{21}\bar{x}_1 + \dots + a_{2m}\bar{x}_m + k(a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m) = b_2 + kb_1 \end{cases}$$

sono uguali

sono uguali!

Osservazione

RIGHE

$$(A|B) = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \dots \\ R_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{———} \\ \text{———} \\ \text{———} \\ \text{———} \end{pmatrix}, \quad R_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, b_1)$$

[vettore riga]

Se $(A|B)$ è una matrice ridotta a scala allora le righe non nulle sono vettori linearmente indipendenti, ovvero non riesco ad esprimerli come come comb. lineare di altre.

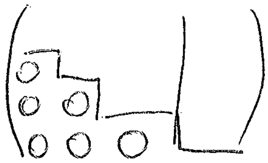
Le colonne invece in generale non sono linearmente indipendenti, ma lo sono le colonne dotate di indicatore. Infatti una colonna è priva di indicatore se e solo se è combinazione lineare di quelle che la precedono.

Rimanendo nel tema delle combinazioni lineari, poichè in generale $(A|B)$ corrisponde ad $AX=B$ allora

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} X_1 + \dots \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} X_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} = B$$

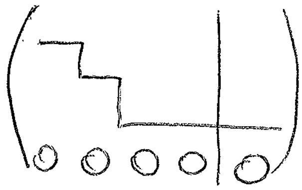
Risolvere $AX=B$ significa trovare valori di $x_1, x_2 .. x_n$ tali che B sia combinazione lineare di $C_1, C_2, \dots C_n$.

Dim. (1) riduco a scala la matrice completa

$(A|B) \rightarrow (A'|B') =$ 

- Può capitare una riga $(0 \ldots 0 | b)$, con $b \neq 0$
  $rg(A') < rg(A'|B') \Rightarrow$ incompatibile

- Può capitare che a ogni riga non nulla di A' corrisponde termine noto nullo.

 $\Rightarrow$ compatibile

Dim. (2) $rg(A') = rg(A'|B')$

Le incognite libere corrispondono alle colonne di A' senza indicatore, e il loro numero corrisponde a n (colonne totali, incognite) meno rg (numero indicatori) $= n - r$

Le soluzioni si esprimono in funzione delle incognite libere.

Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ (quadrata)

Esiste $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n,n}$ tale che $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$?

Cerco $X = A^{-1}$ tale che $\boxed{AX = I_n}$

(adesso X non è un vettore colonna ma una matrice $n \times n$!!!)

Risolvo questo problema con la teoria dei sistemi lineari

$\boxed{X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}}$, le righe X_i (vettori riga) sono VETTORI a n componenti.

Es. $\boxed{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} \in \mathbb{R}^{2,2}$

Trovare A^{-1}

$AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{matrix} \to X_1 \\ \to X_2 \end{matrix}$

$$\boxed{(A|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right)}$$

Per ridurre a scala supponiamo:

- $a \neq 0$
- $c \neq 0$
- $R_2 \to aR_2 - cR_1$

Per il teorema di Rouché-Capelli il sistema è compatibile $\iff rg(A) = rg(A|I)$

$$\boxed{\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & ad-bc & 0 & a \end{array}\right)} \qquad \underbrace{ad-bc}_{\det A} \neq 0$$

PROBLEMA COLLEGATO

$AX = B$

sistema lineare a incognite scalari con A quadrata e invertibile.

$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$

$(A^{-1}A)X = A^{-1}B$

$IX = A^{-1}B$

$\boxed{X = A^{-1}B}$ ← Metodo di KRAMER

2) I seguenti insiemi: $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | x \geq 0, y \geq 0\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | xy = 0\}$ non sono sottospazi di $\mathbf{R}^2$.

3) I sottospazi di $\mathbf{R}^2$ sono: $\mathbf{R}^2$, il sottospazio nullo (cioè l'origine) e tutte le rette passanti per l'origine; i sottospazi di $\mathbf{R}^3$ sono: $\mathbf{R}^3$, l'origine, tutte le rette passanti per l'origine e tutti i piani passanti per l'origine.

Come assegnare sottospazi vettoriali

Vediamo un procedimento per costruire sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^n$:

Dati i vettori $\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_k \in \mathbf{R}^n$, denotiamo con $\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_k)$ l'insieme di tutte le combinazioni lineari $a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k$ al variare dei coefficienti $a_1, \cdots a_k \in \mathbf{R}$.

Proposizione. Dati i vettori $\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_k \in \mathbf{R}^n$, $\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_k)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^n$.

Dimostrazione. Ovviamente $\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_k)$ non è vuoto; inoltre due elementi qualsiasi di $\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_k)$ sono del tipo: $\mathbf{w}_1 = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k$, $\mathbf{w}_2 = b_1\mathbf{v}_1 + \cdots + b_k\mathbf{v}_k$. La loro somma è $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k + b_1\mathbf{v}_1 + \cdots + b_k\mathbf{v}_k$; per le proprietà dello spazio vettoriale $\mathbf{R}^n$ si può scrivere $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = (a_1 + b_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (a_k + b_k)\mathbf{v}_k$ che per definizione appartiene a $\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_k)$. Analogamente si dimostra che, per ogni $m \in \mathbf{R}$ e per ogni $\mathbf{w} \in \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_k)$, anche $m\mathbf{w} \in \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_k)$.

Definizione. I vettori $\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_k \in \mathbf{R}^n$ si dicono i **generatori** di $\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_k)$.

Esempio. Verificare che in $\mathbf{R}^3$ i sottospazi $\mathcal{L}((0,2,0),(0,0,1))$ e $\mathcal{L}((0,2,0),(0,4,0),(0,0,0),(0,2,1))$ coincidono.

Un altro modo per assegnare sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^n$ segue dalla:

Proposizione. Data $M \in \mathbf{R}^{m,n}$, l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $MX = \mathbf{0}$ è sottospazio di $\mathbf{R}^{n,1}$.

Dimostrazione.

1 - l'insieme non è vuoto, perchè c' è almeno la soluzione banale $\mathbf{0}$.

2 - se $Y, Z \in \mathbf{R}^{n,1}$ sono soluzioni del sistema, per proprietà del prodotto tra matrici si ha: $M(Y+Z) = MY + MZ = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

3 - se $Y \in \mathbf{R}^{n,1}$ è soluzione del sistema, per ogni $m \in \mathbf{R}$ per proprietà del prodotto tra matrici: $M(mY) = m(MY) = m\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Osservazione. Un analogo enunciato NON vale per le soluzioni di un sistema lineare non omogeneo. Consideriamo per esempio l'insieme $W = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 | x+y+z = 0\}$ è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$, perchè è costituito dalle soluzioni di un sistema lineare omogeneo, (l'equazione $x+y+z=0$), mentre $U = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 | x+y+z = 1\}$ non è un sottospazio, infatti basta osservare che non contiene il vettore nullo.

Indipendenza lineare, base e dimensione

Ricordiamo le:

Definizioni. (a)) I vettori $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k$ di $\mathbf{R}^n$ si dicono **linearmente indipendenti** se l'equazione:

$$x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

ha solo la soluzione $x_1 = \cdots = x_k = 0$.

(b) I vettori $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k$ si dicono **linearmente dipendenti** se non sono linearmente indipendenti, ossia se uno di essi si può esprimere come combinazione lineare degli altri, cioè se l'equazione

$$x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

Esempio. Sia $V = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | x + y + z = 0\}$; tutte le soluzioni di $x + y + z = 0$ si possono scrivere per esempio come $(-y - z, y, z)$ al variare di y e z in $\mathbf{R}$; in particolare si può scrivere: $(-y - z, y, z) = y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1)$, da cui si conclude che una base di V è $(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)$.

Teorema. Sia V un sottospazio non nullo di $\mathbf{R}^n$. Allora ogni base di V ha lo stesso numero di elementi.

