NUMERO: 948

DATA: 05/05/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Lo Curzio

MATERIA: Fisica I

Prof. Penna

CORSO DI

FISICA I

2012/2013

Mario Lo Curzio

prof. Vittorio Penna

Politecnico di Torino

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 154

PROPAGAZIONE dell'ERRORE MASSIMO

La propagazione dell'errore massimo si utilizza se le incertezze **non sono state stimate attraverso l'analisi statistica** di un serie di misurazioni ripetute, come ad esempio nel caso in cui si tratti di incertezze strumentali.

Formula generale

Se le misure delle grandezze x, y e z ... sono indipendenti, allora:

$$q = f(x, y, z, ...) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta q = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| \Delta z + ...}$$

dove

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|,$$

sono le derivate parziali rispetto alle variabili x, y e z. Dopo aver calcolato la formula precedente per Δq in modo explicito (vedere esercizi ed esempi), alle grandezze x, y e z si sostituiranno i valori effettivamente misurati. Si ricordi che Δz, Δx e Δy son **definiti positivi**.

Se una grandezza è stata misurata più di una volta ma con **poche misure**, essendo comunque calcolabile il valor medio, alle variabili x, y e z si sostituiranno nella formula per il Δq i valori medi calcolati $\bar{x}$, $\bar{y}$ e $\bar{z}$ mentre i Δx, Δy e Δz corrispondenti saranno scelti secondo le indicazioni della pagina precedente.

ESEMPIO: somma o differenza di grandezze

$$q = f(x, y, z) = \pm x \pm y \pm z \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| = |\pm 1| = 1, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = |\pm 1| = 1, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| = |\pm 1| = 1$$

$$\Rightarrow \quad \Delta q = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| \Delta z = \Delta x + \Delta y + \Delta z$$

Si ricordi che Δz, Δx e Δy son definiti positivi.

ESEMPIO: prodotto di grandezze

$$q = f(x, y, z) = x\, y\, z \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| = |y\, z|, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = |x\, z|, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| = |x\, y|$$

$$\Rightarrow \quad \Delta q = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| \Delta z = |y\, z|\, \Delta x + |x\, z|\, \Delta y + |x\, y|\, \Delta z$$

$$\frac{\Delta q}{|q|} = \frac{\Delta x}{|x|} + \frac{\Delta y}{|y|} + \frac{\Delta z}{|z|}$$

ESEMPIO: prodotto di potenze (relazione monomia).

$$q = f(x, y, z) = x^a\, y^b\, z^c$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| = |a\, x^{a-1}\, y^b\, z^c| = \frac{|a|}{|x|}\, |q|, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = |b\, x^a\, y^{b-1}\, z^c| = \frac{|b|}{|y|}\, |q|, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| = |c\, x^a\, y^b\, z^{c-1}| = \frac{|c|}{|z|}\, |q|$$

$$\Rightarrow \quad \Delta q = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| \Delta z = \frac{|a|}{|x|}\, |q|\, \Delta x + \frac{|b|}{|y|}\, |q|\, \Delta y + \frac{|c|}{|z|}\, |q|\, \Delta z$$

$$\frac{\Delta q}{|q|} = |a|\, \frac{\Delta x}{|x|} + |b| \frac{\Delta y}{|y|} + |c|\, \frac{\Delta z}{|z|}\,.$$

ESEMPIO: prodotto di potenze (relazione monomia) $q = f(x,y,z) = x^a\, y^b\, z^c$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} = a\, x^{a-1}\, y^b\, z^c = \frac{a}{x}\, q\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = b\, x^a\, y^{b-1}\, z^c = \frac{b}{y}\, q\,, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = c\, x^a\, y^b\, z^{c-1} = \frac{c}{z}\, q$$

$$\Delta q = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 (\Delta\bar{x})^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 (\Delta\bar{y})^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 (\Delta\bar{z})^2} = |q| \sqrt{\left(\frac{a}{x}\right)^2 (\Delta\bar{x})^2 + \left(\frac{b}{y}\right)^2 (\Delta\bar{y})^2 + \left(\frac{c}{z}\right)^2 (\Delta\bar{z})^2}$$

Ponendo $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$ e $z = \bar{z}$ si trovano le formule

$$\Delta q = |q| \sqrt{\left(\frac{a}{\bar{x}}\right)^2 (\Delta\bar{x})^2 + \left(\frac{b}{\bar{y}}\right)^2 (\Delta\bar{y})^2 + \left(\frac{c}{\bar{z}}\right)^2 (\Delta\bar{z})^2}\,, \qquad \frac{\Delta q}{|q|} = \sqrt{\left(\frac{\Delta\bar{x}}{\bar{x}}\right)^2 a^2 + \left(\frac{\Delta\bar{x}}{\bar{y}}\right)^2 b^2 + \left(\frac{\Delta\bar{z}}{\bar{z}}\right)^2 c^2}\,.$$

CONFRONTO delle due stime di Δq. Identificando i due tipi di deviazioni $\Delta\bar{x} = \Delta x$, $\Delta\bar{y} = \Delta y$ e $\Delta\bar{z} = \Delta z$ si dimostra che

$$\Delta q = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 (\Delta\bar{x})^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 (\Delta\bar{y})^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 (\Delta\bar{z})^2} \;\leq\; \Delta q = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| \Delta z$$

Ovviamente il metodo statistico con misure ripetute fornisce uns deviazione minore e quindi è più soddisfacente di quello con poche misure o una singola misura.

<u>Esempio</u>: Data la funzione $f(x,y) = x^2 + 7xy + y^2$, la derivata parziale rispetto a x è $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x + 7y$ e la derivata parziale rispetto a y è $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 7x + 2y$.

Nei problemi che si incontrano in economia, l'interpretazione della derivata parziale dipende dalla funzione che si sta considerando. Ad esempio, consideriamo una funzione di produzione $Q = f(L, K)$, che mette in relazione la quantità di fattori produttivi lavoro L e capitale K impiegati nel processo produttivo e la quantità di prodotto Q ottenibile da esse. La derivata parziale della funzione di produzione rispetto a L misura la variazione del prodotto Q dovuta ad una variazione della quantità di lavoro L impiegata e viene definita come *produttività marginale del lavoro* (PML). Analogamente, la derivata parziale della funzione di produzione rispetto a K misura la variazione del prodotto Q dovuta ad una variazione della quantità di capitale K impiegata e viene definita come *produttività marginale del capitale (PMK).*

Se invece consideriamo una funzione di utilità $U = f(x,y)$, dove x e y rappresentano le quantità consumate dei beni x e y, la derivata parziale rispetto a x misura la variazione dell'utilità derivante da una variazione della quantità consumata del bene x e viene definita *utilità marginale del bene x*. Analogamente, la derivata parziale rispetto a y misura la variazione dell'utilità derivante da una variazione della quantità consumata del bene y e viene definita *utilità marginale del bene y*.

Come abbiamo visto in precedenza, la derivata seconda di una funzione è la derivata della derivata di quella funzione. Nel caso di funzioni in due variabili indipendenti, ognuna delle due derivate parziali prime può essere derivata rispetto alle due variabili indipendenti. Quindi, la funzione avrà 4 derivate parziali seconde. Data una funzione $z = f(x,y)$, si definisce

- derivata parziale seconda pura rispetto a x la derivata parziale rispetto a x della derivata parziale prima rispetto a x e si indica come z''_{xx} oppure $f''_{xx}(x,y)$ oppure $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$;

CINEMATICA

La meccanica riguarda lo studio del moto di un corpo: essa spiega la relazione che esiste tra le cause che generano il moto e le caratteristiche di questo e le esprime in leggi quantitative. Iniziamo lo studio del moto del corpo puntiforme.

Il moto di un punto è determinato se è nota la sua posizione rispetto agli assi $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ in FUNZIONE DEL TEMPO.

La TRAIETTORIA è il luogo dei punti occupati successivamente dal punto in movimento. Lo studio delle variazioni di posizione lungo la traiettoria nel tempo porterà a definire la VELOCITÀ, mentre lo studio delle variazioni di velocità nel tempo l'ACCELERAZIONE.

La grandezza utilizzata come variabile INDIPENDENTE è il TEMPO.

La QUIETE è un tipo di moto in cui velocità e accelerazione sono nulle, sempre evidenziando il sistema di riferimento rispetto a cui si osserva il moto.

MOTO RETTILINEO

Esso si svolge lungo una retta. La sua legge oraria è rappresentabile su un grafico t, $x(t)$.

Se un corpo possiede la posizione x_1 al tempo t_1 e x_2 al tempo t_2 allora $\underline{V_{media}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$

Invece la velocità ISTANTANEA è data dalla derivata dello spazio rispetto al tempo $\boxed{v = \frac{dx}{dt}}$ ovvero la variazione temporale della posizione nell'istante t

$$\Delta x = \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt \qquad \boxed{x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt}$$

Precisiamo che Δx rappresenta lo spostamento complessivo e NON lo spazio percorso

MOTO RETTILINEO UNIF. ACCELERATO

$a = \text{cost.}$

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt$$

$$v(t) = v_0 + a\int_{t_0}^{t} dt$$

$$\boxed{v(t) = v_0 + a(t-t_0)}$$

Si usa la formula

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$$

$$\downarrow$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [v_0 + a(t-t_0)]\,dt$$

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0(t-t_0) + \frac{1}{2}a(t-t_0)^2}$$

Inoltre:

$$\int_{x_0}^{x} a(x)\,dx = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 \xrightarrow{a = \text{cost.}} a(x-x_0) = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{v^2 = v_0^2 + 2a(x-x_0)}$$

MOTO ARMONICO SEMPLICE

$$\boxed{x(t) = A\,\text{sen}(\underbrace{\omega t + \phi}_{\text{FASE}})}$$

AMPIEZZA del moto

PULSAZIONE FASE INIZIALE

A, ω, ϕ costanti

$$\boxed{x(0) = A\,\text{sen}\,\varphi}$$

Il punto percorre un ampiezza 2A.
Al tempo $t=0$ il punto occupa la posizione $x = A\,\text{sen}\,\phi$
Considerando la presenza della funzione seno, il moto armonico risulta essere PERIODICO. Il punto descrive oscillazioni di ampiezza A rispetto all'origine tutte uguali tra loro della durata T (periodo)

MOTO RETTILINEO SMORZATO ESPONENZIALMENTE

$a = -Kv$ l'accelerazione è sempre contraria alla velocità che deve perciò diminuire

$\frac{dv}{dt} = -Kv$ coefficiente di smorzamento

$\frac{dv}{v} = -K dt \Rightarrow \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -K \int_0^t dt$

Velocità rispetto al tempo

$\boxed{\ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -Kt}$ forma logaritmica

$\boxed{v(t) = v_0 e^{-Kt}}$ forma esponenziale

$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \cancel{v} = -K\cancel{v}$

$dv = -K dx$

$\int_{v_0}^{v} dv = -K \int_0^x dx$

$\boxed{v(x) = v_0 - Kx}$ Velocità rispetto allo spazio

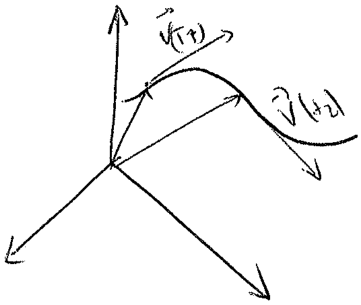
Ricordiamo la legge $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\, dt$

$\Downarrow$

$\boxed{x(t)} = \cancel{x_0} + \int_{t_0}^{t} v_0 e^{-Kt} dt = -\frac{v_0}{K}\left[e^{-Kt}\right]_0^t = \boxed{\frac{v_0}{K}(1 - e^{-Kt})}$

ACCELERAZIONE MEDIA

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{V}(t_2) - \vec{V}(t_1)}{t_2 - t_1}$$



Accelerazione istantanea: $\frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \vec{a}(t)$

$$\vec{a}(t) = \underbrace{a_x \hat{u}_x}_{\frac{dV_x}{dt}\hat{u}_x} + a_y \hat{u}_y + a_z \hat{u}_z$$

