NUMERO: 943

DATA: 28/04/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Antonellini

MATERIA: Analisi Matematica I + Eserc. + temi d'esame

Prof. Tabacco

ANALISI MATE 1

100 ore 10 crediti (1 credito = 25 ore)

100 ore frontali

C. Canuto, A. Tabacco, Analisi Matematica 1, Springer, 3ª ed. 2008

ESAME

test risposta multipla + prova scritta + esame orale eventuale

max 24 (si può arrivare a 30)

solo di garanzia

(tutti i corsi hanno 4 appelli

gennaio - febbr. 2 appelli

(28/29/30 + 31)

test esame

6/2 : chimica

a settembre se non si hanno 28 crediti (escluso inglese e materia a scelta)

corso a scelta!

(4° piano sopra la biblio)

aula 6D V 11.30 - 14.30 dal lune al venerdì

(x chiedere info su esercizi ai tutori)

45% sono al secondo anno

1 Capitolo alla settimana

anita.tabacco@polito.it

esercitatore: Giuseppe Addamo

mail: giuseppe.addamo@polito.it

oggetto (nelle mail): analisi 1

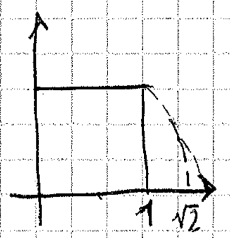
non allegati possibilmente

ca2012 2013.forumfree.net

in $\mathbb{N}$ non sottraggo

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$ non posso dividere

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ (insiemi complessi)



problema della completezza della retta dei numeri (devo aggiungere gli irrazionali)

$\mathbb{R}$ soddisfa l'ipotesi del CONTINUO

dal pto di vista concettuale gli insiemi N, Z, Q hanno gli stessi numeri, lo stesso numero di elementi

n \ m	0	1	2	3	4
1	$0/1$	$1/1$	$2/1$	$3/1$	$4/1$
2	$0/2$	$1/2$	$2/2$		
3	$0/3$	$1/3$	$2/3$		
4					

N, Z, Q non hanno gli stessi elementi di $\mathbb{R}$

• × • in 2 num. raz. c'è almeno 1 reale

× • × in 2 " reali " " 1 raz.

nella pratica usiamo solo razionali

Q ha la proprietà di essere denso dentro $\mathbb{R}$ (qualunque reale lo posso approssimare ad un raz.)

10}

DIFFERENZA

$A \setminus B$ (stanno in A e non in B)

$A \setminus B = \{x \in X : x \in A \wedge x \notin B\}$

Nota: $A \setminus B \neq B \setminus A$

$A \boxed{\triangle} B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

differenza simmetrica → è l'unione delle diff.

vale propr. comm.

PROPRIETÀ

1) PROP. BOOLEANE

$A \cap \complement A = \emptyset \quad , \quad A \cup \complement A = X$

2) PROP. COMM, ASS., DISTR.

$A \cap B = B \cap A \qquad A \cup B = B \cup A$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \qquad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \qquad (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cup C)$

3) leggi di De Morgan

$\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B \qquad \complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$

$A \cap B$

$A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

Teorema

T. non è altro che questo connettivo logico

[$p \Rightarrow q$ corrisponde di fatto a un Teorema
(implica)

$p \Leftrightarrow q$ p implica q e q
(biimplica) $p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p$

p e q sono logicamente equivalenti (deve valere in entrambe le vie)

p è cond. necess. e suff. affinché valga q e viceversa

$\neg q \Rightarrow \neg p$ Contronominale (si equivalgono)

$p \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$ DIM. per ASSURDO

$p \wedge \neg q \Rightarrow r \wedge \neg r$ (il che è impossibile)

QUANTIFICATORI

$\forall$ Q. universale ("per ogni")

$\exists$ " esistenziale ("esiste")

$\exists!$ ("esiste ed è unico")

$\forall x \in A : p(x)$ (es: tutti gli studenti sono italiani)

- $\neg(\forall x \in A : p(x)) \Longleftrightarrow \exists x \in A : \neg p(x)$

la neg. di q. universale è un q. esistenziale e viceversa

- $\neg(\exists x \in A : p(x)) \Longleftrightarrow \forall x \in A : \neg p(x)$

VALORE ASSOLUTO

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$|x| \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

$|x| = 0 \iff x = 0$

es. $|x| < 1 \iff x \in (-1; 1)$

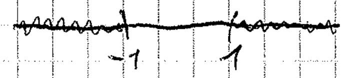
$-1 < x < 1$

$|x| > 1$

$x \geq 0 \qquad x > 1$

$x < 0 \qquad -x > 1$

$x < -1$

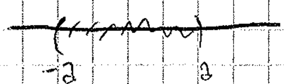


$x > 1 \quad \vee \quad x < -1$

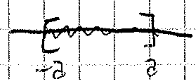
$x \in (1; +\infty) \cup (-\infty; -1)$

$a \in \mathbb{R}$

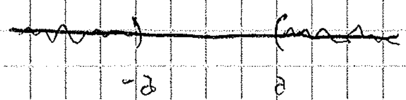
$$|x| < a = \begin{cases} a \leq 0 & \nexists x \in \mathbb{R} \\ a > 0 & (-a; a) \end{cases}$$



$$|x| \leq a = \begin{cases} a < 0, & \nexists x \in \mathbb{R} \\ a \geq 0 & [-a; a] \end{cases}$$

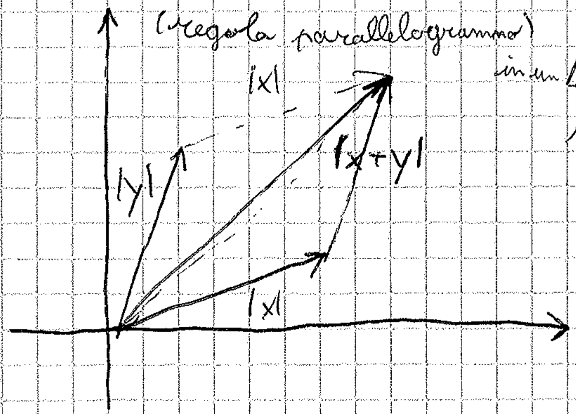


$$|x| > a = \begin{cases} a < 0 & \forall x \in \mathbb{R} \\ a = 0 & \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ a > 0 & (-\infty; -a) \cup (a; +\infty) \end{cases}$$



$|x| \geq a$

$|x+y| \leq |x| + |y|$ DIS. TRIANGOLARE



in un Δ il modulo di $x+y$ è minore della somma degli altri due

$|xy| = |x||y|$

$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ con $y \neq 0$

$||x| - |y|| \leq |x-y| \leq |x| + |y|$

Dimostriamo questa disuguaglianza studiando il segno di x e y

1) $x \geq 0 \quad \wedge \quad y \geq 0$

$|x-y| \leq |x-y| \leq x+y$

2) $x \leq 0 \quad \wedge \quad y \leq 0$

$|-x+y| \leq |x-y| \leq -x-y$

3) $x \geq 0 \quad \wedge \quad y \leq 0$

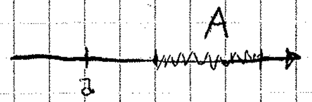
$|x+y| \leq |x-y| \leq x-y$

4) $x \leq 0 \quad \wedge \quad y \geq 0$

$|-x-y| \leq |x-y| \leq -x+y$

Def: A è inferiormente limitato se $\exists\, a \in \mathbb{R}$ tale che $a \leq x,\ \forall x \in A$

(graficamente abbiamo)

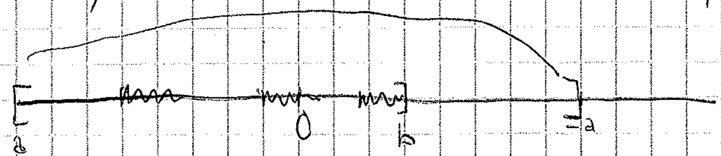


a si dice minorante di A

$A \subseteq [a; +\infty)$

Def: Se A è sia inferiormente sia superiormente limitato allora ~~si non~~ si dice <u>insieme limitato</u>

$\exists\, a, b \in \mathbb{R} : A \subseteq [a; b]$



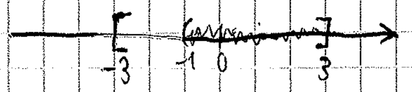
$\exists\, c > 0 : \forall x \in A$ si ha $|x| \leq c$

es: 1) $\mathbb{N}$ è limitato inferiormente

$\mathbb{N} \subseteq [0; +\infty)$

degli insiemi num. $\mathbb{N}$ è l'unico limitato

2) $A = (-1; 3]$ insieme limitato



$\forall x \in A : |x| \leq 3$ il c di prima

essere magg. e minoranti non implica appartenere all'insieme

Def: Sia A un insieme limitato superiormente.
Diremo che x_M è il MASSIMO di A se
$x_M \in A$ e $x \leq x_M$, $\forall x \in A$
(appartiene all'ins.) (è maggiorante dell'ins.)

