NUMERO: 938

DATA: 15/04/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Loverre

MATERIA: Analisi Matematica I

Prof. Pellerey

Corso di Analisi Matematica I

Docente: **PELLEREY FRANCO**

Presentazione

L'insegnamento di Analisi Matematica 1 costituisce la cerniera tra la scuola media superiore e l'università.

Lo scopo principale dell'insegnamento e' di abituare gli studenti a seguire la concatenazione di semplici argomentazioni e insegnare loro gli elementi fondamentali del calcolo differenziale e integrale per le funzioni di una variabile, con applicazioni alle equazioni differenziali ordinarie del primo e, soltanto nel caso lineare, del secondo ordine. I numeri complessi verranno introdotti e quindi applicati alla rappresentazione delle soluzioni delle equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine a coefficienti costanti.

Conoscenze e abilità da acquisire

Capacità di seguire una catena di ragionamenti logici; comprensione delle proprietà essenziali del calcolo differenziale e integrale per funzioni di una variabile. Acquisizione di una sufficiente manualità di calcolo.

Prerequisiti

Insiemi numerici, equazioni e disequazioni, geometria analitica, trigonometria. Le funzioni elementari e le loro prime proprietà.

Programma

Richiami: insiemi, operazioni sugli insiemi e simboli logici.
Insiemi numerici, massimi e minimi, estremi. Proprietà di completezza dei numeri reali e sue conseguenze.
Funzioni: iniettività e suriettività; funzioni composte e inverse.
Funzioni reali di variabile reale: funzioni elementari, monotonia e inverse delle funzioni elementari. (Circa 15 ore)

Limiti e continuità: Limiti di funzioni e successioni; continuità. Teoremi sui limiti: unicità del limite, permanenza del segno e limitatezza locale, teoremi di confronto. Limiti di funzioni monotone. Algebra dei limiti. Forme indeterminate. Confronto di funzioni. Simboli di Landau. Infiniti e infinitesimi. Ordine di infinito e di infinitesimo, parte principale (rispetto a un dato campione). Asintoti.
Il numero e. Limiti notevoli trigonometrici ed esponenziali. Funzioni continue su un intervallo: esistenza degli zeri e dei massimi e minimi. (Circa 24 ore)

Derivate: significato geometrico e fisico. Regole di derivazione. Tabella delle derivate fondamentali.
Derivate e continuità. Punti di non derivabilità, punti di estremo e punti critici. Teorema di Fermat.
Funzioni derivabili su intervalli e teoremi fondamentali del calcolo differenziale (Rolle e Lagrange) e loro conseguenze.
Regola di de L'Hospital.
Formula di Taylor e sviluppi di McLaurin fondamentali.
Uso degli sviluppi di Taylor nello studio del comportamento locale delle funzioni: confronto di funzioni, estremi, convessità.
Applicazioni allo studio del grafico di funzioni. (Circa 23 ore)

Primitive e regole di calcolo delle primitive; primitive di funzioni razionali. Integrale indefinito.
Integrale di Riemann e sue proprietà: monotonia, additività e linearità dell'integrale; media integrale. Classi di funzioni integrabili.
Teorema fondamentale del calcolo integrale: relazione tra primitive e integrazione definita.
Integrali impropri: definizioni e criteri di convergenza. (Circa 21 ore)

Numeri complessi ed equazioni differenziali: forma algebrica e forma trigonometrica di numeri complessi. Parte reale, parte immaginaria, modulo e argomento. Radici di numeri complessi. Teorema fondamentale dell'algebra. Esponenziale di un numero complesso e formule di Eulero.
Equazioni differenziali: il problema di Cauchy. Equazioni differenziali del primo ordine, a variabili separabili.
Equazioni differenziali lineari del primo ordine. Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti.
(Circa 17 ore)

Modalità di verifica dell'apprendimento

La verifica dell'apprendimento avviene mediante un test e, eventualmente, una prova scritta e una prova orale. Più precisamente, il test, della durata di un'ora, consiste in 20 domande a risposta multipla su calcolatore con quesiti sia di tipo teorico sia di tipo pratico. Lo studente che abbia superato il test, può decidere di concludere l' esame col solo test, oppure di presentarsi a sostenere una prova scritta contenente esercizi e teoria. Nel caso che questa venga superata, a richiesta o dello studente o del docente, può svolgersi anche una prova orale.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 102

ELEMENTI DI LOGICA

- proposizione logica = enunciato che è inequivocabilmente VERO o falso (in un certo contesto)
  "Milano è lontana da Roma" NON È una proposizione logica
  "Milano è più lontana di Torino da Roma" È una proposizione logica

$\forall$ proposizione logica $\exists!$ un valore di verità

simboli: $\forall$ per ogni; $\exists!$ esiste ed è unico

- connettivi logici = operazioni definite sulle proposizioni
  - negazione: $p \to \neg p$, è vera la prima è falsa la seconda e viceversa
  - congiunzione: $p, q \to p \wedge q$: è vera se p e q sono vere
  - disgiunzione: $p, q \to p \vee q$: è vera se p oppure q è vera
  - implicazione: $p, q \to p \Rightarrow q$: è sempre vera tranne quando la prima è vera e la seconda no
  - equivalenza logica: $p, q \to p \Leftrightarrow q$: è vera quando p e q hanno lo stesso valore di verità

- tabella dei valori di verità:

p: vera 1; falso 0

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1

N.B.
- $p \wedge q$ = congiunzione, $\wedge$ = minimo tra 0 e 1
- $p \vee q$ = disgiunzione, $\vee$ = massimo tra "

Implicazione logica = esclude che da una premessa vera si possa dedurre una conclusione falsa, mentre non esclude che la conclusione sia vera anche se la premessa è falsa.

es: "se piove, allora esco con l'ombrello" → non esco senza ombrello se piove, tuttavia potrei uscire con l'ombrello anche se non piove.

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$: osserva la tabella. $\neg p \vee q$ è vera se $\neg p$ o q è vera. hanno gli stessi valori di verità.

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$: ~~dimostrazione per assurdo~~ contronominale
$p \Rightarrow q$ è falso solo quando p è vero e q è falso
$\neg q \Rightarrow \neg p$ è falso solo quando $\neg q$ è vero e $\neg p$ è falso
q è falso   p è vero

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q \Rightarrow \neg p)$: dimostrazione per assurdo
l'ipotesi p è vera: si suppone che la tesi q sia falsa ($\neg q$).
Si giunge alla conclusione assurda che l'ipotesi p deve essere falsa ($\neg p$)
ciò non è possibile, quindi si conclude che q è vera.

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q \Rightarrow r \wedge \neg r)$: forma generale della dimostrazione per assurdo
l'ipotesi p è vera, si suppone che la tesi q sia falsa ($\neg q$).
Si giunge alla conclusione che una certa affermazione r sia contemporaneamente vera e falsa.
Ciò non è mai possibile poiché $r \wedge \neg r$ è sempre falsa, quindi si conclude che q è vera.

INSIEMI NUMERICI

$\mathbb{N}$ = insieme dei numeri naturali $=\{0,1,2,\dots\}$, $\mathbb{N}^+=\{1,2,3,\dots\}=\mathbb{N}\setminus\{0\}$
$\mathbb{Z}$ = " " interi relativi $=\{\dots,-1,0,1,\dots\}$
$\mathbb{Q}$ = " " razionali $=\{\frac{m}{n}, m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}^+\}$ (n° periodici, o con cifre limitate)
$\mathbb{R}$ = " " reali
$\mathbb{C}$ = " " complessi

- numero = concetto astratto per contare e numerare

N.B: frazioni generatrici di numeri decimali:
- limitati: si moltiplica e si divide il numero decimale per tanti 1 seguito da tanti 0 quanti sono le cifre decimali del numero dato.

es: $0{,}073 = \frac{\cancel{73}\ 0{,}073\cdot 1000}{1000} = \frac{73}{1000}$

- illimitati periodici:
NUM = differenza tra il numero dato scritto senza virgola e le cifre che seguono il periodo e precedono la parte intera scritta anch'essa senza virgola
DEN = tanti 9 quante sono le cifre del periodo e tanti 0 quante sono le cifre dell'antiperiodo

es: $0{,}71\bar{4} = \frac{714-71}{900} = \frac{643}{900}$

ATTENZIONE: $0,\bar{9}=1$ infatti $0,\bar{9}=\frac{\cancel{9}}{\cancel{9}}=1$ oppure $\frac{9}{9}\cdot 0,\bar{9} = \frac{(10-1)\cdot 0,\bar{9}}{9} = \frac{9,\bar{9}-0,\bar{9}}{9} = \frac{9}{9} = 1$

- numeri reali
• $\sqrt{2}$ non è razionale

Dimostrazione per assurdo: si suppone che $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$, dunque $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$
m ed n sono primi tra di loro, ovvero $\frac{m}{n}$ è ridotta ai minimi termini
$\sqrt{2}=\frac{m}{n}$; elevando al quadrato ambo i membri
$2=\frac{m^2}{n^2}$; moltiplicando ambo i membri per n^2
$2n^2=m^2$
ciò vuol dire che m^2 è un numero pari: $m=2p$ ovvero $m^2=4p^2$
$2n^2=4p^2$
$n^2=2p^2$
ciò vuol dire che anche n^2 è un numero pari: $n=2q$

Poiché m ed n sono entrambi pari, $\frac{m}{n}$ non è ridotta ai minimi termini.
Questo contraddice l'ipotesi, dunque $\sqrt{2}$ non è razionale

- $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup$ tutti i numeri espressi irrazionali (numeri illimitati e non periodici)

- proprietà di $\mathbb{R}$:
• corrispondenza biunivoca tra i punti della retta e i numeri reali ovvero ad ogni punto della retta corrisponde uno e un solo numero reale e viceversa
• valgono le stesse operazioni aritmetiche di $\mathbb{Q}$
• i numeri razionali sono densi nei reali: presi due reali distinti, esistono infiniti razionali tra loro
• è completo, cioè $\forall$ dati A,B, $\forall a\in A\ \forall b\in B$, $a\le b \Rightarrow \exists s\in\mathbb{R}: a\le s\le b$

INTERVALLI

- gli insiemi non sono necessariamente intervalli ma tutti gli intervalli sono insiemi ergo: gli intervalli sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$

- per definire gli intervalli necessito di due estremi fissati
Supponiamo $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$

$[a,b]$ = intervallo chiuso $= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
$[a,b)$ = " semiaperto a destra $= \{$ " $\mid a \leq x < b\}$
(a,b) = " aperto $= \{$ " $\mid a < x < b\}$
$(a,b]$ = " semiaperto a sinistra $= \{$ " $\mid a < x \leq b\}$

∞ non è un numero e si usa per quantità grandi e per la scrittura di intervalli
$\infty \notin \mathbb{R}$
es: $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$

$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$, intervallo aperto poiché $\pm\infty \notin \mathbb{R}$

INSIEMI LIMITATI

- $A \subseteq \mathbb{R}$
A è limitato superiormente se, $\forall x \in A, \exists b \in \mathbb{R}: x \leq b$, b è un maggiorante di A
A è " inferiormente se, $\forall x \in A, \exists b \in \mathbb{R}: x \geq b$, b è un minorante di A
A è limitato se, $\forall x \in A, \exists a, b \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b$, a è un minorante di A
b è un maggiorante di A

es: $A = \{1, 3, 7, 13\}$, $A \subseteq \mathbb{R}$
A è limitato
0 è un minorante di A e 20 è un maggiorante di A

es: $A = \{n^2 : n \in \mathbb{N}^+\} = \{1, 4, 9, \dots\}$
A è limitato inferiormente
1 è un minorante di A e A non ha maggioranti

- massimo
$b \in \mathbb{R}$ è massimo di A se è un maggiorante di A e se $b \in A$, ovvero $\forall x \in A, \exists! b \in A: x \leq b$

- minimo
$a \in \mathbb{R}$ è minimo di A se è un minorante di A e se $a \in A$, ovvero $\forall x \in A, \exists a \in A: x \geq a$

es: $A = \{1, 3, 7, 13\}$
A è limitato
1 è un minorante di A e poiché $1 \in A$, $\min(A) = x_m = 1$
13 è un maggiorante di A e poiché $13 \in A$, $\max(A) = x_M = 13$

N.B: se un insieme ammette massimo, è superiormente limitato; tuttavia se un insieme è superiormente limitato, questo non vuol dire che l'insieme ha un massimo
Stessa cosa vale per il minimo.

Quindi il massimo e il minimo NON SEMPRE esistono.

- estremo superiore, sup(A)
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$. $b = \sup(A)$ se è il più piccolo dei maggioranti di A

- estremo inferiore, inf(A): [...] è il più grande dei minoranti di A.

FATTORIALI

n fattoriale = $n!$ = fattoriale di n = prodotto di tutti gli interi compresi tra 1 e n
$n \geq 1$

Per definizione: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n(n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1 = (n-1)!\, n$ per $n \geq 2$
$0! = 1$ (per definizione)
$1! = 1$

esempi: $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$
$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$
$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

$n!$ rappresenta il numero di possibili disposizioni di n oggetti distinti in sequenza
numero di possibili permutazioni di n oggetti ~~distinti~~ ordinati

es: se un urna contiene $n \geq 1$ oggetti, $n!$ è il numero di possibili risultati diversi dell'estrazione degli oggetti.

~~COEFFICIENTE BINOMIALE~~ permutazione = modo di ordinare in successione n° oggetti distinti

es: $ABCD \rightarrow 4! = 24$

A B C D	B C D A	C D A B	D C B A
A C B D	B D C A	C B D A	D B A C
A D C B	B C A D	C A B D	D A C B
A B D C	B D A C	C B A D	D C A B

$\frac{n!}{(n-K)!}$ = disposizioni di n oggetti distinti in sequenze di K, con $0 < K < n$

$\frac{n!}{(n-K)!} = n(n-1)\ldots(n-(K+1)) \rightarrow$ scelte totali

n^K = disposizioni di n oggetti in sequenze di K, con ripetizione

COEFFICIENTE BINOMIALE

coefficiente binomiale di indici ~~n~~ n e K = coeff. binomiale n su K = $\binom{n}{K}$

$\binom{n}{K} = \frac{n!}{K!(n-K)!}$ con $0 \leq K \leq n$

In particolare se $0 < K < n \Rightarrow n! = 1 \cdot \ldots \cdot n = 1 \cdot \ldots \cdot (n-K)(n-K+1) \cdot \ldots \cdot (n-1)\, n =$
$= (n-K)!\,(n-K+1) \cdot \ldots \cdot (n-1)\, n$

Dunque:

$\binom{n}{K} = \frac{(n-K)!\,(n-K+1) \cdot \ldots \cdot (n-1)\, n}{K!\,(n-K)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-K+1)}{K!}$

proprietà dei coefficienti binomiali:

$\binom{n}{K} = \binom{n}{n-K}$

$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

$\binom{n}{K} = \binom{n-1}{K-1} + \binom{n-1}{K}$ se $n \geq 1$ e $0 < K < n$ (vedi triangolo di Tartaglia)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 102

FUNZIONI

$f: X \to Y$. funzione definita in X a valori in Y

Una funzione è una corrispondenza che associa ad ogni elemento $x \in X$ AL PIÙ un elemento $y \in Y$

Se X, Y non sono insieme numerici si parla di applicazione, anziché di funzione.

Una relazione invece è l'insieme delle coppie (x, y) dove $x \in X$, $y \in Y$

- dominio = "insieme di partenza" = insieme su cui è definita la funzione
  insieme degli $x \in X$ a cui f associa un elemento di Y

$f: \text{dom} f \subseteq X \to Y$. Se $\text{dom} f = X \Rightarrow f: X \to Y$

- codominio = "insieme di arrivo" = insieme dei possibili valori assumibili dalla funzione

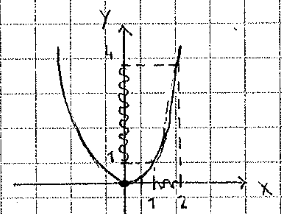
- immagine: dato $x \in \text{dom} f$, l'immagine di $f = \text{im} f = y = f(x) \in Y$
  elemento $y \in Y$ associato ad un elemento $x \in \text{dom} f$. $f: x \mapsto f(x)$
  l'immagine è dunque l'insieme degli elementi y di tipo $y = f(x)$.
  $\text{im} f \subseteq Y$

- controimmagine: insieme degli elementi di X che hanno come immagine $y \in Y$
  la controimmagine di B attraverso f è l'insieme $f^{-1}(B) = \{x \in \text{dom} f : f(x) \in B\}$

esempio:

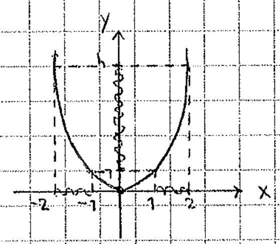
$f(x) = x^2$. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

$\text{dom} f = \mathbb{R}$, $\text{cod} f = \mathbb{R}^+$



Sia $A = [1, 2]$ e $f(A) = [1, 4]$

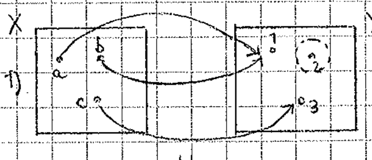
l'immagine di A è $f(A)$ poiché $\forall a \in A, \exists b \in f(A)$



Sia $B = [1, 4]$ e $f^{-1}(B) = [-2, -1] \cup [1, 2]$

la controimmagine di B è $f^{-1}(B)$ poiché ad ogni elemento di $B \subseteq \text{cod} f$ è associato almeno un elemento di $f^{-1}(B) \subseteq \text{dom} f$

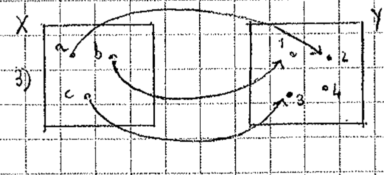
- suriettività: una funzione è suriettiva se $\forall y \in Y \ \exists x \in X : f(x) = y$



no suriettiva

si suriettiva

- iniettività: una funzione è iniettiva se $\forall x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
  le funzioni rappresentate precedentemente non sono iniettive poiché:
  1) ad a corrisponde 1, ma anche a b corrisponde 1
  2) a b corrisponde contemporaneamente 1 e 2



si iniettiva

no suriettiva poiché 4 non è immagine di nessun $x \in X$

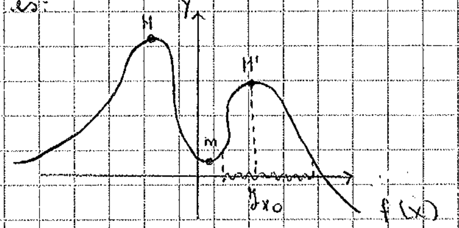
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ = funzioni reali in variabile reale

Sia $A = C.d.E \neq dom f$
B = immagine di A rispetto $f = f(A) = im f$

- f è limitata superiormente [inferiormente] se B è un insieme limitato sup [infer]
- f ammette max [min] se B ha un massimo [minimo]
- punto di massimo [minimo] = $(x_0; f(x_0))$ tale che $f(x_0)$ è il ~~punto di~~ massimo [min] di B
  - assoluto: in tutto B
  - relativi (locali): in un sottoinsieme di B
- x_0 è un punto di massimo [minimo] assoluto se $f(x_0) \geq f(x)$ [$f(x_0) \leq f(x)$] $\forall x \in A$
  relativo se $\exists I_{x_0}$ tale che $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in I_{x_0}$

Intorno = I_{x_0} = sia $x_0 \in A$, $(a,b) \subseteq A$. * Se $x_0 \in (a;b)$, I_{x_0} è un intorno di x_0
$I_{x_0} = (x_0 - \varepsilon; x_0 + \delta)$
intervallo aperto
$I_{x_0} = (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon) \to$ completo

es:



Supponiamo sia $f(x)$ una funzione il cui grafico è riportato affianco:
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$
M = massimo assoluto
m = minimo assoluto
M' = massimo relativo di I_{x_0}

$f(x) = y$
$f: X \to Y$

- corrispondenza biunivoca tra X e Y = ad ogni elemento di X corrisponde uno e un solo elemento di Y e viceversa.