$a_x = V_x' = (x')' = x''$
$a_y = y''$
$a_z = z''$

$$\frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \vec{a}(t) \rightarrow \text{NOTA}$$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d\vec{V}}{d(\tau)} d(\tau) = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(\tau)\, d(\tau)$$

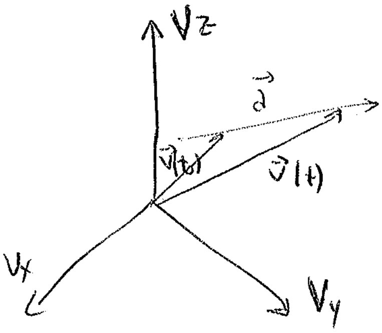
$$\vec{V}(t) - \vec{V}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(s)\, ds$$

$$\boxed{\vec{V}(t) = \vec{V}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(\tau)\, d\tau}$$

MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

$\vec{a} = cost.\ \forall t$

$$\vec{V}(t) = \vec{V}(t_0) + \vec{a}(t - t_0)$$



Riprendo le formule

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{V}(\tau)\, d\tau$$

e sostituisco

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} [\vec{V}(t_0) + \vec{a}(\tau - t_0)]\, d\tau$$

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{V}(t_0)(t - t_0) + \frac{\vec{a}}{2}(t - t_0)^2}$$ legge oraria del vettore posizione

Parlando di moto uniformemente accelerato, se conosco la velocità iniziale e finale e conosco il tempo iniziale e finale posso calcolare l'accelerazione come

$$a = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2(X_2 - X_1)}$$

$$\begin{cases} V_2 = V_1 + a(t_2 - t_1) \\ X_2 = X_1 + V_1(t_2 - t_1) + \frac{a}{2}(t_2 - t_1)^2 \end{cases}$$

$$V_2 - V_1 = a(t_2 - t_1) \Rightarrow t_2 - t_1 = \frac{V_2 - V_1}{a}$$

$$X_2 - X_1 = V_1 \cdot \frac{V_2 - V_1}{a} + \frac{a}{2}\left(\frac{V_2 - V_1}{a}\right)^2$$

$$X_2 - X_1 = \frac{V_1 V_2 - V_1^2}{a} + \frac{V_2^2 + V_1^2 - 2V_2 V_1}{2a}$$

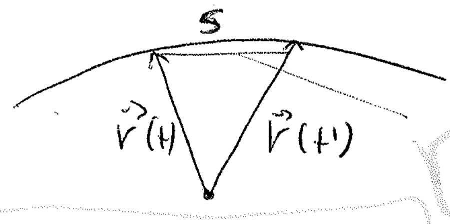
$$X_2 - X_1 = \frac{\cancel{2V_1V_2} - 2V_1^2 + V_2^2 + V_1^2 - \cancel{2V_2V_1}}{2a} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2a}$$

$$\boxed{a = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2(X_2 - X_1)}}$$

la dimostrazione della formula delle componenti di $\vec{a}$ si divide in due passaggi:

(1) $\vec{v} = v\,\hat{u}_T$

$v = \frac{ds}{dt}$

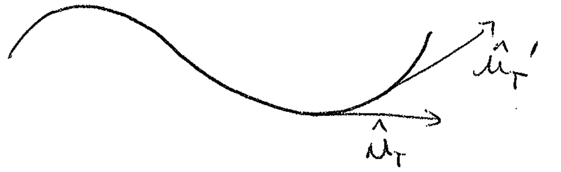


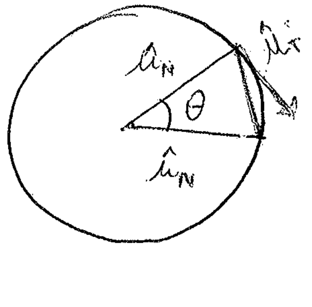
$$\boxed{\Delta\vec{r} = \vec{r}'(t) - \vec{r}(t)}$$

$$\boxed{\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \underbrace{\frac{\Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|}}_{\hat{u}_T \text{ versore tangente}} \cdot \underbrace{\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}}_{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}}} = \hat{u}_T \frac{ds}{dt}$$

Al limite di $\Delta t \to 0$ l'origine coincide col centro della <u>circonferenza osculatrice</u> e viene detto <u>raggio di curvatura</u>

(2) derivata di un <u>versore</u>





$$\frac{d\hat{u}_T}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\hat{u}_T' - \hat{u}_T}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \underbrace{\frac{\hat{u}_T' - \hat{u}_T}{|\Delta\hat{u}_T|}}_{\hat{u}_N} \cdot \frac{|\Delta\hat{u}_T|}{\Delta t} \rightarrow$$

poichè $R = 1$ e $dS = R d\theta$

$$\frac{|\Delta\hat{u}_T|}{\Delta t} = \frac{dS}{dt} = \frac{R\,d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt}$$

$\boxed{\hat{u}_N}$ versore ortogonale (versore di un versore)

quindi $\boxed{\frac{\Delta\hat{u}_T}{dt} = \hat{u}_N \frac{d\theta}{dt}}$

MOTO CIRCOLARE UNIFORME

$\omega = cost.$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\theta(t) = \theta(t_0) + \int_{t_0}^{t} \omega(\tau)\, d\tau} \qquad \theta(t) = \theta(t_0) + \omega(t - t_0)$$

$$\boxed{\omega(t) = \omega(t_0) + \int_{t_0}^{t} \alpha(\tau)\, d\tau} \qquad \boxed{\omega(t) = \omega(t_0) + \alpha(t - t_0)}$$

$\Downarrow$

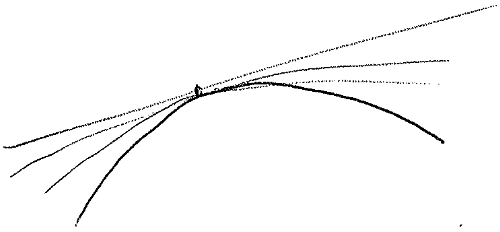
[UNIFORMEMENTE ACCELERATO]

Se metto insieme le due formule ricavo:

$$\theta(t) = \theta(t_0) + \int_{t_0}^{t} [\omega(t_0) + \alpha(\tau - t_0)]\, d\tau =$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta(t) = \theta(t_0) + \omega(t_0)(t - t_0) + \frac{\alpha}{2}(t - t_0)^2}$$

Il moto rettilineo è un moto in cui il raggio della circonferenza osculatrice tende a ∞

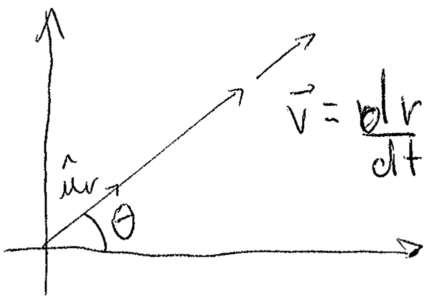


$$a_N = \frac{V^2}{R} = 0$$

poichè $R \to \infty$ per poter "coprire" la retta

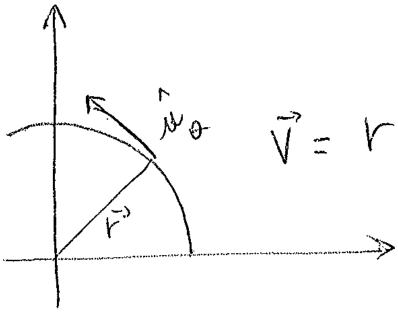
$$a_T = \frac{dv}{dt}$$

1) Se θ = cost. avremo un moto RADIALE PURO



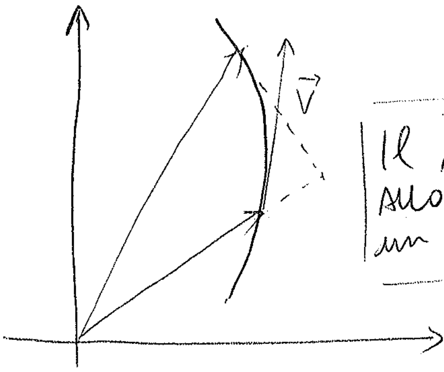
$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\,\hat{u}_r$$

2) Se r = cost. avremo un moto ANGOLARE PURO

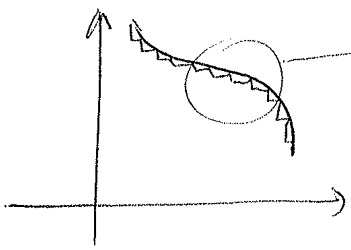


$$\vec{v} = r\frac{d\theta}{dt}\,\hat{u}_\theta$$

3)



Il moto è un misto tra ALLONTANAMENTO RETTILINEO e un po' di MOVIMENTO CIRCOLARE



per comodità r' θ'

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}(r'\hat{u}_r) + \frac{d}{dt}(r\theta' u_\theta) =$$

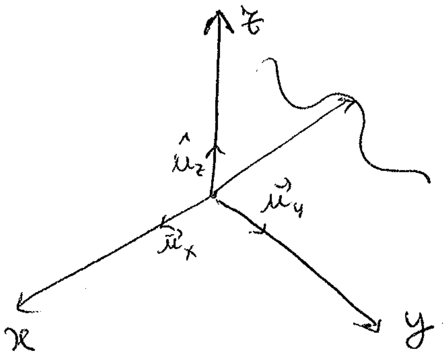
$$= r''\hat{u}_r + r'\frac{d\hat{u}_r}{dt} + r'\theta'\hat{u}_\theta + r\theta''\hat{u}_\theta + r\theta'\frac{d\hat{u}_\theta}{dt} =$$

$$= r''\hat{u}_r + 2r'\theta'\hat{u}_\theta + r\theta''\hat{u}_\theta + r\theta'(-\theta'\hat{u}_r) =$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} = (r'' - r\theta'^2)\hat{u}_r + (2r'\theta' + r\theta'')\hat{u}_\theta}$$

CINEMATICA TRIDIMENSIONALE

Composizione di moti

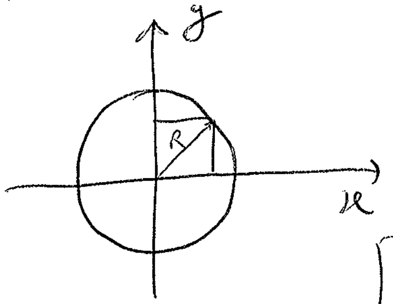


Vettore posizione

$$\vec{r}(t) = \hat{u}_x\, x(t) + \hat{u}_y\, y(t) + \hat{u}_z\, z(t)$$

[per ogni punto della curva è come se trovassi la proiezione del punto sugli assi, proiezioni che variano al variare del moto]

MOTO SU UNA CIRCONFERENZA

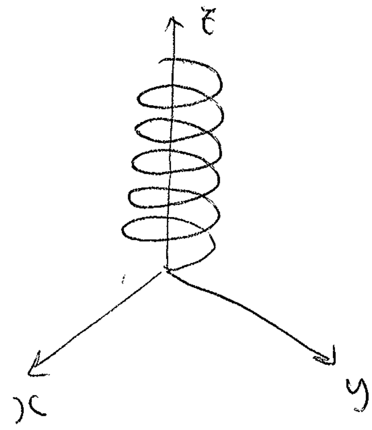


$$\vec{r}(t) = \hat{u}_x R\cos(\omega t) + \hat{u}_y R\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

$$\left[\, x^2(t) + y^2(t) = R^2\cos^2(\omega t) + R^2\mathrm{sen}^2(\omega t) = R^2 \right.$$

eq. della circonferenza con centro nell'O

MOTO LUNGO UN'ELICA



$$\vec{r}(t) = \hat{u}_x R\cos(\omega t) + \vec{u}_y R\,\mathrm{sen}(\omega t) + \hat{u}_z v_0 t$$

DINAMICA

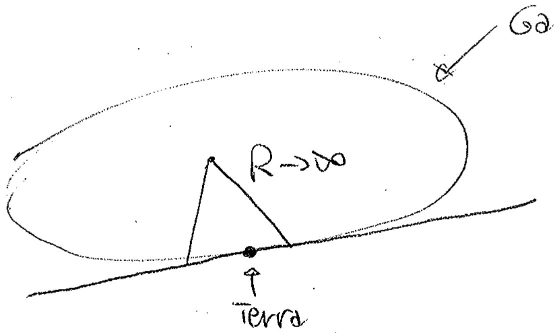
Il mondo fisico circostante, l'universo, è un sistema complesso di molti corpi in continua evoluzione per effetto delle interazioni presenti (o passate) tra i suoi costituenti, su tutte le scale possibili. Mentre la cinematica studia il moto indipendentemente dalle cause che lo generano, la dinamica si occupa del perché un corpo entra in movimento.