DIM: dimostriamo l'unicità del MAX
x ASSURDO supponiamo ne esistano due distinti

$x_M = \max A$, $x'_M = \max A$

$[x_M \neq x'_M]$ $x'_M \in A$, $x \leq x'_M$, $\forall x \in A$
risulta assurdo

$x_M < x'_M$

$[x_M = \max A]$

se è minore di x'_M, appartenendo anche x'_M ad A, x_M non è più maggiorante

Def: Sia A un insieme limitato inferiormente
x_m è il MINIMO di A se
$x_m \in A$ e $x_m \leq x$, $\forall x \in A$

$[x_m = \min A]$ DIM: Dimostriamo l'unicità del MIN

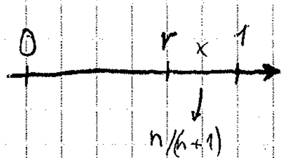
Supponiamo per assurdo che ne esistano due distinti
$x_m \neq x'_m$ $x_m = \min A$, $x'_m = \min A$

$x'_m \in A$, $x'_m \leq x$, $\forall x \in A$

$x'_m \leq x_m$] d'altronde se appartengono entrambi ad A e sono diversi, non possono essere entrambi minimi, poiché x_m non sarebbe più minorante es: $A = \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$

$0 \leq \frac{n}{n+1} < 1$ dimostriamo che $s = 1 = \sup A$ (cioè che 1 è estremo superiore)

DIM: 1) $\frac{n}{n+1} < 1$



2) fisso $0 < r < 1$

cerco n tale che $\frac{n}{n+1} > r$

$\frac{1}{r} > \frac{n+1}{n} \iff \frac{1}{r} > 1 + \frac{1}{n} \iff$

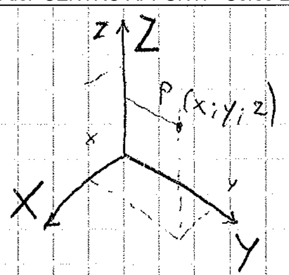
$\frac{1}{n} < \frac{1}{r} - 1 = \frac{1-r}{r}$ è pos. (r è pos. e compresa tra 0 e 1)

$n > \frac{r}{1-r}$ ~~se~~ trovo $\forall r$ almeno un numero naturale (molto grande) n^r che è magg. di $\frac{r}{1-r}$

riprovare coll' inf A

es: $X_1 = X_2 = X_3 = \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^3$



$\mathbb{R}^n$: spazio n-dimensionale

es: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0;+\infty) = \mathbb{R}^3 \times [0;+\infty)$

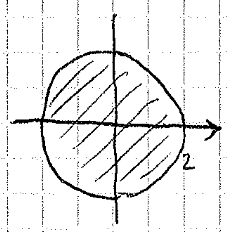
(x, y, z, t)

Def: Una <u>Relazione</u> è un sottoinsieme di un prodotto cartesiano

$\mathcal{R} \subseteq X \times Y$

es: $X = Y = \mathbb{R}$

$\mathcal{R} = \{(x;y) ; x^2 + y^2 \leq 4\}$

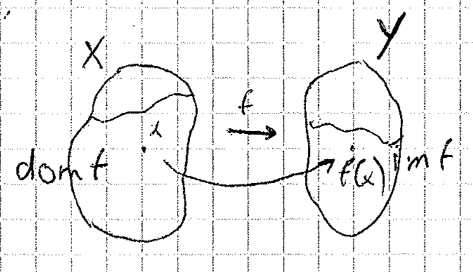


Def: Una FUNZIONE f è una Relazione in cui ogni elemento di X è in relazione con al più un elemento di Y

~~persone~~ hanno almeno un'immagine (?)

$f : X \to Y$

$x \mapsto f(x)$



$f : \text{dom } f \subseteq X \to Y$

$x \mapsto f(x) = y$ (immagine di x)

$\text{im } f = \{ y \in Y : \exists\, x \in \text{dom } f \wedge y = f(x) \} \subseteq Y$

$\{(x; f(x))\} \subseteq X \times Y$

$\Gamma(f)$ = grafico di f

lettere che si usano, dette variabili mute, non hanno importanza come nome; solitamente usiamo x e Y

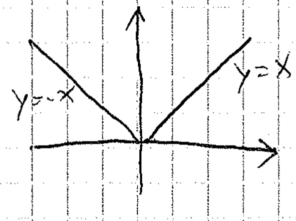
FUNZ. def. a TRATTI

$\inf f = \min f = 0$
$x_m = 0$

es. $y = f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

dom $f = \mathbb{R}$

im $f = [0; +\infty)$



es. $y = f(x) = \text{sgn}\, x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

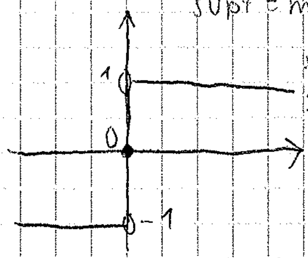
detta fz. segno

$\inf f = \min f = -1$
$\sup f = \max f = 1$

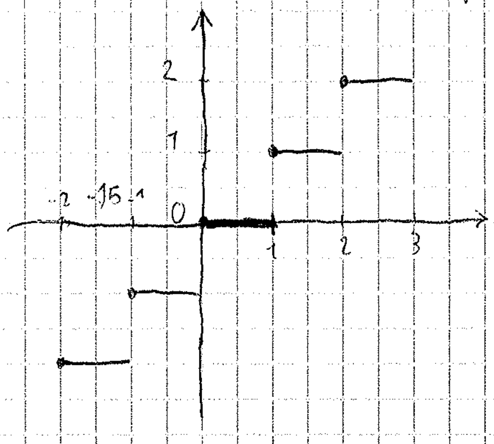
$x_M = x > 0$
$x_m = x < 0$

dom $f = \mathbb{R}$

im $f = \{-1; 0; 1\}$



es. $y = f(x) = [x]$ = il più grande intero $\leq x$ detto "parte intera di x"



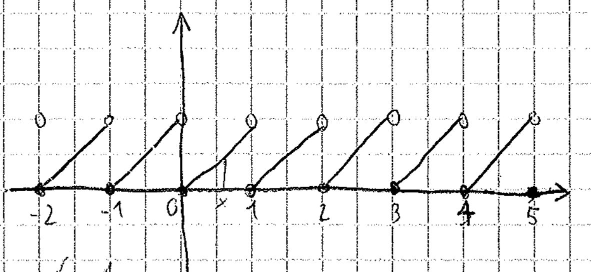
dom $f = \mathbb{R}$

im $f = \mathbb{Z}$

$[x] \leq x < [x] + 1 \qquad (1)$

es. $y = f(x) = \underbrace{M(x)}_{\text{funz. MANTISSA}} = x - [x] \geq 0$

$0 \leq M(x) < 1$ (deriva da (1) spostando opportunamente $[x]$)



dom $f = \mathbb{R}$

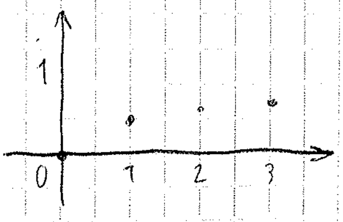
im $f = [0; 1)$

$\sup f = 1$

$\inf f = \min f = 0$

$x_m = z \qquad z \in \mathbb{Z}$

$a_n = \frac{n}{n+1}$



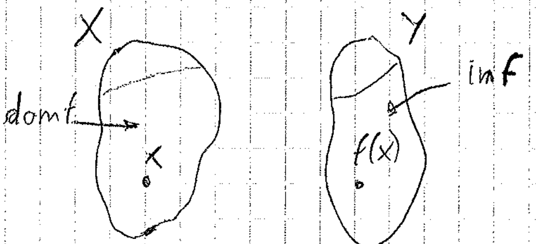
FUNZIONI in più VARIABILI

es: $f(x;y) = \sqrt{x^2+y^2}$

dom $f = \mathbb{R}^2$ im $f = [0;+\infty)$

$f(x;y) = (y;x)$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (quadridimensionale)