Questo accade per 2 insiemi che hanno stesso numero di elementi, oppure per 1 insieme infinito e un sottoinsieme di questo (es: numeri naturali e n. naturali pari)

- f è suriettiva su Y: $f(x)$ ha almeno una soluzione per ogni $y \in Y$
- f è iniettiva: la soluzione, se esiste, è unica
- f è biettiva di X in Y: per ogni $y \in Y$ esiste una e una sola soluzione $x \in X$

- f è monotona crescente [monotona decrescente] se $\forall x_1, x_2 \in X$, $x_1 \leq x_2$ allora $f(x_1) \leq f(x_2)$ [$f(x_1) \geq f(x_2)$]

- f è strettamente crescente [strettamente decrescente] se $\forall x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$ allora $f(x_1) < f(x_2)$ [$f(x_1) > f(x_2)$]

- intervallo di monotonia: se $\forall x_1, x_2 \in I \subseteq X$, f è m. crescente (o decrescente) oppure s. crescente (o decrescente), tale intervallo è detto di monotonia.

Ricorda: una funzione strettamente crescente o decrescente sul dominio è iniettiva, ma non è sempre vero il contrario

- f è pari se $f(-x) = f(x)$ $\forall x \in \overset{dom f}{\mathbb{R}} \to$ simmetria rispetto l'asse y es: $f(x) = x^2$ ovvero $f(x) = x^{2n}$
- f è dispari se $f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in \underset{dom f}{\mathbb{R}} \to$ simmetria rispetto l'origine $f(x) = x^3$ ovvero $f(x) = x^{2n+1}$

FUNZIONI ELEMENTARI

- funzioni definite a tratti: la forma analitica differisce a seconda degli intervalli su cui è definita

• funzione valore assoluto

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & se\ x \geq 0 \\ -x, & se\ x < 0 \end{cases}$

• funzione segno $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = sgn(x) = \begin{cases} +1 & se\ x > 0 \\ 0 & se\ x = 0 \\ -1 & se\ x < 0 \end{cases}$

• funzione parte intera

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = [x]$ = il più grande intero relativo $\leq x$ ovvero $[x] = \begin{cases} 0 & se\ x \in [0,1) \\ 1 & se\ x \in [1,2) \\ \dots \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R}: [x] \leq x < [x]+1$

es: $[1] = 1$

$[1,37] = 1$

$[-0,12] = -1$

$[\sqrt{2}] = 1$

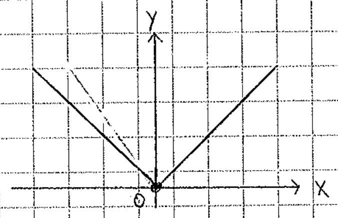
• funzione Mantissa: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = M(x) = x - [x]$, $\forall x \in \mathbb{R}: 0 \leq M(x) < 1$

es: $M(\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$

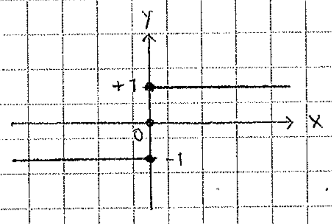
$M(-0,12) = -0,12 + 1 = +0,88$

$M(1,37) = 1,37 - 1 = 0,37$

$M(1) = 1 - 1 = 0$

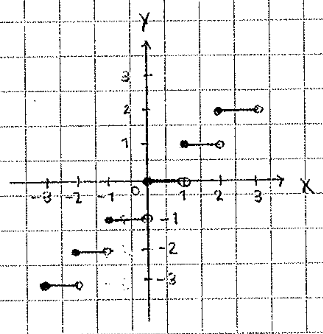


①

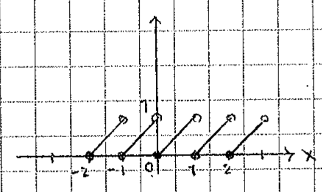


②

① funzione valore assoluto
② funzione segno
③ funzione intera
④ funzione Mantissa



③



④

- funzioni polinominali: $f(x) = P_n(x) \to$ polinomio di grado n $\begin{cases} n=0: & f.\ costante \\ 1: & retta\ \parallel\ alle\ bisettrici \\ 2: & parabola \end{cases}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x)$ è pari se tutti i coefficienti di indici dispari sono nulli
" dispari " " " pari " "

- f. razionali: $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$; $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, C.d.E $= \mathbb{R} \setminus \{x: Q_m(x) = 0\}$

- f. irrazionali: $f(x) = \sqrt[m]{P_n(x)}$ $\begin{cases} m \text{ è pari}: & C.d.E = \{x \in \mathbb{R}: P_n(x) \geq 0\} \\ m \text{ è dispari}: & C.d.E = \mathbb{R} \end{cases}$

- f. irrazionali fratte: $f(x) = \sqrt[s]{\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}}$. C.d.E $= \mathbb{R} \setminus \{x: Q_m(x) = 0\}$ se s è dispari
se s è pari togliere x tali che $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} < 0$

- funzioni trigonometriche:

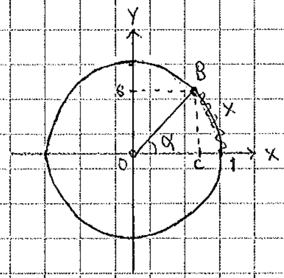
circonferenza trigonometrica: circonferenza di centro (0;0) e raggio unitario

$\ell: x^2+y^2=1$

angoli misurati in radianti = lunghezza di arco di circonferenza di estremi (1;0) e ($\cos x$; $\operatorname{sen} x$)

$\alpha : 360° = x : \pi$ $\quad x$ = angolo in radianti

α = angolo in gradi



Sia B il punto di circonferenza dopo uno spostamento di lunghezza x, partendo da A

B(c; s)

- cos: $x \mapsto \cos(x)$: 1° coordinata di B
- sen: $x \mapsto \operatorname{sen}(x)$: 2° coordinata di B

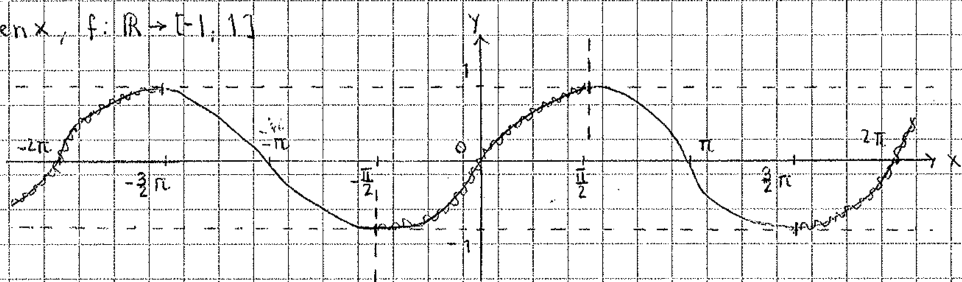
sen/cos sono funzioni periodiche di periodo minimo 2π, ovvero:

$\operatorname{sen}(\alpha+2\pi) = \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(\alpha+2k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$

$\cos(\alpha+2\pi) = \cos\alpha = \cos(\alpha+2k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$

Il grafico del seno, rispetto a quello del coseno, si ottiene traslandolo di una quantità pari a $\frac{\pi}{2}$

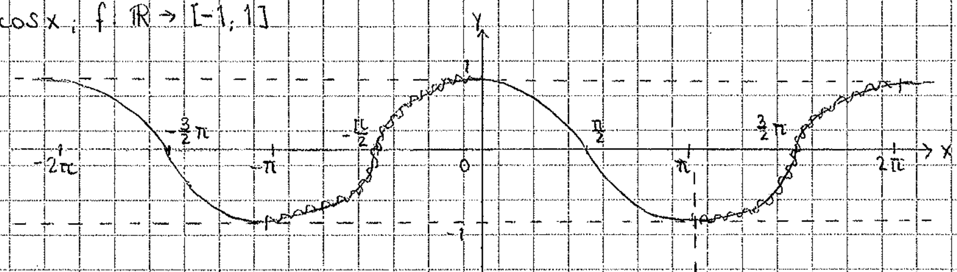
- $y=\operatorname{sen} x$, $f: \mathbb{R}\to[-1;1]$



$f(x)=\operatorname{sen} x$ è:

- strettamente crescente in $[-\frac{\pi}{2}+2k\pi; \frac{\pi}{2}+2k\pi]$
- strettamente decrescente in $[\frac{\pi}{2}+2k\pi; \frac{3}{2}\pi+2k\pi]$
- è dispari: $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$; ha grafico simmetrico rispetto l'origine
- si annulla $\forall x = k\pi$
- assume valore massimo in $\frac{\pi}{2}+2k\pi$
- assume valore minimo in $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$

- $y=\cos x$; $f: \mathbb{R}\to[-1;1]$



$f(x)=\cos x$:

- strettamente crescente in $[\pi+2k\pi; 2\pi+2k\pi]$
- strettamente decrescente in $[2k\pi; \pi+2k\pi]$
- è pari: $\cos(-x)=\cos x$ ha grafico simmetrico rispetto l'asse y
- si annulla in $\forall x=\frac{\pi}{2}+k\pi$
- assume valore massimo in $x=2k\pi$
- assume valore minimo in $x=\pi+2k\pi$

Relazione fondamentale trigonometrica: $\cos^2x+\operatorname{sen}^2x=1$, $\forall x\in\mathbb{R}$

Altre formule: $\operatorname{sen}(\alpha\pm\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$ } f. di addizione e sottrazione

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

$\operatorname{sen}2x=2\operatorname{sen}x\cos x$ } f. di duplicazione

$\cos 2x=\cos^2x-\operatorname{sen}^2x=\cos^2x+\cos^2x-1=2\cos^2x-1$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 102

- funzioni iperboliche: NON SONO FUNZIONI ELEMENTARI

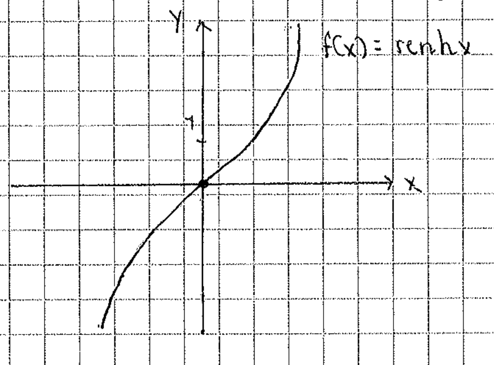
eq. dell'iperbole: $X^2 - Y^2 = 1$. Sia $x = \cosh x$ e $y = \operatorname{senh} x \Rightarrow \cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$

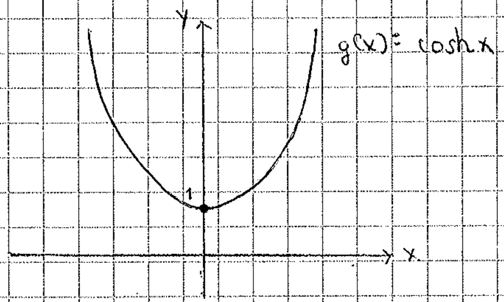
$f(x) = \operatorname{senh} x$, $f: x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g(x) = \cosh x$; $g: x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $g: \mathbb{R} \to [1, +\infty)$

$f(x) = -f(-x)$; funzione dispari, simmetria rispetto l'origine

$g(x) = g(-x)$; funzione pari, simmetria rispetto l'asse y





OPERAZIONI SUI GRAFICI

Si supponga di conoscere il grafico di f

- $f(x+a)$ $\begin{cases} a>0: \text{traslazione a sinistra lungo l'asse x} \\ a<0: \text{" a destra " "} \end{cases}$ (spostato di a l'asse y) → $f(x)$; $g(x) = x+a$; $f(g(x)) = f(x+a)$
- $f(x)+a$ $\begin{cases} a>0: \text{traslazione verso l'alto lungo l'asse y} \\ a<0: \text{" " basso " "} \end{cases}$ (spostato di a l'asse x) → $f(x)$, $g(x) = x+a$; $g(f(x)) = f(x)+a$
- $f(ax)$ $\begin{cases} a>1: \text{contrazione lungo l'asse x} \\ a<1: \text{dilatazione " "} \end{cases}$ → $f(x)$; $g(x) = ax$; $f(g(x)) = f(ax)$
- $af(x)$ $\begin{cases} a>1: \text{dilatazione lungo l'asse y} \\ a<1: \text{contrazione " "} \end{cases}$ → $f(x)$, $g(x) = ax$; $g(f(x)) = af(x)$
- $f(-x)$ → simmetria rispetto l'asse y → $f(x)$; $g(x) = -x$; $f(g(x)) = f(-x)$
- $-f(x)$ → simmetria rispetto la bisettrice del I-III quad. (quello che è positivo diventa negativo e viceversa) → $g(f(x)) = -f(x)$
- valore assoluto:

$|f(x)|$ → quando f è positiva, il grafico non subisce variazioni
quando f è negativa, il grafico viene ribaltato sull'asse delle x

- $f(|x|)$ → per $x \geq 0$ il grafico resta lo stesso
per $x < 0$ il grafico diventa simmetrico rispetto l'asse y

- $|f(|x|)|$ → la parte a sinistra di y (x negative) diventa simmetrica alla parte a destra di y
la parte al di sotto di x (y negative) viene ribaltata simmetricamente rispetto y.

- funzioni polinominali con grado > 2 (~~scomponibili~~) → SCOMPONIBILI

se $f(x)$ è scomponibile in fattori di grado 1, si trovano gli zeri di ciascun fattore, ovvero le intersezioni della curva con l'asse x

$f(x) = P_n(x)$ con n = grado del polinomio (a_n = coefficiente di grado n (massimo))

- n pari $\begin{cases} a_n > 0: \text{ la curva partirà dall'alto e passerà per tutti gli zeri del polinomio} \\ a_n < 0: \text{ la curva partirà dal basso e passerà per tutti gli zeri del polinomio} \end{cases}$
- n dispari $\begin{cases} a_n > 0: \text{ la curva passerà dal basso " " " "} \\ a_n < 0: \text{ " " dall'alto " " " "} \end{cases}$

N.B: se la disuguaglianza è stretta, i punti di intersezione sono da scartare dalle soluz.

es: $x^3 - 2x^2 - 19x + 20 > 0$

$a_n = 1 > 0$

n è dispari

$x^3 - 2x^2 - 19x + 20 = (x-1)(x+4)(x-5)$

zeri del polinomio: $x_1 = -4$

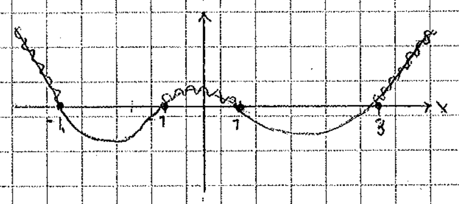
$x_2 = +1$

$x_3 = +5$

la curva partirà dal basso, passerà per x_1, x_2, x_3 (esclusi)

$f(x) \geq 0$ se $x \in (-4; 1) \cup (5; +\infty)$

$f(x) = x^4 + x^3 - 13x^2 - x + 12 \geq 0$



$a_n = 1 > 0$

$n = 4$ (pari)

$f(x) = (x^2 - 1)(x+4)(x-3)$

zeri del polinomio: $x_1 = -4$

$x_2 = -1$

$x_3 = +1$

$x_4 = +3$

la curva partirà dall'alto e passerà per gli zeri

$f(x) \geq 0$ se $x \in (-\infty; -4] \cup [-1, 1] \cup [3, +\infty)$

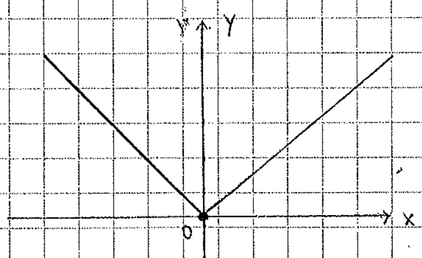
- funzioni fratte polinominali con grado > 2 (SCOMPONIBILI).

Si applica la regola precedente, ricordando di escludere i numeri che annullano il denominatore.

$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ⇒ il segno di $f(x)$ è uguale al segno di $f'(x) = P(x)\,Q(x)$.

N.B: i polinomi devono avere uguale grado e devono essere scomponibili in fattori di grado 1.

- funzione $f(x) = |x|$
- dom f = $(-\infty; +\infty)$
- im f = $[0, +\infty)$
- iniettività: NO (ogni retta orizzontale ha 2 intersezioni con il grafico di f)
- suriettività: NO (l'immagine non è $\mathbb{R}$)
- $\begin{cases} \text{strettamente crescente in } (0, +\infty) \\ \text{strettamente decrescente in } (-\infty, 0) \end{cases}$



es: $4 - 5|x-1| < 1 - 2|x+2|$

$x - 1 \geq 0,\ x \geq 1$

$x + 2 \geq 0,\ x \geq -2$

per $x \leq -2$ $\begin{cases} x \leq -2 \\ 4 - (-5x+5) < 1 - (-2x-4) \end{cases}$

$\begin{cases} \cancel{4} + 5x - 5 - 1 - 2x + \cancel{4} < 0 \\ x \leq -2 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x - 6 < 0 \\ x \leq -2 \end{cases}$; $\begin{cases} x < 2 \\ x \leq -2 \end{cases}$ $S_1 = (-\infty, -2]$

per $-2 < x < 1$ $\begin{cases} -2 < x < 1 \\ 4 - (5x+5) < 1 - 2x - 4 \end{cases}$

$\begin{cases} -2 < x < 1 \\ 4 + 5x - 5 - 1 + 2x + 4 < 0 \end{cases}$; $\begin{cases} -2 < x < 1 \\ 7x + 2 < 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x < -\frac{2}{7} \\ -2 < x < 1 \end{cases}$ $S_2 = (-2, -\frac{2}{7})$ (continua...)