I PRINCIPIO DELLA DINAMICA (legge d'inerzia)

Una particella libera si muove con velocità costante (cioè con accelerazione nulla). Per particella libera si intende non soggetta ad interazioni con l'ambiente circostante.

SISTEMA INERZIALE

La Terra non è un sistema inerziale in quanto si muove lungo un'orbita ellittica e quindi subiamo un'accelerazione centripeta.



Per piccoli archi di tempo la Terra è un buon sistema inerziale perché la sua traiettoria è localmente approssimabile ad una retta.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 154

Avendo come nota la forza $\vec{F}$ tramite l'equazione $\vec{F} = m\vec{a}$ posso ricavarmi la legge oraria $\vec{r}(t)$ tramite:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(\tau)d\tau \qquad e \qquad \vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(\tau)d\tau$$

III PRINCIPIO DELLA DINAMICA (azione - reazione)

Il corpo 1 esercita una forza $\vec{F}_{12}$ su un corpo 2 allora il corpo 2 reagisce esercitando $\vec{F}_{21}$ su 1 tale che

$$\boxed{\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}}$$

* le due forze hanno stesso modulo stessa direzione e verso opposto.

Il terzo principio dimostra che i corpi interagiscono tra loro all'interno di un grande ordine perfetto.

le tre leggi della dinamica: (RIEPILOGO)

- In assenza di forze un corpo mantiene il suo stato di quiete o moto rettilineo uniforme
- Se siamo in presenza di una forza il corpo altera il suo stato subendo una accelerazione
- Se sono due corpi uno esercita una forza sull'altro

QUANTITÀ DI MOTO: IMPULSO

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad F = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

→ sistemi a massa costante (studio dei punti materiali)

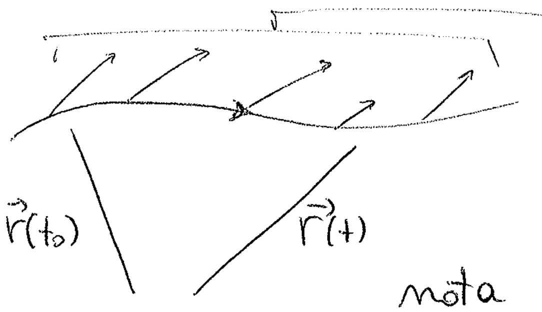
$$Fdt = d\vec{p}$$

Teorema dell'impulso:

L'impulso di una forza applicata ad un punto materiale provoca la variazione della sua quantità di moto; con m costante si ha

$$\vec{J} = \int_0^t F(\tau)d\tau = \vec{p}(t) - \vec{p}(t_0) = m(\vec{v}(t) - \vec{v}(t_0)) = m\Delta\vec{v}$$

In assenza di forze $\Delta p = 0$ quindi $p =$ costante.

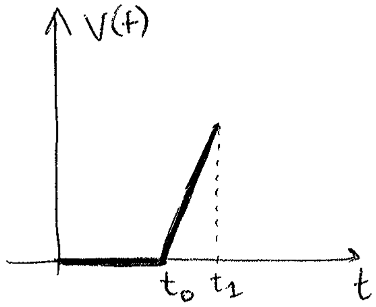


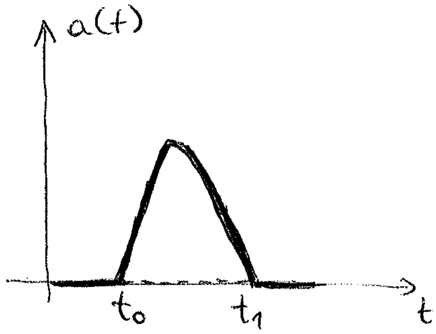
$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}[\vec{r}(t)] = \vec{F}(t)$$

nota $\vec{r}(t)$ (la legge oraria) so scrivere la forza $\vec{F}$ istante per istante

Applicazione del teorema dell'impulso:

- Calcolare la forza media esercitata su una massa m nei fenomeni impulsivi (come il pallone calciato)





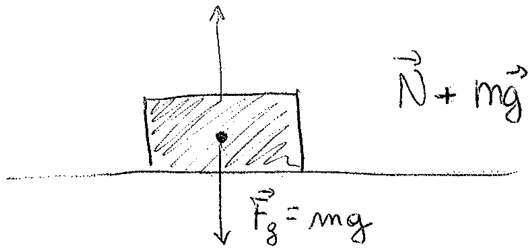
$$\int_{t_0}^{t} \vec{F}(\tau)\,d\tau = m\left(\vec{V}(t_1) - \vec{V}(t_0)\right)$$ potrebbe anche essere 0

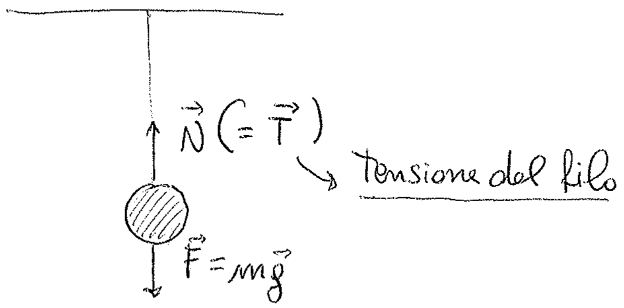
$$\int_{t_0}^{t} \vec{F}(\tau)\,d\tau = \vec{F}_{med.}(t_1 - t_0) \quad , t_{med} \in (t_0, t_1)$$

$$\boxed{\vec{F}_{med.} = \frac{\vec{J}}{\Delta t} = \frac{m\left(\vec{v}(t_1) - \vec{v}(t_0)\right)}{t_1 - t_0}}$$

FORZA DI REAZIONE VINCOLARE

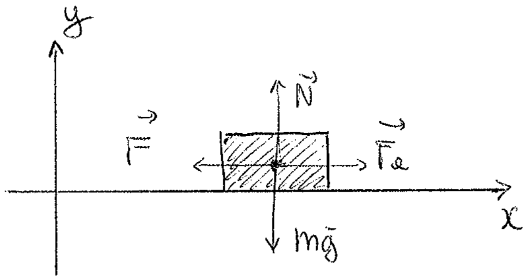
Se un corpo soggetto a una forza o più forze tali che $\vec{R} \neq 0$ rimane immobile allora esiste una reazione vincolare $\vec{N}$ tale che $\vec{R}+\vec{N}=0$.





La reazione vincolare non può essere calcolata a priori: manifesta una capacità dell'ambiente di opporsi all'azione di $\vec{R}$ che può variare caso per caso.

FORZA DI ATTRITO RADENTE (Attrito STATICO)



Se applichiamo una forza $\vec{F}$ al corpo questo non si muove finché $\vec{F}$ non ha superato il valore $\mu_s N$, dove μ_s è il coefficiente di attrito statico ed N il modulo della componente normale al piano di appoggio della reazione vincolare. Quindi affinché il corpo possa essere in movimento $\vec{F} > \mu_s N$.

Si chiama forza di attrito massimo il valore oltre il quale l'attrito non è più in grado di mantenere in immobile

$F_a < F_a^{max} = \mu_s N$ affinché si muova.

Invece il corpo rimane immobile se:

$$\begin{cases} y: \vec{N} + m\vec{g} = 0 \\ x: \vec{F}_a + \vec{F} = 0 \end{cases}$$

FORZA DI ATTRITO VISCOSO

$\vec{F}_v = -mk\vec{v}$ (è opposta allo spostamento)

k = coefficiente di smorzamento (dipende dalle caratteristiche del corpo)

N.B. In un corpo sferico $k = 6\pi R$

$\vec{F} = m\vec{a}$

$$-\cancel{m}k\vec{v} = \cancel{m}\frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = -k\vec{v} \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} + k\vec{v} = 0}$$

eq. differenziale omogenea

Nel caso monodimensionale ($\vec{v} = v\hat{u}_x$)

$\frac{dv_x}{dt} = -kv_x \Rightarrow$ sol. generale dell'eq. differenz. $v_x(t) = v_0 e^{-kt}$ con v_0 cond. iniz.

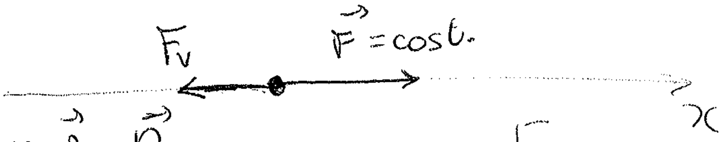
integrando:

$x(t) = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt})$

lunghezza di penetrazione

leggi orarie del moto smorzato esponenzialm.

Applicazione



$m\vec{a} = \vec{R}$

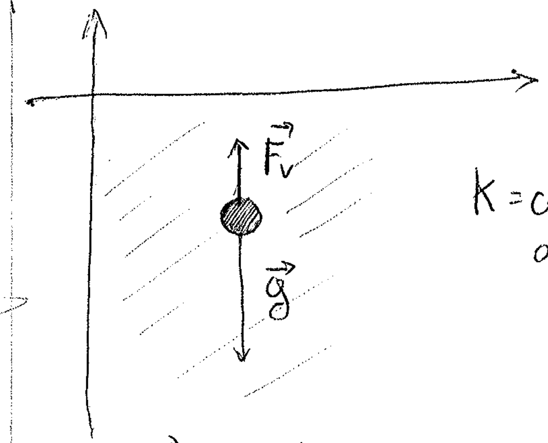
$ma = R$

$m\frac{dv}{dt} = F - mkv$

$\vec{F} = F\hat{u}_x$

$\vec{F}_v = -mkv\hat{u}_x$

$\boxed{\frac{dv}{dt} + kv = \frac{F}{m}}$ eq. differenziale completa



K = coeff. di viscosità del liquido

$$\vec{V} = V_y \hat{u}_y \rightarrow V_y < 0$$

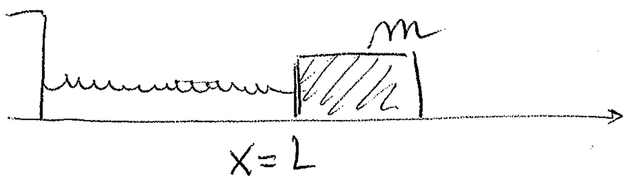
la F_v è rivolta verso l'alto quindi dovrebbe esserci un '+' però poiché $V_y < 0$ allora c'è un segno '−'.

$$m \frac{dv_y}{dt} = -mg - KmV_y$$

$\vec{F}$ è negativa perché rivolta verso il basso

$$\boxed{V_y(t) = -\frac{g}{K}\left(1 - e^{-Kt}\right)}$$

FORZA ELASTICA



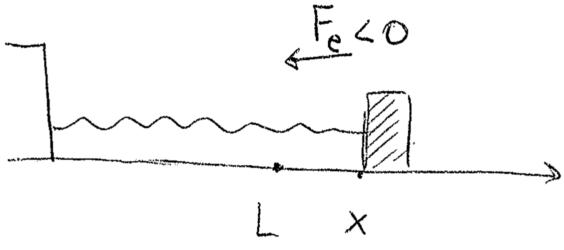
L = lunghezza della molla a RIPOSO

K = costante elastica

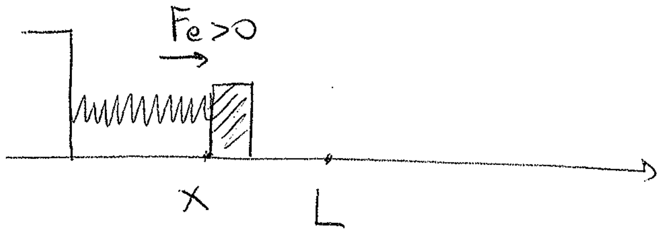
$$\vec{F}(x) = -K(x - L)\hat{u}_x$$

$$F(x) = -K(x - L) \quad \text{[quantità scalari]}$$

La forza elastica è una forza di <u>RICHIAMO</u>, per cui ha il segno negativo.