Dimostrazione. Siano $(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k)$ e $(\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_h)$ due diverse basi di V, con $k > h$; per definizione di base i vettori $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k$ si possono esprimere come combinazioni lineari dei vettori $\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_h$:

$$\mathbf{v}_1 = c_{11}\mathbf{w}_1 + \cdots + c_{1h}\mathbf{w}_h$$
$$\mathbf{v}_2 = c_{21}\mathbf{w}_1 + \cdots + c_{2h}\mathbf{w}_h$$
$$\cdots$$
$$\mathbf{v}_k = c_{k1}\mathbf{w}_1 + \cdots + c_{kh}\mathbf{w}_h$$

i vettori $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k$ sono per ipotesi linearmente indipendenti, quindi una relazione del tipo

$$(1) \quad \alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

vale solo con $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$. Sostituendo in (1) le precedenti espressioni di $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k$ e facendo i calcoli, si ottiene:

$$(2) \quad (c_{11}\alpha_1 + c_{21}\alpha_2 + \cdots + c_{k1}\alpha_k)\mathbf{w}_1 + \cdots + (c_{1h}\alpha_1 + c_{2h}\alpha_2 + \cdots + c_{kh}\alpha_k)\mathbf{w}_h = \mathbf{0}$$

ma anche i vettori $\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_h$ sono per ipotesi linearmente indipendenti, quindi i coefficienti in (2) devono essere tutti nulli, ossia si può scrivere il seguente sistema lineare omogeneo nelle incognite $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$

$$c_{11}\alpha_1 + c_{21}\alpha_2 + \cdots + c_{k1}\alpha_k = 0$$
$$\cdots$$
$$c_{1h}\alpha_1 + c_{2h}\alpha_2 + \cdots + c_{kh}\alpha_k = 0$$

La matrice C dei coefficienti di tale sistema è di tipo $h \times k$ e ha rango $rg(C) \leq min(h, k) = h < k$, quindi il sistema ha ∞ soluzioni e perciò i vettori $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k$ sono linearmente dipendenti, contro l'ipotesi; ripetendo il ragionamento con $h > k$ si ottiene la tesi.

Corollario. Un sottospazio non nullo V di $\mathbf{R}^n$ ha una base con al più n elementi.

Dimostrazione. Sia $\mathbf{w}_1 \in V$ un vettore non nullo (esiste per ipotesi); allora può succedere che $V = \mathcal{L}(\mathbf{w}_1)$; se non è così, allora esiste $\mathbf{w}_2 \in V$ tale che $\mathbf{w}_2$ non appartiene a $\mathcal{L}(\mathbf{w}_1)$; in questo caso può essere $V = \mathcal{L}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$, se non è così esiste $\mathbf{w}_3 \in V$ tale che $\mathbf{w}_3$ non appartiene a $\mathcal{L}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$; in questo ultimo caso i vettori $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ sono linearmente indipendenti per costruzione e il procedimento può continuare.... . Il procedimento deve comunque terminare, in quanto in $\mathbf{R}^n$ esistono al massimo n vettori linearmente indipendenti (basta pensare alla base canonica di $\mathbf{R}^n$).

Definizione. Sia V un sottospazio di $\mathbf{R}^n$; si dice **dimensione** di V (e si indica con $dim(V)$), il numero di elementi di una sua qualunque base. Se $V = \mathbf{0}$, si pone $dim(V) = 0$.

Corollario. Per ogni matrice $M \in \mathbf{R}^{m,n}$ si ha: $rg(M) = dimR(M) = dimC(M)$.

Dimostrazione. Possiamo supporre che M sia ridotta a scala, poichè $R(M)$ non cambia se applichiamo delle operazioni elementari sulle righe. Quindi le righe non nulle di M formano una base di $R(M)$ e si ha la prima eguaglianza. Per la seconda, sappiamo che in M ridotta a scala, le colonne contrassegnate da un indicatore formano una base di $C(M)$ (anche se queste colonne non sono l'unica scelta possibile per avere colonne linearmente indipendenti, il massimo numero di colonne linearmente indipendenti vale sempre $rg(M)$).

Osservazione. Per provare che un insieme di vettori è una base, di solito bisogna controllare sia che tali vettori siano generatori, sia che siano linearmente indipendenti. Utilizzando la nozione di dimensione, dati m vettori in un sottospazio di dimensione m, basta controllare una delle due proprietà. Attenzione! Questo vale solo per m vettori in un sottospazio di dimensione m.

Esempio $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$ passa per 0

1. $W \neq \emptyset$, almeno $\vec{0} \in W$ Ok!
2. $\vec{w_1} = (y_1 - z_1, y_1, z_1)$, $\vec{w_2} = (y_2 - z_2, y_2, z_2)$

   $\vec{w_1} + \vec{w_2} = (y_1 + y_2 - z_1 - z_2, y_1 + y_2, z_1, z_2)$

   eq $\Rightarrow$ $y_1 + y_2 - z_1 - z_2 - (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = 0$ Ok!

3. $k\vec{w_1} = (ky_1 - kz_1, ky_1, kz_1)$

   $(ky_1 - kz_1) - (ky_1) + (kz_1) = 0$ ok!

Osserv. I sottospazi di $\mathbb{R}^2$ sono: $\mathbb{R}^2$, il sottospazio nullo (origine) e tutte le rette passanti per l'origine.
I sottospazi di $\mathbb{R}^3$ sono: $\mathbb{R}^3$, l'origine e tutti i piani passanti per l'origine.

METODI DI ASSEGNAZIONE DEI SOTTOSPAZI

I CONCETTO DI COMBINAZIONE LINEARE:

Dati $\vec{v_1} \dots \vec{v_r} \in \mathbb{R}^n$, definisco $\mathcal{L}(\vec{v_1} \dots \vec{v_k})$ l'insieme di tutte le combinazioni lineari di questi vettori cioè

$$\mathcal{L}(\vec{v_1} \dots \vec{v_r}) = \{\vec{v} = a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} + \dots + a_r\vec{v_r}\}, \forall a_1, a_2 \dots a_r \in \mathbb{R}$$

Dim. 1) $\mathcal{L}(\vec{v_1} \dots \vec{v_r})$ contiene $\vec{0}$, basta prendere $a_1 = \dots = a_r = 0$

2) $\vec{w_1} = a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} + \dots a_r\vec{v_r}$

$\vec{w_2} = b_1\vec{v_1} + b_2\vec{v_2} + \dots b_r\vec{v_r}$

$\vec{w_1} + \vec{w_2} = (a_1 + b_1)\vec{v_1} + (a_2 + b_2)\vec{v_2} + \dots \boxed{(a_r + b_r)\vec{v_r}}$

che per definizione appartiene ad $\mathcal{L}(v_1 \dots v_r)$

I vettori $v_1, \dots v_k$ si dicono <u>generatori</u> di $\mathcal{L}$

Esempio. $\mathcal{L}(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \subseteq \mathcal{L}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$

$$a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + 0\,\vec{u}_3 + 0\,\vec{u}_4 \qquad \text{ok!}$$

$$\mathcal{L}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4) \subseteq \mathcal{L}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$$

$$a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3 + a_4\vec{u}_4 \subseteq b_1\vec{u}_1 + b_2\vec{u}_2$$

Per determinati valori di b_1 e b_2 $\quad \mathcal{L}(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \mathcal{L}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$

Sembra più grande, ci sono dei dati ridondanti

$\Downarrow$

vettori nulli o linearm. dip.

<u>Definizione</u> Dato $V \subseteq \mathbb{R}^n$ sottospazio si dice <u>BASE</u> di V $\mathcal{B}_V$ un insieme ordinato di vettori $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_r$ che sono

1) generatori di V
2) linearmente indipendenti

Tornando all'esempio di sopra $(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \mathcal{B}_{\mathcal{L}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)}$

<u>TEOREMA</u> Ogni vettore $\vec{v} \in V$ si esprime in modo unico

$$\vec{v} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3 + \dots + a_r\vec{u}_r$$

$\mathcal{B}_V = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_n)$, $(a_1, a_2 \dots a_r)$ sono componenti di $\vec{v}$ rispetto a $\mathcal{B}_V$

<u>Dim.</u> Per assurdo!

$$\vec{v} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \dots a_r\vec{u}_r -$$
$$\vec{v} = b_1\vec{u}_1 + b_2\vec{u}_2 + \dots b_r\vec{u}_r =$$
$$\vec{0} = (a_1 - b_1)\vec{u}_1 + (a_2 - b_2)\vec{u}_2 + \dots \dots (a_r - b_r)\vec{u}_r$$

Per la lineare dipendenza $a_r - b_r = 0 \Rightarrow \boxed{a_r = b_r}$

APPLICAZIONI LINEARI $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$

Ricordiamo che, dati due insiemi C e D, una **funzione** $f : C \to D$ è una legge che associa ad ogni elemento $c \in C$ un ben preciso elemento $d \in D$. Si scrive $f(c) = d$ oppure $c \mapsto d$ e si dice che d è immagine di c.

L'**immagine** di f è l'insieme $Im\, f = \{f(c)|c \in C\}$; $Im\, f$ è contenuta nel codominio D e non coincide necessariamente con D. Dato $b \in D$, l'insieme $\{c \in C|f(c) = b\}$ si dice insieme delle **controimmagini** di b e si denota con $f^{-1}(b)$.