$A \subseteq X$, $f(A) = \{f(x);\ x \in A\} \subseteq$ im f

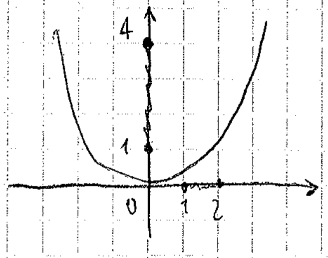
$y \in Y$, $f^{-1}(y) =$ controimmagine di y

gli y che hanno x

$f^{-1}(y) = \{x \in \text{dom} f:\ y = f(x)\}$

Oss: se parto da un y fuori da im$f$, avrò come controimmagine l'insieme vuoto

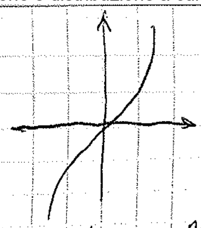
es: $y = f(x) = x^2$



$f([1;2]) = [1;4]$

$f^{-1}(1) = \{-1;1\}$

es: $y = x^3$



$A = [0; 2]$

$f: A \to \mathbb{R}$

funz. <u>ristretta</u> all'intervallo $[0; 2]$

$f(A) = [0; 8]$

FUNZ. INIETTIVE, SURIETTIVE, BIETTIVE

<u>Def</u>: $f: \text{dom} f \subseteq X \to Y$ si dice SURIETTIVA se $\text{im} f = Y$

es: $f: \mathbb{R} \to [0, +\infty)$

$x \mapsto x^2$

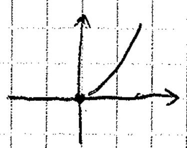
<u>Def</u>: f si dice INIETTIVA se:

$\forall x_1, x_2 \in \text{dom} f$, con $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

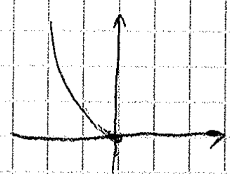
$\left(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \right)$

Oss: ogni fz. pari NON è iniettiva

$f: [0; +\infty) \to [0; +\infty)$



$f: (-\infty; 0] \to [0; +\infty)$



<u>Def</u>: f si dice BIETTIVA se è sia SURIETTIVA che INIETTIVA

~~Def.~~ FUNZ. MONOTÒNE

Def.: $f: \text{dom } f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- si dice CRESCENTE in I intervallo $\subseteq \text{dom } f$,
  se $\forall x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

- si dice STRETTAMENTE CRESCENTE in I intervallo $\subseteq \text{dom} f$,
  se $\forall x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

- si dice DECRESCENTE
  $\cancel{f(x_1) \geq f(x_2)}$
  $f(x_1) \geq f(x_2)$

- si dice STRETTAMENTE DECRESCENTE
  $f(x_1) > f(x_2)$

funz. segno è MONOTONA CRESCENTE in $\mathbb{R}$
" DECRESCENTE in $(0,+\infty)$ e $(-\infty,0)$

Prop.: f STRETT. monotòna su I $\Rightarrow$ f iniettiva su I

DIM: f strett. decrescente

$$\forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 < x_2 \\ \text{oppure} \\ x_2 < x_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x_1) > f(x_2) \\ f(x_2) > f(x_1) \end{cases} \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

$f^{-1} = g : \quad (0; +\infty) \to \mathbb{R}$

FUNZ. GONIOMETRICHE

$p>0$: FUNZ. PERIODICA

$f(x) = f(x+p) \qquad \forall x \in \text{dom} f$

$\quad = f(x+Kp) \qquad \forall K \in \mathbb{Z}$

FUNZ. SENO

$y = f(x) = \text{sen}\, x \qquad -1 \leq \sin x \leq 1$

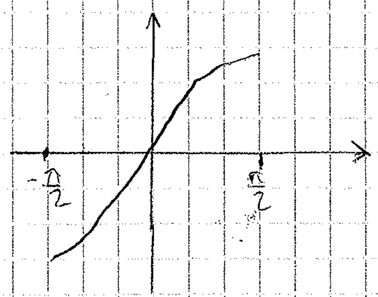
$|\sin x| \leq 1$

$f : \mathbb{R} \to [-1; 1]$ (in questo modo è solo SURIETTIVA)

per renderla INIETTIVA, restringiamo la funz. in maniera opportuna

noi potremmo prendere ~~qualsiasi~~ infinite scelte di intervallo, ma per prendere l'arcoseno consideriamo intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Ricordiamo che non possiamo esplicitare l'inversa, allora la chiamiamo arcoseno

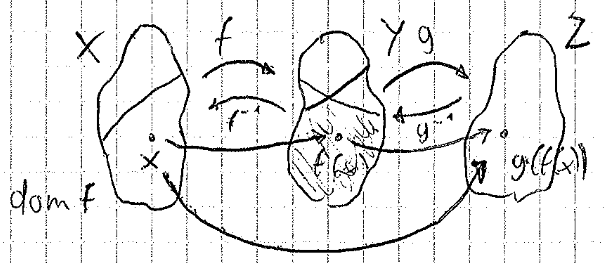


$f|_{[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]} : \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \to [-1; 1]$

$g(x) = f^{-1}(x) = \arcsin x$

$g : [-1; 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

COMPOSIZIONE di FUNZIONE



$g \circ f$ (prima applico la f, poi la g)

partiamo da x e arrivo a $f(x)$, che deve stare anche nel dominio di g; per trovare questi valori, facciamo:

$f^{-1}(\text{im} f \cap \text{dom}\, g) = \text{dom}(g \circ f)$

$g(\text{im} f \cap \text{dom}\, g) = \text{im}(g \circ f)$

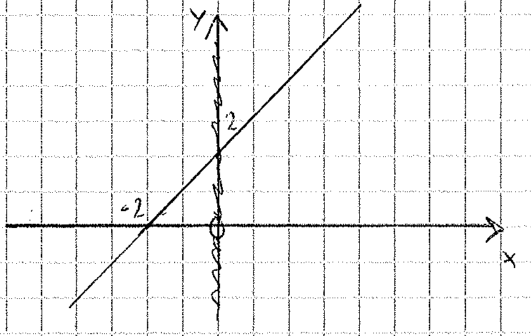
es: $f(x) = 2 + x$ $\qquad g(x) = \frac{1}{x}$

$g \circ f(x) = g(x+2) = \frac{1}{x+2}$

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\text{im} f \cap \text{dom}\, g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

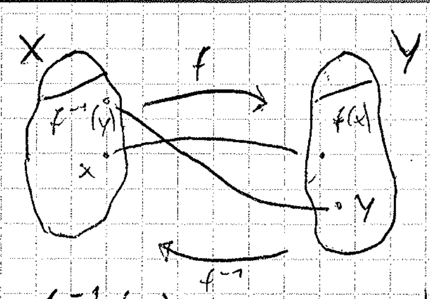
$f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$



[N.B.: In generale, $g \circ f \neq f \circ g$ $\longrightarrow$ la COMPOSIZIONE NON è COMMUTATIVA

es: $f \circ g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + 2$

es:



$f \circ f^{-1}(y) = y$ | $f^{-1} \circ f(x) = x$

$f \circ f^{-1} : \text{im} f \to \text{im} f$ | $f^{-1} \circ f : \text{dom} f \to \text{dom} f$

id_Y identità insieme Y | id_X identità insieme X

Oss: hanno la stessa forma ma hanno domini diversi, dunque sono due fz. diverse

es: Vediamo un'applicazione interessante alla fz. esponenziale

$f(x) = a^x$, $f^{-1}(x) = \log_a x$

$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(a^x) = x = \log_a a^x$

$\text{dom}\,(f^{-1} \circ f) = \mathbb{R}$

$f \circ f^{-1}(x) = f(\log_a x) = x = a^{\log_a x}$

$\text{dom}(f \circ f^{-1}) = (0; +\infty)$

es: $\arcsin(\sin x)$

$\sin(\arcsin x)$

2. $\sin(\arcsin x)$

$f(f^{-1}(x)) = f \circ f^{-1}(x)$ $\quad f$

$f(x) = \sin x$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 492

SUCCESSIONI

$\{a_n\}_{n \geq n_0}$ $\qquad a : \{n \geq n_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\qquad\qquad n \longmapsto a_n$

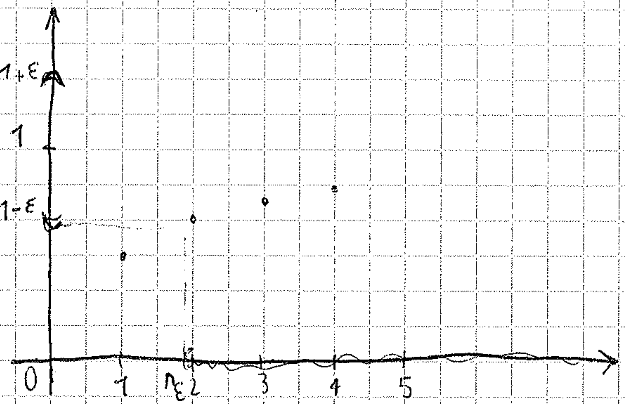
es: il mio scopo è capire al crescere di n, il comportamento di a_n

1) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

2) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ $\qquad \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$

3) $a_n = n^2$

vediamolo graficamente



fissato l'intorno $(1-\varepsilon; 1+\varepsilon)$; una volta che trovo un n_0 per cui a_n sta dentro all'intorno, tutti i successivi resteranno

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, n_\varepsilon \geq n_0 : \quad \forall n > n_\varepsilon \Rightarrow |a_n - 1| < \varepsilon$$

o anche, con la notazione degli intorni:

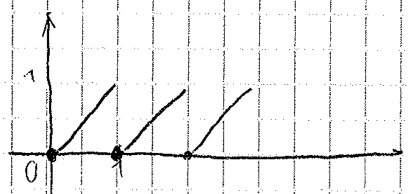
$$\forall I_\varepsilon(1), \quad \exists\, I_{n_\varepsilon}(+\infty) : \quad \forall n \in I_{n_\varepsilon}(+\infty) \Rightarrow a_n \in I_\varepsilon(1)$$

se ciò avviene, possiamo dire che: $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$

Oss: $a_n = (-1)^n$

$\nexists \lim_{n \to \infty} (-1)^n$ SUCC. INDETERMINATA

es: vediamo funzione mantissa



$a_n = M(n) = 0$

$a_n = M\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \quad n \neq 1$

$0 < \frac{1}{n} \leq 1$

$a_1 = 1$

$\lim_{n \to \infty} M\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

- Riassumendo:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \begin{cases} l \in \mathbb{R} & \{a_n\} \text{ converge} \\ \pm\infty & \{a_n\} \text{ diverge} \\ \nexists & \{a_n\} \text{ indeterminata} \end{cases}$$

Comunque io vada a prendere una successione monotona, essa non sarà indeterminato

Ricordiamo un attimo che: f crescente in I

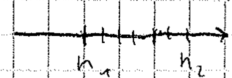
$\forall x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Def:

$\{a_n\}_{n \geq n_0}$ CRESCENTE

$\forall n_1, n_2$ con $n_1 < n_2 \Rightarrow a_{n_1} \leq n_2$

$\left[\underline{\underline{\forall n}} \geq n_0 \text{ si ha } a_n \leq a_{n+1} \right]$



2) $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$2 \leq a_n < 3$, $\{a_n\}$ strett. crescente

Teor (mi garantisce che)

$\Longrightarrow$ $\exists \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = l \in \mathbb{R}$

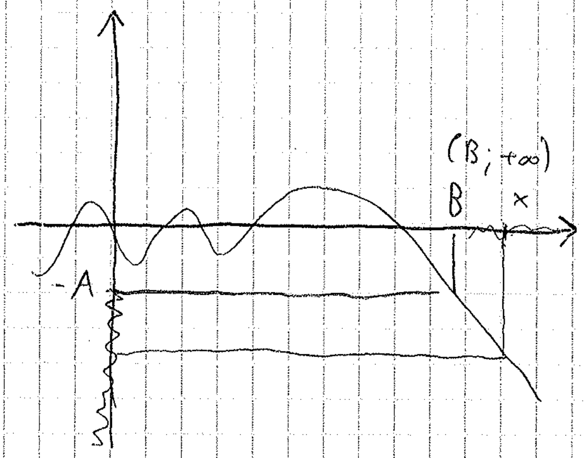
$l = e =$ numero di Nepero

lo definiamo sempre in maniera implicita

~~LIMITI e FUNZIONI~~

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\boxed{-\infty}$



$I_{-A}(-\infty) = (-\infty; -A)$

$\nexists \lim_{x \to +\infty} M(x)$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 5$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

scrivere

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 492

CONTINUITÀ

Def: f definita in $I(x_0)$

f è continua in x_0 se

* [per ogni intorno $I_\varepsilon(f(x_0))$, esiste un intorno $I_\delta(x_0)$ tale che]*

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \text{dom} f \wedge |x - x_0| < \delta$

(allora) $\Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$\Longleftrightarrow \forall I_\varepsilon(f(x_0)), \ \exists I_\delta(x_0) : \forall x \in \text{dom} f \wedge I_\delta(x_0)$

$\Longrightarrow f(x) \in I_\varepsilon(f(x_0))$

* [ogni x nel dominio di f e in $I_\delta(x_0)$ soddisfi $f(x)$ appartiene a $I_\varepsilon(f(x_0))$]

Def: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$

$\Longleftrightarrow \forall I_\varepsilon(l), \ \exists I_\delta(x_0) : \forall x \in \text{dom} f \wedge I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$

$\Longrightarrow f(x) \in I_\varepsilon(l)$

$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \text{dom} f \wedge 0 < |x - x_0| < \delta$

$\Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

es: $f(x) = \sin x \qquad x_0 \in \mathbb{R}$

Ricordiamo che:

- $|\sin t| \leq |t| \quad \forall x \in \mathbb{R}$ nel nostro caso $t = \frac{x - x_0}{2}$
- $\sin\alpha - \sin\beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

$$|f(x) - f(x_0)| = |\sin x - \sin x_0| =$$

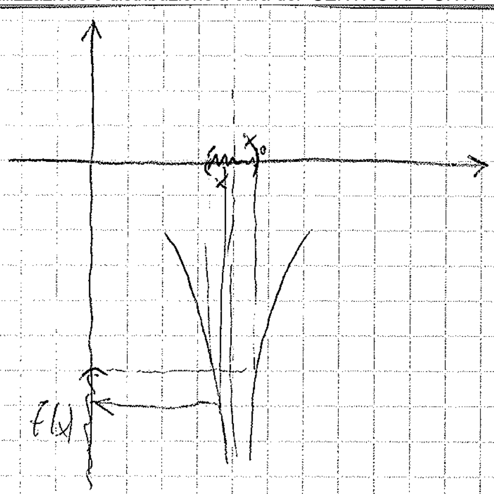
$$= 2 \left|\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right| \underbrace{\left|\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\right|}_{\text{è sempre } \leq 1; \text{ non ci serve e dunque}} \leq 2 \left|\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right| \leq \cancel{2} \left|\frac{x-x_0}{\cancel{2}}\right| = |x - x_0| < \varepsilon$$

rimango $\qquad \delta = \varepsilon$

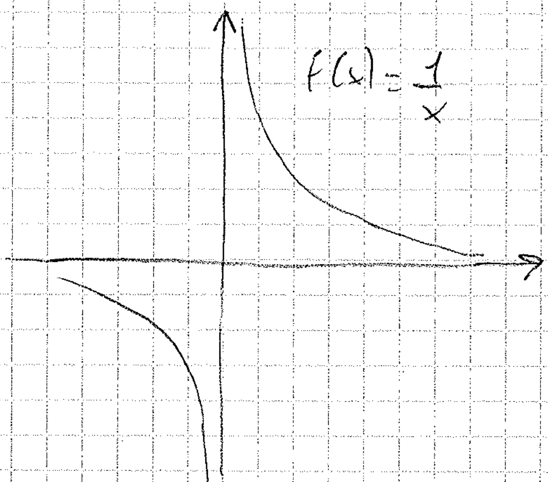
$$\left[\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0\right]$$