$$\boxed{x > L \Rightarrow F(x) < 0}$$



$$\boxed{x < L \Rightarrow F(x) > 0}$$

se $F = ma$

$-K(x-L) = m x''$

1) $\underbrace{x'' + \frac{K}{m} x = \frac{LK}{m}}_{\text{eq. diff. completa}}$

$x = L$

2) $\underbrace{x'' + \frac{K}{m} x = 0}_{\text{eq. diff. omogenea}}$

$x = 0$

$$x'' = \frac{F}{m} = -\frac{K}{m} x = -\omega^2 x \Rightarrow \omega^2 = \frac{K}{m} \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}}$$

Il moto è armonico semplice con pulsazione ω e periodo T determinati dal rapporto tra la costante elastica e la massa del punto materiale a cui è applicata la forza elastica:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow \boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}}$$

Riprendiamo il (1)

$x'' + \frac{K}{m} x = \frac{LK}{m}$ è un'eq. diff. completa,

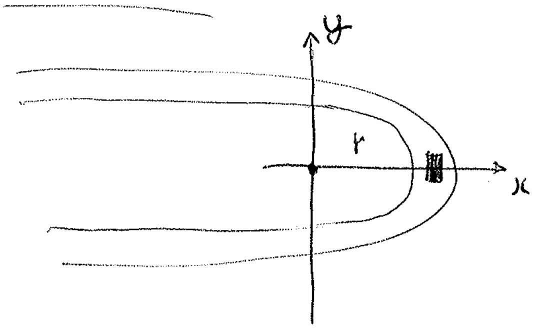
$$X_{gen}(t) = \underset{\text{int. gen.}}{x(t)} + \underset{\text{sol. part.}}{X_{s.p.}}$$

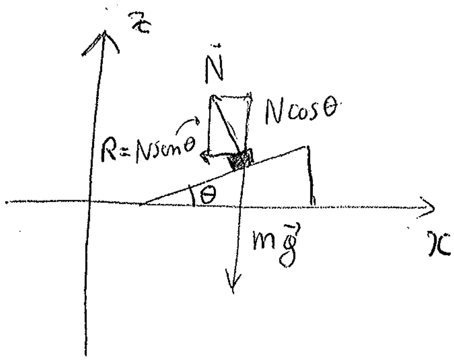
Una possibile sol. part. può essere L $(L'' = 0)$

Se $L \neq 0$, $\boxed{X_{gen}(t) = L + A\,\text{sen}(\omega t + \varphi)}$

eq. moto armonico semplice

Inclinamento di una curva ②





[vista dal davanti]
(y esce dal foglio)

$$m\vec{a} = \vec{R}$$

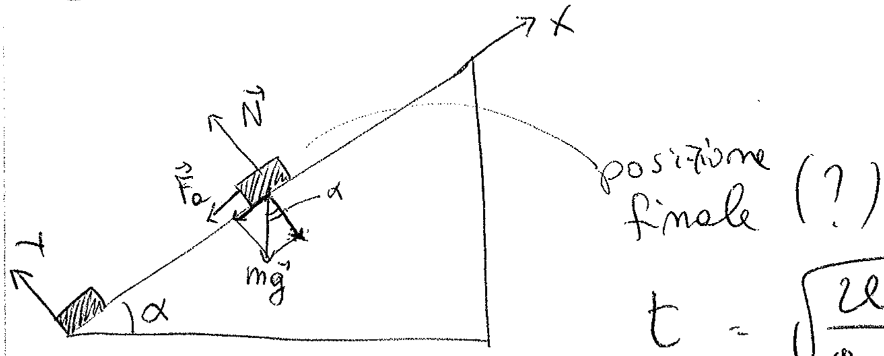
$$a_T = 0 \leftrightarrow v = \text{cost.}$$

$$m a_N \hat{u}_N + m a_T \hat{u}_T + m a_z \hat{u}_z = \vec{R}$$

$$\begin{cases} m a_T = 0 \Rightarrow v = \text{cost.} \\ m a_z = 0 = -mg + N\cos\theta \rightarrow N = \dfrac{mg}{\cos\theta} \\ m a_N = \vec{R} = N\text{sen}\theta = mg\, tg\theta \end{cases}$$

$$\cancel{m}\frac{v^2}{r} = \cancel{m} g\, tg\theta \qquad \boxed{v = \sqrt{r g\, tg\theta}}$$

4



$t = \sqrt{\frac{2l}{g_{\parallel}}}$ tempo discesa

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F_a}$$

$$\begin{cases} \vec{N} = N\hat{u}_y \\ m\vec{g} = -mg\cos\alpha\,\hat{u}_y - mg\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\hat{u}_x \\ \vec{F_a} = -F_a \end{cases}$$

$$\begin{cases} ma_x = -mg\,\mathrm{sen}\,\alpha - F_a \\ ma_y = -mg\cos\alpha + N = 0 \quad \text{(il corpo non vola!)} \end{cases}$$

$N = mg\cos\alpha$, $F_a = \mu N = \mu mg\cos\alpha$

$$ma_x = -mg\,\mathrm{sen}\,\alpha - \mu mg\cos\alpha$$

$$\boxed{a_x = -g(\mathrm{sen}\,\alpha - \mu\cos\alpha)}$$

$$\begin{cases} x(t) = \cancel{x_0} + V_0 t + \frac{a_x}{2}t^2 \\ V(t) = V_0 + a_x t \quad \Rightarrow \quad t_{fin} = -\frac{V_0}{a_x} = \frac{V_0}{|a_x|} \end{cases}$$

$$x_{fin} = x(t_{fin}) = V_0 t_{fin} - \frac{|a_x|}{2}\underbrace{\left(\frac{V_0^2}{|a_x|^2}\right)}_{(t_{fin})^2} = \boxed{\frac{V_0^2}{2|a_x|}}$$

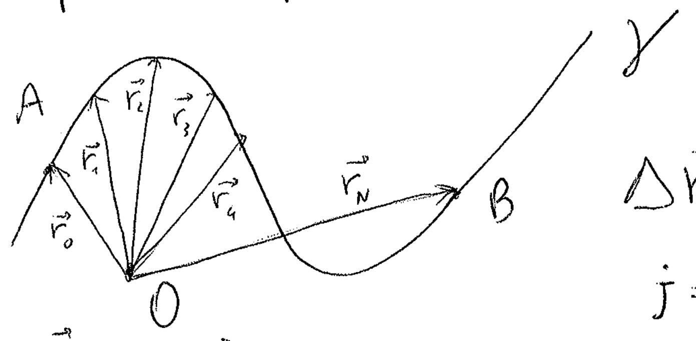
Una volta che il corpo si è fermato affinché esso riparta

$F_a \le F_a^{max} = \mu_s mg\cos\alpha = \mu_s N$

$\Downarrow$

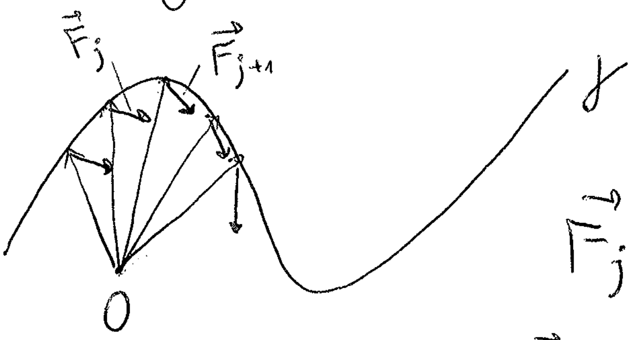
$mg\,\mathrm{sen}\,\alpha \le \mu_s mg\cos\alpha \Rightarrow \boxed{\mathrm{tg}\,\alpha \le \mu_s}$

Definizione Generale



$$\Delta \vec{r}_j = \vec{r}_{j+1} - \vec{r}_j$$

$j = 0, 1, \ldots\ldots, N$



$$\vec{F}_j = \vec{F}(\vec{r}_j)$$

$\Delta \vec{r}_j$ tende a confondersi con l'arco della curva corrispondente per $N \to +\infty$ (rendendo più fitta la partizione)

Su un tratto $\Delta \vec{r}_{j+1}$ il lavoro è $\boxed{\Delta W_j = F_j \cdot \Delta \vec{r}_{j+1}}$

$\Rightarrow \vec{F}(\vec{r}_j) \cdot (\vec{r}_{j+1} - \vec{r}_j)$

$$W_{AB} \simeq \sum_j \Delta W_j = \sum_j \vec{F}(\vec{r}_j) \Delta \vec{r}_{j+1}$$

Lavoro come INTEGRALE DI LINEA

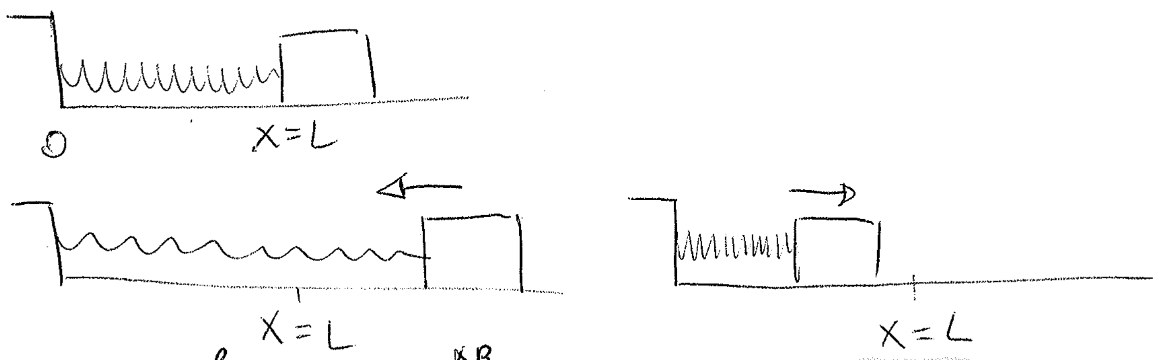
$$W_{AB} = \int_{A\gamma}^{B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = ,$$

$$\left[\begin{aligned} d\vec{r} &= d(x(t)\hat{u}_x + y(t)\hat{u}_y + z(t)\hat{u}_z) = \\ &= \hat{u}_x dx + \hat{u}_y dy + \hat{u}_z dz = \\ &= \hat{u}_x V_x dt + \hat{u}_y V_y dt + \hat{u}_z V_z dt = \\ &= \vec{V}(t) dt \end{aligned} \right]$$

$$= \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}[\vec{r}(t)] \vec{V}(t) dt =$$

$$\int_{t_A}^{t_B} \left[F_x(x(t), y(t), z(t)) V_x(t) + F_y V_y(t) + F_z V_z(t) \right] dt$$

Teorema di conservazione dell'energia (Forza elastica)



$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \, d\vec{r} = \int_{x_A}^{x_B} F(x)\, \hat{u}_x \cdot \underbrace{\hat{u}_x \, dx}_{d\vec{r}} = \int_{x_A}^{x_B} F(x)\, dx =$$

$$= \left[-\frac{k}{2}(x-L)^2 \right]_{x_A}^{x_B} = -\frac{k}{2}\left[(x_B-L)^2 - (x_A-L)^2 \right] =$$

$$= -\left(U(x_B) - U(x_A) \right)$$

ENERGIA POTENZIALE

$$\boxed{U(x) = +\frac{k}{2}(x-L)^2}$$

$$\Delta E_K = E_{KB} - E_{KA} = W_{AB} = -\left(U(x_B) - U(x_A) \right)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{E_{KB} + U_B = E_{KA} + U_A}$$

TEOREMA DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

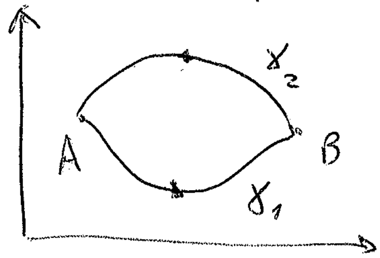
Teorema

Notazione $\left[\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2, \ \oint \text{ INTEGRALE CIRCUITO CHIUSO} \right]$

1) Se $\vec{F}$ è conservativo allora $W_\Gamma = \oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$, $\forall \Gamma$

2) Se $\vec{F}$ è tale che $\oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$, $\forall \Gamma$ allora è conservativo

1 $\oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{A\gamma_1}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{B\gamma_2}^{A} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -(E_{P_B} - E_{P_A}) - (E_{P_A} - E_{P_B}) = 0$



2 $0 = \oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{A\gamma_1}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{B\gamma_2}^{A} \vec{F} d\vec{r}$, $\forall \Gamma$

$W_{BA} = \int_{A\gamma_1}^{B} \vec{F} d\vec{r} = \int_{A\gamma_2}^{B} \vec{F} dr$

Questo prova che il lavoro è sempre lo stesso ed è indipendente dal cammino. Il lavoro dipende solo dagli estremi di integrazione!