INTORNI

Sia $l \in \mathbb{R}$

- intorno di l = intervallo aperto contenente l al suo interno
  $\mathcal{I}(l) = (a; b)$ tale che $l \in (a; b)$
- intorno destro di l = intervallo chiuso in l a sinistra e aperto a destra
  $\mathcal{I}^+(l) = [l; b)$
- intorno sinistro di l = intervallo aperto a sinistra e chiuso in l a destra
  $\mathcal{I}^-(l) = (a; l]$
- intorno di $+\infty$ = intervallo aperto superiormente illimitato
  $\mathcal{I}(+\infty) = (a, +\infty)$
- intorno di $-\infty$ = intervallo aperto inferiormente illimitato
  $\mathcal{I}(-\infty) = (-\infty, a)$
- intorno di l di raggio r = intorno circolare = intorno di centro l e semiampiezza r
  $\mathcal{I}_r(l) = (l-r; l+r) = \{x \in \mathbb{R}: |x-l| < r\}$
  ampiezza: differenza tra estremo superiore e inferiore

es: $\mathcal{I}_{10^{-1}}(2) = (1{,}9;\ 2{,}1)$

LIMITI DI SUCCESSIONI (parte 1 di 2)

- successione = S = collezione (sequenza) ordinata dei valori reali a_n
  $S = \{a_n,\ n \in \mathbb{N},\ a_n \in \mathbb{R}\}$
  $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
  $f: n \mapsto a_n$

esempio:

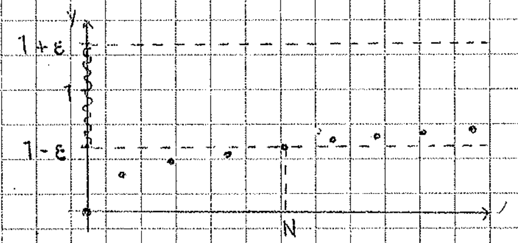
$S = \{a_n = \frac{n}{n+1},\ n \in \mathbb{N}\} = \{0; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \dots\} \to$ si avvicinano a 1 al crescere di n

$|a_n - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow n+1 > \frac{1}{\varepsilon}$ (moltiplicando ambo i membri per ε e per $(n+1)$)

$\varepsilon > 0$ $\Updownarrow$

$N = [\frac{1}{\varepsilon}]$ $\quad n+1 > N+1 > \frac{1}{\varepsilon}$

$n > N$ $\quad \forall \varepsilon > 0\ \exists N: n > N \Rightarrow |a_n - 1| < \varepsilon \to$ intorno di 1 di raggio $\varepsilon = \mathcal{I}_\varepsilon(1)$



- convergenza: si dice che S converge a l (ovvero ha limite l) se $\forall \mathcal{I}(l)\ \exists N \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \in \mathcal{I}(l)\ \forall n > N$.
- divergenza: si dice che S diverge a $+\infty$ (ovvero ha limite $+\infty$) se $\forall \mathcal{I}(+\infty)\ \exists N \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \in \mathcal{I}(+\infty), \forall n > N$
  si dice che S diverge a $-\infty$ (ovvero ha limite $-\infty$) se $\forall \mathcal{I}(-\infty)\ \exists N \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \in \mathcal{I}(-\infty), \forall n > N$
- indeterminata (o oscillante): si dice che S è indeterminata se non è né convergente né divergente
  es: $S = \{a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}\}$
- monotonia $\begin{cases} S \text{ è monotona crescente se } a_{n+1} \geq a_n \\ \text{" " decrescente se } a_{n+1} \leq a_n \end{cases}$ $\forall n$

Teorema: Sia S una successione monotona. Allora essa è convergente oppure divergente.
Se S è monotona crescente, si ha:

- S è limitata superiormente $\Rightarrow$ converge verso l'estremo superiore l della sua immagine
  $\lim_{n \to \infty} a_n = l = \sup\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$
- S è illimitata superiormente $\Rightarrow$ diverge a $+\infty$

LIMITI DI FUNZIONI

limiti all'infinito

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall I(\ell)\ \exists I(+\infty) : f(x) \in I(\overset{\ell}{\cancel{+\infty}})\ \forall x \in I(+\infty)$

  $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow I(\ell) = (\ell - \varepsilon;\ \ell + \varepsilon) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0 : \forall x \in \text{dom} f,\ x > M ; |f(x) - \ell| < \varepsilon$

  $\forall M > 0 \Rightarrow I(+\infty) = (M; +\infty)$

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall I(\ell)\ \exists I(-\infty) : f(x) \in I(\overset{\ell}{\cancel{-\infty}})\ \forall x \in I(-\infty)$

  $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow I(\ell) = (\ell - \varepsilon;\ \ell + \varepsilon) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0 : \forall x \in \text{dom} f,\ x < -M : |f(x) - \ell| < \varepsilon$

  $\forall M > 0 \Rightarrow I(-\infty) = (-\infty; -M)$

RICORDA: $\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x)$

limiti al finito (continuità)

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall I(\ell)\ \exists I(x_0) : f(x) \in I(\ell)\ \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$

  $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0 : |f(x) - \ell| \leq \varepsilon\ \forall |x - x_0| \leq \delta_\varepsilon$

  $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow I(\ell) = (\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon)$

  $\forall \delta > 0 \Rightarrow I(\delta) = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$

Esiste quindi $J = J(c) \cap J'(c)$ in cui $f(x)$ è contemporaneamente positiva e negativa, $\forall x \in J$.
Si giunge ad un assurdo, quindi $l \geq 0$.

- Teorema del confronto (primo):
Supponiamo che per $x \to c$, la funzione f abbia limite l mentre la funzione g abbia limite m. Se esiste un intorno $J(c)$ in cui $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in J(c) \setminus \{c\}$ allora $l \leq m$

Ip: $\lim_{x \to c} f(x) = l$, $\lim_{x \to c} g(x) = m$, $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in J(c) - \{c\}$

Tesi: $l \leq m$

Dimostrazione: sia $h(x) = g(x) - f(x)$
$h(x) \geq 0$ $\forall x \in J(c) \setminus \{c\}$

Per il teorema sull'algebra dei limiti si ha che $\lim_{x \to c} h(x) = \lim_{x \to c} (g(x) - \lim_{x \to c} f(x) = m - l$

Poiché $h(x) \geq 0$, per il corollario teorema di permanenza del segno si ha che $m - l \geq 0$, ovvero $m \geq l$.

- Teorema del confronto (secondo) - caso finito.
Siano date tre funzioni $f, g, h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
Supponiamo che $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x) = l$. Se $\forall x \in J(c) \setminus \{c\}$ si ha $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, allora $\lim_{x \to c} g(x) = l$

Ip: $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x) = l$ Tesi: $\lim_{x \to c} g(x) = l$

Dimostrazione:

Per ipotesi: $\lim_{x \to c} f(x) = l \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists J_1(c) \setminus \{c\}$: ~~$f(c)$~~ $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$ $\forall x \in J_1(c) \setminus \{c\}$

$\lim_{x \to c} h(x) = l \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists J_2(c) \setminus \{c\}$: $l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon$ $\forall x \in J_2(c) \setminus \{c\}$

$\forall J(c)$: $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ $\forall x \in J(c) \setminus \{c\}$

Sia $J = J_1(c) \cap J_2(c) \cap J_3(c) \neq \emptyset$
$\forall x \in J$ valgono le seguenti relazioni $\begin{cases} l - \varepsilon \leq f(x) \leq l + \varepsilon \\ l - \varepsilon \leq h(x) \leq l + \varepsilon \\ f(x) \leq g(x) \leq h(x) \end{cases} \Rightarrow l - \varepsilon \leq f(x) \leq g(x) \leq h(x) < l + \varepsilon$

$g(x) \in J_\varepsilon(l)$

Quindi: $\lim_{x \to c} g(x) = l$

- Teorema del confronto (secondo) - caso infinito
Siano date due funzioni f e g ed esista il limite $\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$
Se esiste un intorno $J(c)$ ~~di~~ nel quale siano definite entrambe le funzioni $\forall x \in J(c) \setminus \{c\}$
e tale che $f(x) \leq g(x)$ allora si ha che $\lim_{x \to c} g(x) = +\infty$

- Corollario (primo teorema del confronto): Supponiamo che per $x \to c$, $\lim_{x \to c} f(x) = l$ e $\lim_{x \to c} g(x) = m$.
Se esiste un intorno $J(c)$ tale che $f(x) \leq g(x)$ in $J(c) \setminus \{c\}$, allora $l \leq m$

Ip: $\lim_{x \to c} f(x) = l$, $\lim_{x \to c} g(x) = m$
Tesi: $f(x) \leq g(x) \Rightarrow l \leq m$

Dimostrazione:
Sia $h(x) = g(x) - f(x)$. Poiché $f(x) \leq g(x)$, $g(x) - f(x) \geq 0$, quindi $h(x) \geq 0$
Per il teorema dell'algebra sui limiti: $\lim_{x \to c} g(x) - \lim_{x \to c} f(x) = m - l = \lim_{x \to c} h(x)$

Per il corollario sul teorema della permanenza del segno, se $h(x) \geq 0 \Rightarrow \lim_{x \to c} h(x) = m - l \geq 0$
$m - l \geq 0 \Rightarrow m \geq l$ (tesi)

- Algebra dei limiti: sia $\lim_{x \to c} f(x) = l$ e $\lim_{x \to c} g(x) = m$

$\lim_{x \to c} (f(x) \pm g(x)) = l \pm m$

$\lim_{x \to c} (f(x) \cdot g(x)) = l \cdot m$

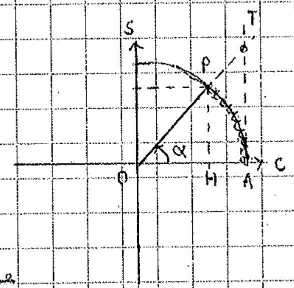
$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$ se $g(x) \neq 0$

- calcolo delle forme indeterminate:
• forma indeterminata del tipo $+\infty-\infty$
$\lim_{x\to+\infty}(ax^n+bx^{n-1}+\dots+dx+e)=\lim_{x\to+\infty}ax^n$ poiché si raccoglie il + termine di grado massimo.
Regola: la funzione polinomiale ha lo stesso limite del suo termine di grado massimo per $x\to\pm\infty$

• forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$
In pratica, tale indeterminazione può avvenire per $x\to 0$. In questi casi bisogna applicare i ~~temi~~ teoremi studiati (in generale basta applicare il secondo teorema del confronto) o scomporre e semplificare le frazioni.

• forma indeterminata del tipo $\frac{\infty}{\infty}$
In pratica, tale indeterminazione può avvenire per $x\to\infty$ di una funzione fratta.
In questi casi si applica, sia al denominatore che al numeratore, la regola vista nel primo caso.
In particolare:
$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^n+bx^{n-1}+\dots+dx+e}{ax^m+bx^{m-1}+\dots+dx+e}=\begin{cases}\infty & se\ n>m\\ \frac{a}{b} & se\ n=m\\ 0 & se\ n<m\end{cases}$$

• limiti notevoli



Dimostriamo che $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=1$
$0<x<\frac{\pi}{2}$
$\overline{HP}=\operatorname{sen}x;\ \overline{AT}=\tan x;\ \widehat{AP}=x$
- $\overline{HP}<\overline{AP}$ poiché $\overline{AP}$ è l'ipotenusa del triangolo rett. $A\hat{P}H$
- $\overline{AP}<\widehat{AP}$ perché $\overline{AP}$ è la corda che è sempre minore dell'arco che sottende
- $\widehat{AP}<\overline{AT}$ poiché ogni segmento di tangente è maggiore dell'arco.
Per la proprietà transitiva della disuguaglianza $\overline{HP}<\widehat{AP}<\overline{AT}$ ovvero $\operatorname{sen}x<x<\tan x$
$\lim_{x\to 0}\operatorname{sen}x\neq 0$ poiché $0<x<\frac{\pi}{2}$, quindi la disuguaglianza è verificata se dividiamo per $\operatorname{sen}x$: $\frac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}x}<\frac{x}{\operatorname{sen}x}<\frac{\tan x}{\operatorname{sen}x}$; $1<\frac{x}{\operatorname{sen}x}<\frac{1}{\cos x}$
Poiché se $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{b}{a}<\frac{d}{c}\Rightarrow\cos x<\frac{\operatorname{sen}x}{x}<1$
$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0}\cos x=1\\ \lim_{x\to 0}1=1\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=1$ (per il secondo teorema del confronto)

• forme di indeterminazione di tipo algebrico:
$+\infty+s=+\infty$ se $s\in\mathbb{R}$ o $s=+\infty$
$-\infty+s=-\infty$ se $s\in\mathbb{R}$ o $s=-\infty$
$\pm\infty\cdot s=\pm\infty$ se $s>0$ o $s=+\infty$
$\pm\infty\cdot s=\mp\infty$ se $s<0$ o $s=-\infty$
$\frac{\pm\infty}{s}=\pm\infty$ se $s>0$
$\frac{\pm\infty}{s}=\mp\infty$ se $s<0$
$\frac{s}{0}=\infty$ se $s\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ o $s=\pm\infty$
$\frac{s}{\pm\infty}=0$ se $s\in\mathbb{R}$

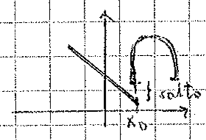
• limiti di funzioni elementari:
$f(x)=x^\alpha,\ \alpha>0$: $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to 0^+}x^\alpha=0$

$f(x)=x^\alpha,\ \alpha<0$: $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$; $\lim_{x\to 0^+}x^\alpha=+\infty$

$f(x)=a^x\begin{cases}a>1: & \lim_{x\to+\infty}a^x=+\infty;\ \lim_{x\to-\infty}a^x=0\\ a<1: & \lim_{x\to+\infty}a^x=0;\ \lim_{x\to-\infty}a^x=+\infty\end{cases}$

$f(x)=\log_a x\begin{cases}a>1 & \lim_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty;\ \lim_{x\to 0^+}\log_a x=-\infty\\ a<1 & \lim_{x\to+\infty}\log_a x=-\infty;\ \lim_{x\to 0^+}\log_a x=+\infty\end{cases}$

- discontinuità di prima specie:
$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_1 \wedge \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_2 \rightarrow l_1 \neq l_2 \quad |l_2 - l_1| = $ salto



- discontinuità di seconda specie:
tutti gli altri casi, in particolare se almeno uno dei limiti della destra o della sinistra sono infiniti o non esistono

LIMITI DI FUNZIONI MONOTONE

Sia f una funzione definita in un intorno destro $J^+(c)$ e monotona in quest'intorno. Allora esiste, finito o infinito il limite destro per $x \to c$

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \begin{cases} \inf\{f(x) : x \in J^+(c), x > c\} & \text{se } f \text{ è crescente} \\ \sup\{f(x) : x \in J^+(c), x > c\} & \text{se } f \text{ è decrescente} \end{cases}$$

Analogamente

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \begin{cases} \inf\{f(x) : x \in J^-(c), x < c\} & \text{se } f \text{ è decrescente} \\ \sup\{f(x) : x \in J^-(c), x < c\} & \text{se } f \text{ è crescente} \end{cases}$$

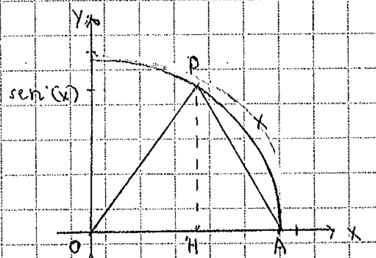
- Corollario:
Sia f definita e monotona in un intorno $J(x_0)$. Allora esistono finiti il limite destro e sinistro per $x \to x_0$ e precisamente si ha
- se f è crescente: $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$
- se f è decrescente: $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \geq f(x_0) \geq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$

Dimostrazione:
Sia f crescente: $\forall x \in J(x_0), x < x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$. Per il teorema precedente:
$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup\{f(x) : x \in J^-(x_0), x < x_0\} \leq f(x_0)$

$\forall x \in J(x_0), x > x_0$ si ha $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf\{f(x) : x \in J^+(x_0), x > x_0\} \geq f(x_0)$

Quindi: $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup\{f(x) : x \in J^-(x_0), x < x_0\} \leq f(x_0) \leq \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf\{f(x) : x \in J^+(x_0), x > x_0\}$

- lemma:
$\forall x \in \mathbb{R}: |\operatorname{sen} x| \leq |x|$ ~~×~~ se $x = 0$ $|\operatorname{sen} x| = |x|$



Dimostrazione: sia $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$
- Nel triangolo rettangolo $P\hat{H}A$: $\overline{PH} < \overline{PA}$ (ipotenusa) $< \widehat{PA}$ (arco)
$\overline{PH} = \operatorname{sen} x > 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x < x$
$\widehat{PA} = x > 0$

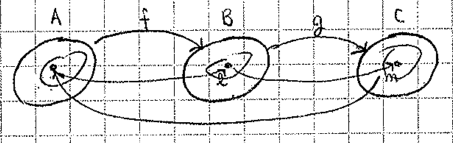
Sia $-\frac{\pi}{2} \leq x < 0$ $|\operatorname{sen} x| = \operatorname{sen}|x|$ con $0 < |x| \leq \frac{\pi}{2}$
Infine se $|x| > \frac{\pi}{2}$, $|\operatorname{sen} x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} < |x|$ ovvero per la p. transitiva della disuguaglianza:
$|\operatorname{sen} x| < |x|$

Da questo lemma si deduce che la funzione seno è continua.

- Teorema di Weierstrass:
Sia f una funzione continua in $[a;b]$. Allora f è limitata in $[a;b]$ e qui assume un massimo e un minimo.
Se l'intervallo è aperto, il teorema non vale più!