Ricordiamo anche che f si dice **suriettiva** se $Im\, f = D$, quindi f è suriettiva se e solo se $f^{-1}(b)$ è non vuoto per ogni $b \in D$. Inoltre f è **iniettiva** se $f(c_1) = f(c_2)$ implica $c_1 = c_2$. Se f è sia iniettiva che suriettiva si dice **biiettiva** e in questo caso esiste la funzione **inversa** $f^{-1} : D \to C$ tale che $f^{-1} \circ f$ e $f \circ f^{-1}$ sono funzioni identità.

Data una matrice $A \in \mathbf{R}^{m,n}$, possiamo definire una funzione $f_A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ ponendo

$$f_A(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$$

al variare di $\mathbf{v}$ in $\mathbf{R}^n$ (con $\mathbf{v}$ pensato come vettore colonna di $\mathbf{R}^{n,1}$), dove $A\mathbf{v}$ è l'usuale prodotto tra matrici riga per colonna.

Esempio. Data $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{3,4}$, definiamo $f_A : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$: per ogni $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4$

$$f_A(\mathbf{v}) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$$

dove $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + x_4 \\ x_1 + x_3 + 2x_4 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 \end{pmatrix}$.

In particolare per esempio $f_A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ricordiamo che per il prodotto tra matrici valgono le

Proprietà. Per ogni $A \in \mathbf{R}^{m,n}$, per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ $\mathbf{R}^n$ e per ogni $k \in \mathbf{R}$

1) $A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$
2) $k(A\mathbf{v}) = A(k\mathbf{v})$

Ne deduciamo che le funzioni f_A assegnate come sopra sono caratterizzate dalle seguenti

Proprietà.

1) $f_A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f_A(\mathbf{u}) + f_A(\mathbf{v})$
2) $k(f_A(\mathbf{v})) = f_A(k\mathbf{v})$

Definizione. Una funzione $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ che gode di tali proprietà si dice **applicazione lineare**. Quando $m = n$, f si dice **endomorfismo**. Se f è una biiezione, si dice che f è un **isomorfismo**.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 130

Dimostrazione. Nel'ipotesi che $ker(A) = \{\mathbf{0}\}$, supponiamo per assurdo che esistano due vettori $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2 \in \mathbf{R}^n$ tali che $f_A(\mathbf{v}_1) = f_A(\mathbf{v}_2)$; si ha allora, per la linearità di f_A, $f_A(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = \mathbf{0}$, cioè, per definizione di $Ker(f_A)$, $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \in Ker(f_A)$ e quindi dall'ipotesi segue che $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, ossia $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$.

Nel'ipotesi che f_A sia iniettiva, sia $\mathbf{v} \in Ker(f_A)$; allora per definizione $f_A(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$; sappiamo però che anche $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Poichè f_A è iniettiva, deve essere $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Proposizione. Fissate una base di $\mathbf{R}^n$ e una base di $\mathbf{R}^m$, sia data una applicazione lineare $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$; allora esiste un'unica matrice $M \in \mathbf{R}^{m,n}$ tale che $f = f_M$.

Dimostrazione. Siano $\mathcal{B}_{\mathbf{R}^n} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ e $\mathcal{B}_{\mathbf{R}^m} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ le basi fissate. L'applicazione f è data, quindi si sa come opera su un qualsiasi vettore di $\mathbf{R}^n$, in particolare si sa come opera sui vettori della base $\mathcal{B}_{\mathbf{R}^n}$; si avrà perciò:

$f(\mathbf{u}_1) = a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{21}\mathbf{v}_2 + \ldots + a_{m1}\mathbf{v}_m$
$f(\mathbf{u}_2) = a_{12}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + \ldots + a_{m2}\mathbf{v}_m$
$\ldots$
$f(\mathbf{u}_n) = a_{1n}\mathbf{v}_1 + a_{2n}\mathbf{v}_2 + \ldots + a_{mn}\mathbf{v}_m$

Sia ora $\mathbf{v} = b_1\mathbf{u}_1 + \ldots + b_n\mathbf{u}_n$ un qualsiasi vettore di $\mathbf{R}^n$; per la linearità di f si ha: $f(\mathbf{v}) = b_1 f(\mathbf{u}_1) + \ldots + b_n f(\mathbf{u}_n)$ e quindi, tenendo conto dei dati precedenti, si ottiene

$$f(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

ossia f è associata alla matrice $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

solo 50 slide

Composizione e prodotto di matrici

Consideriamo le matrici $B \in \mathbf{R}^{m,n}$ e $A \in \mathbf{R}^{n,p}$ e le applicazioni lineari ad esse associate $f_B : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ e $f_A : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^n$ definite rispettivamente da $f_B(\mathbf{u}) = B\mathbf{u}$ e $f_A(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$. La composizione $f_B \circ f_A$ è data da

$$\mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v} \mapsto BA\mathbf{v}$$

ed è perciò associata alla matrice prodotto BA.
Un caso particolare è quello delle applicazioni lineari invertibili. Ricordiamo che se una funzione $f : C \to D$ è invertibile, la funzione $f^{-1} : D \to C$ definita da $f^{-1}(y) = x$ è detta inversa di f e si ha $f^{-1} \circ f = Id_C$ e $f \circ f^{-1} = Id_D$.

Proposizione.
(a) L'applicazione lineare associata a una matrice $A \in \mathbf{R}^{m,n}$ non è invertibile se $n \neq m$.
(b) Se $n = m$, l'applicazione lineare associata a una matrice $A \in \mathbf{R}^{n,n}$è invertibile se e solo se $rg(A) = n$.
(c) Se $A \in \mathbf{R}^{n,n}$è invertibile, la matrice associata all'applicazione inversa f_A^{-1} è la matrice A^{-1}.

Dimostrazione. Per definizione di applicazione inversa, f_A è invertibile se e solo se, per ogni vettore $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$, l'equazione vettoriale $f_A(\mathbf{v}) = \mathbf{b}$ ha una sola soluzione. L'equazione $f_A(\mathbf{v}) = \mathbf{b}$ corrisponde a un sistema lineare di m equazioni in n incognite di matrice $(A|\mathbf{b})$. Per il Teorema di Rouchè-Capelli, un sistema del tipo $(A|\mathbf{b})$ ha un'unica soluzione qualunque sia il vettore $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$ se e solo se $m = rg(A) = n$. Dalla definizione di composizione di applicazioni segue che la matrice associata all'applicazione inversa f_A^{-1} è la matrice A^{-1}.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 130

Def. si dice <u>nucleo</u> di $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, il sottospazio delle soluzioni del sistema $AX = 0$ e si denota con $Ker(A)$, $Ker\, f_A$. Esso ha dimensione

$$\boxed{\dim(Ker\, f_A) = n - rg(A)}$$

<u>Es.</u>

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{rid. a scala}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x - y + 4t = 0 \\ -y - 2z = 0 \end{cases} \qquad Ker\, f_A = \{(-z-2t, -2z, z, t)\}$$

Def. si dice <u>$Im\, f_A$</u> il sottospazio generato dalle colonne di A. $\boxed{\dim(Im\, f_A) = rg(A)}$

<u>Es.</u>

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Partendo da sinistra trovo due vettori linearmente dipendenti non nulli (la dim è 2). Questi saranno i generatori di $Im\, f_A = \mathcal{L}((2,1,1),(-1,0,-1))$.

<u>N.B.</u> Per ogni matrice $\boxed{\dim(Im\, f_A) + \dim(Ker\, f_A) = n}$

<u>TEOREMA</u> f_A è iniettiva $\Longleftrightarrow Ker\, f_A = \{\vec{0}\} \Rightarrow \dim Ker\, f_A = 0$

SPAZI VETTORIALI E OPERAZIONI SUI SOTTOSPAZI

Definizione di spazio vettoriale

La struttura di spazio vettoriale studiata su $\mathbf{R}^n$ si può generalizzare: ogni sottospazio di $\mathbf{R}^n$ (compreso $\mathbf{R}^n$ stesso) è un esempio di spazio vettoriale, ma ce ne sono molti altri. Le motivazioni che stanno alla base di questa generalizzazione si possono cosi' riassumere:

- mettere in evidenza gli aspetti della teoria che non dipendono dalla scelta di una base specifica (nello studio di $\mathbf{R}^n$ si utilizza la base canonica, ma per la descrizione dei suoi sottospazi si usano altre basi; è importante capire come si può cambiare base);
- poter usare come scalari numeri diversi dai numeri reali ($\mathbf{R}$ è un esempio di campo numerico, altri esempi sono i numeri razionali $\mathbf{Q}$, i numeri complessi $\mathbf{C}$, il campo finito $\mathbf{Z}_2 = \{0, 1\}$);
- estendere la teoria a spazi di dimensione infinita (qui ci limiteremo a considerare spazi vettoriali di dimensione finita, ma in Analisi i più importanti esempi di spazi vettoriali non hanno dimensione finita).