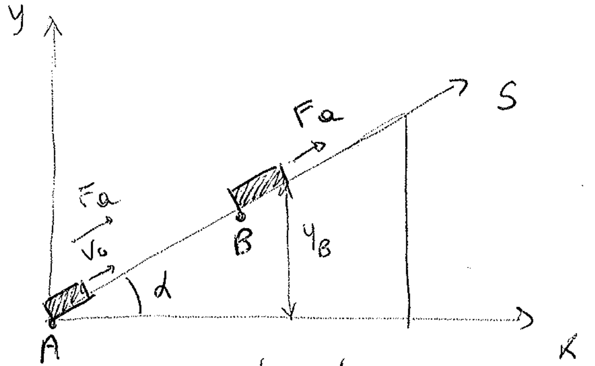
Se $\vec{F}$ è conservativo allora $W_{AB} = \begin{cases} E_{KB} - E_{KA} \\ -(E_{P_B} - E_{P_A}) \end{cases}$

$\Downarrow$

$E_{KB} - E_{KA} = -(E_{PB} - E_{PA})$

Teorema di Conservazione dell'energia meccanica $\longrightarrow \boxed{E_{KA} + E_{PA} = E_{KB} + E_{PB}}$

Ritornando all'applicazione (4) del capitolo sulla descrizione delle forze fondamentali, per trovare la posiz. finale di un corpo lanciato dal basso lungo un piano inclinato, si può usare il teorema di conserv. dell'energia.



Quanta strada percorre?

$V_A = \vec{V}_0$, $V_B = 0$

$$\underbrace{\frac{m}{2}\cancel{V_B^2}}_{0} - \frac{m}{2}\underbrace{V_A^2}_{V_0^2} = -(mg\,y_B - \cancel{mg\,y_A}) + \int_{S_A}^{S_B} (-\mu_d\, m g \cos\alpha)\, ds \qquad y_A = 0$$

$\vec{N}$

$(\vec{F}_{a_{dim}} = cost.)$

$$-\frac{m}{2}V_0^2 = -mg\,Y_B + \mu_d\, mg\cos\alpha\,(s_B - \cancel{s_A})$$

poiché $S_B \cdot sen\,\alpha = y_B$

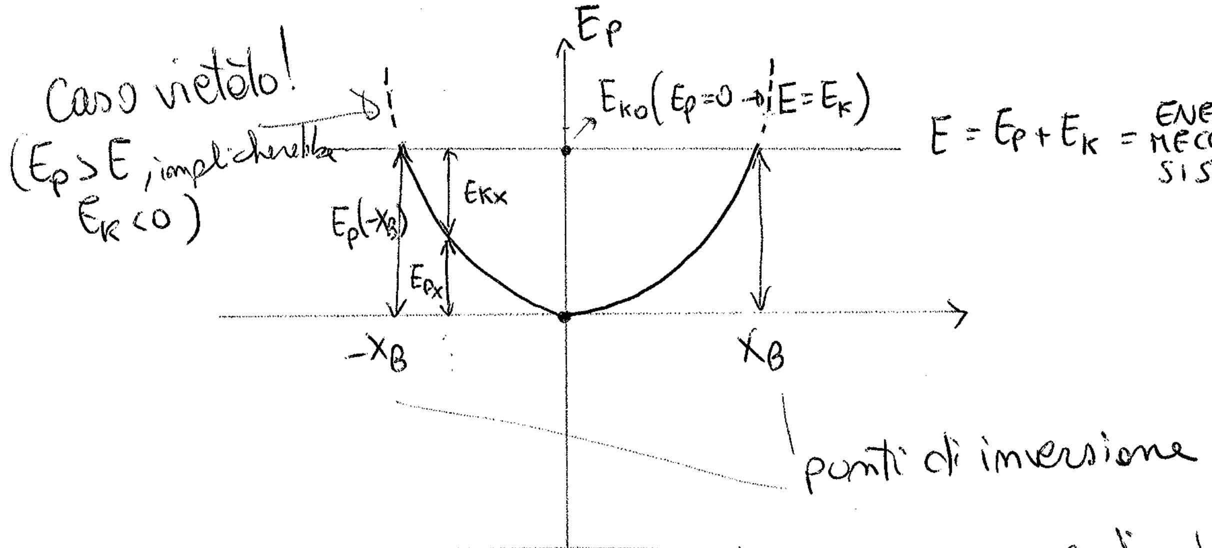
$$-\frac{\cancel{m}}{2}v_0^2 = -\cancel{m}g\,s \cdot sen\,\alpha - \mu_d\,\cancel{m}g\cos\alpha \cdot s$$

$$\boxed{S = \frac{V_0^2}{2g(sen\,\alpha + \mu\cos\alpha)}}$$ → Stesso risultato ottenuto con lo studio delle forze.

GRAFICI Dell'Energia Potenziale

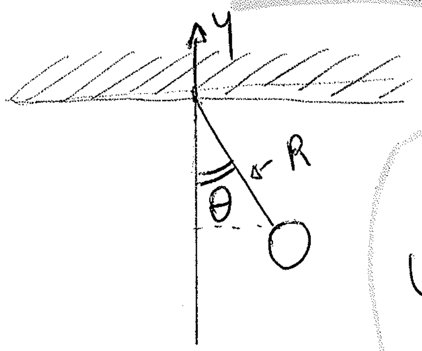
Grafico di E_p per l'oscillatore armonico

$E_p(x) = \frac{K}{2}x^2$ (poichè $F(x) = -Kx$) → Forza elastica



$E = E_p + E_K$ = ENERGIA MECCANICA DEL SISTEMA

Grafico di E_p per il pendolo



$E_{py} = mgy + c = -mgR\cos\theta$

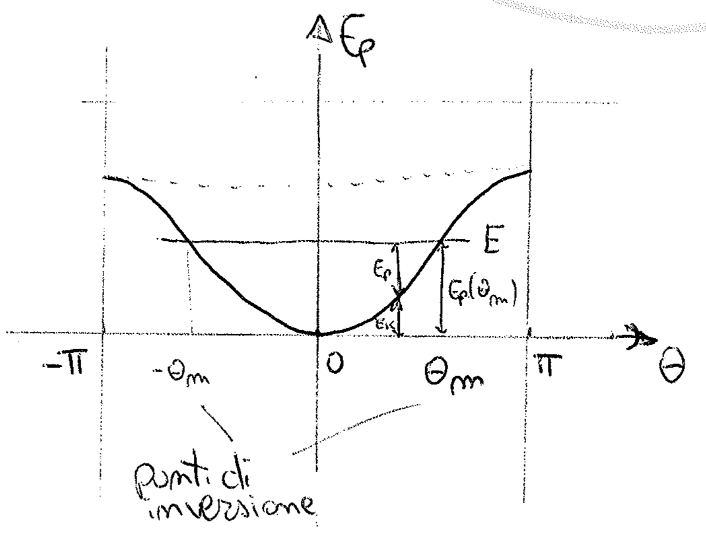
spesso la si pone 0 → è al di sotto dell'origine

Un'altra scelta possibile di c è

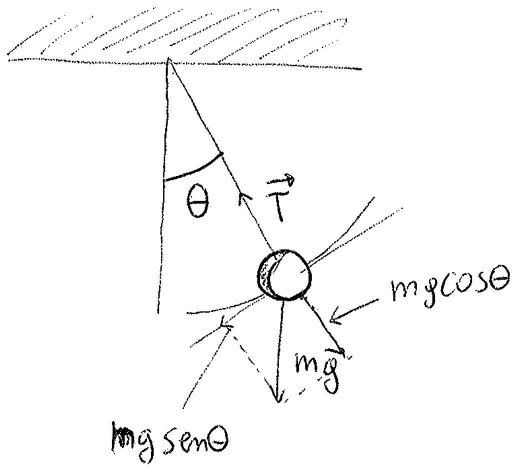
$c = mgR$

$\Downarrow$

$E_{py} = E_p(\theta) = mgR(1-\cos\theta)$



$E = E_K + E_p(\theta) = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mgR(1-\cos\theta)$



$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{T} + m\vec{g} = m(\vec{a}_T + \vec{a}_N) \quad \begin{cases} \vec{a}_T = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T \\ \vec{a}_N = \frac{v^2}{R}\hat{u}_N \end{cases}$$

lungo $\hat{u}_N$) $\vec{T} = T\hat{u}_N$

$$\vec{T} - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{R} \qquad \boxed{T = m\frac{v^2}{R} + mg\cos\theta}$$

Reazione VINCOLARE

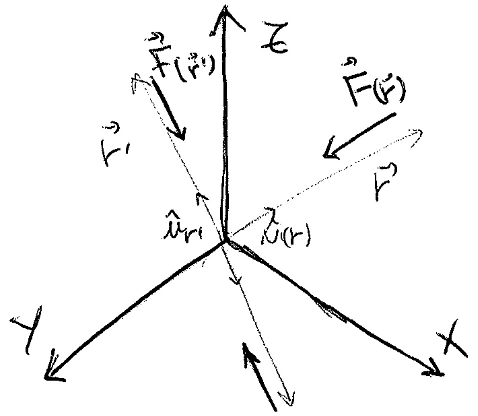
lungo $\hat{u}_T$) $-mg\,\text{sen}\,\theta = m\frac{dv}{dt}$

$$v = R\theta' \Rightarrow -mg\,\text{sen}\,\theta = mR\theta'' \qquad \boxed{\theta'' + \frac{g}{R}\text{sen}\,\theta = 0}$$

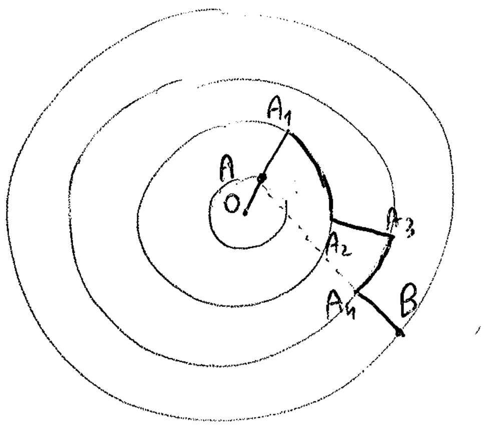
Equazione del pendolo ottenuta mediante la meccanica newtoniana

E_p di un campo di forza centrale

$$\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\,\hat{u}_r \qquad F(r) = -\frac{K}{r^2} \qquad \hat{u}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$



CAMPO DI FORZA CENTRALE



$$W_{AB} = \int_{A}^{B} \vec{F}(\vec{r})\,d\vec{r} = \int_{A}^{A_1} \vec{F}(r)\,d\vec{r} + \int_{A_1}^{A_2} \vec{F}\,d\vec{r} + \int_{A_2}^{A_3} \vec{F}\,d\vec{r} + \int_{A_3}^{A_4} \vec{F}\,d\vec{r} + \int_{A_4}^{B} \vec{F}\,d\vec{r}$$

nei tratti A_1A_2 e A_3A_4: $d\vec{r}$ // sfera, $\hat{u}_r \perp$ sfera

$\vec{F}\,d\vec{r} = -\frac{K}{r^2}\,\hat{u}_r \cdot d\vec{r}$, ma poiché $\hat{u}_r \perp d\vec{r}$ allora $\hat{u}_r \cdot d\vec{r} = 0$

$$W_{AB} = \int_{A}^{A_1} -\frac{K}{r^2}\,\hat{u}_r(\hat{u}_r\,dr) + \int_{A_2}^{A_3} -\frac{K}{r^2}\,\hat{u}_r(\hat{u}_r\,dr) + \int_{A_4}^{B} -\frac{K}{r^2}\,\hat{u}_r(\hat{u}_r\,dr) =$$

$$= \int_{r_A}^{r_{A_1}} -\frac{K}{r^2}\,dr + \int_{r_{A_2}}^{r_{A_3}} -\frac{K}{r^2}\,dr + \int_{r_{A_4}}^{r_B} -\frac{K}{r^2}\,dr \overset{(r_{A_1} = r_{A_2},\ r_{A_3} = r_{A_4})}{=} \int_{r_A}^{r_B} -\frac{K}{r^2}\,dr =$$

$$= -\left[E_p(r_B) - E_p(r_A)\right]$$

$$\boxed{E_p(\vec{r}) = -\frac{K}{r} + c}$$

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla E_p = -\frac{K}{r^2}\,\hat{u}_r}$$

Si definiscono TRASFORMAZIONI GALILEIANE quelle per cui i sistemi S ed S' sono soggetti ad un moto relativo uniforme $\Rightarrow (\vec{v}_{O'} = \text{cost.} \Rightarrow \vec{a}_{O'} = 0)$

$$\begin{cases} \vec{F}' = \vec{F} - \vec{R} \\ \vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_{O'} \\ \vec{a}' = \vec{a} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{R}(t) = \vec{R}(0) + \vec{v}_0 t} : \text{legge oraria.}$$

Le trasformazioni galileiane sono quelle che collegano i cosiddetti sistemi: inerziali.