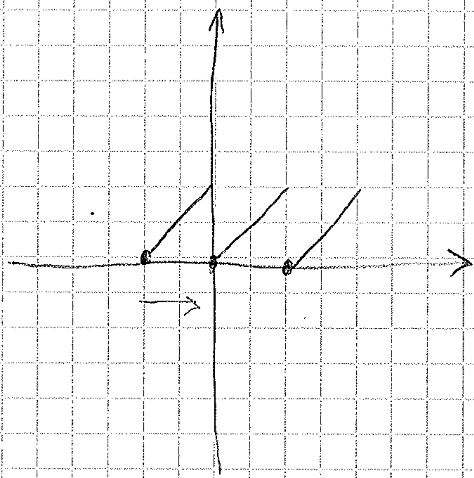
riprovarci col coseno

$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$



• CASI INTRIGANTI





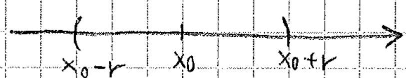
il limiti per $x_0 = 0$ in queste due fz. non esistono secondo la definizione

~~$\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$~~ fa schifo, è scorretto

Perciò andiamo a definire i cosiddetti limiti laterali

$I_r^+(x_0) = [x_0 ; x_0 + r)$

$I_r^-(x_0) = (x_0 - r ; x_0]$



(x è maggiore di x_0)

$x \in I_r^+(x_0) \qquad |x - x_0| = x - x_0 < r$

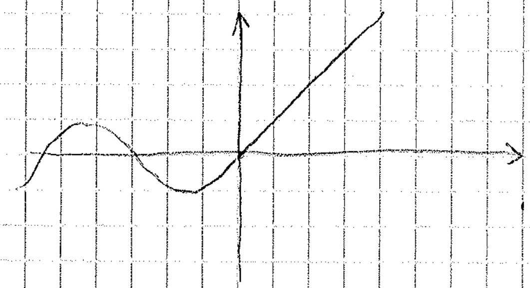
$x \in I_r^-(x_0) \qquad |x - x_0| = x_0 - x < r$

(x è minore di x_0)

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^\pm} f(x)$$

[PROP: $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$]

es. $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ \sin x, & x < 0 \end{cases}$ CONTINUA



$f(0) = 0$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x = 0$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \sin x = 0$

- PUNTI di DISCONTINUITÀ

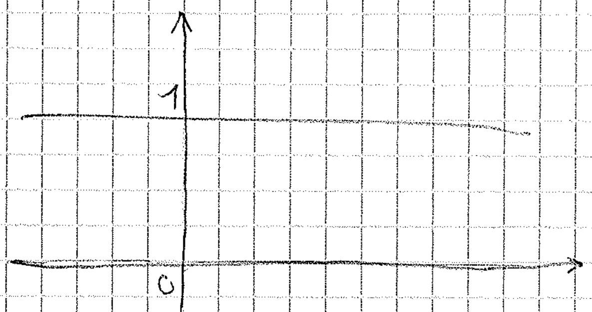
x_0 è un punto di discontinuità di PRIMA SPECIE (o DI SALTO) se:

$\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ con almeno uno dei due finito

SALTO in $x_0 = \lim_{x \to x_0^+} f(x) - \lim_{x \to x_0^-} f(x)$

es: FUNZ. di Dirichlet

$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$



Non posso mai calcolare né limite, né CONTINUITÀ

$\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$

f crescente in $I(x_0)$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

es: $\lim_{x \to +\infty} [x] = +\infty$ $\qquad \lim_{x \to -\infty} [x] = -\infty$

Oss: Al più, una fz. monotona ha discontinuità di tipo SALTO

TEOREMA (di UNICITÀ del LIMITE)

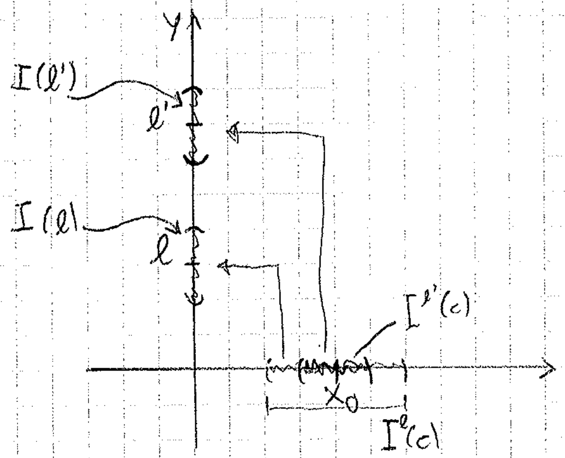
Se una funzione $f(x)$ ammette limite per $x \to c$, allora esso è unico.

DIM: per assurdo, supponiamo che:

l, l' possono essere finiti o NO

$$\lim_{x \to c} f(x) = l \neq l' = \lim_{x \to c} f(x)$$

$$l \neq l', \quad \exists\, I(l), I(l') \text{ tali che } I(l) \cap I(l') = \emptyset$$



(presi due punti disgiunti, è sempre possibile individuare 2 intorni disgiunti)

Dalla definizione di limite

$$\lim_{x \to c} f(x) = l \implies \exists\, I^{l}(c) : \forall x \in \operatorname{dom} f \cap I^{l}(c) \setminus \{c\} \implies$$

$$\implies f(x) \in I(l)$$

$$= l' \implies \exists\, I^{l'}(c) : \quad " \quad " \quad \implies$$

$$\implies f(x) \in I(l')$$

Ricordiamo un'altra proprietà degli intorni:

$$\tilde{I}(c) = I^{l}(c) \cap I^{l'}(c)$$

(preso un pto, l'intersezione dei 2 intorni coincide col più piccolo degli intorni)

$$\forall x \in \tilde{I}(c) \setminus \{c\} \implies f(x) \in I(l) \cap I(l') = \emptyset$$

[Ho trovato un pto appartenente all'insieme vuoto → ASSURDO, dunque il LIMITE è UNICO]

Caso PARTIC. di Algebra: CONTINUITÀ

f, g siano continue in x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to x_0} \left(f(x) \pm g(x)\right) = f(x_0) + g(x_0)$$

$\Longrightarrow$ $f \pm g$ è continua

$f \cdot g$ " "

f/g " " (purché $g(x_0) \neq 0$)

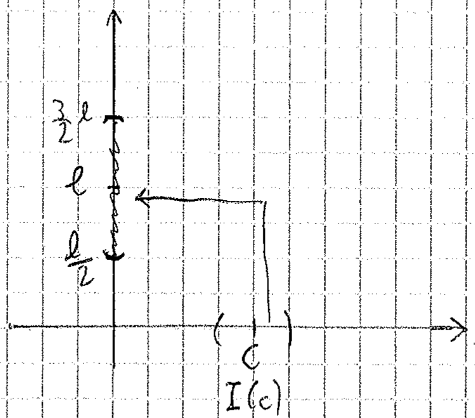
* il teor. succ. garantisce nell'intorno lo stesso segno di $g(x_0)$, e dunque sarà $\neq 0$

TEOREMA (di PERMANENZA del SEGNO)

Se $\lim_{x \to c} f(x) = l > 0 \quad (<0)$

$\Longrightarrow \exists\, I(c) \quad f(x) > 0 \ (<0) \ \forall x \in I(c) \setminus \{c\}$

DIM:



$l \in \mathbb{R}$

considero, ad esempio, $I(l) = \left(\frac{l}{2}; \frac{3}{2} l\right) \subset (0, +\infty)$

$\Longrightarrow \exists\, I(c) : \forall x \in \text{dom} f \cap I(c) \setminus \{c\}$

$\Longrightarrow f(x) \in \left(\frac{l}{2}; \frac{3}{2} l\right)$ (def. di limite)