- Teorema di sostituzione (o cambio limite)
Supponiamo che esista (finito o infinito), $\lim_{x\to c} f(x) = l$. Sia g una funzione definita in $I(l)\setminus\{l\}$ e che soddisfi: $- \; l \in \mathbb{R} \Rightarrow g$ è continua in l
$- \; l = \pm\infty \Rightarrow \exists \lim_{y\to l} g(y)$
Allora: $\lim_{x\to c} g(f(x)) = \lim_{y\to l} g(y)$

Dimostrazione: Sia $\lim_{y\to l} g(y) = m$.
Per def. di limite si ha che $\forall I(m)\, \exists I(l): \forall y \in I(l),\, g(y) \in I(m)$
Se g è continua, $g(l) = l$. Se $l = \pm\infty$ l'intorno di ∞ non comprende ovviamente ∞. Per questo motivo possiamo non scrivere $I(l)\setminus\{l\}$
Per ip: $\lim_{x\to c} f(x) = l \underset{def.}{\Leftrightarrow} \forall I(l)\, \exists I(c): \forall x \in I(c)\setminus\{c\}: f(x) \in I(l)$



Partendo da m, sono in grado di trovare $I(c)$
$\forall I(m)\, \exists I(c): \forall x \in I(c)\setminus\{c\}: g(f(x)) \in I(m) \Leftrightarrow \lim_{x\to c} g(f(x)) = m$

- Corollario:
Se f e g sono continue, allora $g(f(x))$ è continua. In particolare se f è continua in x_0 e quindi $y_0 = f(x_0)$ e g è continua in un intorno di y_0, allora la funzione $g \circ f$ è continua in x_0

Dimostrazione: $\lim_{x\to x_0} (g\circ f)(x) = g(\lim_{x\to x_0} f(x)) = g(f(x_0)) = (g\circ f)(x_0)$

Dunque: $\lim_{x\to c} g(f(x)) = g(\lim_{x\to c} f(x)) \rightarrow$ una funzione continua commuta (si scambia) con il simbolo del limite

esempi:
- $f(x) = sen(x^2) \rightarrow$ composizione di $g(x) = x^2$ e $h(y) = sen\, y \rightarrow h(g(x)) = sen(x^2)$
Poichè g e h sono continue in tutto $\mathbb{R} \Rightarrow$ f è continua su tutto $\mathbb{R}$

- $\lim_{x\to 0} \frac{sen(x^2)}{x^2}$. Poniamo $f(x) = x^2$ e $g(y) = \begin{cases} \frac{sen\, y}{y} & se\ y \neq 0 \\ 1 & se\ y = 0 \end{cases}$ per rendere la funzione continua.
$\lim_{x\to 0} \frac{sen(x^2)}{x^2} = \lim_{y\to 0} \frac{sen\, y}{y} = 1$

- Osservazione (conseguenza del Teorema di sostituzione)
Criterio di non esistenza del limite: se esistono due successioni $a: n \to a_n$ e $b: n \to b_n$, aventi entrambe limite l e tali che: $\lim_{n\to\infty} g(a_n) \neq \lim_{n\to\infty} g(b_n)$ allora NECESSARIAMENTE g non può avere limite quando l'argomento tende a l.

esempio: $a_n = 2\pi n$ e $b_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$
$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty = \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ ma se $g = sen\, x$
$\lim_{n\to\infty} sen\, a_n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$
$\lim_{n\to\infty} sen\, b_n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$
$0 \neq 1 \Rightarrow \nexists \lim_{n\to\infty} sen(n)$

Allo stesso modo si dimostra che $\nexists \lim_{x\to 0} sen(\frac{1}{x})$

Non esistono (perchè sono indeterminati (oscillano)):
$\lim_{x\to\pm\infty} sen\, x$

$\lim_{x\to\pm\infty} cos\, x$

$\lim_{x\to\pm\infty} tan\, x$

SIMBOLI DI LANDAU

Supponiamo: $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $g(x)\neq 0$ per $x\to c$

$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=l$. Se $l\in\mathbb{R}$, f è controllata da g per $x\to c$; $f(x)\underset{x\to c}{=}O\,g(x)$ (f è o grande di g per $x\to c$) In part:

$l\begin{cases}\neq 0: & \text{f è equigrande a g per } x\to c \text{ (stesso ordine di grandezza)}\\ =1: & \text{f è equivalente a g per } x\to c\\ =0: & \text{f è trascurabile rispetto a g per } x\to c \text{ (f e g sono indistinguibili per } x\to c)\end{cases}$

$f\asymp g,\ x\to c$
$f\sim g,\ x\to c$
$f=o(g),\ x\to c$

Quindi:

$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=l$ dove $l\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}\Rightarrow f\asymp g,\ x\to c$ ovvero $f=O(g)$ per $x\to c$

$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=1\Rightarrow f\sim g,\ x\to c$ ovvero $f=O(g)$ per $x\to c$

$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=0\Rightarrow f=o(g)$ per $x\to c$ ovvero $f=O(g)$ per $x\to c$

Inoltre se $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\pm\infty\Rightarrow\lim_{x\to c}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{1}{l}=0\Rightarrow g=o\,f(x),\ x\to c$

Applicazioni dei simboli di Landau:

- $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=1\Rightarrow \operatorname{sen}x\sim x$ per $x\to 0$
- $\lim_{x\to +\infty}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=0\Rightarrow \operatorname{sen}x=o(x)$ per $x\to +\infty$
- $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{sen}x}{\tan x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x=0\Rightarrow \operatorname{sen}x=o(\tan x)$ per $x\to\frac{\pi}{2}$

- Proprietà dei simboli di Landau:

1) I simboli $\asymp$, $\sim$, o sono casi particolari di O, per $x\to c$. Inoltre se $f\sim g,\ x\to c\Rightarrow f\asymp g,\ x\to c$
infine:
poichè $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=l$ dove $l\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{l\cdot g(x)}=\frac{l}{l}=1\Rightarrow f\sim l\cdot g,\ x\to c$ ovvero se $f\asymp g\Leftrightarrow f\sim l\,g$

2) Sia $h(x)=f(x)-g(x)\Rightarrow f(x)=g(x)+h(x)$
Se $f\sim g$ significa che $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{g(x)+h(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\left(\frac{g(x)}{g(x)}+\frac{h(x)}{g(x)}\right)=\lim_{x\to c}\left(\frac{f(x)-g(x)}{g(x)}+1\right)=1$

$=\lim_{x\to c}\left(\frac{f(x)}{g(x)}-1+1\right)\Rightarrow\lim_{x\to c}\left(\frac{f(x)}{g(x)}-1\right)=0=\lim_{x\to c}\left(\frac{g(x)+h(x)}{g(x)}-1\right)=\lim_{x\to c}\left(1+\frac{h(x)}{g(x)}-1\right)\Rightarrow\lim_{x\to c}\frac{h(x)}{g(x)}=0.$

L'ultima uguaglianza implica che $h(x)=o\,g(x)$ ovvero $f(x)-g(x)=o\,g(x)$. Quindi $f(x)=g(x)+o(g)$
$f\sim g\Leftrightarrow f=g+o(g)$

3) Sia $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$\lim_{x\to c}\frac{g(x)}{\lambda f(x)}=0\Rightarrow g(x)=o(\lambda f)$ ovvero $\lim_{x\to c}\frac{g(x)}{f(x)}=0$ Se $g(x)=o(\lambda f)\Rightarrow o(\lambda f)=o(f)$
Se $g(x)=\lambda o(f)\Rightarrow \lambda o(f)=o(f)$

4) $\lim_{x\to c}f(x)=0\Rightarrow\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{1}=0$ ovvero $f(x)=o(1)$ per $x\to c$
$f(x)=O(1)\Rightarrow |f(x)|\leq C\ \forall x\in I,\ x\neq c$ con $C>0$

5) Se f è continua in $x_0\Rightarrow\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\Rightarrow\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=0\Rightarrow\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{1}=0$ Ciò implica:

$f(x)-f(x_0)=o(1),\ x\to x_0$ ovvero $f(x)=f(x_0)+o(1)$ per $x\to x_0$

esempi:

$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos 2x}{\text{sen}^2 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x^2}{9x^2} = \frac{2}{9}$

$1-\cos 2x \sim 2x^2, x \to 0$; $\text{sen}^2 3x \sim 9x^2, x \to 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen} 2x + x^3}{4x + 5\log(1+x^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen} 2x}{4x} = \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen} 2x}{2x} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen} 2x}{2x} = \frac{1}{2}$

$x^3 = o(\text{sen} 2x), x \to 0$, $5\log(1+x^2) = o(4x)$ $x \to 0$

N.B: Non è lecito applicare tali regole nel calcolo del limite di una somma o differenza di una funzione, cioè $\lim_{x \to c} [f(x) \pm g(x)] \neq \lim_{x \to c} [\tilde{f}(x) \pm \tilde{g}(x)]$ $\cancel{x}$ $f \sim \tilde{f}$ e $g \sim \tilde{g}$, $x \to c$

INFINITESIMI ED INFINITI

Sia $f: I(c) \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$

- f è infinitesima in $c \Leftrightarrow \lim_{x \to c} f(x) = 0$, ovvero $f = o(1)$ per $x \to c$
- f è infinito in $c \Leftrightarrow \lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$

- Siano f e g due infinitesimi in $c \Rightarrow \begin{cases} \text{se } f \asymp g \text{ (o anche } f \sim g) \Rightarrow f, g \text{ sono infinitesimi dello stesso ordine} \\ \text{se } f = o(g), x \to c \Rightarrow f \text{ è infinitesimo di ord. superiore a } g \\ \text{se } g = o(f), x \to c \Rightarrow f \text{ è infinitesimo di ord. inferiore a } g \end{cases}$

In tutti gli altri casi f e g sono infinitesimi incontrollabili

- Siano f e g due infiniti in $c \Rightarrow \begin{cases} \text{se } f \asymp g, x \to c \Rightarrow f, g \text{ sono infiniti dello stesso ordine} \\ \text{se } f = o(g), x \to c \Rightarrow f \text{ è infinito di ordine inferiore a } g \\ \text{se } g = o(f), x \to c \Rightarrow f \text{ è infinito di ordine superiore a } g \end{cases}$

In tutti gli altri casi f e g sono infiniti non controllabili

N.B. f è infinitesimo di ordine superiore a $g \Rightarrow f$ tende a c più velocemente di g

esempi:

- $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ (con $f = e^x - 1$, $g = x$) $\to \lim_{x \to 0} (e^x - 1) = 0$; $\lim_{x \to 0} x = 0 \Rightarrow f$ e g sono infinitesimi in 0.

Poiché $e^x - 1 \sim x \Rightarrow f$ e g si dicono infinitesimi dello stesso ordine per $x \to 0$

INFINITESIMO ED INFINITO "CAMPIONE"

Sia $\varphi: \text{dom}\,\varphi \to \mathbb{R}$ tale che $\varphi \in I(c)$

	infinitesimo campione	infinito campione
$c = x_0 \in \mathbb{R}^* \to$	$\varphi(x) = x - x_0$; $\varphi(x) = \lvert x - x_0 \rvert$	$\varphi(x) = \frac{1}{x - x_0}$; $\varphi(x) = \frac{1}{\lvert x - x_0 \rvert}$
$c = +\infty \to$	$\varphi(x) = \frac{1}{x}$	$\varphi(x) = x$
$c = -\infty \to$	$\varphi(x) = \frac{1}{\lvert x \rvert}$	$\varphi(x) = \lvert x \rvert$

*In particolare:

$c = x_0^+$	$\varphi(x) = x - x_0$	$\varphi(x) = \frac{1}{x - x_0}$
$c = x_0^-$	$\varphi(x) = x_0 - x$	$\varphi(x) = \frac{1}{x_0 - x}$

Sia f un infinitesimo (o infinito) in c. Se esiste un numero reale $\alpha > 0$ tale che $f \asymp \varphi^\alpha$, $x \to c$ allora α è l'ordine di infinitesimo (o di infinito) di f in c rispetto all'infinitesimo campione (o all'infinito campione) φ

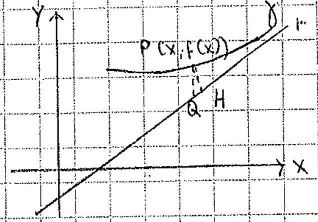
Quindi $\lim_{x \to c} f(x) = 0$ visto che f è un infinitesimo di c.

$\forall \beta < \alpha \Rightarrow f = o(\varphi^\beta)$ mentre $\forall \beta > \alpha \Rightarrow \varphi^\beta = o(f)$

ASINTOTI

- asintoto verticale: se $\lim_{x \to \pm\infty x_0} f(x) = \infty \Rightarrow r: x = x_0$ è asintoto verticale della funzione, $x_0 \notin \text{dom} f$
- asintoto orizzontale: se $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l \Rightarrow r: y = l$ è asintoto orizzontale della funzione

In generale: si definisce asintoto di una funzione $f(x)$ se γ la distanza di un punto qualunque della funzione dalla retta tende a 0, quando o l'ascissa o l'ordinata (o entrambe tendono a ∞.



- asintoto obliquo:

$r: mx + q = y \to$ eq. generale di una retta non parallela agli assi

$\gamma: y = f(x)$

per definizione di asintoto: $\lim_{x \to \infty} \overline{PH} = 0$

$\cancel{X}$= proiezione di P sull'asse x

la proiezione di P sull'asse x interseca la retta r in $Q(x, mx+q)$

$\overline{PQ} = |f(x) - mx - q| \to$ differenza delle ordinate

$\lim_{x \to \infty} \overline{PH} = \lim_{x \to \infty} \overline{PQ} = 0$

$\lim_{x \to \infty} |f(x) - mx - q| = \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx - q) = 0 \Rightarrow (f(x) - mx - q)$ è un infinitesimo in ∞ per $x \to \infty$

$\lim_{x \to \infty} \frac{(f(x) - mx - q)}{x} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{f(x)}{x} - m - \underbrace{\frac{q}{x}}_{0} \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = m$ se tale limite è finito

la retta $y = mx + q$ è un asintoto obliquo se $\lim_{x \to \infty} (f(x) - mx - q) = 0$

$q = \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx)$ se tale limite è finito

Quindi per la determinazione di un asintoto obliquo:
- condizione necessaria $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$
- condizioni sufficienti e necessarie $\begin{cases} \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad m \in (-\infty, +\infty) \text{ e } m \neq 0 \\ \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx) = q \in (-\infty, +\infty) \end{cases}$

Conclusione:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \notin \text{dom} f$

① $\lim_{x \to \infty} f(x) \to$ esiste ed è finito $\Rightarrow$ asintoto orizzontale: $y = l$
$\quad \searrow$ esiste ed è infinito $\Rightarrow$ potrebbero esserci asintoti obliqui se $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\lim_{x \to \infty} (f(x) - mx) = q$

② $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \to$ asintoto verticale $x = x_0$

N.B.: se ci sono asintoti ~~ve~~ orizzontali $\Rightarrow$ non ci sono asintoti obliqui
- quando $f(x)$ è razionale fratta, avremo sicuramente un asintoto obliquo se il grado del denominatore è inferiore di un'unità rispetto al grado del numeratore.

$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx - q) = 0 \to$ il grafico della funzione tende a confondersi con quello di una retta, $x \to +\infty$

$f(x) - mx - q = o(1) \to x \to +\infty$, ovvero $f(x) = mx + q + o(1)$, $x \to +\infty$

RICORDA: se $\lim_{x \to \infty} (f(x) - mx) = \pm\infty \Rightarrow$ non esiste l'asintoto obliquo di $f(x)$ (es: $f(x) = x + \sqrt{x}$)

LIMITI DI SUCCESSIONI (parte 2 di 2)

$S=\{a_n, n\in\mathbb{N}\}$ $S:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, $n\mapsto a_n\in\mathbb{R}$ } → una successione è una particolare funzione definita sugli interi

Tutti i teoremi di limiti di funzioni valgono per i limiti di successioni:

- teorema di unicità del limite: il limite di una successione se esiste è unico
- teorema del confronto (primo): siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni tali che esistono finiti o non i limiti e valgono rispettivamente l e m. Se definitivamente* $a_n\le b_n \Rightarrow l\le m$
- teorema del confronto (secondo): siano $\{a_n\}, \{b_n\}$ e $\{c_n\}$ tre successioni tali che $\lim_{n\to\infty} a_n = l = \lim_{n\to\infty} c_n$. Se definitivamente vale $a_n\le b_n\le c_n$, allora $\lim_{n\to\infty} b_n = l$

...

*Def: data una successione $\{a_n, n\in\mathbb{N}\}$ diciamo che questa soddisfa DEFINITIVAMENTE una certa proprietà se esiste n_0 tale che la proprietà è soddisfatta da n_0 in poi $\forall a_n, n\ge n_0$.

- teorema di limitatezza: una successione convergente è limitata

se $\lim_{n\to\infty} a_n = l\in\mathbb{R} \Rightarrow S=\{a_n, n\in\mathbb{N}\}$ è un insieme limitato

Dimostrazione:

$\lim_{n\to\infty} a_n = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N>0: \forall n\ge N,\ l-\varepsilon\le a_n< l+\varepsilon$ ovvero $|a_n-l|<\varepsilon$

Sia $\varepsilon=1 \Rightarrow |a_n-l|<1 \Rightarrow l-1<a_n<l+1$ ∄ se $\varepsilon=1$, $\exists n_\varepsilon\ge N: \forall n>n_\varepsilon$ si ha $|a_n-l|<1$ $(n_\varepsilon=n_1)$

$|a_n|=|a_n-l+l|\le|a_n-l|+|l|$ ~~$<1+|l|$~~ per disuguaglianza triangolare

Dunque ponendo $M=\max\{|a_1|,\dots|a_{n_1}|, 1+|l|\}$ si ha $|a_n|\le M$, $\forall n\ge N$

- teorema del criterio del rapporto: sia $\{a_n\}$ una successione definitivamente positiva. Supponiamo che esista $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$

Allora $\begin{cases} q<1 \to 0 \\ q=1 \to \nexists \\ q>1 \to +\infty \end{cases}$

N.B.: nelle dim. si $a_{n+1}\ne a_n+1$

Dimostrazione: supponiamo che $a_n\ge 0$ $\forall n\ge n_0$. Per ipotesi esiste il limite $n\to\infty$ del rapporto tra a_{n+1} e a_n

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N>0: \forall n\ge N\ q-\varepsilon\le\frac{a_{n+1}}{a_n}<q+\varepsilon$. Sia $n\ge\max(N,n_0)$ quindi $a_n\ge 0$.

$q<1 \Rightarrow q-1<0 \Rightarrow 2q-1<0$

Sia $\varepsilon=1-q \Rightarrow q-1+q<\frac{a_{n+1}}{a_n}<\cancel{q}+1-\cancel{q} \Rightarrow 0<a_{n+1}<a_n$ (moltiplico per $a_n\ge0$)

Poiché $a_{n+1}<a_n$ → la successione è monotona decrescente → limitata inferiormente

0 è il minorante

Sia $q<1$ → caso ①

$\exists\lim_{n\to\infty} a_n=l=0$ necessariamente, infatti se $l\ne0$, $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=l$ e il loro rapporto $q=1$ CONTRO IP.