Le leggi fisiche sono le stesse per tutti gli osservatori che descrivono fenomeni da sistemi di riferimento inerziali cioè da sistemi collegati da una trasformazione di Galileo. Le leggi della fisica sono invarianti per trasformazioni galileiane.

1) Legge di inerzia:

Per un corpo isolato $\vec{v} = \text{cost.}$

$S \rightarrow S'$: $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_{O'}$

2) II legge della dinamica

S: $\vec{F} = m\vec{a}$

S': $\vec{F} = m\vec{a}' = m\vec{a}$, $\vec{a} = \vec{a}'$

3) Conserv. della quantità di moto

$\vec{F}_{12} = \vec{F}_{21}$, $\vec{P}_1(t) + \vec{P}_2(t) = 0$

S: $\vec{P}_1(t) + \vec{P}_2(t) = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$

S': $m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' = m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}_{O'}) + m_2(\vec{v}_2 - \vec{v}_{O'}) =$ cost. !

$\vec{P}_S$ $= (m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) - (m_1 + m_2)\vec{v}_{O'}$

Teorema delle velocità relative

$$\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}'(t)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

$$\vec{V} = \vec{V}_{O'} + \frac{d}{dt}\left(x'\hat{u}_x + y'\hat{u}_y + z'\hat{u}_z\right)$$

i versori vanno derivati, in quanto funzioni del tempo

$$\vec{V} = \vec{V}_{O'} + \underbrace{\frac{dx'}{dt}\hat{u}_x + \frac{dy'}{dt}\hat{u}_y + \frac{dz'}{dt}\hat{u}_z} + x'\frac{d\hat{u}_x}{dt} + y'\frac{d\hat{u}_y}{dt} + z'\frac{d\hat{u}_z}{dt}$$

$$\vec{V} = \vec{V}_{O'} + \vec{V}' + x'\vec{\omega}\wedge\hat{u}_x + y'\vec{\omega}\wedge\hat{u}_y + z'\vec{\omega}\wedge\hat{u}_z$$

$$\vec{V} = \vec{V}_{O'} + \vec{V}' + \underbrace{\vec{\omega}\wedge\left(x'\hat{u}_x + y'\hat{u}_y + z'\hat{u}_z\right)}$$

$$\vec{V} = \vec{V}_{O'} + \vec{V}' + \vec{\omega}\wedge\vec{r}'$$

$$\boxed{\vec{V}' = \vec{V} - \vec{V}_{O'} - \vec{\omega}\wedge\vec{r}'}$$

Teorema delle accelerazioni relative

$$\vec{V} = \vec{V}_{O'} + \vec{V}' + \vec{\omega}\wedge\vec{r}'$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{V}_{O'}}{dt} + \frac{d(\vec{\omega}\wedge\vec{r}')}{dt} + \frac{d\vec{V}'}{dt}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{O'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{r}' + \vec{\omega}\wedge\frac{d\vec{r}'}{dt} + \frac{dV'}{dt}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{O'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{r}' + \vec{\omega}\wedge(\vec{V}' + \vec{\omega}\wedge\vec{r}') + \vec{a}' + \vec{\omega}\wedge\vec{V}'$$

dalla precedente dimostrazione

per analogia, visto che $\frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{V}' + \vec{\omega}\wedge\vec{r}'$

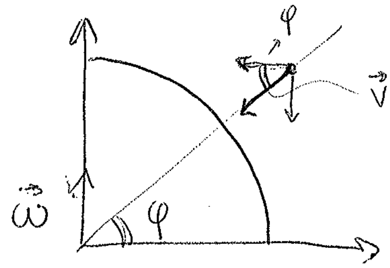
$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{O'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{r}' + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega} + \vec{r}') + 2\vec{\omega}\wedge\vec{V}'}$$

acceleraz. di trascinamento

acceleraz. di Coriolis

acceleraz. centrifuga

Caduta dei gravi verso est



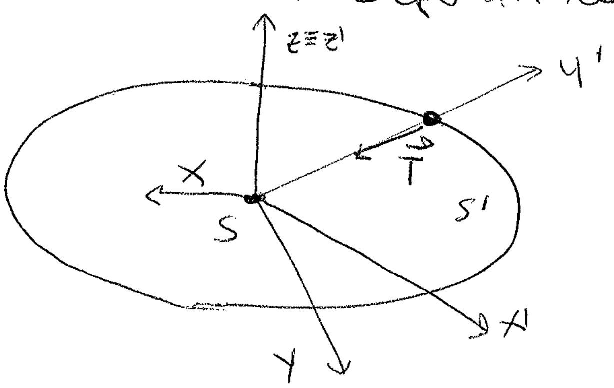
$$\vec{a}' = \underbrace{\vec{a}}_{\vec{g}} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') - 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'$$

$$-2\vec{\omega} \wedge \vec{v}' = -2\omega \hat{u}_z' \wedge (-\vec{v}' \cos\varphi \, \hat{u}_x) = +2\omega v \hat{u}_y$$

entra nel quaderno

Il moto si sposta verso est rispetto alla traiettoria del grave.

FORZA CENTRIFUGA su un corpo in rotazione con vel. ang ω



$$\begin{cases} S: \quad m\vec{a} = \vec{T} \\ S': \quad \vec{a}' = \vec{a} - 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}' - \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') \end{cases}$$

$$m\vec{a}' = \vec{T} - \cancel{2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'} + m\omega^2 \vec{r}'$$

$\vec{v}' = 0$ in quanto m è ferma rispetto a y'

$$\boxed{m\vec{a}' = \vec{T} + m\omega^2 \vec{r}'}$$

Termine che dimostra lo spostamento di un corpo verso l'esterno della curva.

N.B.

Poiché per la geometria $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

$$\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = \cancel{\vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r})} - \vec{r}(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) = -\omega^2 r'$$

perché $\vec{\omega} \perp \vec{r}$

Teorema del momento angolare

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge (m\vec{v})$$

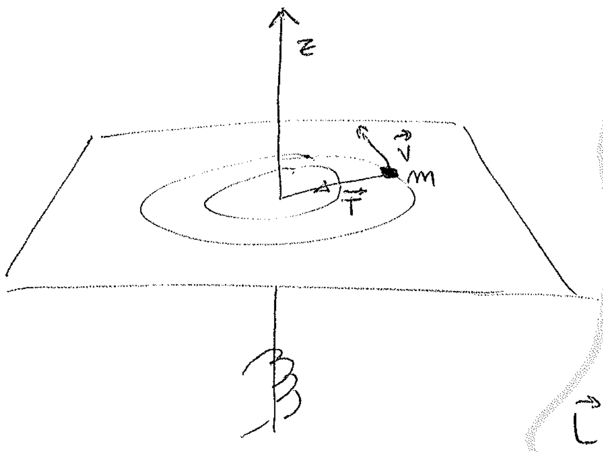
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \wedge (m\vec{v})\right) = m\left(\cancel{\frac{dr}{dt} \wedge \vec{v}} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt}\right) =$$

$$= m\vec{r} \wedge \vec{a} = \vec{r} \wedge m\vec{a} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{M}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}}$$

Se: $\vec{F} = 0$ o $\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F} = 0$
allora $\vec{L}$ è COSTANTE.

1° esempio



m è trattenuto dal filo

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{T} = 0$$ perché sono antiparalleli

$\downarrow$

$$\vec{L} = \text{cost.} = m\vec{r} \wedge \vec{v} = mrv\hat{u}_z =$$

perché sono ortogonali

$$= mr^2\omega\hat{u}_z$$

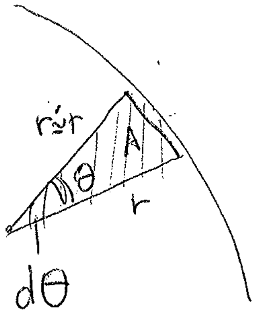
Se tiro piano piano il filo verso il basso r si riduce, ma poiché $\vec{L}$ è costante allora

$$\vec{L} = mrv\hat{u}_z = mr'v'\hat{u}_z$$

$$rv = r'v'$$

$$\boxed{v' = v\frac{r}{r'}}$$

$\vec{L} = m\vec{r} \wedge \vec{v} = m r^2 \theta' \hat{u}_z$



In un tempo dt il raggio vettore $\vec{r}$ sposta l'area infinitesima tratteggiata in figura, approssimabile a un triangolo di base $r\theta'$ e altezza r, e quindi

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{2m}}$$

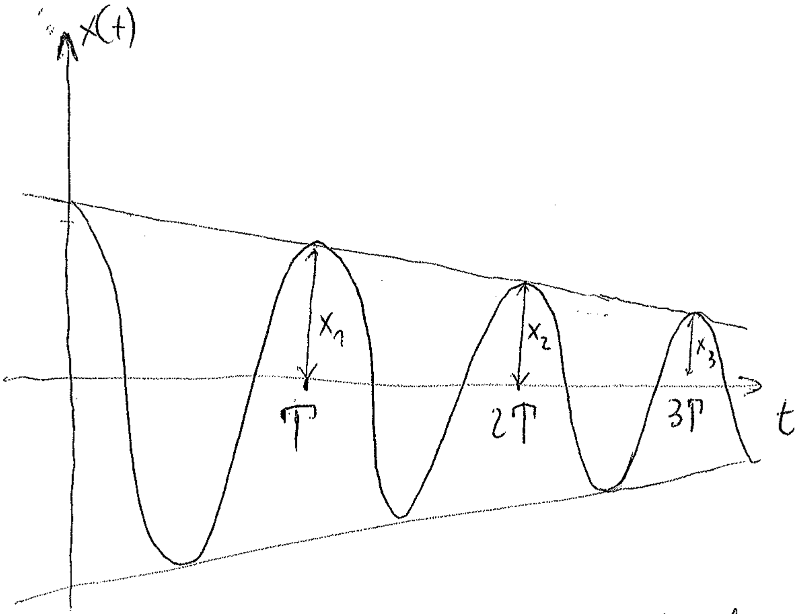
velocità AREALE

Questa legge esprime matematicamente la II legge di Keplero.

- La traiettoria di un punto che si muove in un campo di forze centrali giace in un piano fisso passante per il centro ed è percorsa in modo che la velocità areale rimanga costante.

Se $L = cost \Rightarrow \frac{dA}{dt} = cost.$

$\frac{A}{T} = \frac{L}{2m} \Rightarrow \boxed{T = \frac{2m}{L} A}$ Tempo impiegato a percorrere A.