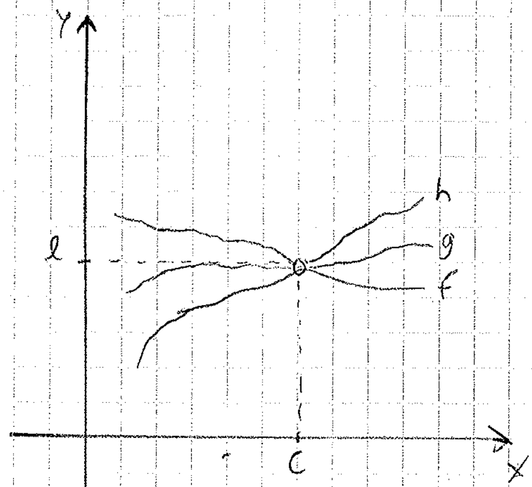
$\Longrightarrow f(x) > 0$

TEOREMA (2° Teorema del CONFRONTO) - CASO FINITO)

$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \quad \forall x \in I(c) \setminus \{c\}$

$\exists \lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x) = l \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow \lim_{x \to c} g(x) = l$



~~DIM~~:

$\lim_{x \to c} g(x) = l \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \ \exists \ I_g(c):$

$\forall x \in I(c) \cap I_g(c) \setminus \{c\} \Longrightarrow |g(x) - l| < \varepsilon$

(ho riscritto la tesi secondo la def. di lim) $l - \varepsilon < g(x) < l + \varepsilon$

DIM: fissato $\varepsilon > 0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \exists \ I_f(c) : \forall x \in I(c) \cap I_f(c) \setminus \{c\}$

$\Longrightarrow l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$

$\exists \ I_h(c) : \forall x \in I(c) \cap I_h(c) \setminus \{c\}$

$\Longrightarrow l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon$

Definisco $I_g(c) = I_f(c) \cap I_h(c)$

$\forall x \in I_g(c) \cap I(c) \setminus \{c\}$

COROLLARIO

Se f è limitata in $I(c) \setminus \{c\}$ $\left[\begin{array}{l} \exists M > 0 \\ |f(x)| \leq M \\ \forall x \in I(c) \setminus \{c\} \end{array}\right]$

$\lim_{x \to c} g(x) = 0$ (fz. INFINITESIMA: ha limite $= 0$)

$\Longrightarrow \lim_{x \to c} f(x)\, g(x) = 0$ (Una fz. limitata $\times$ fz. infinitesima ha limite $=$ a 0)

DIM:

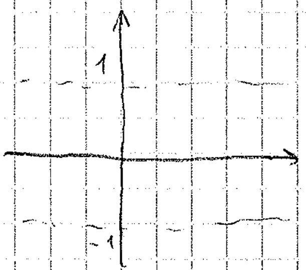
$\lim_{x \to c} g(x) = 0 \iff \lim_{x \to c} |g(x)| = 0$

DIGRESSIONE:
è invece vero che:

$\underbrace{\lim_{x \to c} g(x) = l \iff \lim_{x \to c} |g(x)| = |l|}$ NO

$\searrow$ è Vera solo da Sx verso Dx

es: fz. Dericlet



$\nexists \lim_{x \to c} g(x) = l$

$\exists \lim_{x \to c} |g(x)| = 1$

Th $\lim_{x \to c} |f(x)\, g(x)| = 0$

$$\underset{f(x)}{0} \leq |f(x)\, g(x)| = |f(x)|\,|g(x)| \leq \overset{g(x)}{M\,|g(x)|}$$

$\searrow$ 0 $\swarrow$

CALCOLO DI LIMITI

POLINOMI

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right)$$

$a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, n$, $a_n \neq 0$

$$\lim_{x \to +\infty} P(x) = \lim_{x \to +\infty} x^n \left(a_n + \underbrace{\frac{a_{n-1}}{x}}_{\to 0} + \dots + \underbrace{\frac{a_1}{x^{n-1}}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{a_0}{x^n}}_{\to 0} \right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} a_n x^n = \pm \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} P(x) = \lim_{x \to -\infty} a_n x^n = \pm \infty$$

- FUNZIONI RAZIONALI FRATTE

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \lim_{x \to +\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$$

$x \to +\infty$

TEOREMA (di SOSTITUZIONE)

23/10/2012

$\lim_{x \to c} f(x) = l$

g definita in $I(l)$

1) $l \in \mathbb{R}$ g sia continua in l

2) $l = \pm\infty$, $\exists \lim_{y \to l} g(y) = L$

$\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \lim_{x \to c} g(f(x)) = \begin{cases} g(l) & \text{se vale il caso 1)} \\ L & \text{" " " " 2)} \end{cases}$

Se $l \in \mathbb{R}$ $g(l) = \lim_{y \to l} g(y) \Longleftrightarrow g$ è continua in l

$\lim_{x \to c} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \to c} f(x)\right) = g(l)$

es) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x^2}{x^2}$

$f(x) = x^2$ $c = 0$ $l = 0 = \lim_{x \to 0} x^2$

$g(y) = \begin{cases} \frac{\sin y}{y} & y \neq 0 \\ 1 & y = 0 \end{cases}$ è continua in $l = 0$

$\lim_{y \to 0} g(y) = 1 = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x^2}{x^2}$

per il suddetto Teor

Quando lo risolvo operativamente:

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x^2}{x^2}$ $y = x^2$

$x \to 0 \Longrightarrow y \to 0^+$

(con x che tende a 0, y tende a 0^+)

$= \lim_{y \to 0^+} \frac{\text{sen } y}{y} = 1$

$\{a_n\} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$

$n \xmapsto{a} a_n \xmapsto{g} g(a_n) \qquad g$ continua in l

$\lim_{y\to l} g(y) = L \implies \lim_{n\to\infty} g(a_n) = L = g(l)$

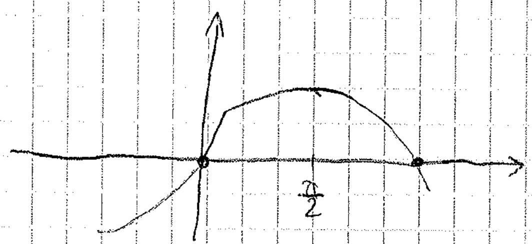
- Se trovo due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$

tali che $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = l$

con $g(a_n) \to m_1 \neq m_2 = \lim_{n\to\infty} g(b_n)$

$\implies \lim_{y\to l} g(y)$ NON ESISTE

es) $\lim_{x\to+\infty} \sin x \quad \nexists$



$a_n = n\pi \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

$g(a_n) = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} g(a_n) = 0$

$b_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$

$g(b_n) = 1 \qquad \lim_{n\to\infty} g(b_n) = 1$

es) $\lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x} =$

$y = \frac{1}{x}$ se $x \to 0^{\pm} \Longrightarrow y \to \pm\infty$

$= \lim_{y \to}$

es) $\lim_{x \to 0} \frac{\log_a (1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \log_a (1+x)^{1/x} = \log_a e$

$a \log b = \log b^a$

Se $a = e$ $\lim_{x \to 0} \frac{\log (1+x)}{x} = \log e = 1$

es) $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{\log_a (1+y)} = \log a$

$y = a^x - 1 \iff a^x = 1 + y \iff x = \log_a (1+y)$

$\lim_{x \to c} f(x) = l$

$\Longrightarrow \lim_{x \to c} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}$

Se

es) $\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{(e^\alpha)^y - 1}{e^y - 1} \cdot \frac{y}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{(e^\alpha)^y - 1}{y} \cdot \frac{y}{e^y - 1} =$

$a = e^\alpha$ $\quad a = e$

$1 + x = e^y$ $\quad x = e^y - 1$

$y = \log (1+x)$

$= \log e^\alpha \cdot 1 = \alpha$

Se $x \to 0$, $y \to 0$

es) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2}$ $\quad \alpha = \frac{1}{2}$