Per definire uno spazio vettoriale in generale bisogna assegnare un campo $\mathbf{K}$ di scalari; la cosa importante è che in un campo $\mathbf{K}$, qualunque esso sia, valgono le stesse proprietà che valgono per i numeri reali, ossia gli elementi di $\mathbf{K}$ si possono sommare, sottrarre, moltiplicare e dividere e ci sono due elementi particolari: 0 (elemento neutro rispetto alla somma) e 1 (elemento neutro rispetto a prodotto).

Definizione. Sia dato un campo $\mathbf{K}$ e un insieme non vuoto V in cui sono definite due operazioni:

- la somma $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ di $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$
- il prodotto $k\mathbf{u}$ di $k \in \mathbf{K}$ con $\mathbf{u} \in V$.

V si dice **spazio vettoriale** su $\mathbf{K}$ se, per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ e per ogni $a, b \in \mathbf{K}$:

1) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

2) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

3) esiste un vettore $\mathbf{0}$ tale che $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$, per ogni vettore $\mathbf{v}$

4) Per ogni $\mathbf{v}$ diverso dal vettore $\mathbf{0}$, esiste il vettore $-\mathbf{v}$ tale che $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$

5) $a(b\mathbf{v}) = (ab)\mathbf{v}$

6) $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$

7) $(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$

8) $a(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = a\mathbf{v} + a\mathbf{w}$

Osservazione.

1) Gli elementi di V si dicono vettori anche se non è detto che assomiglino ai vettori di $\mathbf{R}^n$.

2) La somma $\mathbf{v} + (-\mathbf{w})$ si scrive di solito $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ (differenza tra due vettori).

3) La definizione di spazio vettoriale astratto è una definizione assiomatica, ossia tutte le proprietà della struttura di spazio vettoriale si deducono dagli 8 assiomi. Una immediata conseguenza di questi 8 assiomi è per esempio che, dato qualsiasi $\mathbf{v} \in V$

$$0\mathbf{v} + 0\mathbf{v} = (0 + 0)\mathbf{v} = 0\mathbf{v}$$

da cui, sottraendo $0\mathbf{v}$ si ottiene $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$; perciò dagli assiomi segue che $0\mathbf{v}$ è il vettore nullo.

Esempi

1) Supponiamo $\mathbf{K} = \mathbf{R}$; in questo caso V si dice spazio vettoriale reale. Un esempio di spazio vettoriale reale è ovviamente $V = \mathbf{R}^n$ con le operazioni viste precedentemente. Un altro esempio è $V = \mathbf{R}^{m,n}$ (matrici

Siano V, W due spazi vettoriali sul campo $\mathbf{K}$ e $f : V \to W$ una applicazione lineare; come nel caso dello spazio vettoriale $\mathbf{R}^n$, valgono in particolare le

Definizioni.
(a) $Ker\, f = \{\mathbf{v} \in V | f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$ si dice **nucleo** di f;
(b) $Im\, f = \{f(\mathbf{v}) | \mathbf{v} \in V\}$ si dice **immagine** di f;
(c) $f^{-1}(\mathbf{w}) = \{\mathbf{v} \in V | f(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\}$ si dice **insieme delle controimmagini** del vettore $\mathbf{w} \in W$;

Vale, con la stessa dimostrazione vista per $\mathbf{R}^n$, la seguente

Proposizione. Sia $f : V \to W$ una applicazione lineare; f è iniettiva se e solo se $Ker\, f = \mathbf{0}$.

Basi e applicazioni lineari

Definizione. Sia W un sottospazio dello spazio vettoriale V sul campo $\mathbf{K}$. Un insieme ordinato di vettori $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k) \in W$ si dice una **base** di W se:

1 - $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k$ sono linearmente indipendenti;

2 - $W = \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_k)$, cioè i vettori $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k$ sono generatori di V.

Teorema. Dato il $\mathbf{K}$- spazio vettoriale V, se esiste una base $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n)$ di V, l'applicazione $f : \mathbf{K}^n \to V$ definita da:

$$(a_1, \cdots, a_n) \mapsto a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$$

è un isomorfismo.

Dimostrazione. È facile verificare che f è lineare e che , per la definizione di base, è anche iniettiva e suriettiva, cioè è un isomorfismo.

Osservazione. In particolare l'isomorfismo f manda ogni elemento della base canonica di $\mathbf{K}^n$ in un elemento della base data di V. Dunque possiamo usare f per identificare $\mathbf{K}^n$ con V.

Analogamente al caso dello spazio vettoriale $\mathbf{R}^n$, si può dimostrare il seguente:

Teorema. Sia V uno spazio vettoriale con una base $\mathcal{B} = (\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n)$ formata da n elementi. Allora
(a) se m vettori $\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_m$ di V sono linearmente indipendenti, si ha $m \leq n$;
(b) se $V = \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_p)$, si ha $n \leq p$.

Segue che ogni base di V ha n elementi e quindi si può dire che V ha **dimensione** n.

Esempio. Determiniamo la dimensione dell'insieme dei numeri complessi $\mathbf{C}$ pensato
(a) come $\mathbf{C}$-spazio vettoriale
(b) come $\mathbf{R}$-spazio vettoriale.
(a) L'insieme $\mathbf{C}$ con le usuali operazioni di somma di numeri complessi e di prodotto tra numeri complessi è un $\mathbf{C}$-spazio vettoriale di dimensione 1, infatti ogni numero complesso z (pensato come vettore) è il prodotto di z stesso (pensato come scalare) per il numero 1 (pensato come vettore).
(b) All'insieme dei numeri complessi $\mathbf{C}$ possiamo anche dare una struttura di $\mathbf{R}$-spazio vettoriale con le usuali operazioni di somma di numeri complessi e di prodotto di un numero complesso per un numero reale; in questo caso $dim(\mathbf{C}) = 2$, perchè ogni numero complesso $z = a + ib$ è, in modo unico, combinazione lineare a coefficienti reali a e b dei numeri 1 e i che sono vettori linearmente indipendenti.

Proposizione. Dati due $\mathbf{K}$-spazi vettoriali V e W, se $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n)$ è una base di V, per assegnare una applicazione lineare $f : V \to W$ basta assegnare i vettori $f(\mathbf{v}_1), \cdots, f(\mathbf{v}_n)$.

Dimostrazione. Poichè $\mathcal{B}$ è base, ogni vettore di V si scrive in modo unico come $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$, quindi $f(\mathbf{v}) = f(a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n)$ =(per la linearità di f)=$a_1 f(\mathbf{v}_1) + \cdots + a_n f(\mathbf{v}_n)$.

Teorema. (Relazione di Grassmann) Dati due sottospazi U e W di uno spazio vettoriale V di dimensione finita, si ha

$$dim(U) + dim(W) = dim(U + W) + dim(U \cap W)$$

Vediamone il significato su un esempio:

Esempio. In $\mathbf{R}^5$ sono dati i sottospazi $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)|2x_1 - x_2 - x_3 = x_4 - 3x_5 = 0\}$ e $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)|x_3 + x_4 = 0\}$, vogliamo determinare una base di $\mathbf{R}^5$ che contenga sia una base di U che una base di W.

Intanto è facile vedere che $dim(U) = 3$ e $dim(W) = 4$. Cominciamo col trovare una base di $U \cap W$: basta risolvere il sistema omogeneo di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

la soluzione generale è del tipo $(\frac{1}{2}s - \frac{3}{2}t, s, -3t, 3t, t)$, quindi $dim(U \cap W) = 2$ e una base di $(U \cap W)$ è per esempio $(\mathbf{w}_1 = (\frac{1}{2}, 1, 0, 0, 0), \mathbf{w}_2 = (-\frac{3}{2}, 0, -3, 3, 1))$; completiamo questa base in modo da ottenere una base $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ di U e una base $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_4, \mathbf{w}_5)$ di W; in qualunque modo abbiamo scelto i vettori $\mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4, \mathbf{w}_5$, i vettori $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4, \mathbf{w}_5)$ sono sicuramente linearmente indipendenti e quindi sono una base di $\mathbf{R}^5$.