Sia $q>1$ → caso ③

Sia $b_n=\frac{1}{a_n} \to \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\hat{q}=\frac{1}{q}<1 \Rightarrow$ quindi b_n converge a $0 \Rightarrow \frac{1}{a_n}$ converge a $0 \Rightarrow a_n\to+\infty$

- applicazioni del teorema del criterio del rapporto

- $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!} \Rightarrow a_n=\frac{2^n}{n!}$; $a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{2^n\cdot 2}{(n+1)\,n!}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{2^n}\cdot2}{(n+1)\cancel{n!}}\cdot\frac{\cancel{n!}}{\cancel{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(n+1)}=0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n=0$, poiché $q<1$

- $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2} \Rightarrow a_n=\frac{(2n)!}{(n!)^2}$; $a_{n+1}=\frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2}=\frac{(2n+2)!}{(n+1)^2(n!)^2}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\frac{(2n+2)!}{(n+1)^2(\cancel{n!})^2}\cdot\frac{(\cancel{n!})^2}{(2n)!}=\lim\frac{(2n+2)(2n+1)(\cancel{2n})!}{(n+1)^2(\cancel{2n})!}=\lim\frac{2\cancel{(n+1)}(2n+1)}{(n+1)^{\cancel{2}}}=\lim\frac{4n+4}{n+1}=4 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n=+\infty$

- teorema del criterio della radice: sia $\{a_n\}$ una successione definitivamente positiva. Supponiamo che esista $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$

allora $\begin{cases} q<1 \Rightarrow a_n\to0 \\ q=1 \Rightarrow \nexists \\ q>1 \Rightarrow a_n\to+\infty \end{cases}$

Allo

CALCOLO DIFFERENZIALE

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in dom f$. Sia f definita in $I(x_0)$

$x \in I(x_0)$ e $x \neq x_0$

- incremento della variabile indipendente: $\Delta x = x - x_0$ $\to x = \Delta x + x_0$
- incremento della variabile dipendente: $\Delta y = y - y_0$ ovvero $\Delta f = f(x) - f(x_0) \to f(x) = \Delta f + f(x_0)$
- rapporto incrementale: $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

Δf rappresenta l'incremento assoluto della variabile dipendente f nel passaggio da x_0 a $x_0 + \Delta x$

$\Delta f / \Delta x$ rappresenta il tasso di incremento

$\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to$ avvicinandoci a x_0 troveremo la retta tangente

$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ se esiste ed è finito, coincide con il coeff. angolare della retta tangente

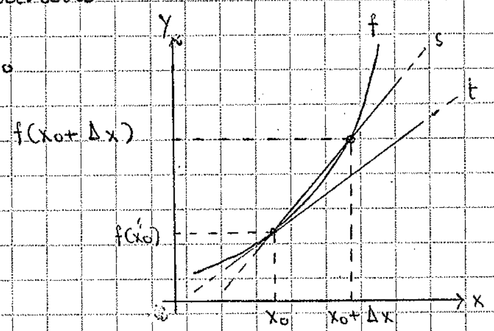
- derivata: Sia f una funzione definita in un intorno di $x_0 \in dom f$.
  È detta derivata di f nel punto x_0 SE ESISTE finito il limite del rapporto incrementale $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ per $x \to x_0$.

$$f'(x_0) = y'(x_0) = D[f(x_0)] = \frac{df}{dx} = \lim_{x \to x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Se questa derivata esiste allora la retta tangente la funzione in x_0, sarà una retta passante nel punto $(x_0, f(x_0))$ con coeff. angolare uguale alla derivata

$y = mx + q = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \to$ retta tangente t in x_0

$y = f(x_0) + \dfrac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0) \to$ retta secante s



Per semplificare la scrittura poniamo $h = x - x_0$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$x \to x_0 \Rightarrow \underbrace{x - x_0}_{h} \to 0$.

- Sia $J \subset dom f$.
  f è derivabile in J se esiste la derivata di f, $\forall x \in J$
  la derivata di una funzione è una funzione: $f': x \to f'(x)$
  $f: dom f' \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$dom f' = \{x \in dom f : f \text{ è derivabile in } x\}$

- Relazione tra continuità e derivabilità: derivabilità $\Rightarrow$ continuità
  continuità $\not\Rightarrow$ derivabilità

Se f è una funzione derivabile in x_0 allora essa è continua in x_0, ma non è sempre vero il contrario.

Dimostrazione: f è continua in $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$

Se f è derivabile in $x_0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = \underbrace{\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{f'(x)} \overbrace{(x - x_0)}^{0} = f'(x_0) \cdot 0 = 0$

Dimostrazione rapida: per ipotesi f è derivabile in x_0:

$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{\underbrace{(x - x_0)}_{0}} = \lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \to$ def. di continuità

- Segno di f': Se f è crescente in $J \Rightarrow f' \geq 0$
  Se f è decrescente in $J \Rightarrow f' \leq 0$

f è crescente $\Leftrightarrow \underset{x \geq x_0}{f(x) \geq f(x_0)} \Rightarrow f(x) - f(x_0) \geq 0 \ \forall x \geq x_0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{+}}{\underbrace{x - x_0}_{+}} = f'(x) \geq 0$

f è decrescente $\Leftrightarrow f(x) \leq f(x_0) \Rightarrow f(x) - f(x_0) \leq 0 \ \forall x \geq x_0$. $f'(x) \leq 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 102

- Derivata di una funzione composta (vedi dimostrazione alternativa ultima pagina)
Sia $f(x)$ una funzione derivabile in $x_0 \in \mathbb{R}$. Sia poi $g(y)$ una funzione derivabile nel punto $y_0 = f(x)$. Allora la funzione composta $g(f(x))$ è derivabile in x_0 e si ha:
$D(f(g(x))) = f'(g(x))\, g'(x)$

Dimostrazione:
① $f'(y) = \frac{f(y+z) - f(y)}{z}$ per $z \to 0$ ovvero $f'(y) = \lim_{z \to 0} \frac{f(y+z) - f(y)}{z}$.

② Sia $l(z) = -f'(y) + \frac{f(y+z) - f(y)}{z} \Rightarrow \lim_{z\to 0} l(z) = -\lim_{z\to 0} f'(y) + \lim_{z\to 0} \frac{f(y+z) - f(y)}{z} = -\lim_{z\to 0} f'(y) + f'(y) =$
$= -f'(y) + f'(y) = 0$

③ Dalla ② si ha che: $f(y+z) + f(y) = z(l(z) + f'(y))$
④ Sia $g(x) = y$. Pongo $z = g(x+h) - g(x) \Rightarrow g(x+h) = y + z$

Per definizione di derivata, si ha:
$D(f(g(x))) = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(y+z) - f(y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{z(l(z) + f'(y))}{h} =$
$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}(l(z) + f'(y)) = \lim_{h\to 0} \left(\underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{g'(x)} (l(z) + f'(y))\right) = g'(x) \lim_{z\to 0}(l(z) + f'(y)) =$
$= g'(x)\, f'(y) = g'(x)\, f(g(x))$ (c.v.d.)

- Derivata delle funzioni inverse
Sia f una funzione continua e invertibile in un intorno di un punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Inoltre sia f derivabile in x_0, con $f'(x_0) \neq 0$. Allora la funzione inversa $f^{-1}(y)$ è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e si ha:
$f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

Dimostrazione: $y = f(x)$ e $(f^{-1}) = g$ ovvero $g(y) = (f^{-1}(x))$
$g'(y) = (f^{-1}(x))' = \lim_{y\to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)} =$
$= \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$

Quindi: $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$

- esercizio. Determinare la derivata di $\tan x$
$f(x) = \tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$
$f'(x) = \frac{D(\operatorname{sen} x)\cos x - \operatorname{sen} x\, D(\cos x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Applicazione di funzione composta
- $h(x) = \operatorname{sen}^2 x \to f(x) = x^2,\ g(x) = \operatorname{sen} x \to f'(x) = 2x,\ g'(x) = \cos x$
$h(x) = f(g(x))$
$h'(x) = f'(g(x))\, g'(x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$

- $h(x) = \operatorname{sen} x^2 \to f(x) = \operatorname{sen} x,\ g(x) = x^2 \to f'(x) = \cos x;\ g'(x) = 2x$
$h(x) = f(g(x))$
$h'(x) = f'(g(x))\, g'(x) = \cos x^2 \cdot 2x = 2x \cos x^2$

- $h(x) = e^{2x+1} \to f(x) = e^x,\ g(x) = 2x+1 \to f'(x) = e^x,\ g'(x) = 2$
$h(x) = f(g(x))$
$h'(x) = f'(g(x))\, g'(x) = e^{2x+1} \cdot 2 = 2e^{2x+1}$

- Proprietà: Sia f una funzione pari [dispari] derivabile in tutto il suo dominio. Allora la derivata f' è una funzione dispari [pari]

Ip: f è pari [~~dispari~~]
Tesi: f' è dispari [~~pari~~]

Dimostrazione: f è pari $\Rightarrow \forall x \in \text{dom} f,\ f(-x) = f(x)$

$D[f(x)] = f'(x)$

f. composta $\Leftarrow D[f(-x)] = a'(b(x)) \cdot b'(x) = f'(-x)(-1) = -f'(-x)$

$a(x) = f(x) \Rightarrow a'(x) = f'(x)$

$b(x) = -x \Rightarrow b'(x) = -1$

Se $f(-x) = f(x) \Rightarrow f'(x) = -f'(-x) \Rightarrow f'(-x) = -f'(x)$

def. f. pari — def. f. dispari

Ip: f è dispari
Tesi: f' è pari

Dimostrazione: f è dispari $\Rightarrow \forall x \in \text{dom} f,\ f(-x) = -f(x)$

$D[-f(x)] = -f'(x)$

f. composta $\Leftarrow D[f(-x)] = -f'(-x)$

Se $f(-x) = -f(x) \Rightarrow -f'(x) = -f'(-x) \Rightarrow f'(x) = f'(-x)$

def. f. dispari — def. f. pari

- Dimostrazione della derivata del quoziente di due funzioni

$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = D[f(x) \cdot g^{-1}(x)] =$ (regola di derivazione del prodotto, $g^{-1}(x)$ è f. composta)

$= f'(x) \cdot g^{-1}(x) + f(x) \cdot (-1)\, g(x)^{-2} \cdot g'(x) = \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)\, g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)\, g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

- Dimostrazione alternativa della derivata di funzioni composte:

$D[f(g(x))] =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \cdot \left(\frac{g(x+h) - g(x)}{g(x+h) - g(x)}\right) =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{g'(x)} =$

$x + h = z \Rightarrow h = z - x$

Se $h \to 0 \Rightarrow z - x \to 0 \Rightarrow z \to x$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(g(z)) - f(g(x))}{g(z) - g(x)} = f'(g(x)) \Rightarrow D[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Applicazioni di funzioni composte per il calcolo della derivata:

- $D[(f(x))^n] = n(f(x))^{n-1} \cdot f'(x)$
- $D[e^{f(x)}] = e^{f(x)} \cdot f'(x)$
- $D[(f(x))^{g(x)}] = [f(x)]^{g(x)} \cdot \left[g'(x) \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}\right]$

Dimostrazione $(f(x))^{g(x)} = e^{\ln (f(x))^{g(x)}} = e^{g(x) \ln (f(x))} = h(x)$

$h'(x) = h(x) \cdot D[g(x) \ln (f(x))] = h(x) \cdot \left(g'(x) \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}\right) =$
$= (f(x))^{g(x)} \left(g'(x) \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}\right)$

DERIVATE DI ALCUNE FUNZIONI

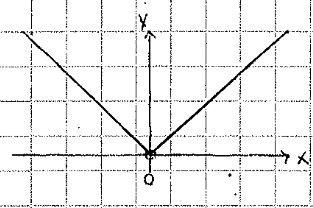
Derivata delle funzioni elementari	
$y = k$	$y' = 0$
$y = x^{\alpha}$	$y' = \alpha\, x^{\alpha-1}$
$y = \text{sen}\, x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\,\text{sen}\, x$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
$y = e^x$	$y' = e^x$
Regole di derivazione	
$y = f(x) + g(x)$	$y' = f'(x) + g'(x)$
$y = f(x) \cdot g(x)$	$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$y = k \cdot f(x)$	$y' = k \cdot f'(x)$
$y = \frac{1}{g(x)}$	$y' = -\,\frac{g'(x)}{g^2(x)}$
$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	$y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
$y = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} = \tan x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$y = \frac{\cos x}{\text{sen}\, x} = \text{cotan}\, x$	$y' = -\,\frac{1}{\text{sen}^2 x}$
Derivata di una funzione composta	
$y = [g(f(x))]$	$y' = g'[f(x)] \cdot f'(x)$
$y = [f(x)]^n$	$y' = n[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$
$y = \ln\,[f(x)]$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$
$y = e^{f(x)}$	$y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$
$y = [f(x)]^{g(x)}$	$y' = [f(x)]^{g(x)} \cdot [g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}]$
Derivata della funzione inversa	
$y = \text{sen}^{-1} x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \cos^{-1} x$	$y' = -\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \tan^{-1} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
$y = \cot^{-1} x$	$y' = -\,\frac{1}{1+x^2}$

PUNTI DI NON DERIVABILITÀ

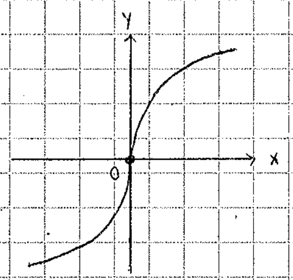
Sia f una funzione definita in un intorno destro [sinistro] di $x_0 \in \mathbb{R}$.
Supponiamo che $\nexists f'(x_0) \rightarrow x_0 =$ punto di non derivabilità.
f è derivabile da destra in x_0 [da sinistra in x_0] se (esiste ed è finito)
$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ $\left[f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] \in \mathbb{R}$
Per l'unicità del limite, se $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \Leftrightarrow f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$
$\downarrow$
Una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è derivabile in x_0 se e solo se $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$

- Classificazione di x_0 in base al comportamento di f'_+ e f'_-:
- punto angoloso: $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$ oppure se uno solo tra f'_- e f'_+ è infinito
- punto a tangente verticale: $f'_+ = f'_- = -\infty$ oppure $f'_+ = f'_- = +\infty$ (infiniti di segno concorde)
- punto di cuspide: $f'_+ = -\infty$ e $f'_- = +\infty$ oppure $f'_+ = +\infty$ e $f'_- = -\infty$ (infiniti di segno discorde)

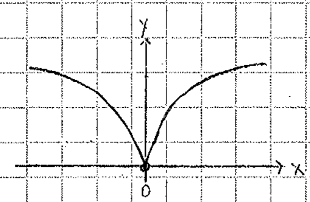
esempi:
- $f(x) = |x| \rightarrow f'(x) = \mathrm{sign}(x)$ $\forall x \neq 0 \rightarrow 0$ è un punto angoloso per f
$f'_-(x) = -1$ e $f'_+(x) = +1$ quindi $f'_-(0) = -1$ e $f'_+(0) = +1$



- $f(x) = \sqrt[3]{x} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = f'_+(0) = f'_-(0) = +\infty$
0 è un punto a tangente verticale per f



- $f(x) = \sqrt{|x|} \rightarrow f'_+(x_0) = +\infty$ e $f'_-(x_0) = -\infty$
0 è un punto di cuspide per f



Attenzione: $x_0 \in \mathrm{dom} f$

- Teorema (tappabuchi):
Sia f una funzione continua in x_0 e derivabile in tutti i punti $x \neq x_0$ di un intorno di x_0.
Se esiste finito il limite per $x \to x_0$ di $f'(x)$ allora f è derivabile anche in x_0 e si ha
$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x)$

IMPORTANTE!
Ip: f è continua in x_0 — Ts: $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x)$
f è derivabile in $I(x_0) \setminus \{x_0\}$

Dimostrazione: è basata sul teorema di de l'Hôpital che sarà enunciato e dimostrato successivamente.

D.H.$\rightarrow$ se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

$f'(x_0) \overset{def.}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{0}{0}$

$D[f(x) - f(x_0)] = f'(x)$ $\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \to x_0} f'(x)$
$D[x - x_0] = 1$

Applicazione (teorema tappabuchi):
$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{se } x < x_0 \\ f_2(x) & \text{se } x \geq x_0 \end{cases}$
① imporre la continuità (se è continua: $\lim_{x \to x_0^-} f_1(x) = f_1(x_0)$ e $\lim_{x \to x_0^+} f_2(x) = f_2(x_0) \rightarrow f_1(x_0) = f_2(x_0)$ *

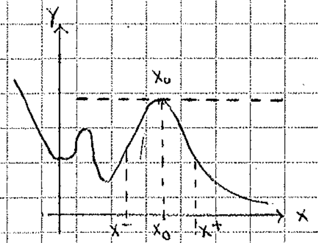
② verificare la derivabilità (teorema tappabuchi): $\lim_{x \to x_0^-} f_1'(x) = f_2'(x_0)$

* ovvero $\lim_{x \to x_0^-} f_1(x) = f_2(x_0)$

TEOREMI SULLE DERIVATE

- Teorema di Fermat: Sia f una funzione definita in un intorno di un punto x_0. Se f
  Se x_0 è un punto di estremo ed esiste la derivata di f in x_0, allora
  $f'(x_0) = 0$.

punto di estremo ⇒ punto critico



Ip: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0 punto di estremo di f, $\exists f'(x_0)$
Tesi: $f'(x_0) = 0$
Dimostrazione: Sia x_0 un massimo di f

$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \frac{-}{-} \geq 0$. Per ipotesi $\exists f'(x_0) \Rightarrow f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$

$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \frac{-}{+} \leq 0$

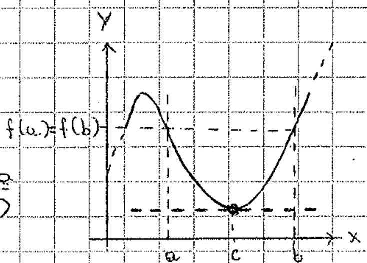
L'unico caso in cui si verifica l'uguaglianza è quando $f'_-(x_0)$ e $f'_+(x_0)$ si annullano, perciò $f'(x_0) = 0$

Attenzione: Per trovare tutti i punti di estremo di una funzione può non essere sufficiente cercare i punti critici della funzione.