PROPRIETÀ GLOBALI

29/10/2012

x_0 si dice ZERO di una funzione f se $f(x_0)=0$

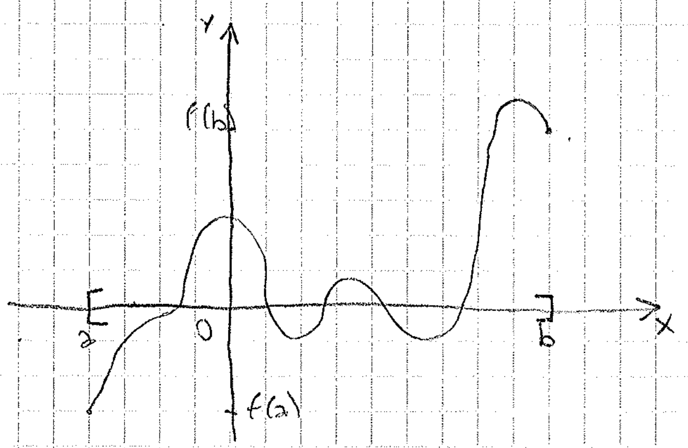
Condiz. Suff. affinché una fz. abbia almeno uno Zero
ma non NECESSARIA *

TEOREMA (di Esistenza degli Zeri)

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua

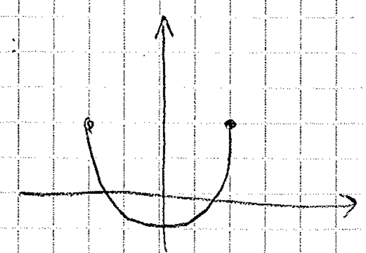
$f(a) \cdot f(b) < 0 \implies$

$\implies \exists\ x_0 \in (a,b) : f(x_0)=0$



NB: Se f è strettamente monotona, allora lo ZERO è UNICO

* es:



$$x_0^+ - x_0^- = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad x_0 = x_0^+ = x_0^-$$

$$f(x_0) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = \lim_{n\to\infty} \overbrace{f(a_n)}^{<0} \leq 0$$

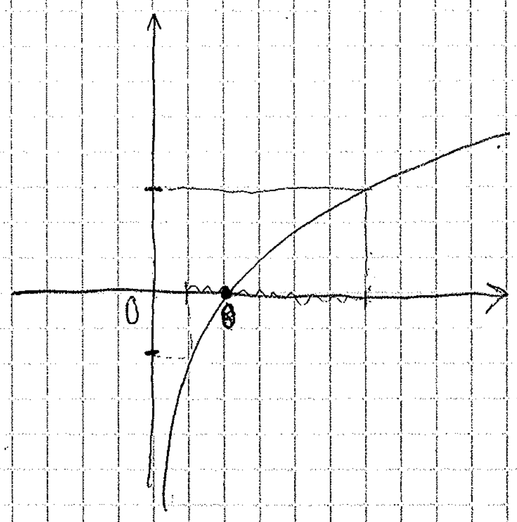
$$= f\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{f(b_n)}_{>0} \geq 0$$

COR: (corollario) $f: I \to \mathbb{R}$ continua, I intervallo

$a = \inf I$, $\quad b = \sup I$

$$\left(\lim_{x\to a^+} f(x)\right)\left(\lim_{x\to b^-} f(x)\right) < 0$$

es)



$I = (0; +\infty)$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

Posso trovare 2 intorni degli estremi, tra loro discordi, che mi permettono di trovare 2 estremi discordi e quindi ricado nel caso precedente (mix di T.P.S. e T.Esist. Zeri)

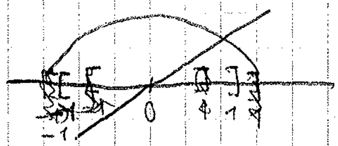
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 492

es) $\cos x = x$ $\qquad f(x) = \cos x$

$g(x) = x$

$(x > 1, \quad x < -1)$ non ho soluz.

$[0, 1]$



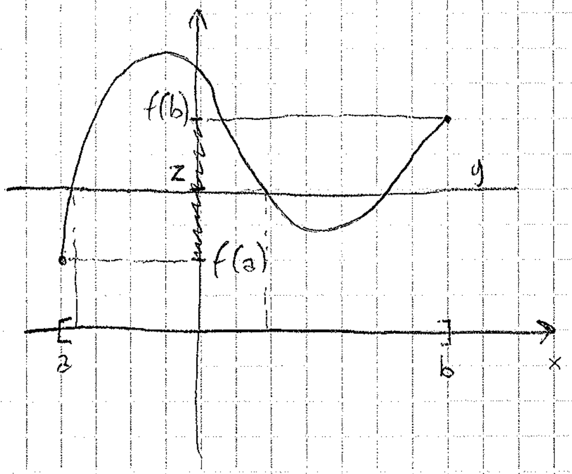
$f(0) = 1 \quad > \quad g(0) = 0$

$f(1) = \underset{\approx}{\cos 1} \quad < \quad g(1) = 1$ $\qquad \exists\, x_0 \in (0, 1) : \cos x_0 = x_0$

TEOREMA (dei VALORI INTERMEDI)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua

$\Longrightarrow f$ assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$



Se $f(a) \leq f(b)$

$[f(a), f(b)] \subseteq f([a, b])$

Se $f(a) \geq f(b)$

$[f(b), f(a)] \subseteq f([a; b])$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 492

TEOR: f continua su I intervallo

allora f iniettiva $\Longleftrightarrow$ f strettamente MONOTONA

TEOR: f continua su I e invertibile

$f: I \to J \implies f^{-1}: J \to I$ continua

$z_1 = (x_1; y_1) = x_1 + i y_1$

$z_2 = (x_2; y_2) = x_2 + i y_2$

$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2; y_1 + y_2) = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$

$z_1 z_2 = (x_1; y_1)(x_2; y_2) = (x_1 + i y_1)(x_2 + i y_2) =$

$\cancel{(x_1 x_2; y_1 y_2)}$

$= x_1 (x_2 + i y) + i y_1 (x_2 + i y_2) =$

$= x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i y_1 x_2 + \overset{=-1}{i^2} y_1 y_2 =$

$= x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) =$

$\left[= (x_1 x_2 - y_1 y_2; x_1 y_2 + x_2 y_1) \right]$

- PROPR. ASSOCIATIVA:

$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + z_2 + z_3$

- PROPR. COMMUTATIVA:

$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

es) $\frac{1}{x+iy} \cdot \frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} =$ $\qquad x,y \neq 0$

$(x+iy)(x-iy) = x^2+y^2 + \cancel{ixy - ixy}$

$= \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{= v} + i \underbrace{\frac{-y}{x^2+y^2}}_{= w}$

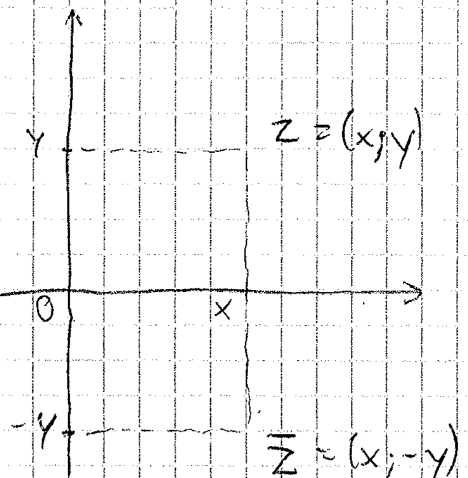
es) $z = x+iy$ $\qquad \underbrace{\bar{z}}_{\boxed{\text{CONIUGATO}}} = x-iy$