Definizione. La somma $U + W$ si dice **somma diretta** (e si indica con $U \oplus W$) quando $U \cap W = \mathbf{0}$.

Esempio. In $\mathbf{R}^3$, sia U il piano $z = 0$ e W l'asse delle z. Allora risulta $\mathbf{R}^3 = U \oplus W$.

Proposizione. La somma $U + W$ è diretta se e solo se ogni vettore $\mathbf{v} \in U + W$ si scrive in modo unico come $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ con $\mathbf{u} \in U$ e $\mathbf{w} \in W$.

Dimostrazione. Supponiamo $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{u}' + \mathbf{w}'$; allora si ha sottraendo : $\mathbf{0} = (\mathbf{u} - \mathbf{u}') + (\mathbf{w} - \mathbf{w}')$, da cui $(\mathbf{u} - \mathbf{u}') = -(\mathbf{w} - \mathbf{w}')$ che è un vettore appartenente a $U \cap W$; ma $U \cap W = \mathbf{0}$, quindi la tesi. Viceversa, se ogni vettore $\mathbf{v} \in U + W$ si scrive in modo unico come $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ con $\mathbf{u} \in U$ e $\mathbf{w} \in W$, allora $U \cap W = \mathbf{0}$.

Corollario. Una base di $U \oplus W$ si ottiene facendo l'unione di una base di U e di una base di W.

Esempio. Nell'esempio precedente, se U è il piano $z = 0$ e W è l'asse delle z, una base di $\mathbf{R}^3 = U \oplus W$ è per esempio $(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \cup (\mathbf{k}) = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 130

Dati due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali V e W, se $B=(v_1, \dots, v_m)$ è una base di V, per assegnare una applicazione lineare $f: V \to W$ basta assegnare i vettori $f(\vec{v}_1), \dots, f(\vec{v}_m)$

INTERSEZIONE, UNIONE E SOMMA DI SOTTOSPAZI

Supponiamo che V sia uno spazio vettoriale . $\mathbb{R}$ e che U e W siano due sottospazi.

L'INTERSEZIONE $U \cap W$ è un sottospazio di V, e poiché ogni sottospazio contiene sempre il vettore nullo allora $U \cap W$ non è mai vuoto

L'UNIONE $U \cup W$ non è in generale sottospazio di V.

Si dice SOMMA dei sottospazi l'insieme $U+W$ costituito dai vettori $\vec{u}+\vec{w}$. $U+W$ è un sottospazio di V contenuto in ogni sottospazio che contiene $U \cup W$.

Oss. $\dim(U) \leq \dim(V)$, infatti una base di U può sempre essere estesa a una base di V.

RELAZIONE DI GRASSMANN :

$$\boxed{\dim(U)+\dim(W)=\dim(U+W)+\dim(U \cap W)}$$

Def. La somma $U+W$ si dice SOMMA DIRETTA (e si indica con $U \oplus W$) quando $U \cap W = 0$. Una base di $U \oplus W$ si ottiene facendo l'unione di una base di U e una base di W.

Nel caso particolare in cui lo spazio di partenza coincide con lo spazio di arrivo, cioè $V = W$, si può fissare la stessa base $\mathcal{B}$ in entrambi gli spazi. Se si cambia base, passando alla base $\mathcal{B}'$ con matrice di passaggio P, il legame tra la matrice di f rispetto a $\mathcal{B}$ e la matrice di f rispetto a $\mathcal{B}'$ è dato da

$$M' = P^{-1}MP$$

Definizione. Due matrici quadrate M ed M' si dicono **simili** se esiste una matrice invertibile P tale che $M' = P^{-1}MP$.

Diagonalizzazione di un endomorfismo

Sia V sia un $\mathbf{K}$-spazio vettoriale di dimensione finita n

Definizione. Un endomorfismo $f : V \to V$ si dice **diagonalizzabile** o **semplice** se esiste una base $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n)$ di V rispetto alla quale la matrice di f è diagonale, ossia una matrice avente elementi tutti nulli tranne eventualmente sulla diagonale principale. In altri termini la matrice di f è diagonalizzabile se è simile a una matrice diagonale.

Se f è diagonalizzabile, sia $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n)$ una base rispetto alla quale la matrice di f è diagonale

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

allora abbiamo $f(\mathbf{v}_1) = \lambda_1\mathbf{v}_1, f(\mathbf{v}_2) = \lambda_2\mathbf{v}_2, \cdots, f(\mathbf{v}_n) = \lambda_n\mathbf{v}_n$, cioè ciascun vettore della base viene trasformato dall'endomorfismo f in un multiplo di se stesso; viceversa, se ciascun vettore della base $\mathcal{B}$ viene trasformato dall'endomorfismo f in un multiplo di se stesso, la matrice di f rispetto a $\mathcal{B}$ è diagonale.

Definizione. Un vettore non nullo $\mathbf{v} \in V$ si dice **autovettore** di f se esiste un numero $\lambda \in \mathbf{K}$ tale che

$$f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$$

In questo caso λ si dice *autovalore* di f associato a $\mathbf{v}$.

Segue quindi che:

Proposizione. Un endomorfismo $f : V \to V$ è diagonalizzabile se e solo se esiste una base di V formata da autovettori di f.

Esempi. 1) Sia f l'identità, cioè $f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ per ogni $v \in V$, allora ogni vettore non nullo è un autovettore relativo all'autovalore 1. Fissata una qualsiasi base, la matrice di f rispetto al tale base è la matrice identità.

2) Sia $V = \mathbf{R}^2$, sia $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ la base canonica e $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ l'endomorfismo definito da $f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1$, $f(\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_2$, allora $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ sono autovettori relativi agli autovalori rispettivamente $1, -1$. La matrice di f rispetto alla base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ è diagonale. Qual è l'interpretazione geometrica di f?

Definizione. Si dice **autospazio** relativo all'autovalore λ il sottospazio

$$V_\lambda = \{\mathbf{v} \in V | f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}\}$$

È facile verificare che V_λ è sottospazio di V. In particolare il vettore nullo appartiene a V_λ, infatti un autovettore è per definizione non nullo, ma

$$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0} = \lambda\mathbf{0}$$

$$det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

È facile verificare l'enunciato nei casi $n = 2, 3$. In generale il teorema permette il calcolo di un determinante a partire da determinanti con una riga (o colonna) in meno. La riga o colonna rispetto alla quale iniziare lo sviluppo può essere scelta a piacere; ovviamente conviene scegliere una riga (o colonna) che abbia tanti coefficienti nulli. Un caso particolare è quello delle matrici triangolari, il cui determinante è sempre il prodotto degli elementi della diagonale principale.

Sono conseguenza del teorema le seguenti proprietà (di facile verifica nel caso $n = 2, 3$):

Proprieta'. 1) Se nella matrice A si scambiano tra loro due righe, il determinante cambia segno.

2) Se nella matrice A si sostituisce a un vettore riga R_i il vettore riga $R_i + kR_j$, dove R_j è un'altra riga e k è un qualsiasi coefficiente numerico, il determinante non cambia.

3) Se si applicano alla matrice A le operazioni 1) e 2) descritte sopra, si può ottenere una matrice S ridotta a scala e dai risultati precedenti si ha che $det(A) = \pm det(S)$; in particolare se $rg(A) = n$, $det(S)$ è il prodotto degli indicatori perciò $det(A) \neq 0$, mentre se $rg(A) < n$, $det(A) = \pm det(S) = 0$ e viceversa.

Ricerca analitica degli autovettori

Sia d'ora in avanti V uno spazio vettoriale reale di dimensione n. Fissata una base di V, possiamo identificare V con lo spazio $\mathbf{R}^n$ e gli endomorfismi $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ con le matrici $M \in \mathbf{R}^{n,n}$. In questi termini un autovettore di f è un vettore colonna non nullo $\mathbf{v}$ tale che

$$M\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

Lemma. Se $\mathbf{v}$ è un autovettore di M con autovalore λ, allora $det(M - \lambda I) = 0$; viceversa, se $det(M - \lambda I) = 0$, allora esiste un autovettore di M con autovalore λ.

Dimostrazione. La relazione $M\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ si può riscrivere come

$$(M - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

che equivale a dire che $\mathbf{v} \in Ker(M - \lambda I)$, ossia il vettore non nullo $\mathbf{v}$ è soluzione del sistema omogeneo avente matrice dei coefficienti $(M - \lambda I)$; per il teorema di Rouchè-Capelli il sistema ha soluzioni non nulle se e solo se $rg(M - \lambda I) < n$; visto che $(M - \lambda I)$ è una matrice quadrata, ciò equivale alla condizione $det(M - \lambda I) = 0$.