- Teorema di Rolle: Sia f una funzione definita su un intervallo chiuso e limitato [a;b] che abbia le seguenti caratteristiche:

① sia continua in $[a;b]$
② sia derivabile in $(a;b)$
③ sia $f(a) = f(b)$

} ipotesi ⇒ esiste ALMENO un punto $c \in (a;b)$: $f'(c) = 0$
c è un punto critico di f e $c \in (a;b)$



Dimostrazione:
- per ipotesi f è continua in $[a;b] \Rightarrow \exists$ min, max su $[a;b]$
  teorema di Weierstrass
caso 1: $m = M \Rightarrow f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0 \ \forall x \in [a;b]$
caso 2: $m < M \Rightarrow m \leq f(a) = f(b) \leq M$ (almeno una delle due disuguaglianze è stretta altrimenti caso 1)
$m, M \in (a;b)$
f è derivabile in $(a;b) \Rightarrow$ per il Teorema di Fermat $\exists f$ $\exists c \in (a;b) : f'(c) = 0$

Attenzione: Il teorema di Rolle garantisce l'esistenza di almeno un punto critico, ovvero è una condizione sufficiente. Tuttavia se un'ipotesi del teorema di Rolle non è soddisfatta, questo non implica che la funzione non ha nemmeno un punto critico

Come trovare il punto c?
- Sia $f(x) = \sqrt{x} - x$ e sia $I = [0;1]$
dom$f = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty]$
① f è continua in I poiché $I \subset$ domf
② f è derivabile in I poiché è ottenuta dalla somma di funzioni composte } ip. verificate
③ $f(0) = 0$ e $f(1) = 0 \Rightarrow f(a) = f(b)$

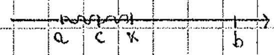
$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 1 \Rightarrow f'(x) = 0$;
$\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1 = 0$; $2\sqrt{x} - 1 = 0$; $\sqrt{x} = \frac{1}{2}$; $x = \frac{1}{4}$. $x \in I \Rightarrow x$ è il punto critico c

- Sia $f(x) = x^3 - 1$ e sia $I = [-1;3]$
dom$f = \mathbb{R}$
① f è continua in I perché $I \subset$ domf
② f è derivabile in I perché è ottenuta dalla differenza di funzioni derivabili
③ $f(-1) = -1 - 1 = -2$
   $f(3) = 27 - 1 = 26$ } $f(-1) \neq f(3) \Rightarrow$ non siamo sicuri che esiste il punto critico c di f

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 102

- Conseguenze del teorema di Lagrange

• Sia f una funzione che soddisfi le ipotesi del teorema di Lagrange.
Se f ha derivata nulla $\forall x \in (a,b)$ allora $f(x)=K$



Dimostrazione: $\forall x \in (a;b) \Rightarrow (a,x) \subset (a,b)$
$\forall c \in (a,x) \Rightarrow c \in (a;b)$

Per il teorema di Lagrange: $f'(c) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ $\quad x \neq a$

Per ipotesi: $f'(x) = 0 \ \forall x \in (a,b)$

Ciò implica $f'(c)=0$

$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0 \Rightarrow f(x)-f(a)=0 \Rightarrow f(x)=f(a)=K$

• Sia f una funzione che soddisfi le ipotesi del teorema di Lagrange

- se $f'(x)>0 \ \forall x \in (a,b) \not\Leftarrow$ f è strettamente crescente in (a,b) $\Rightarrow$
- se $f'(x) \geq 0$ " $\not\Leftarrow$ f è crescente in $(a;b)$ $\Leftrightarrow$
- se $f'(x)<0$ " $\not\Leftarrow$ f è strettamente decrescente in (a,b) $\Rightarrow$
- se $f'(x) \leq 0$ " $\not\Leftarrow$ f è decrescente in (a,b) $\Leftrightarrow$

Dimostrazione: sia $x_1, x_2 \in (a;b)$ tali che $x_2 > x_1$ e quindi $x_2 - x_1 > 0$
poichè $(x_1,x_2) \subset (a;b) \Rightarrow$ se $c \in (x_1,x_2) \Rightarrow c \in (a;b)$

Per il teorema di Lagrange $f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \Rightarrow f'(c)(x_2-x_1) = f(x_2)-f(x_1)$ ①

l'uguaglianza ① è verificata se $f'(c)$ e $f(x_2)-f(x_1)$ sono concordi; quindi:

- se $f'(c)>0 \Rightarrow f(x_2)-f(x_1)>0$; $f(x_2)>f(x_1)$ $\forall x \in (a,b) \Rightarrow$ f è st. crescente in (a,b)
- se $f'(c)<0 \Rightarrow f(x_2)-f(x_1)<0$; $f(x_2)<f(x_1)$ $\forall x \in (a,b) \Rightarrow$ f è st. decrescente in (a,b)

• Siano f e g due funzioni che soddisfano le ipotesi del teorema di Lagrange.
Se $f'(x)=g'(x) \Rightarrow f(x)-g(x)=K$

Dimostrazione: sia $h(x)=f(x)-g(x)$. h soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange
$h'(x)=f'(x)-g'(x)=0$ visto che $f'(x)=g'(x)$

Se $h'(x)=0 \Rightarrow h(x)=K=f(x)-g(x)$. (teorema precedente)

• Sia f una funzione che soddisfi le ipotesi del teorema di Lagrange.
Se f è strettamente crescente $\not\Rightarrow f'(x)>0$

DERIVATE DI ORDINE SUPERIORE

- derivata di ordine K: $K \geq 0 = f^{(K)}(x_0)$ se esiste la derivata di ordine K-1
- per definizione $f^{(0)}(x)=f(x)$

Se f è un polinomio di grado n, la derivata di ordine n+K, $K \geq 1$ è sempre 0
Se $f(x)=x^n \Rightarrow f^{(n)}(x)=n!$

Dimostrazione: $f(x)=x^n$
$f'(x)=n(x)^{n-1}$
$f''(x)=n(n-1)x^{(n-2)}$
$f^n(x)=n!$

esempio: $f(x)=x^4$
$f'(x)=4x^3$
$f''(x)=12x^2$
$f'''(x)=24x$
$f^{IV}(x)=24=4!$

Se $f(x)=e^x \Rightarrow f^{(k)}(x)=e^x$

- f è di classe C^K $(K \geq 0)$ in J se è derivabile K volte in ogni punto di J e se la derivata funzione derivata di ordine K, $f^{(K)}$ è continua in J. $C^K(J)$ = insieme delle funzioni di classe C^K su J

- f è di classe C^∞ su J se è derivabile un numero arbitrario di volte in ogni punto di J.
$C^\infty(J)$ = insieme delle funzioni di classe C^∞ su J

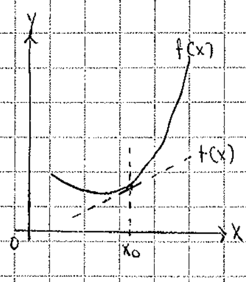
CONCAVITÀ

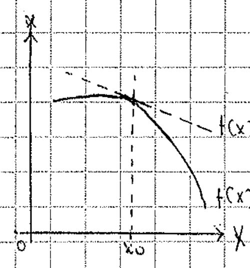
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

sia $t(x) = f(x_0) + f'(x)(x - x_0)$ → retta tangente la funzione nel punto x_0

- f è concava verso l'alto ↑ (convessa) in x_0 se esiste un intorno $I(x_0) \subseteq \mathrm{dom} f$ in cui $f(x) \geq t(x)$ $\forall x \in I(x_0)$
- f è concava verso il basso ↓ in x_0 se esiste un intorno $I(x_0) \subseteq \mathrm{dom} f$ in cui $f(x) \leq t(x)$ $\forall x \in I(x_0)$

N.B.: geometricamente f è convessa verso il basso in un punto se nell'intorno di quel punto, il suo grafico si trova al di $\overset{\text{sotto}}{\text{sopra}}$ della retta tangente





© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 102

• $n=2$

Vogliamo approssimare f in un intorno di x_0 con un polinomio di secondo grado, ovvero con una parabola.

$T_2(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+a(x-x_0)^2$ → polinomio di Taylor per $n=2$

$R_2(x)=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)-a(x-x_0)^2$ → resto o errore di approssimazione per $n=2$

$R_2(x)\to 0$ per $x\to x_0$

$R_2(x)=o((x-x_0)^2)$ per $x\to x_0$ → resto nella forma di Peano

$a=?$

Visto che $R_2(x)=o((x-x_0)^2)$ per $x\to x_0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{R_2(x)}{(x-x_0)^2}=0$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)-a(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2}\underset{\downarrow}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)-2a(x-x_0)}{2(x-x_0)}\underset{\downarrow}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-2a}{2}=0$$

Applicando 2 volte il teorema di de l'Hopital visto che ci troviamo in una forma di indeterminazione $\frac{0}{0}$.

$\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-2a}{2}=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}(f''(x)-2a)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}f''(x)=2a$

f è derivabile due volte in x_0 e $f''(x_0)$ è continua in $x_0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0}f''(x)=f''(x_0)=2a$, quindi:

$a=\frac{f''(x_0)}{2}$ → coefficiente del termine di secondo grado

Notiamo che a è uguale al coefficiente del termine di secondo grado ~~per~~ del resto nella forma di Lagrange per $n=1$

Ora siamo in grado di scrivere il polinomio di Taylor

$T_2(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2$ → polinomio nella forma di Taylor per $n=2$

Con considerazioni analoghe fatte per $n=1$, si ha che

$R_2(x)=\frac{f'''(c)}{3!}(x-x_0)^3$ → resto nella forma di Lagrange per $n=2$

• $n=3$

Ora siamo in grado di determinare $T_3(x)$ e $R_3(x)$ senza dover dimostrare il risultato ottenuto.

$T_3(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3$ → polinomio di Taylor per $n=3$

$=T_2(x)+R_2(x)$

$R_3(x)=\frac{f^{IV}(c)}{4!}(x-x_0)^4$ → resto nella forma di Lagrange

$R_3(x)=o((x-x_0)^3)$ per $x\to x_0$ → resto nella forma di Peano

$f(x)=T_3(x)+R_3(x)$

N.B: f deve essere derivabile 3 volte in x_0

• $n=4$

$T_4(x)=T_3(x)+R_3(x)$ → polinomio di Taylor per $n=4$

$R_4(x)=o((x-x_0)^4)$ → resto nella forma di Peano

$R_4(x)=\frac{f^{V}(c)}{5!}(x-x_0)^5$ → resto nella forma di Lagrange

In generale vale: $T_n(x)=T_{n-1}(x)+R_{n-1}(x)$ → polinomio di Taylor di grado n

$R_n(x)=o((x-x_0)^n)$ → resto nella forma di Peano

$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ → resto nella forma di Lagrange

$f(x)=T_n(x)+R_n(x)$.

N.B.: devono verificarsi delle condizioni ⇒ v. teorema di Taylor

SVILUPPI DI TAYLOR NOTEVOLI

- $f(x)=e^x$ in $x_0=0$. Determinare il polinomio di Taylor di f in $x_0=0$ di grado (o ordine) n
f è di classe C^∞ su $\mathbb{R}$
Si ha $f^{(n)}(x)=e^x$
Quindi $f^{(n)}(0)=e^0=1$

$T_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$
$=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\ldots\frac{1}{n!}x^n \rightarrow$ polinomio di Taylor di f in $x_0=0$ di ordine n

$R_n(x)=o((x-x_0)^n)=o((x)^n) \rightarrow$ resto nella forma di Peano
$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}=\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$, $c\in(0,x) \rightarrow$ resto nella forma di Lagrange

$f(x)=T_n(x)+R_n(x)=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\ldots+\frac{1}{n!}x^n+o((x)^n)\equiv e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n+o((x)^n)$

Sia $x=1 \Rightarrow$ il resto nella forma di Lagrange può essere riscritto così: $\frac{e^c}{(n+1)!}$ con $c\in(0,x)$
Quindi, poiché $f(x)=T_n(x)+R_n(x)$ si ha:
$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}e^c$ con $c\in(0,x)$
↓
$e_n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} \rightarrow 1<e^c<e<3 \Rightarrow \frac{1}{(n+1)!}<e-e_n<\frac{3}{(n+1)!} \rightarrow$ stima dell'errore commesso
↓
formula per il calcolo numerico approssimato del numero e.

- Determinare il polinomio di Taylor di f in x_0 di grado (o ordine) n
In questo caso bisogna ricordare che $f^n(x_0)\neq 0$ e quindi si ha; infatti $f^{(n)}(x_0)=e^{x_0}$

$T_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$
$=e^{x_0}+e^{x_0}(x-x_0)+\frac{1}{2!}e^{x_0}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{1}{n!}e^{x_0}(x-x_0)^n \rightarrow$ polinomio di Taylor di f in x_0 di grado n

$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}e^{x_0}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$

- $f(x)=\log x$, $x_0=1$. Determinare il polinomio di Taylor di f in $x_0=1$ di grado (o ordine) n

$f'(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$	$f'(1)=1$
$f''(x)=-1(x)^{-2}=(-1)x^{-2}$	$f''(1)=-1$
$f'''(x)=(-1)(-2)x^{-3}=2x^{-3}$	$f'''(1)=2$
$f^{IV}(x)=(-1)(-2)(-3)x^{-4}=-6x^{-4}$	$f^{IV}(1)=-6$
$f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}(n-1)!\,x^{-n}$	$f^{n}(1)=(-1)^{n+1}(n-1)!$

Notiamo che calcolando le derivate di ordine pari, otteniamo un risultato negativo mentre se la derivata è di ordine dispari, il risultato sarà positivo.
+ se n è pari, − se n è dispari

$T_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+\frac{1}{3!}f'''(x_0)(x-x_0)^3+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}(x-x_0)^n=$
$=0+1(x-1)+\frac{1}{2}(-1)(x-1)^2+\frac{1}{3!}(2)(x-1)^3+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}(x-1)^n$ *
$=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3+\ldots(-1)^{n+1}\frac{1}{n}(x-1)^n \rightarrow$ polinomio di Taylor di f in $x_0=1$ di grado n

$R_n(x)=o((x-1)^n) \rightarrow$ resto nella forma di Peano. Quindi $\log x=T_n(x)+R_n(x)$

- Effettuando il cambiamento di variabile indipendente $x-1\rightarrow x$, si ottiene il polinomio di Taylor di ordine n di $f(x)=\log(1+x)$ in $x_0=0$

$f(x)=\log(1+x)$, $x_0=0$

$T_n(x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n$

* ricorda che $\frac{2}{3!}=\frac{2}{3\cdot2\cdot1}=\frac{1}{3}$

Invece se $f(x)=\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+o(x^3)$ → (arrestato al terzo grado)

Infatti:

$\binom{\frac{1}{2}}{2}=\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}=-\frac{1}{8}$; $\binom{\frac{1}{2}}{3}=\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}=+\frac{1}{16}$

Ricorda:

$\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$ dove α = esponente di $(1+x)^\alpha$

n = grado del polinomio di Taylor

Lista degli sviluppi di Taylor / Maclaurin con resto di Peano di funzioni notevoli:

- $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\dots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$ → $e^x=1+x+o(x)$ per $x\to0$
- $\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$ → $\log(1+x)=x+o(x)$ per $x\to0$
- $\log x=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\dots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}(x-1)^n+o(x^n)$ → $\log x=(1-x)+o(x)$ per $x\to0$
- $\operatorname{sen}x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots+(-1)^m\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}+o(x^{2m+2})$ → $\operatorname{sen}x=x+o(x)$ per $x\to0$
- $\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+\dots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+o(x^{2m+1})$ → $\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$ per $x\to0$
- $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)x^2+\dots+\binom{\alpha}{n}x^n+o(x^n)$ → $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+o(x)$ per $x\to0$
- $(1+x)^{-1}=1-x+x^2-\dots+(-1)^n x^n+o(x^n)$ → $(1+x)^{-1}=1-x+o(x)$ per $x\to0$
- $(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+o(x^3)$ → $(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x+o(x)$ per $x\to0$

- somma algebrica di sviluppi

Siano: $f(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n+o(x^n)=p_n(x)+o(x^n)$ → sviluppo di Maclaurin di f

$g(x)=b_0+b_1x+\dots+b_nx^n+o(x^n)=q_n(x)+o(x^n)$ → " " " g

$f(x)\pm g(x)=(p_n(x)+o(x^n))\pm(q_n(x)+o(x^n))=p_n(x)\pm q_n(x)+o(x^n)$ → sviluppo di Maclaurin di $h=f\pm g$

Regola: lo sviluppo di una somma algebrica è la somma algebrica degli sviluppi

applicazione: determinare lo sviluppo di Maclaurin di f in di grado 0

$f(x)=-\operatorname{sen}x+e^x+1$

$\operatorname{sen}x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$ ⇒ $f(x)=1+\cancel{x}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)-\cancel{x}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)+1=2+\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3!}x^3+o(x^3)=$

$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$ $=2+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$

in alcuni casi, applicando questa regola, si potrebbe giungere a situazioni tipo $f(x)=o(x)$ il che non basta a determinare l'ordine di infinitesimo di f. Per questo motivo si usano gli sviluppi di ordine maggiore rispetto a quelli utilizzati.

In genere, si giunge a $f(x)=o(x)$ se si ha una cancellazione di tutte le potenze x di esponente $\leq n$, come nell'esempio seguente:

$f(x)=e^x-\sqrt{1+2x}$ → determinare l'ordine di infinitesimo in 0

$e^x=1+x+o(x)$ ⇒ $f(x)=\cancel{1}+\cancel{x}+o(x)-\cancel{1}-\cancel{x}+o(x)=o(x)$?

$\sqrt{1+2x}=(1+2x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}2x+o(x)=1+x+o(x)$

$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ ⇒ $f(x)=\cancel{1}+\cancel{x}+\frac{x^2}{2}+o(x^2)-\cancel{1}-\cancel{x}+\frac{x^2}{2}+o(x^2)=x^2+o(x^2)$

$\sqrt{1+2x}=(1+2x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}2x+\frac{1}{8}4x^2+o(x^2)=1+x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$

$f(x)$ è un infinitesimo di secondo ordine nell'origine

- prodotto di sviluppi:

Siano: $f(x)=p_n(x)+o(x)$ ⇒ $f(x)g(x)=(p_n(x)+o(x))(q_n(x)+o(x))=$

$g(x)=q_n(x)+o(x)$ $=p_n(x)q_n(x)+p_n(x)o(x)+q_n(x)o(x)+o(x^{2n})=p_n(x)q_n(x)+o(x^n)$

Regola: lo sviluppo di un prodotto è il prodotto degli sviluppi.

Se si ottengono potenze di x di esponente $>n$, ciascuna di esse è un $o(x^n)$, quindi potremo fare a meno di calcolarla

- $f(x) = \tan x \rightarrow$ determinare lo sviluppo di Maclaurin arrestato al terzo ordine

$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \Rightarrow \tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)$

$$\begin{array}{l|l} x + 0x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) & 1 + 0x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) \\ x + 0x^2 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) & x + \frac{1}{3}x^3 \\ \hline \quad \backslash \quad \backslash \quad + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) & \\ \quad\quad\quad + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) & \\ \hline \quad\quad\quad \backslash \quad o(x^3) & \end{array}$$

oppure:

$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \Rightarrow (\tan x)(\cos x) = \operatorname{sen} x$

$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2)(1 - \frac{x^2}{2}) = (x - \frac{x^3}{3!})$

$\underset{0}{a_0} - \underset{0}{a_0}\frac{x^2}{2} + \underset{1}{a_1}x - \underset{-\frac{1}{3}}{a_1}\frac{x^3}{2} + \underset{0}{a_2}x^2 = x - \frac{x^3}{3!}$

$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

N.B: Se avessimo dovuto determinare lo sviluppo arrestato al quarto ordine, era sufficiente calcolare il polinomio di Maclaurin del terzo ordine che coincide con quello del quarto, dato che $\tan x$ è una funzione dispari.