$\frac{1}{z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}}$

$z\bar{z} = x^2+y^2 = |z|^2$

$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \boxed{\text{modulo di } z}$

rappresenta la distanza dallo O



- Divisione: $\frac{z_1}{z_2} = z_1\left(\frac{1}{z_2}\right)$

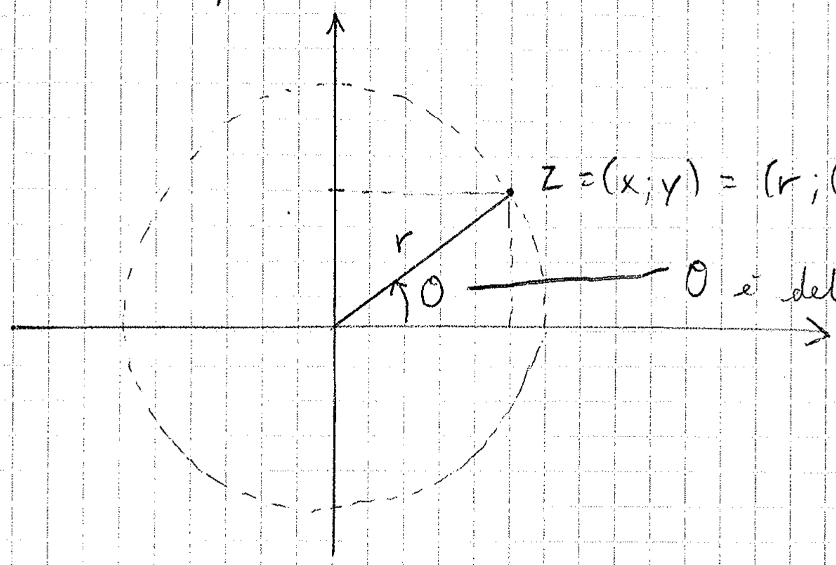
es) $\frac{1+3i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{-2+i4}{2} = -1+i2$

$Re\,\frac{1+3i}{1-i} = -1 \quad , \quad Im\,\frac{1+3i}{1-i} = 2$

RAPPRESENTAZIONE TRIGONOMETRICA dei Numeri Complessi

30/10/2012

$z = x + iy$



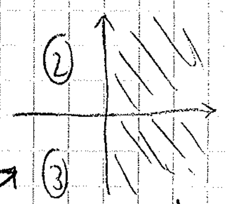
θ è detto ARGOMENTO: sono infiniti $(\theta + 2k\pi)$

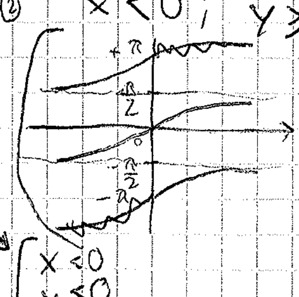
$x^2 + y^2 = r^2$

~~arg θ~~ $\arg z = \theta$

$|z| = r$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \quad x > 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \quad (2) \quad x < 0;\ y \geq 0 \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi & -\pi < \theta < -\frac{\pi}{2} \quad (3) \quad x < 0;\ y \leq 0 \\ \frac{\pi}{2} & y > 0,\ x = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & y < 0,\ x = 0 \end{cases} \end{cases}$$





~~x<0~~

$y = 0$ non è un problema

FORMULA di EULERO

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) = r^n e^{in\theta}$$

$$\boxed{e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$$

FORMULA di DE MOIVRE

— O —

$$z^n = \omega \iff r^n e^{in\theta}$$

Assegnato $\omega = \rho e^{i\varphi}$ ρ (leggi 'ro') φ (leggi 'fi')

si vuole trovare $z = re^{i\theta}$

$$r^n e^{in\theta} = \rho e^{i\varphi} \iff \begin{cases} r^n = \rho \\ n\theta = \varphi + 2\pi K, & K \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

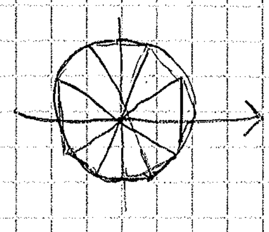
$$\begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \theta = \dfrac{\varphi + 2K\pi}{n} \end{cases}$$

$K = 0 \quad \theta = \dfrac{\varphi}{n}$

$K = 1 \quad \theta = \dfrac{\varphi + 2\pi}{n}$

$\vdots$

$K = n \quad \theta = \dfrac{\varphi}{n} + 2\pi$



$K = 0, 1, \dots, n-1$

con $n = 8$, ad esempio,

ottengo un ottagono regolare

Ora possiamo risolvere anche:

$az^2+bz+c=0$, [quando $\Delta<0$]

$$z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

es) $\sqrt{-4}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{-1}=2\cdot(\pm i)=\pm 2i$

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1 x + a_0 =$$
$$=a_n(x-\alpha_1)\cdot P_{n-1}(x)=$$
$$=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_n)$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$

Teor. fondamentale dell'algebra: ogni polinomio ammette almeno una radice in $\mathbb{C}$ (numeri complessi)

$\Downarrow$ (ciò significa che)

un polinomio di grado n ha n soluzioni in $\mathbb{C}$ (non necessariamente distinte)

Se z è una radice $P(z)=0$

$\bar{z}$ è una radice

$$P(\bar{z})=\bar{a}_n\,\bar{z}^n+\dots+\bar{a}_1\,\bar{z}+\bar{a}_0=\overline{a_n z^n+\dots+a_1 z+a_0}=\overline{P(z)}=0$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 492

SIMBOLI di LANDAU

05/11/2012

Sono simboli che definiscono proprietà di classi di fz.

$c = x_0, x_0^+, x_0^-, +\infty, -\infty$

$f, g, h, \ldots$ definite in $I(c) \setminus \{c\}$

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R}$$ (esiste ed è reale il limite)

def: Si dice che f è controllata da g per $x \to c$:

$f = O(g), \quad x \to c$

(leggi 'f è O grande di g per x che tende a c)

def: $l \neq 0$, diremo che f è equigrande a g per $x \to c$:

$f \asymp g, \quad x \to c$

def: $l = 1$, diremo che f è equivalente a g per $x \to c$:

$f \sim g, \quad x \to c$

def: $l = 0$, diremo che f è trascurabile rispetto a g per $x \to c$:

$f = o(g), \quad x \to c$

PROPRIETÀ

- Per $x \to c$, si ha:

- $f \asymp g \Longrightarrow f = O(g)$ (se è equigrande, allora è controllata)
- $f \sim g \Longrightarrow f = O(g)$ (" " equivalente, " " ")
- $f = o(g) \Longrightarrow f = O(g)$ (" " trascurabile " " ")
- $f \sim g \Longrightarrow f \asymp g$
- $f \asymp g \Longrightarrow f \sim l g$ infatti:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0 \Longrightarrow \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{l\, g(x)} = 1 \Longrightarrow \left[f \sim l g, \quad x \to c \right]$$

DIM:

$$f \sim g, \quad x \to c \Longrightarrow f = g + o(g), \quad x \to c$$

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Longleftrightarrow \lim_{x \to c} \left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{x \to c} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0 \Longleftrightarrow f - g = o(g)$$

$$\Longleftrightarrow \left[f = g + o(g), \quad x \to c \right]$$

Oss 2:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \iff \lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$$

$$\iff f(x) - f(x_0) = o(1), \quad x \to x_0$$

$$\iff f(x) = f(x_0) + o(1), \quad x \to x_0$$

CONFRONTO tra MONOMI

- $\lim_{x\to 0} \frac{x^n}{x^m} = \lim_{x\to 0} x^{n-m} = 0, \qquad n > m$

$$\Longrightarrow \underbrace{x^n}_{\text{tende a 0 + velocemente}} = o(\underbrace{x^m}_{\text{è trascurabile rispetto a } n}), \quad x \to 0 \qquad \text{se } n > m$$

- $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^n}{x^m} = \lim_{x\to +\infty} x^{n-m} = 0, \qquad n < m$

$$x^n = o(x^m), \quad x \to +\infty, \quad \text{se } n < m$$

Vediamo il caso $x^m \cdot o\, x^n = o(x^{n+m})$

$$f = o(x^n) \iff \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^m f(x)}{x^{m+n}} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0$$

SIMBOLI di LANDAU e LIMITI NOTEVOLI

- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \iff \sin x \sim x, \quad x\to 0$

$$\iff \boxed{\sin x = x + o(x), \quad x \to 0}$$

$1-\cos x \not\sim x^2, \quad x\to 0$

- $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \iff 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \quad x\to 0$

$$\iff 1-\cos x = \frac{1}{2}x^2 + o\left(\frac{1}{2}x^2\right), \quad x\to 0$$

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), \quad x\to 0}$$

- $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \iff e^x - 1 \sim x, \quad x\to 0$

$$\iff e^x - 1 = x + o(x), \quad x\to 0 \iff \boxed{e^x = 1 + x + o(x), \quad x\to 0}$$

- $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \iff \log(1+x) \sim x, \quad x\to 0$

$$\iff \boxed{\log(1+x) = x + o(x), \quad x\to 0}$$