Definizione. Il polinomio $p(\lambda) = det(M - \lambda I)$ si dice **polinomio caratteristico** della matrice M. Si tratta di un polinomio di grado n in λ. L'equazione $det(M - \lambda I) = 0$ si dice equazione caratteristica.

Visto che il grado di $p(\lambda)$ è n, l'equazione caratteristica ha al più n radici, quindi f ha al più n autovalori distinti, ma possono essere di meno, dal momento che le radici di un polinomio possono essere ripetute con molteplicità e può anche succedere che compaiano come radici coppie di numeri complessi. Osserviamo inoltre che per ogni matrice quadrata M, il termine costante di $p(\lambda)$ è dato da $p(0) = det(M - 0I) = det(M)$, mentre è facile verificare che il termine di grado n è $(-\lambda)^n = (-1)^n(\lambda)^n$ e il coefficiente di $(\lambda)^{n-1}$ è $(-1)^{n-1}tr(M)$, dove $tr(M)$ (traccia di M) denota la somma dei coefficienti della diagonale principale.

Trovato un autovalore λ_1, l'autospazio V_{λ_1} corrispondente è lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo di matrice dei coefficienti $(M - \lambda_1 I)$; tale sistema ammette, come è noto, soluzioni non banali, perciò è sempre $dim(V_{\lambda_1}) \geq 1$; in particolare $dim(V_{\lambda_1}) = n - rg(M - \lambda_1 I)$.

AUTOVETTORI E AUTOVALORI

Cambiamenti di base

Siano $\mathcal{B} \doteq (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n)$ e $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1\,', \vec{e}_2\,', \dots, \vec{e}_n\,')$ due basi di V, k-spazio vettoriale, dove

$$\vec{e}_1\,' = a_{11}\vec{e}_1 + \dots a_{1n}\vec{e}_n$$
$$\vdots$$
$$\vec{e}_n\,' = a_{1n}\vec{e}_1 + \dots a_{nn}\vec{e}_n$$

La matrice $P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ si dice MATRICE DI PASSAGGIO o CAMBIO DI BASE da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$

La matrice P^{-1} è la matrice di passaggio da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

Dato un qualsiasi vettore

$$\vec{v} = x_1'\vec{e}_1\,' + \dots + x_n'\vec{e}_n\,' = x_1'(a_{11}\vec{e}_1 + \dots a_{1n}\vec{e}_n) + \dots + x_n'(a_{1n}\vec{e}_1 + \dots a_{nn}\vec{e}_n) = x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n$$

$$a_1 = a_{11}a_1' + \dots + a_{1n}a_n'$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_{n1}a_1' + \dots a_{nn}a_n'$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ \vdots \\ a_n' \end{pmatrix}$$

Sia data un'applicazione lineare $f: V \to W$, con V, W spazi vettoriali. Fissata una base $\mathcal{B}_V$ per V e $\mathcal{B}_W$ per W, risulta univocamente determinata una matrice M associata ad f rispetto a $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_W$, per cui $MX = Y$, dove X è il vettore colonna di $\vec{v} \in V$ e Y di $f(\vec{v}) \in W$.
Se si cambia di base passando da $\mathcal{B}_V$ a $\mathcal{B}_V'$ e da $\mathcal{B}_W$ a $\mathcal{B}_W'$, i due cambiamenti di base saranno descritti dalle matrici di passaggio rispettiv. P e Q. $\begin{cases} X = PX' \\ Y = QY' \end{cases} \Rightarrow \boxed{M(PX') = QY'}$

di conseguenza MPQ^{-1} è la matrice di f rispetto a $\mathcal{B}_V'$ e $\mathcal{B}_W'$

Se $V = W \to \boxed{M' = P^{-1}MP}$

Due matrici sono SIMILI se esiste P che verifica l'uguaglianza

RICERCA AUTOVETTORI

$$M\vec{v} = \lambda\vec{v} \Rightarrow (M-\lambda I)\vec{v} = 0$$

ovvero $\vec{v} \in Ker(M-\lambda I) = 0$

Per il teorema di Rouché-Capelli il sistema ha soluzioni non nulle se e solo se $rg(M-\lambda I) < n$; visto che $(M-\lambda I)$ è quadrata, ciò equivale alla condizione $\det(M-\lambda I) = 0$

Def. Il polinomio $p(\lambda) = \det(M-\lambda I)$ si dice POLINOMIO CARATTERISTICO della matrice M. Si tratta di un polinomio di grado n in λ. L'equazione $\det(M-\lambda I) = 0$ è l'eq. caratteristica.

Trovato un autovalore λ_1, l'autospazio V_{λ_1} è lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo di matrice dei coefficienti $(M-\lambda_1 I)$; tale sistema ammette, come è noto, soluzioni non banali, perciò $\dim(V_{\lambda_1}) \geq 1$.

$$\dim(V_{\lambda_1}) = n - rg(M-\lambda_1 I)$$

Def Si dice MOLTEPLICITÀ ($molt(\lambda_1)$) di λ_1 l'esponente del fattore $(\lambda-\lambda_1)$ che compare nella decompos. di $P(\lambda)$.

$$1 \leq \dim(V_{\lambda_1}) \leq molt(\lambda_1)$$

Se l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ ha n autovalori distinti di molteplicità 1 allora è diagonalizzabile.

Inoltre i vettori della base canonica sono a due a due ortogonali:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0, \; se \; i \neq j$$

Tutto ciò si può riassumere con

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$$

dove δ_{ij} è la delta di Kronecker.

Ma esistono altre basi di $\mathbf{R}^n$ che godono di analoghe proprietà.

Definizione. Una base di $\mathbf{R}^n$ si dice **ortogonale** se è costituita da vettori a due a due ortogonali.

Definizione. Una base di $\mathbf{R}^n$ si dice **ortonormale** se è costituita da vettori a due a due ortogonali e di norma 1.

Supponiamo che $\mathcal{B} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ sia una base ortonormale di $\mathbf{R}^n$. Poichè $\mathcal{B}$ è una base, possiamo scrivere ogni vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ in modo unico come combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}$:

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n$$

Dato che $\mathcal{B}$ è ortonormale, è molto facile determinare i coefficienti di questa combinazione lineare; basta infatti calcolare il prodotto scalare di $\mathbf{v}$ con ciascun vettore di $\mathcal{B}$:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_i = c_1\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_i + \ldots + c_i\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i + \ldots + c_n\mathbf{u}_n \cdot \mathbf{u}_i = c_i$$

da cui segue il

Teorema. Rispetto a una base ortonormale $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ ogni vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ si esprime come

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + \ldots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_n)\mathbf{u}_n$$

.

Lemma. Se i vettori $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_m \in \mathbf{R}^n$ sono non nulli e a due a due ortogonali, allora sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione. Infatti moltiplicando scalarmente la relazione $a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_m\mathbf{v}_m = \mathbf{0}$ per $\mathbf{v}_i$ al variare di $i = 1, \cdots, m$, si ottiene $a_i = 0$ per ogni i.

Matrici ortogonali

Definizione. Una matrice $P \in \mathbf{R}^{n,n}$ si dice **ortogonale** se soddisfa una delle seguenti condizioni equivalenti: (i) ${}^tPP = I_n$; (ii) $P^tP = I_n$; (iii) P è invertibile e ${}^tP = P^{-1}$.

Le condizioni della definizione sono equivalenti infatti, indicati con $\mathbf{C}_i$ i vettori colonna di P, la (i) afferma che $\mathbf{C}_i \cdot \mathbf{C}_j = 0$ per $i \neq j$ e $\mathbf{C}_i \cdot \mathbf{C}_i = 1$, ossia le colonne di P sono vettori ortogonali e di norma 1; analogamente la (ii) afferma che le righe di P sono vettori ortogonali e di norma 1, quindi per il Lemma P è invertibile; ne segue che (i) e (ii) sono equivalenti a (iii).

Esempio. Sono ortogonali le seguenti matrici:

$$P = \begin{pmatrix} cos\,\phi & -sin\,\phi \\ sin\,\phi & cos\,\phi \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2,2}; \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} cos\,\phi & sin\,\phi \\ -sin\,\phi & cos\,\phi \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2,2}$$

ha autovalori 1 e -1 di molteplicità rispettivamente 2 e 1; una base dell'autospazio V_{-1} è per esempio $(-1,1,0)$; una base per l'autospazio V_1 è per esempio $((0,0,1),(1,1,0)$. Questi vettori sono a due a due ortogonali, quindi per ottenere una base di $\mathbf{R}^3$ ortonormale, basta dividere ognuno di essi per il suo modulo. Una matrice ortogonale che diagonalizza A è perciò

$$P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi (anche senza eseguire i calcoli) possiamo scrivere

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.