Quindi $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$

- sviluppo di una funzione composta

$h(x) = f(g(x))$ in $x_0 \Rightarrow T_{n,f}(x)$ è centrata in $g(x_0)$

$T_{n,g}(x)$ è centrata in x_0

se $g(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + o(x^n)$ perché $a_0 = 0$, infatti:

$f(g(x)) = b_0 + b_1(g(x)) + b_2(g(x))^2 + \ldots + b_n(g(x))^n + o(g(x))^n \rightarrow o(g(x))^n = g^n(x)\, o(1)$ con $o(1) \rightarrow 0$ per $g(x) \to 0$

Quindi

$f(g(x)) = b_0 + b_1(g(x)) + b_2(g^2(x)) + \ldots + b_n(g^n(x)) + \underbrace{g^n(x)\, o(1)}_{= o(x^n)}$ per $x \to 0$

applicazioni:

- $h(x) = e^{\sqrt{1+2x}-1} \rightarrow$ determinare lo sviluppo di Maclaurin di ordine 2

$h(x) = f(g(x))$

$f(y) = e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2)$

$g(x) = \sqrt{1+2x} - 1 = (1+2x)^{\frac{1}{2}} - 1 = \cancel{1} + \frac{1}{2}2x - \frac{1}{8}(2x)^2 + o(x^2) \cancel{-1} = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$h(x) = 1 + (x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) + \frac{1}{2}(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2))^2 + o(x^2) =$

$= 1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) + \frac{1}{2}(x^2 + o(x^2)) + o(x^2) =$

$= 1 + x - \cancel{\frac{x^2}{2}} + \cancel{\frac{x^2}{2}} + o(x^2) = 1 + x + o(x^2)$

- $h(x) = (1 + \log(1+x))^{-1} \rightarrow$ determinare lo sviluppo di Maclaurin di ordine 3

$h(x) = f(g(x))$

$f(y) = (1+y)^{-1} = 1 - y + \cancel{\frac{y}{2}} + y^2 - y^3 + o(y^3)$

$g(x) = \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

$h(x) = 1 - (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)) + (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3))^2 - (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3))^3 + o(x^3) =$

$= 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + (x^2 - x^3) - (x^3) + o(x^3) =$

$= 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x^2 - x^3 - x^3 + o(x^3) =$

$= 1 - x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{3}x^3 + o(x^3)$

- $h(x) = (\cos x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\cos x} = \sqrt{1 + (\cos x - 1)} \rightarrow$ determinare lo sviluppo di Maclaurin di ordine 2

$h(x) = f(g(x))$

$f(y) = (1+y)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + o(x^2)$

$g(x) = \cos x - 1 = \cancel{1} - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$h(x) = 1 + \frac{1}{2}(\cancel{1} - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) - \frac{1}{8}(\cancel{1} - \frac{x^2}{2} + o(x^2))^2 =$

$= 1 + \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{x^2}{4} + o(x^2) - \frac{1}{8}(\cancel{1} - x^2 + o(x^2)) =$

$= 1 + \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{x^2}{4} - \cancel{\frac{1}{8}} + \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) =$

$= \cancel{\frac{11}{8}} - \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)$

$= 1 - \frac{x^2}{4} + o(x^2)$

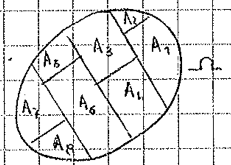
N.B.: $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ quindi $\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$

CALCOLO INTEGRALE I

- sommatoria = $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i$
- partizione = sia Ω insieme e sia $\{A_1; A_2; A_3; A_n\}$ l'insieme dei sottoinsiemi di Ω

$\downarrow$

partizione di Ω: $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ e $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i,j \in \{1, n\} \Rightarrow$



- integrali definiti: a, b: estremi di integrazione

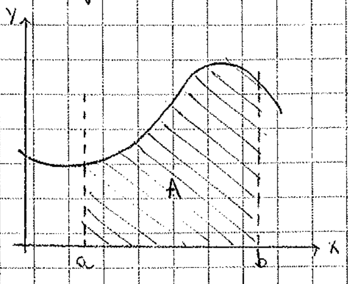
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

trapezoide di f su $[a;b]$ = AREA

regione di piano delimitata dall'intervallo $[a,b]$ dalle rette // asse y passanti per gli estremi di integrazione e dal grafico di f

$\downarrow$

$T(f; a, b) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq f(x) \text{ oppure } f(x) \leq y \leq 0\}$

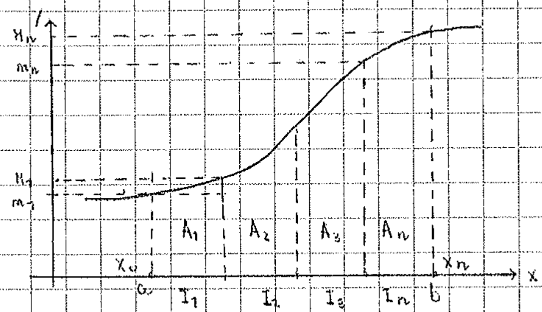


Integrale secondo Cauchy / Riemann

f è continua in $[a;b]$

I_i = sottoinsiemi di $[a;b]$ in n parti uguali

se f è continua in $[a;b] \Rightarrow f$ è continua in I_i



Per ciascun I_i individuo il max e il min (esistono per il teorema di Weierstrass)

se considero solo 2 partizioni di $[a;b]$:

$m(b-a) \leq A \leq M(b-a)$

$\downarrow$

l'area è compresa tra l'area del rettangolo con altezza m e l'area del rettangolo con altezza M

Indico con $\underline{f_i}$ = minimo di f in $I_i = \min_{x \in I_i} f(x)$ e con $\overline{f_i}$ = massimo di f in $I_i = \max_{x \in I_i} f(x)$

Δx_i = ampiezza intervallo $= x_i - x_{i-1}$

$\underline{S}(P)$ = somma delle aree dei rettangoli con altezza min $= \sum_{i=1}^{n} \underline{f_i} \Delta x_i$

$\overline{S}(P)$ = " " " " max $= \sum_{i=1}^{n} \overline{f_i} \Delta x_i$

Allora: $\sum_{i=1}^{n} \underline{f_i} \Delta x_i \leq A \leq \sum_{i=1}^{n} \overline{f_i} \cdot \Delta x_i \Rightarrow \underline{S}(P) \leq A \leq \overline{S}(P)$ $\quad \lim_{n\to\infty} \overline{S}(P) - \underline{S}(P) = 0 \Rightarrow f$ è integrabile

Sia $\underline{S} = \sup\{\underline{S}(P): P$ è una partizione di $[a;b]\}$ $\Rightarrow \underline{S} = \overline{S} = A$ SE TUTTO VA BENE*

Sia $\overline{S} = \inf\{\overline{S}(P):$ " " $\}$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è integrabile sull'intervallo $[a;b]$

$A = \overline{S} = \underline{S} = \int_a^b f(x)\,dx \to$ integrale definito di f su $[a;b]$

(integrale tra a e b di f(x) in dx)

$\Delta x \to dx$

$a, b \to$ estremi di integrazione

N.B.: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(u)\,du \to$ variabile muta

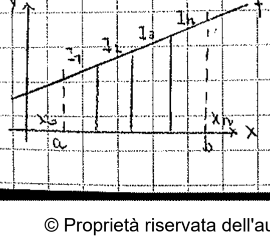
* NON SEMPRE $\overline{S} = \underline{S} \Rightarrow$ gli integrali non sempre esistono $\Rightarrow$ non tutte le funzioni sono integrabili

es: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

- applicazioni:

$f(x) = mx + q, \; m > 0$

Considero le partizioni di $[a;b]$ in modo che le ampiezze sono uguali



$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$

$\underline{f_i} = f(x_{i-1}) = mx_{i-1} + q \;; \quad \overline{f_i} = f(x_i) = mx_i + q$

sia P_n la partizione di P * $[a, b]$

$\overline{S}(P_n) = \sum_{i=1}^{n} \overline{f_i} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (mx_i + q) \frac{b-a}{n}$

= integrali indefiniti
• primitiva di f: ogni funzione F derivabile in I tale che $F'(x) = f(x)\ \forall x \in I$
- non tutte le funzioni ammettono una primitiva
- $\forall f(x)$ esistono infinite primitive che differiscono per una costante

es: $f(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow F(x) = -\cos x$ infatti $F'(x) = \operatorname{sen} x = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$
$F(x) = -\cos x + c$ $\quad F'(x) = \operatorname{sen} x = f(x)$

- proposizione sugli integrali indefiniti:
se F e G sono due primitive di f sull'intervallo I, allora esiste una costante c tale che $G(x) = F(x) + c,\ \forall x \in I$

Dimostrazione: sia $H(x) = G(x) - F(x)$.
$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ per def. di primitiva

Ciò implica che $H'(x) = 0 \Rightarrow H(x) = c$ perché se una funzione ha derivata nulla $\forall x \in I$ allora è costante (conseguenza del teo di Lagrange)

$H(x) = G(x) - F(x) = c \Rightarrow G(x) - F(x) = c \Rightarrow G(x) = F(x) + c$

Quindi se f è una funzione integrabile in senso indefinito su I e se F è una sua primitiva, allora le primitive di f sono TUTTE E SOLE le funzioni $F(x) + c$ at. $c \in \mathbb{R}$

• def integrale indefinito: insieme di tutte le primitive di f in un intervallo reale
$\int f(x)\,dx \rightarrow$ integrale definito di $f(x)$ in dx.

$\int f(x)\,dx = \{F(x) + c : c \in \mathbb{R}\} = F(x) + c$
→ non rappresenta un numero ma un insieme di infinite funzioni

- applicazioni:
• $f(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow \int f(x)\,dx = -\cos x + c$
• $f(x) = \cos x \Rightarrow \int f(x)\,dx = \operatorname{sen} x + c$ infatti $D(\operatorname{sen} x) = \cos x = f(x)$
• $f(x) = 3x^2 \Rightarrow \int f(x)\,dx = x^3 + c$ infatti $D(x^3) = 3x^2 = f(x)$
• $f(x) = x^4 \Rightarrow \int f(x)\,dx = \frac{1}{5}x^5 + c$ infatti $D(\frac{1}{5}x^5) = \frac{1}{5}5x^4 = x^4 = f(x)$
• $f(x) = e^{2x} \Rightarrow \int f(x)\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} + c$ infatti $D(\frac{1}{2}e^{2x}) = \frac{1}{\cancel{2}}e^{2x}\cdot\cancel{2} = e^{2x} = f(x)$

• $f(x) = \operatorname{sen}|x| = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } x \geq 0 \Rightarrow I_1 = (0, +\infty) \\ -\operatorname{sen} x & \text{se } x < 0 \Rightarrow I_2 = (-\infty, 0) \end{cases}$

$F_1(x) = -\cos x \Rightarrow \int f_1(x)\,dx = -\cos x + c_1$ $\Rightarrow F(x) = \begin{cases} -\cos x + c_1 & \text{se } x \geq 0 \\ \cos x + c_2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$ F non è continua in 0
$F_2(x) = \cos x \Rightarrow \int f_2(x)\,dx = \cos x + c_2$

Ma F è derivabile e quindi deve necessariamente essere continua in ogni punto di $\mathbb{R}$
Raccordiamo le primitive trovate per rendere F continua:
$\lim_{x \to 0^-} F(x) = \lim_{x \to 0^+} F(x) \Rightarrow \lim_{x \to 0^-} (\cos x + c_1) = \lim_{x \to 0^+} (\cos x + c_2) \Rightarrow 1 + c_1 = -1 + c_2 \Rightarrow c_2 = c = 2 + c_1$

È importante far dipendere le primitive da UNA e UNA SOLA costante

$F(x) = \begin{cases} -\cos x + 2 + c & \text{se } x \geq 0 \\ \cos x + c & \text{se } x < 0 \end{cases}$

• $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \int f(x)\,dx = \log x + c$ infatti $D(\log x) = \frac{1}{x} = f(x)$
• $f(x) = \operatorname{senh} x \Rightarrow \int f(x)\,dx = \cosh x + c$ infatti $D(\cosh x) = \operatorname{senh} x = f(x)$
• $f(x) = 2x^3 \Rightarrow \int f(x)\,dx = \frac{1}{2}x^4 + c$ infatti $D(\frac{1}{2}x^4) = \frac{1}{2}4x^3 = 2x^3 = f(x)$

Ricorda: le primitive di una stessa funzione differiscono per una costante

INTEGRALI NOTEVOLI

- $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ infatti $D\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right) = \frac{\cancel{\alpha+1}}{\cancel{\alpha+1}} x^{\alpha\cancel{-1+1}} = x^\alpha \quad \alpha \neq -1$

- $\int x^\alpha dx$ con $\alpha = -1 = \int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c$ infatti $D(\log|x|) = \frac{1}{|x|} \cdot \frac{|x|}{x} = \frac{1}{x} \quad x \neq 0$

- $\int x^\alpha dx$ con $\alpha = 0 = \int x^0 dx = \int 1\, dx = x + c$

- $\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + c$ infatti $D(-\cos x) = \operatorname{sen} x$

- $\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + c$ infatti $D(\operatorname{sen} x) = \cos x$

- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$ in particolare $\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx = \arctan f(x) + c$

- $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \cancel{\operatorname{arcsenh} x + c} \quad \log(x+\sqrt{1+x^2})$

- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen} x + c$ "

- $\int e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + c$ infatti $D\left(\frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}\right) = \frac{1}{\cancel{\alpha}} \cancel{\alpha} e^{\alpha x} = e^{\alpha x}$

- $\int a^x dx = \frac{1}{\log a} a^x + c$ infatti $D\left(\frac{1}{\log a} a^x\right) = \frac{1}{\cancel{\log a}} \cdot \cancel{\log a} \cdot a^x = a^x$

- $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sqrt{1+x^2} + c$ infatti $D(\sqrt{1+x^2}) = \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{2} x (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$

- $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\sqrt{1-x^2} + c$ infatti $D(-\sqrt{1-x^2}) = -\frac{1}{\cancel{2}} \cancel{2} x (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

- $\int \operatorname{senh} x\, dx = \cosh x + c$

- $\int \cosh x\, dx = \operatorname{senh} x + c$

- Altri integrali dimostrati con le tecniche spiegate dopo.

- $\int \tan x\, dx = -\log|\cos x| + c \rightarrow$ integrazione per sostituzione indiretta

- $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + c \rightarrow$ integrazione per sostituzione indiretta $\rightarrow \int \frac{1}{x-\alpha} dx = \log|x-\alpha| + c$

- $\int \ln x\, dx = x(\ln x - 1) + c \rightarrow$ integrazione per parti

- $\int \cos^2 x\, dx = \frac{\operatorname{sen} x \cos x + x}{2} + c \rightarrow$ integrazione per ricorsione

- $\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{x - \operatorname{sen} x \cos x}{2} + c \rightarrow$ integrazione per ricorsione

- $\int \cos(\ln x)\, dx = \frac{1}{2} x(\cos(\ln x) + \operatorname{sen}(\ln x)) + c \rightarrow$ integrazione per ricorsione

- $\int \frac{1}{(x-\alpha)^r} dx = \frac{1}{1-r} \frac{1}{(x-\alpha)^{r-1}} + c \rightarrow$ integrazione per decomposizione in fratti semplici

- $\int \frac{1}{x^2+2px+q} dx = \frac{1}{s} \arctan \frac{x+p}{s} + c$ (dove $s = \sqrt{q-p^2}$ e $p^2 - q < 0$) $\rightarrow$ integrazione per decomposizione..

- $\int \frac{1}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c \rightarrow$ integrazione per decomposizione in fratti semplici

- $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$ in particolare $\int \frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))} dx = \tan f(x) + c$

- $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = -\operatorname{cotan} x + c$ in particolare $\int \frac{f'(x)}{\operatorname{sen}^2(f(x))} dx = -\operatorname{cotan} f(x) + c$

- $\int \frac{1}{k^2+x^2} dx = \frac{1}{k} \arctan\left(\frac{x}{k}\right) + c$, inoltre $\int \frac{1}{\sqrt{k^2-x^2}} dx = \operatorname{arcsen} \frac{x}{k} + c$

- integrazione per parti:
Siano F e G due funzioni tali che $F'(x)=f(x)$ e $G'(x)=g(x)$. (primitive di f e g)
Per integrare il prodotto di due funzioni f e g G applico la regola di derivazione del prodotto, ovvero:
$D[F(x)G(x)]=F'(x)G(x)+F(x)G'(x)=f(x)G(x)+F(x)g(x)$
Quindi:
$\int D[F(x)G(x)]\,dx=\int (f(x)G(x)+F(x)g(x))\,dx$
Poichè: $\int D[F(x)G(x)]\,dx=F(x)G(x)+c \Rightarrow \int f(x)G(x)\,dx+\int F(x)g(x)\,dx=F(x)G(x)+c$
$\int f(x)G(x)\,dx=F(x)G(x)-\int F(x)g(x)\,dx$ ← la costante è inclusa in questo integrale
$f(x)\,dx$ = fattore differenziale
$G(x)$ = fattore finito
Operativamente: individuo $f(x)$ e lo ~~dx~~ integro
" $G(x)$ e lo derivo
$f(x) \Rightarrow$ integro $\Rightarrow F(x)$
$G(x) \Rightarrow$ derivo $\Rightarrow g(x)$
la formula può essere scritta anche nel modo seguente: $\int f'(x)g(x)\,dx=f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)\,dx$
applicazione:
- $\int \ln x\,dx=\int \ln x\cdot 1\,dx \rightarrow$ sia $f'(x)=1 \rightarrow f(x)=x$
$g(x)=\ln x \rightarrow g'(x)=\frac{1}{x}$
$\int 1\cdot\ln x\,dx=f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)\,dx=$
$=x\ln x-\int x\frac{1}{x}\,dx=x\ln x-\int 1\,dx=x\ln x-x+c=x(\ln x-1)+c$
Infatti:
$D(x(\ln x-1))=xD(\ln x-1)+\ln x-1=x(\frac{1}{x}-\cancel{x})+\ln x-1=\cancel{1}+\ln x-\cancel{1}=\ln x$

- integrazione per ricorsione
esempio: $\int \cos^2 x\,dx=\int \cos x\cos x\,dx$ + sia $f'(x)=\cos x \rightarrow f(x)=\operatorname{sen} x$
$g(x)=\cos x \rightarrow g'(x)=-\operatorname{sen} x$
Applico l'integrazione per ricorsione:
$\int f'(x)g(x)\,dx=f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)\,dx \Rightarrow$
$\int \cos x\cos x\,dx=\operatorname{sen}x\cos x-\int \operatorname{sen}x(-\operatorname{sen}x)\,dx=\operatorname{sen}x\cos x+\int \operatorname{sen}^2 x\,dx$
Poichè $\operatorname{sen}^2 x=1-\cos^2 x$ si ha:
$\int \cos^2 x\,dx=\operatorname{sen}x\cos x+\int(1-\cos^2 x)\,dx=\operatorname{sen}x\cos x+\int dx-\int\cos^2 x\,dx=\operatorname{sen}x\cos x+x-\int\cos^2 dx$

Si ha quindi: $2\int \cos^2 x\,dx=\operatorname{sen}x\cos x+x$ da cui $\int\cos^2 x\,dx=\frac{\operatorname{sen}x\cos x+x}{2}+c$

applicazione:
- $\int \cos(\ln x)\,dx \rightarrow$ pongo $\ln x=t \Rightarrow x=e^t$
$\int \cos t\cdot e^t\,dt=$ $\qquad \frac{1}{x}dx=dt$
$\Rightarrow$ applico l'integrazione per parti: $f'(t)=e^t \rightarrow f(t)=e^t$
$g(t)=\cos t \rightarrow g'(t)=-\operatorname{sen}t$
$\Rightarrow \int \cos t\cdot e^t\,dt=e^t\cos t+\int e^t\operatorname{sen}t\,dt$ ①
$\Rightarrow$ riapplico l'integrazione per parti: $h'(t)=\operatorname{sen}t \rightarrow h(t)=-\cos t$
$r(t)=e^t \rightarrow r'(t)=e^t$
$\int e^t\operatorname{sen}t\,dt=-e^t\cos t+\int e^t\cos t \Rightarrow$ se ~~sost~~ sostituisco ottengo un'identità.
Provo a cambiare le funzioni: $h'(t)=e^t \rightarrow h(t)=e^t$
$i(t)=\operatorname{sen}t \rightarrow i'(t)=\cos t$
$\int e^t\operatorname{sen}t\,dt=e^t\operatorname{sen}t-\int e^t\cos t \rightarrow$ sostituisco nella precedente ①