$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

Oscillatore armonico smorzato da una forza viscosa

$$m a = \underbrace{-Kx}_{F_{el}} \underbrace{- \lambda v}_{F_{vis}}$$

$$m x'' = -Kx - \lambda x'$$

$$m x'' + \lambda x' + Kx = 0$$

$$\boxed{x'' + \frac{\lambda}{m} x' + \frac{K}{m} x = 0}$$ → eq. differenziale dell'oscillatore armonico smorzato

$\sqrt{\frac{K}{m}} = \omega_0$

$\frac{2\pi}{\omega_0} = T_0$

$\gamma = \frac{\lambda}{2m}$

Abbiamo già visto che l'attrito viscoso porta ad uno smorzamento esponenziale per cui $x \propto e^{\alpha t}$

sostituendo nell'eq:

Se $x = e^{\alpha t} \Rightarrow e^{\alpha t}(\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2) = 0$

$$\boxed{\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2 = 0}$$

eq. caratteristica

$$\boxed{\alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = -\gamma \pm R}$$

3° CASO: SMORZAMENTO DEBOLE $\rightarrow \gamma < \omega_0$

Se $\gamma < \omega_0$ allora l'argomento di R e' minore di 0

$$\alpha_1 = -\gamma + i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\gamma + i\omega$$

$$\alpha_2 = -\gamma - i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\gamma - i\omega$$ pulsazione

$$x(t) = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t} = Ae^{-\gamma t + i\omega t} + Be^{-\gamma t - i\omega t} =$$

$$= e^{-\gamma t}\left(Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}\right), \quad A, B \in \mathbb{C}$$

Poniamo $B = A^*$, ovvero il suo complesso coniugato

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(Ae^{i\omega t} + A^* e^{-i\omega t}\right)$$

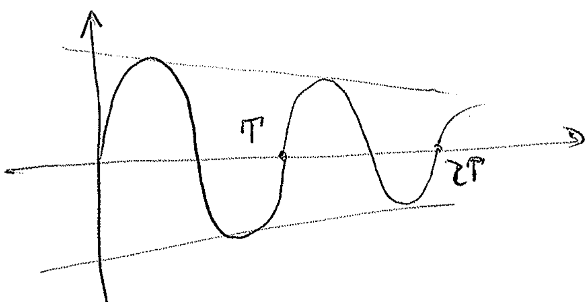
poiché $A = \frac{1}{2}A_0 e^{i\phi}$, $|A| = \frac{A_0}{2}$

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(\frac{A_0}{2}e^{i\phi}e^{i\omega t} + \frac{A_0}{2}e^{-i\phi}e^{-i\omega t}\right) =$$

$$x(t) = \frac{A_0}{2}e^{-\gamma t}\left(e^{i(\omega t + \phi)} + e^{-i(\omega t + \phi)}\right) =$$

$$\boxed{x(t) = A_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi)}$$ poiché $e^{i\beta} = \cos\beta + i\,\text{sen}\,\beta$

Se $\varphi = \frac{\pi}{2} \rightarrow x(t) = A_0 e^{-\gamma t}\,\text{sen}(\omega t)$



Che relazione c'è tra T e T_0?

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{\omega_0^2}}} \rightarrow T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{\omega_0^2}}} \rightarrow \underline{T > T_0}$$

Da questo sistema emerge che:

$$\boxed{\operatorname{tg}\phi = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}}$$

$$R^2 = R^2\cos^2\phi + R^2\operatorname{sen}^2\phi = (\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{R = \sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)+4\gamma^2\omega^2}}$$

Noti R e ϕ trovo A

dalla (3) $A\left((\omega_0^2-\omega^2)\cos\phi - 2\gamma\omega\operatorname{sen}\phi\right) = \frac{F_0}{m}$

$$A\left[(\omega_0^2-\omega^2)\frac{(\omega_0^2-\omega^2)}{R} - 2\gamma\omega\frac{(-2\gamma\omega)}{R}\right] = \frac{F_0}{m}$$

$$\frac{A}{R}\left[\underbrace{(\omega_0^2-\omega^2)^2-4\gamma^2\omega^2}_{R^2}\right] = \frac{F_0}{m}$$

$$AR = \frac{F_0}{m} \Rightarrow \boxed{A = \frac{F_0}{mR} = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)+4\gamma\omega^2}}}$$

Conclusione $\Rightarrow$ $X(t) = x(t) + x_{sp}(t) \simeq A\operatorname{sen}(\omega t+\phi)$

RISONANZA IN ENERGIA

$$P(t) = \frac{dE_K}{dt} = V(t)\,F(t) = \frac{dX}{dt}\,F(t) =$$

$$= A\omega \cos(\omega t + \phi)\,\frac{F_0}{m}\,\text{sen}(\omega t) =$$

$$= \frac{A\omega F_0}{m}\left(\cos(\omega t)\cos\phi\,\text{sen}(\omega t) - \text{sen}^2(\omega t)\,\text{sen}\,\phi\right)$$

$$P(t) = \frac{A\omega F_0}{m}\left(\frac{1}{2}\,\text{sen}(2\omega t)\cos\phi - \text{sen}\,\phi\,\text{sen}^2\omega t\right)$$

$$P(t)_{media} = \langle P(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\,dt = \frac{A\omega F_0}{mT}\int_0^T\left(\frac{\cos\phi}{2}\,\text{sen}(2\omega t) - \text{sen}\,\phi\,\text{sen}^2(\omega t)\right)dt$$

$$= -\frac{A\omega F_0}{2m}\,\text{sen}\,\phi$$

Traccia della dim.

$$\int_0^T \text{sen}(2\omega t)\,dt = \left(-\frac{1}{2\omega}\cos(2\omega t)\right)_0^T =$$

$$= -\frac{1}{2\omega}\left(\cos(2\omega T) - 1\right) = 0$$

$$\int_0^T \text{sen}^2(\omega t)\,dt = \int_0^T \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2\omega t)\right)dt = \frac{1}{2}T$$

cost. portata fuori dal II integr.

$$\langle P(t)\rangle = \frac{A\omega F_0}{m\cancel{T}}\cdot\frac{1}{2}\cancel{T}\,(-\text{sen}\,\phi) = -\frac{A\omega F_0}{2m}\,\text{sen}\,\phi$$

accelerazione di CM : $\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{\Sigma_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}}{\Sigma_i m_i} = \frac{\Sigma_i m_i \vec{a}_i}{\Sigma_i m_i} = \frac{\Sigma_i m_i \vec{a}_i}{M}$

Se il sistema di riferimento è inerziale:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i = F_i^{(E)} + F_i^{(I)}$$

$$\Downarrow$$

$$m\vec{a}_{CM} = \Sigma_i m_i \vec{a}_i = \Sigma_i (\vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)}) = \vec{R}^{(E)} + \cancel{\vec{R}^{(I)}} = \vec{R}^{(E)}$$

<u>Teorema del centro di massa</u>: il centro di massa si muove come un punto materiale in cui sia concentrata tutta la massa del sistema e a cui sia applicata la risultante delle forze esterne.

Inoltre:

$$\boxed{\vec{R}^{(E)} = m\vec{a}_{CM} = m\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}_{CM}) = \frac{dP}{dt}}$$

la risultante delle forze esterne è uguale alla derivata rispetto al tempo della quantità di moto totale del sistema. Se $\vec{R}^{(E)} = 0 \Rightarrow \vec{a}_{CM} = 0 \Rightarrow \vec{v}_{CM} = \text{cost}$.

N.B. $\vec{r}_{CM}, \vec{v}_{CM}, \vec{a}_{CM}$ sono le "medie pesate" sulle masse dei raggi vettori, quindi forniscono informazioni di proprietà medie.

SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL CENTRO DI MASSA

Nello studio della dinamica dei sistemi di punti materiali è molto utile considerare il sistema di riferimento del centro di massa, dove l'origine è il CM e gli assi hanno le stesse direzione del sistema di riferimento inerziale. In generale il sistema di riferimento del CM NON è un sistema inerziale.

$$\begin{cases} \vec{r}_i = \vec{r}_i\,' + \vec{r}_{CM} \\ \vec{v}_i = \vec{v}_i\,' + \vec{v}_{CM} \end{cases}$$

IMPORTANTE

Avendo assunto il centro di massa come riferimento, evidentemente r'_{CM} e v'_{CM} sono nulli! Quindi:

$$\boxed{\sum_i m_i \vec{r}_i\,' = 0 \quad , \quad \sum_i m_i \vec{v}_i\,' = 0}$$

Essendo un sistema non inerziale agisce anche la forza d'inerzia $m_i \vec{a}_T = -m_i \vec{a}_{CM}$, essendo l'acceler. di trascinamento pari a quella di CM.

(Poiché per le leggi dei moti relativi $\vec{F} - m\vec{a}_T - m\vec{a}_c = m\vec{a}\,'$)

$$\Rightarrow \vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)} - m_i \vec{a}_{CM} = m_i \vec{a}_i\,'$$

sommando tutti i punti

poiché $\vec{R}^{(E)} = m\vec{a}_{CM}$

$$\Rightarrow \vec{R}^{(E)} - \sum_i m_i \vec{a}_{CM} = \vec{R}^{(E)} - m\vec{a}_{CM} = 0$$

$$\vec{R}^{(E)} - m\vec{a}_{CM} = \boxed{\sum_i m_i \vec{a}_i\,' = 0}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 154

TEOREMI DI KÖNIG

I TEOREMA PER IL MOMENTO ANGOLARE

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{L} = \sum_i (\vec{r}_i{}' + \vec{r}_{CM}) \times m_i (\vec{v}_i{}' + \vec{v}_{CM}) =$$

$$\vec{L} = \underbrace{\sum_i \vec{r}_i{}' \times m_i \vec{v}_i{}'}_{\vec{L}'} + \sum_i \vec{r}_i{}' \times m_i \vec{v}_{CM} + \sum_i \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}_i{}' + \underbrace{\sum_i \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}_{CM}}_{\vec{r}_{CM} \times m \vec{v}_{CM} = \vec{r}_{CM} \times \vec{P}}$$

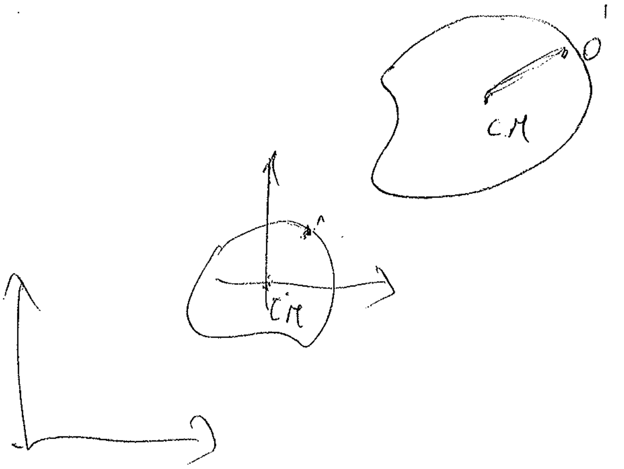
sono nulli perché

$$\begin{cases} (\sum_i \vec{r}_i{}' m_i) \times \vec{v}_{CM} = 0 \\ (\sum_i \vec{v}_i{}' m_i) \times \vec{r}_{CM} = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\vec{L} = \vec{L}' + \vec{r}_{CM} \times m \vec{v}_{CM} = \vec{L}' + \vec{L}_{CM}}$$

Il momento angolare del sistema si può scrivere come somma del momento angolare dovuto al moto del centro di massa ($\vec{L}_{CM}$) e di quello del sistema rispetto ad esso ($\vec{L}'$)



$$I_{O'} = I_{CM} + M \, \overline{CO'}^2$$

TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA

Calcoliamo il lavoro associato al moto di un sistema di punti materiali. Come già visto nel caso di un solo punto, il lavoro per uno spostamento $d\vec{r}_i$ di un punto

$$dW_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \vec{F}_i^{(E)} \cdot d\vec{r}_i + \vec{F}_i^{(I)} \cdot d\vec{r}_i = dW_i^{(E)} + dW_i^{(I)}$$