Forme quadratiche

Definizione. Una **forma lineare** è una applicazione lineare $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$.

Segue che $f(x_1, \cdots, x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = A\mathbf{v}$, dove $A \in \mathbf{R}^{1,n}$ è la matrice $(a_1 \cdots a_n)$ che rappresenta f e $\mathbf{v}$ il vettore colonna $^t(x_1, \cdots, x_n)$. Se A non è la matrice nulla, $Imf = \mathbf{R}$ e quindi $kerf$ sarà un sottospazio di dimensione $n-1$ di $\mathbf{R}^n$.

Definizione. Una **forma quadratica** è una funzione $q : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ del tipo $q(x_1 \cdots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$, cioè una combinazione lineare di tutti i monomi di secondo grado in $x_1, \cdots, x_n$ univocamente determinata da una matrice simmetrica $A = (a_{ij})$.

Per $n = 2$ otteniamo $q(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$, con $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, ossia $q(x,y) = (x\ y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Per $n = 3$, $q(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$, con $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{12} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$, ossia

$q(x,y,z) = (x\ y\ z)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

In generale, $q(x_1 \cdots, x_n) =^t \mathbf{v}A\mathbf{v}$ e la funzione q può essere semplificata diagonalizzando A. Infatti, visto che A è una matrice simmetrica reale, esiste una matrice ortogonale P tale che $P^{-1}AP =^t PAP$ è una matrice diagonale D avente sulla diagonale principale gli autovalori di A: facciamo per esempio il caso $n = 2$, con il cambiamento di base $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$:

$$q(x,y) = (x\ y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =^t (P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix})A(P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}) =^t \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = (X\ Y)D\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

Definizione. L'espressione $q(x_1 \cdots, x_n) = \lambda_1x_1^2 + \cdots + \lambda_nx_n^2 =^t \mathbf{v}D\mathbf{v}$ con D matrice diagonale, si dice **forma canonica** di q.

Per studiare il segno di una forma quadratica q, si può osservare che si ha sempre $q(0,\ldots,0) = 0$, inoltre, utilizzando una forma canonica di q, si vede che il segno di q dipende dal segno degli autovalori della matrice A e dalla eventuale presenza dell'autovalore 0. Segue in particolare che:

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 130

MATRICI ORTOGONALI E FORME QUADRATICHE

Se $\vec{v} = (x_1 \dots x_n)$, $\vec{w} = (y_1 \dots y_n)$

definiamo PRODOTTO SCALARE $\vec{v} \cdot \vec{w} = {}^t\vec{v}\vec{w}$

due vettori sono ortogonali se $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$,

definiamo il modulo $\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$, che gode di:

DISEGUAGLIANZA TRIANGOLARE $\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$

DISEGUAGLIANZA DI CAUCHY-SCHWARTZ $|\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$

BASI ORTONORMALI

Se consideriamo la base canonica di $\mathbb{R}^n$:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \quad \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ogni vettore ha modulo 1, inoltre sono a due a due ortogonali.

Def. - Una base di $\mathbb{R}^n$ si dice <u>ortogonale</u> se è costituita da vettori a due a due ortogonali.

- Una base di $\mathbb{R}^n$ si dice <u>ortonormale</u> se è costituita da vettori a due a due ortogonali e di norma 1.

Supponiamo che $\mathcal{B} = (\vec{u}_1 \dots \vec{u}_n)$ sia una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.
ogni vettore $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ si può scrivere come

$$\vec{v} = c_1 \vec{u}_1 + c_2 \vec{u}_2 + \dots + c_n \vec{u}_n$$

Se moltiplichiamo per un vettore di $\mathcal{B}$ $\vec{u}_i$, è facile trovare i coefficienti:

$$\vec{v}\vec{u}_i = c_1 \underbrace{\vec{u}_1\vec{u}_i}_{0} + \dots \, c_i \underbrace{\vec{u}_i\vec{u}_i}_{1} + \dots \, c_n \underbrace{\vec{u}_n\vec{u}_i}_{0} = c_i$$

MATRICI SIMMETRICHE

Le matrici simmetriche quando $\boxed{{}^tS = S}$. Le matrici simmetriche sono sempre diagonalizzabili.

Siano $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ autovettori di una matrice S corrispondenti a due distinti autovalori λ_1 e λ_2, allora $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$

Teorema Sia $S \in \mathbb{R}^{n,n}$ una matrice simmetrica, allora:

a) le radici del polinomio caratteristico sono reali

b) esiste una matrice ortogonale $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ tale che

$$P^{-1} S P = {}^tP S P = D$$

con D matrice diagonale degli autovalori di S.
Esiste quindi una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ formata dagli autovettori di S.

Es.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ha autovalori 1 e -1 di molteplicità rispettivamente 2 e 1, quindi:

$$D = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Una base dell'autospazio V_{-1} è $(-1, 1, 0)$
- Una base dell'autospazio V_1 è $((0,0,1)\ (1,1,0))$
- Questi sono vettori a due a due ortogonali. Per trovare una base ortonormale devono avere modulo 1. Basta quindi dividere i vettori colonna per la loro norma.

$$P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

SEGNO

Il segno di q dipende dal segno degli autovalori di A e dell'eventuale presenza dell'autovalore 0.

- Se gli autovalori di A sono tutti positivi, $q(x_1, \dots x_n) > 0$ per ogni $\vec{v} \neq 0$ e q è <u>DEFINITA POSITIVA</u>
- Se gli autovalori di A sono tutti negativi, $q(x_1 \dots x_n) < 0$ per ogni $\vec{v} \neq 0$ e q è <u>DEFINITA NEGATIVA</u>
- Se gli autovalori di A sono tutti positivi o nulli, $q(x_1 \dots x_n) \geq 0$ $\forall \vec{v}$ e q è <u>SEMIDEFINITA POSITIVA</u>
- Se gli autovalori di A sono tutti negativi o nulli, $q(x_1 \dots x_n) \leq 0$ $\forall \vec{v}$ e q è <u>SEMIDEFINITA NEGATIVA</u>
- q è <u>indefinita</u> se non vale nessuno dei casi precedenti

REGOLA DI CARTESIO

Dato un polinomio di grado n in una variabile scritto con potenze crescenti, avente coeff. reali e le radici reali, il numero delle radici positive è uguale al numero di variazioni di segno dei coefficienti del polinomio, trascurando eventuali coeff. nulli.

cioè risolviamo il sistema lineare nelle incognite u, v e matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & | & -a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & | & -a_{23} \end{pmatrix}$$

Non è detto che il procedimento di eliminazione abbia successo; tale sistema ha infatti un'unica soluzione se e solo se $det(A) \neq 0$

Esempio. $\mathcal{C}$: $x^2 + 4y^2 - 6x + 8y = 3$; cerchiamo di eliminare i termini di primo grado; visto che non compare il termine in xy, non è necessaria una rotazione, ma è sufficiente un completamento dei quadrati per individuare una traslazione:

$$(x-3)^2 - 9 + 4(y+1)^2 - 4 = 3$$

Troviamo cosi' il centro $u = 3, \ v = -1$ e l'equazione diventa

$$X^2 + 4Y^2 = 16$$

ne deduciamo che $\mathcal{C}$ è un'ellisse.

Coniche a centro. Se $det(A) \neq 0$, con una traslazione è possibile eliminare dall' equazione di $\mathcal{C}$ tutti i termini di primo grado. In questo caso il punto $(X,Y) \in \mathcal{C}$ se e solo se $(-X,-Y) \in \mathcal{C}$ e il **centro di simmetria** è il punto $(X,Y) = (0,0)$ ossia $(x,y) = (u,v)$. Successivamente con un'opportuna rotazione l'equazione di $\mathcal{C}$ diventa del tipo $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = \gamma$.

Parabole. Se $det(A) = 0$ si ha che uno degli autovalori (per esempio λ_1) è nullo, la conica $\mathcal{C}$ non ha centro di simmetria e non esiste un cambiamento di riferimento che permette di eliminare tutti i termini di primo grado: si tratta di una parabola che in un opportuno sistema di riferimento ha equazione $\lambda_1 X^2 = 2\gamma Y$.