Integrando lungo le traiettorie $\quad W = W^{(E)} + W^{(I)}$

N.B. Questa volta il contributo delle forze interne non scompare, infatti la struttura di $dW_i^{(I)}$ implica che il lavoro delle forze interne è legato un cambiamento delle distanze mutue tra i vari punti. Se queste non variano allora abbiamo un corpo rigido ($dW_i^{(I)} = 0$)

$$dW_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = m_i v_i \, dv_i$$

$\downarrow$ integrando e sommando $\downarrow$

$$W = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i,B}^2 - \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i,A}^2 = E_{K,B} - E_{K,A}$$

Se le forze sono CONSERVATIVE:

$$W^{(I)} = -\Delta E_p^{(I)}, \quad W^{(E)} = -\Delta E_p^{(E)}$$

$$W = \Delta E_K = -\Delta E_p \Rightarrow (E_K + E_p)_A = (E_K + E_p)_B$$

conserv. energia meccanica

URTO TOTALMENTE ANELASTICO

I due punti restano attaccati dopo l'urto formando un unico corpo puntiforme di massa $m_1 + m_2$. Siano $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ le velocità prima dell'urto e $\vec{v}'$ la velocità di m_1+m_2 dopo l'urto

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1+m_2)\vec{v}' = (m_1+m_2)\vec{v}_{CM}$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}$$

Subito dopo l'urto i punti si muovono con la velocità che aveva CM.

$$E_{K,in} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = E'_K + \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_{CM}^2$$

URTO ELASTICO

Si definisce come urto elastico un urto durante il quale si conserva l'energia cinetica del sistema. Questo comporta che le forze interne siano conservative. I due corpi reali che si urtano subiscono, durante l'urto, delle deformazioni elastiche, riprendendo la configurazione iniziale.

$$\vec{P}_{in} = \vec{P}_{fin} \quad , \quad E_{K,in} = E_{K,fin}$$

L'urto più generale è tridimensionale e abbiamo 6 incognite (le componenti delle velocità dopo l'urto) ma quattro equazioni (tre dalla conservazione di $\vec{P}$ e una da E_K). Anche nel piano abbiamo quattro incognite. Quindi per risolvere problemi di urto elastico in dimensione superiore a 2 servono ulteriori informazioni.

URTO ANELASTICO

Questo è il caso più comune: i punti ritornano separati dopo l'urto, dove si conserva la quantità di moto ma non l'energia cinetica, infatti una certa frazione di E_k' viene assorbita.

Ciò è determinato dal fatto che l'impulso della forza di interazione di una particella con l'altra risulta, nella fase di deformazione dei corpi, superiore a quello nella fase di ritorno dei corpi alla config. iniz.

Per chiarire meglio il processo consideriamolo nel sistema di riferimento del centro di massa. Il punto con quantità di moto $p'_{1,in}$ nell'istante precedente all'urto vede, per effetto della deformazione, ridursi progressivamente a zero la sua quantità di moto fino ad arrestarsi. Nella fase successiva, sempre durante l'urto, il punto riacquista quantità di moto fino al valore $p'_{1,fin}$.

Essendo $P'=0$:

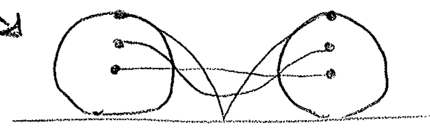
$$\boxed{\frac{p'_{1,fin}}{p'_{1,in}} = \frac{v'_{1fin}}{v'_{1in}} = \frac{p'_{2fin}}{p'_{2in}} = \frac{v'_{2fin}}{v'_{2in}}}$$

L'E_k del sistema delle due particelle dopo l'urto:

$$\boxed{E'_{k,fin} = \frac{1}{2} m_1 v'^2_{1fin} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2fin}}$$

CORPO RIGIDO

È un insieme di punti fissi l'uno rispetto all'altro, un sistema in cui le distanze tra i punti non possono variare. I vari punti possono comunque descrivere traiettorie diverse, basti pensare a una ruota che rotola.



Moto di un corpo rigido

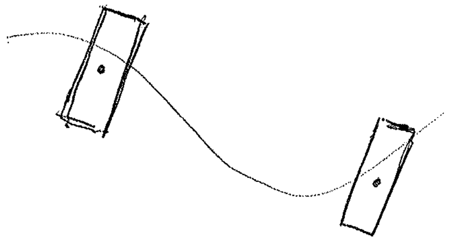
I due tipi generali di moti sono quelli di ROTAZIONE e TRASLAZIONE.

Nel moto di $\boxed{\text{TRASLAZIONE}}$ tutti i punti descrivono traiettorie uguali percorse con una velocità $\vec{v}$ che può variare in modulo, direzione e verso. Ovviamente $\vec{v} = \vec{v}_{CM}$

$\Downarrow$

Non c'è movimento rispetto a CM:

$\vec{L}' = 0 \;,\; E'_k = 0$



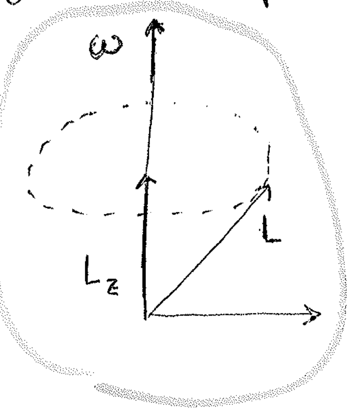
L'equazione del moto di CM è: $\vec{R} = M\vec{a}_{CM}$ (M → Massa totale)

Il momento angolare: $\vec{L} = \vec{L}_{CM} = \vec{r}_{CM} \times m\vec{v}_{CM} = \vec{r}_{CM} \times \vec{P}$

Invece, la componente ortogonale di L, $L_\perp$, varia in direzione, può variare in modulo e dipende dal polo.

$$L_{i\perp} = L_i \cos\theta_i = m r_i R_i \omega \cos\theta_i$$

Se l'asse di rotazione coincide con l'asse di simmetria di un corpo allora: $\vec{L} = I_z \vec{\omega}$, $L = L_z$, $L_\perp = 0$



Un moto come quello di $\vec{L}$ che ruota attorno all'asse di rotazione è detto di PRECESSIONE.
In questo caso $\vec{L}$ è costante ma varia in direzione.

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{L}$$

Nel caso in cui $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z\vec{\omega}) = I_z \frac{d\omega}{dt} = I_z \vec{\alpha}$$

$$\boxed{\vec{M} = I_z \vec{\alpha}}$$ Equazione del moto di rotazione

$$\boxed{\alpha = \frac{M}{I_z}} \Rightarrow \boxed{\omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \alpha \, dt} \Rightarrow \boxed{\theta(t) = \theta_0(t) + \int_0^t \omega \, dt}$$

LEGGI ORARIE

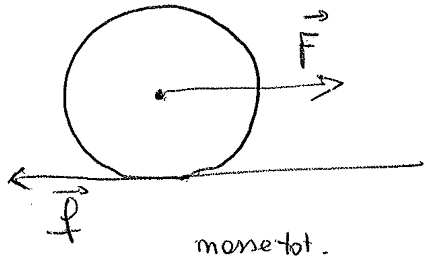
Quando $\vec{L} \not\parallel \vec{\omega}$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z \omega) = I_z \frac{d\omega}{dt} = I_z \alpha$$

$$\boxed{M_z = I_z \alpha}$$ senza le "frecce" dei vettori

MOTO MISTO (ROTOTRASLAZIONE)



$V_{CM} \neq R|\omega|$

$\alpha \neq -\frac{a_{CM}}{R}$

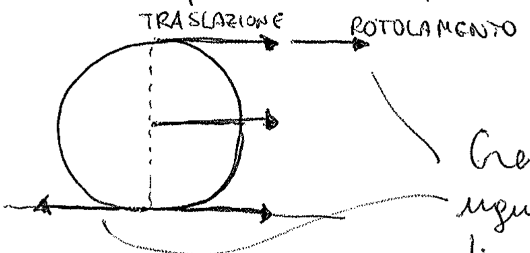
massa tot.

$$\begin{cases} M\vec{a}_{CM} = F - f \\ I\alpha = -Rf \end{cases} \quad , \; f = \mu_d N = \mu_d mg$$

$\Downarrow$

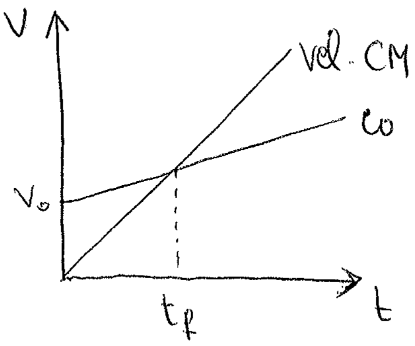
$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{F-f}{2m} t^2 \\ \theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t - \frac{Rf}{2I} t^2 \end{cases}$$

Per semplicità $\theta_0 = 0$, $x_0 = 0$, $\omega_0 = 0$, $V_0 \neq 0$ → Come un aereo che accelera mentre atterra.



Crescono col tempo fino a diventare uguali e quindi arrivando ad un moto di puro rotolamento.

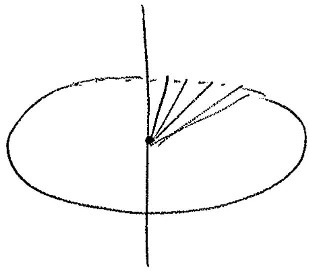
$$\begin{cases} x(t) = V_0 t + \frac{F-f}{2m} t^2 \\ \theta(t) = -\frac{Rf}{2I} t^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} V(t) = V_0 + \frac{F-f}{m} t \\ \omega(t) = -\frac{Rf}{I} t \end{cases}$$



Dopo t_f si avrà moto di puro rotolamento

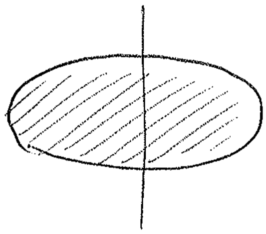
MOMENTI D'INERZIA PER ALCUNI CORPI

ANELLO



$$I = \sum_j m_j R_j^2 \quad , \quad \boxed{I = mR^2}$$

DISCO



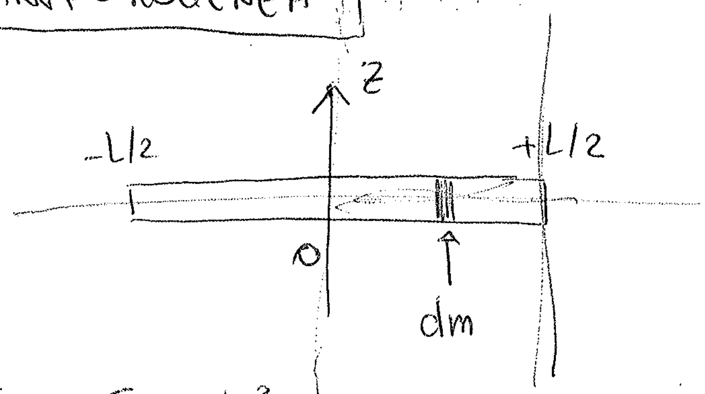
$$I = \int_0^R dI = \dots = \boxed{\frac{1}{2}MR^2}$$

$$\rho = \frac{M}{\pi R^2}$$

$$I_z = \int_0^R \rho r^2 2\pi r \, dr = 2\pi\rho \int_0^R r^3 dr =$$

$$= \frac{\pi \rho R^4}{2} = \frac{1}{2}MR^2$$

SBARRA OMOGENEA



$$I_z = \sum_j m_j R_j^2$$

$$I_z = \int_{-L/2}^{+L/2} x^2 dm \rightarrow \text{poichè } dm = \rho dx \rightarrow \int_{-L/2}^{+L/2} x^2 \rho dx =$$

$$= \rho \int_{-L/2}^{+L/2} x^2 dx = \frac{\rho}{3} x^3 \Big|_{-L/2}^{+L/2} = \frac{\rho}{3}\left(\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \left(-\frac{L^3}{8}\right)\right) = \frac{2}{3 \times 8} L^3 =$$

$$= \frac{1}{12}\rho L^3 \rightarrow \text{poichè } \rho = \frac{M}{L} \rightarrow \boxed{I_z = \frac{M}{12} L^2}$$