Esempio. $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 2xy - x - y = 0$;

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si ha $det(A) = 0$, quindi $\mathcal{C}$ è una parabola; una matrice ortogonale speciale che diagonalizza A è

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Con la rotazione data da P l'equazione di $\mathcal{C}$ diventa $2X^2 = \sqrt{2}Y$.

Definizione. Quando è nullo almeno uno dei coefficienti nelle equazioni canoniche, la conica $\mathcal{C}$ si dice **degenere** : si vedano i casi 3), 4), 5), 6) di pag.1.

Quadriche

Analogamente alla definizione di conica, una quadrica Q è il luogo dei punti (x,y,z) dello spazio $\mathbf{R}^3$ che soddisfano un'equazione del tipo

$$(3) \qquad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + +2a_{34}z + a_{44} = 0$$

dove supponiamo i primi sei coefficienti non tutti nulli, in modo tale da avere un'equazione effettivamente di secondo grado. I termini di secondo grado dell'equazione costituiscono una forma quadratica in x, y, z associata alla matrice simmetrica $M = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{3,3}$. Cerchiamo un sistema di riferimento in cui M si diagonalizza e infine, se necessario, cerchiamo una traslazione per eliminare (se possibile) i termini di primo grado. Detti $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ gli autovalori di M, otteniamo alla fine del procedimento il risultato seguente:

Teorema. Data una quadrica $\mathcal{Q}$, esiste nello spazio un sistema di riferimento $R(O,X,Y,Z)$ rispetto al quale $\mathcal{C}$ si rappresenta con una equazione di uno dei seguenti tipi (equazioni canoniche):

SFERE E CIRCONFERENZE

Sfere

Definizione. Diciamo **sfera** (nel senso di superficie sferica) con centro il punto $C(a,b,c)$ e raggio R il luogo dei punti $P(x,y,z)$ che hanno distanza R da C: $\mathcal{S} = \{P(x,y,z) | d(P,C) = R\}$.

Analogamente nel piano riferito alle coordinate x e y, dato un punto $C(a,b)$ e un numero reale R positivo, la **circonferenza** di centro C e raggio R è l'insieme $\mathcal{C} = \{P(x,y) | d(P,C) = R\}$

La sfera $\mathcal{S}$ ha quindi equazione cartesiana

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

o anche

$$(1) \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

dove $d = a^2 + b^2 + c^2 - R^2$. Inoltre ogni equazione del tipo (1) rappresenta una sfera, purchè si abbia $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.

La circonferenza $\mathcal{C}$ è rappresentata nel piano da un'equazione del tipo:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

o anche

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + d = 0$$

dove $d = a^2 + b^2 - R^2$.

Esempi. 1) verificare che l'equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4z + 1 = 0$ rappresenta una sfera di raggio 2 e centro $C(1,0,2)$.

2) Verificare che nel piano (xy), il punto $A(0,4)$ appartiene alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 16$, mentre il punto $B(1,4)$ non le appartiene.

Circonferenze nello spazio

Una circonferenza nello spazio è determinata dall'intersezione di due superfici che passano per essa; la scelta di queste superfici è arbitraria (come lo è la scelta di due piani per rappresentare la retta loro intersezione): una circonferenza si può infatti pensare come intersezione di una sfera e di un piano, oppure come intersezione di due sfere o anche di un piano e di un'altra opportuna superficie (per esempio una superficie di rotazione con asse di rotazione una retta ortogonale al piano della circonferenza).
Se la circonferenza è intersezione di una sfera $\mathcal{S}$ e di un piano α , allora è rappresentata dal sistema:

$$(2) \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 \end{cases}$$

dove, assumendo $d = a^2 + b^2 + c^2 - R^2 > 0$, la sfera ha centro $C(a,b,c)$ e raggio $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

Se $d(C,\alpha) < R$ l'intersezione $\mathcal{S} \cap \alpha$ è una circonferenza di cui possiamo ricavare il centro C' e il raggio r; infatti C' è il punto di intersezione del piano α con la retta perpendicolare ad esso condotta per il centro della sfera $\mathcal{S}$; per il teorema di Pitagora $r = \sqrt{R^2 - d(C,\alpha)^2}$.

Se $d(C,\alpha) > R$ il sistema (2) non ha soluzioni reali, infatti l'intersezione $\mathcal{S} \cap \alpha$ è priva di punti reali.

Se $d(C,\alpha) = R$ il sistema (2) ha un'unica soluzione ossia rappresenta un punto, che è il punto di tangenza di α con $\mathcal{S}$.

Definizione. Un piano si dice **tangente** a una sfera $\mathcal{S}$ di centro C e raggio R se ha distanza R da C. Analogamente una retta si dice **tangente** a una circonferenza $\mathcal{C}$ di centro C e raggio r se giace sul piano di $\mathcal{C}$ e ha distanza r dal centro C.

CONICHE

eq. generale della CONICA: $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$

I termini di secondo grado costituiscono una forma quadratica associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Se $a_{13} = a_{23} = 0$ possiamo diagonalizzare A ottenendo un sistema $R(OX,Y)$ rispetto al quale la conica ha equazione $\boxed{\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = \gamma}$, con λ_1 e λ_2 autovalori di A.

$\boxed{\text{SE IL DET}(A) \neq 0}$

1.1) $\lambda_1, \lambda_2, \gamma \neq 0$ e stesso segno $\boxed{\text{ELLISSE}}$

1.2) $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$, $\gamma \neq 0$ e stesso segno $\boxed{\text{CIRCONFERENZA}}$

2) $\lambda_1, \lambda_2, \gamma \neq 0$ e λ_1 ha segno opposto di λ_2 $\boxed{\text{IPERBOLE}}$

3) $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, $\gamma = 0$ e segno opposto $\boxed{\text{DUE RETTE CHE SI INTERSECANO}}$

4) Un $\lambda_i = 0$ e l'altro ha lo stesso segno di γ $\boxed{\text{DUE RETTE PARALLELE}}$

5) Un $\lambda_i = 0$ e $\gamma = 0$ $\boxed{\text{DUE RETTE COINCIDENTI}}$

6) λ_1 ha lo stesso segno di λ_2, $\gamma = 0$ $\boxed{\text{UN PUNTO}}$

In generale dell'eq. della conica dobbiamo eliminare i termini di primo grado $2a_{23}Y$ e $2a_{13}X$ e lo si fa con un opportuno cambio di coordinate

$$\begin{cases} x = X + u \\ y = Y + v \end{cases}$$

Sostituendo nell'eq. di partenza otteniamo l'espressione dei termini di primo grado:

$$2(a_{11}u + a_{12}v + a_{13})X + 2(a_{12}u + a_{22} \cdot + a_{23})Y$$

Per eliminarli imponiamo:

$$\begin{cases} a_{11}u + a_{12}v = -a_{13} \\ a_{12}u + a_{22}v = -a_{23} \end{cases}$$

QUADRICHE

Eq. generale
della QUADRATICA

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+a_{22}y^2+2a_{23}yz+a_{33}z^2+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0$$

I termini di secondo grado costituiscono una forma quadratica in x,y,z associata a $M \in \mathbb{R}^{3,3}$. Detti $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ gli autovalori di M otteniamo una di queste due equazioni

I) $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 = \gamma$

II) $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = 2\gamma Z$

Le quadriche di $\boxed{\text{tipo (I)}}$ sono QUADRICHE A CENTRO e si ottengono da un'equazione del tipo

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+a_{22}y^2+2a_{23}yz+a_{33}z^2+a_{44}=0$$

Esse sono:

1.1) Se $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ hanno lo stesso segno $\boxed{\text{ELLISSOIDE}}$

1.2) Se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ $\boxed{\text{SFERA DI RAGGIO } \sqrt{\gamma}}$

2) $\lambda_1, \lambda_2, \gamma$ stesso segno e λ_3 segno opposto agli altri $\boxed{\text{IPERBOLOIDE A UNA FALDA}}$

3) λ_1, λ_2 stesso segno e λ_3 e γ segno opposto agli altri $\boxed{\text{IPERBOLOIDE A DUE FALDE}}$

4) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \gamma$ non hanno lo stesso segno e $\gamma = 0$ $\boxed{\text{CONO}}$

Le quadriche di $\boxed{\text{tipo (II)}}$ non hanno centro di simmetria.

$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = 2\gamma Z$

Se λ_1 e λ_2 hanno segni opposti si tratta di un PARABOLOIDE

Se λ_1 e λ_2 hanno lo stesso segno si tratta di un PARABOLOIDE ELLITTICO