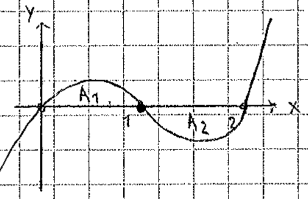
$\int e^t\cos t\,dt=e^t\cos t+e^t\operatorname{sen}t-\int e^t\cos t$
$\int e^t\cos t\,dt=\frac{1}{2}e^t(\cos t+\operatorname{sen}t)+c$

Risostituendo $t=\ln x \Rightarrow \int\cos(\ln x)\,dx=\frac{1}{2}x(\cos(\ln(x))+\operatorname{sen}(\ln(x)))+c$

APPLICAZIONE AL CALCOLO DELLE AREE

- trovare l'area ~~della funzione f(x)~~ delimitata da x e $f(x) = x(x-1)(x-2) = x^3-3x^2+2x$

① è consigliabile rappresentare la funzione per visionare le aree negative



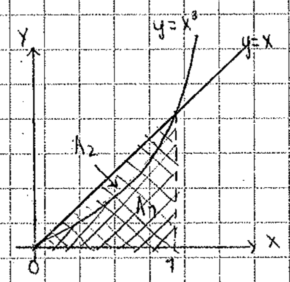
$A = A_1 - A_2$

$A_1 = \int_0^1 f(x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_0^1 = \frac{1}{4}$

$A_2 = \int_1^2 f(x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_1^2 = -\frac{1}{4}$

$A = \int_0^1 f(x)\,dx - \int_1^2 f(x)\,dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

- trovare l'area delimitata da $y = x$ e $y = x^3$ su $[0,1]$



$A_1 =$ /// $\rightarrow A_2 =$ \\\

l'area che vogliamo determinare è ottenuta dalla differenza tra il trapezoide di $y=x$ e quello di $y=x^3$

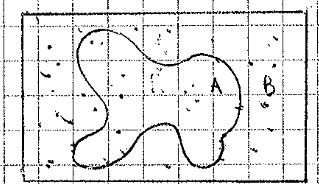
$A = A_2 - A_1 = \int_0^1 x\,dx - \int_0^1 x^3\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$

- in generale, se cerco l'area delimitata da due funzioni f e g: $f \geq g$

$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$

Se l'area è negativa non è un problema perché posso spostare l'asse delle ascisse verso il basso

- ~~metodo dei trapezi~~ metodo dei trapezi: approssimo la funzione con trapezi dei quali posso calcolare l'area
- metodo Simpson: approssimazione con parabole
- metodo probabilistico:
  - inserisco la mia area in un rettangolo di area nota
  - comincio a sparare un numero di colpi nel rettangolo
  - conto i colpi che sono finiti nella mia area
  - determino l'area come segue:



$\frac{n_A}{n_A + n_B} = \frac{n_A}{n_T} \rightarrow n \rightarrow \infty \Rightarrow \begin{matrix} n_A = A \\ n_T = A + B \end{matrix} \Rightarrow A = \frac{n_A}{n_T}\underbrace{(A+B)}_{\text{area rettangolo}}$

(n_A = colpi in A
n_B = colpi in B)

Per un'approssimazione corretta dell'area A devo sparare almeno 1000 colpi

esempio: calcolare l'area della regione di piano delimitata dalle parabole di equazione: $f(x) = x^2 + 2x - 3$
$g(x) = -x^2 - 4x - 3$

- trovare i punti di intersezione:

CALCOLO INTEGRALE II

integrali impropri: permettono di estendere il calcolo delle aree al caso di regioni non limitate del piano

• **integrali su intervalli illimitati**: $I = [a, +\infty)$

$R_{loc}([a,+\infty)) \to$ insieme delle funzioni definite su I e integrabili su ogni sottointervallo chiuso e limitato $[a, c] \in I$

$\{f : f$ è Riemann-integrabile in I $\forall c \in [a, +\infty)\}$

$F(c) = \int_a^c f(x)\,dx \to F$ è definita su I

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)\,dx \to$ integrale improprio di f su $[a, +\infty)$

tale limite può:
- esistere finito $\Rightarrow$ l'integrale improprio di f è convergente
- esistere infinito $\Rightarrow$ " " divergente
- non esistere $\Rightarrow$ " " oscillante

Proposizione:
sia $f \in R_{loc}([a, +\infty))$ tale che $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a, +\infty) \Rightarrow F(c)$ è monotona crescente su $[a, +\infty)$

Dimostrazione: $c_1, c_2 \in [a, +\infty)$ con $c_1 < c_2$

$F(c_2) = \int_a^{c_2} f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx \to$ per l'additività dell'integrale rispetto al dominio di integrazione

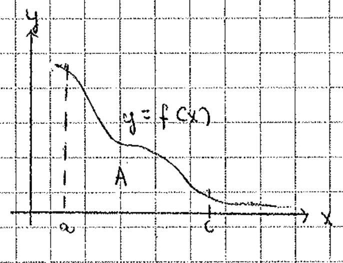
$F(c_1) = \int_a^{c_1} f(x)\,dx \Rightarrow F(c_2) = F(c_1) + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx$

$\Downarrow$

$F(c_1) \leq F(c_2) \Rightarrow F(c)$ è monotona crescente su $[a, +\infty)$

Ricorda: $\int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx \geq 0$ perché $f \geq 0$ e $c_1 < c_2$ → positività dell'integrale definito

Corollario: l'integrale improprio di una funzione positiva $f \in R_{loc}([a,+\infty))$ è convergente o divergente a $+\infty$



A finita = l'integrale improprio di f è convergente
A infinita = " " divergente

esempio: $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ $\alpha > 0$

$\int_a^c \frac{1}{x^\alpha} = \begin{cases} \text{se } \alpha = 1 \Rightarrow [\ln x]_a^c = \ln c - \ln a = \ln(\frac{c}{a}) \to \text{diverge perché } \lim_{c\to+\infty} \ln\frac{c}{a} = +\infty \\ \text{se } \alpha \neq 1 \Rightarrow \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_a^c = \frac{c^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha} \end{cases}$

Per $\alpha \neq 1$

$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_a^c \frac{1}{x^\alpha} = \begin{cases} \text{se } \alpha < 1 \to +\infty \\ \text{se } \alpha > 1 \to \frac{a^{\alpha-1}}{\alpha-1} \end{cases}$

Conclusione:

$a > 0$ $\alpha > 0 \to \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \begin{cases} \text{converge se } \alpha > 1 \\ \text{diverge se } \alpha \in (0, 1] \end{cases}$

- $f(x) = \cos x \to \int_0^c \cos x\,dx = [\operatorname{sen} x]_0^c = \operatorname{sen} c - \operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen} c \to \lim_{c\to+\infty} \operatorname{sen} c = \nexists \Rightarrow \int_0^{+\infty} \cos x\,dx$ è oscillante

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 102

f^+ e f^- sono integrabili in senso improprio su $[a,+\infty) \Rightarrow f$ è integrabile in senso improprio su $[a,+\infty)$ per costruzione
TESI ①

Poichè, per la maggiorazione dell'integrale definito si ha che:
$\left|\int_a^c f(x)\,dx\right| \le \int_a^c |f(x)|\,dx$, quindi per $c \to +\infty$ si ottiene la tesi ②

Avendo quest'altra disuguaglianza, posso applicare il teorema del confronto (criterio di convergenza) e affermare che:
se $\int_a^{\infty} |f(x)|\,dx$ converge allora $\left|\int_a^{\infty} f(x)\,dx\right|$ converge

- applicazione:
- $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx \to 0 \le \cos x \le 1 \Rightarrow 0 \le \frac{\cos x}{x^2} \le \frac{1}{x^2} \quad \forall x \in [1,+\infty) \Rightarrow |f(x)|$ è integrabile su $[1,+\infty)$

$\left|\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx\right| \le \int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| dx \le \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1 \ \left(\frac{1}{1-a}\right)$

converge $\Rightarrow$ converge $\left|\int_1^{+\infty} f(x)\,dx\right|$

N.B = • il criterio di convergenza assoluta, fornisce una condizione sufficiente ma non necessaria per la convergenza di un integrale improprio.
cioè se $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ~~diverge~~ converge non è detto che ~~diverga~~ converga anche $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$

• criterio del confronto asintotico: $f \in R_{loc}([a,+\infty))$
f ha ordine di infinitesimo α per $x \to +\infty$ rispetto all'infinitesimo campione $\varphi(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, allora

- se $\alpha > 1 \Rightarrow \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ converge $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge
- se $\alpha \le 1 \Rightarrow \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ diverge $\Rightarrow$ " " diverge

Ovvero, se l'integrale della parte principale diverge $\Rightarrow$ l'integrale improprio di f diverge
se " " " converge $\Rightarrow$ " " " converge

- applicazione:
- $\int^{+\infty} (\pi - 2\arctan x)\,dx \quad p.p.(x) = \frac{1}{x} \quad \alpha = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\pi - 2\arctan x}{\frac{1}{x}} \overset{D.H}{=} \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{2}{1+x^2}\right)\left(-\frac{1}{\frac{1}{x^2}}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{1+x^2} = 2 \Rightarrow f$ è infinitesimo di ordine 1
$\alpha \le 1 \Rightarrow$ l'integrale è divergente

- $\int_1^{+\infty} \frac{x + \cos x}{x^3 + \operatorname{sen} x}\,dx$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \cos x}{x^3 + \operatorname{sen} x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} \Rightarrow \alpha = 2 \Rightarrow$ l'integrale converge

$\cos x = o(x)$, $\operatorname{sen} x = o(x^3)$

- $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta}\,dx, \quad \alpha, \beta > 0$ ①

caso 1: $\alpha = 1 \to \int_2^{+\infty} \frac{1}{x (\log x)^\beta}\,dx \to t = \log x \to dt = \frac{1}{x}\,dx \Rightarrow \int_{\log 2}^{+\infty} \frac{1}{t^\beta}$ $\begin{cases} \beta > 1 \Rightarrow \text{l'integrale ① converge} \\ \beta \le 1 \Rightarrow \text{l'integrale ① diverge} \end{cases}$

$x \to 2 \Rightarrow t \to \log 2$
$x \to +\infty \Rightarrow t \to +\infty$

caso 2: $\alpha > 1$

$\log x \ge \log 2$ se $x \ge 2 \Rightarrow \frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta} \le \frac{1}{x^\alpha (\log 2)^\beta} \quad \forall x \ge 2$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^\alpha (\log 2)^\beta} = 0 \Rightarrow$ converge e per il teorema del confronto converge anche l'integrale ① $\forall \beta$

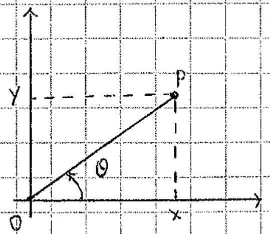
caso 3: $\alpha < 1$

$\frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x^{1-\alpha}}{(\log x)^\beta} \to \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{(\log x)^\beta} \overset{D.H}{=} \cancel{1-\alpha} \lim_{x \to +\infty} \frac{(1-\alpha)x^{-\alpha}}{\beta (\log x)^{\beta-1} \cdot \frac{1}{x}} = +\infty \Rightarrow \frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta} \ge \frac{M}{x} \quad M > 0, \forall x \ge 2$

Allora l'integrale ① diverge

NUMERI COMPLESSI

- coordinate polari = per l'individuazione di un punto P



$P(r, \theta) \to$ coordinate polari
$P(x, y) \to$ coordinate cartesiane

$x = r\cos\theta$ → da coordinate polari a coordinate cartesiane
$y = r\,\text{sen}\,\theta$

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \theta = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x} & \text{se } x>0 \\ \arctan\frac{y}{x}+\pi & \text{se } x<0,\ y\geq 0 \\ \arctan\frac{y}{x}-\pi & \text{se } x<0,\ y\leq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x=0,\ y>0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x=0,\ y<0 \end{cases}$$
→ da coor. cartesiane a coor. polari

- applicazione: $P(6\sqrt{2}, 2\sqrt{6})$
$r = \sqrt{(6\sqrt{2})^2+(2\sqrt{6})^2} = 4\sqrt{6}$
poiché $x>0$, $\theta = \arctan\frac{y}{x} = \arctan\frac{2\sqrt{6}}{6\sqrt{2}} = \arctan\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow P(4\sqrt{6}, \frac{\pi}{6})$

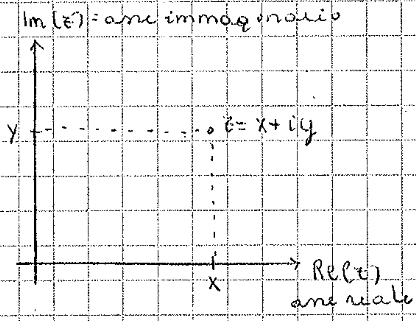
• $P(-5,-5) \to r = \sqrt{25+25} = 5\sqrt{2}$
$x<0,\ y<0,\ \theta = \arctan\frac{y}{x} - \pi = \arctan 1 - \pi = -\frac{3}{4}\pi \to P(5\sqrt{2}, -\frac{3}{4}\pi)$

• $P(4, \frac{2}{3}\pi) \to x = r\cos\theta = 4\cdot\cos\frac{2}{3}\pi = 4\cdot\cos(\pi-\frac{\pi}{3}) = -4\cos(\frac{\pi}{3}) = -2 \Rightarrow P(-2, 2\sqrt{3})$
$y = r\,\text{sen}\,\theta = 4\cdot\text{sen}\,\frac{2}{3}\pi = 4\cdot\text{sen}(\pi-\frac{\pi}{3}) = 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

- numeri complessi: $x^2+1=0\ \nexists x \in \mathbb{R}$
$x^2=-1 \to x_1 = i \Rightarrow x^2 = i^2 = -1 \to i^2=-1$
$x_2 = -i$ $\quad i$ = unità immaginaria

$\forall y \in \mathbb{R}\ \exists\, i\,y \to z = x + iy$, $z \in \mathbb{C} \to$ insieme dei numeri complessi
parte reale (x) — parte immaginaria (y)
$\mathbb{R} \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$

Piano di Argand - Gauss



$z = x+iy$ $\begin{cases} \text{se } y=0 \to z = x \in \mathbb{R} \\ \text{se } x=0 \to z = iy \to \text{immaginario puro} \end{cases}$
$z = (x; y)$

$Re(z): \mathbb{C} \to \mathbb{R}$
$Re(z) = x$ → prendo il numero complesso e lo proietto sull'asse x (re)
restituisce la parte reale

$Im(z) = y$ → prendo il numero complesso e lo proietto sull'asse im.
restituisce la parte immaginaria
$Im(z): \mathbb{C} \to \mathbb{R}$

- operazioni in $\mathbb{C}$
• $z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$

• $+: \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$
$z_1 \equiv (x_1, y_1) \Rightarrow z_1 + z_2 = (x_1+x_2) + (y_1+y_2)$
$z_2 \equiv (x_2, y_2)$

• $\times: \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$
$z_1 \equiv (x_1; y_1) \Rightarrow z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2; y_2) = (x_1 + iy_1)(x_2+iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + i^2y_1y_2 =$
$z_2 \equiv (x_2; y_2)$
$= (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)\,i \quad (i^2=-1)$
$(x_1x_2 - y_1y_2;\ x_1y_2 + x_2y_1) \leftarrow$

se $z_1 \equiv (0, 1) \Rightarrow z_1 z_2 = 0 - 1 + (0+0)\,i = -1 = i^2$
$z_2 \equiv (0, 1)$

• prodotto di due numeri complessi in forma trigonometrica:

$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1) \Rightarrow z_1 z_2 = r_1 r_2 \left((\cos\theta_1 \cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2 \cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1 \cos\theta_2 + \overset{-1}{i^2}\,\text{sen}\,\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2) \right) =$

$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2) \qquad = r_1 r_2 \left((\cos\theta_1\cos\theta_2 - \text{sen}\,\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2) + i(\text{sen}\,\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2) \right)$

$= r_1 r_2 \left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i(\text{sen}(\theta_1+\theta_2)) \right)$

- forma esponenziale o forma di Eulero: sia $\omega = \Omega(\theta) = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$

calcolo la derivata e l'integrale di $\Omega(\theta)$

$\Omega'(\theta) = -\text{sen}\,\theta + i\cos\theta = i\,\Omega(\theta) \rightarrow$ infatti $i(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) = i\cos\theta + \overset{-1}{i^2}\,\text{sen}(\theta) = -\text{sen}\,\theta + i\cos\theta$

$\int \Omega(\theta) = +\text{sen}(\theta) - i\cos(\theta) = -i\,\Omega(\theta) = \frac{\overset{+1}{(-i\cdot i)}\,\Omega(\theta)}{i} = \frac{1}{i}\Omega(\theta)$

Qual è quella funzione che ho per derivata $i\Omega(\theta)$ e per integrale $\frac{1}{i}\Omega(\theta)$?

$e^{i\theta} \rightarrow \begin{cases} D[e^{i\theta}] = i\,e^{i(\theta)} \\ \int e^{i\theta}\,d\theta = \frac{1}{i}e^{i\theta} + c \end{cases}$

conclusione: $\cos\theta + i\,\text{sen}(\theta) = e^{i\theta}$

$z = x + iy = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) = r\,e^{i\theta} \rightarrow$ forma esponenziale o di Eulero

forma cartesiana ← $\quad$ ↑ f. trigonometrica

• prodotto di due numeri complessi in forma esponenziale:

$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \Rightarrow z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

$z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$

• complesso coniugato di z: $\bar{z} = r(\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta) = r(\cos(-\theta) + i\,\text{sen}(-\theta)) = re^{-i\theta}$

• reciproco di z: $z^{-1} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$

• quoziente di due numeri complessi in forma esponenziale

$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} = r_1 e^{i\theta_1} \cdot \frac{1}{r_2} e^{-i\theta_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

• elevamento a potenza

$z^n = r^n e^{in\theta} \Rightarrow$ per $r = 1 \rightarrow z^n = e^{in\theta} = (\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^n = \cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta \rightarrow$ formula di De Moivre

N.B.: argomento di $z \rightarrow \theta = \arg z$

angolo misurato in radianti formato dalla semiretta dei reali positivi e dal vettore individuato da z

può assumere infiniti valori che differiscono per $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

valore principale di $\arg z \rightarrow \text{Arg}\,z \rightarrow$ unico valore θ di $\arg z$ tale che $-\pi < \theta \leq \pi$

$$\text{Arg}\,z = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x} & \text{se } x > 0 \\ \arctan\frac{y}{x} + \pi & \text{se } x < 0 \text{ e } y \geq 0 \\ \arctan\frac{y}{x} - \pi & \text{se } x < 0,\ y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0,\ y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0,\ y < 0 \end{cases}$$

• radice n-esima:

sia $n \geq 1$ e $w = \rho e^{i\varphi}$ vogliamo determinare i numeri complessi $z = re^{i\theta}$ soddisfacenti $z^n = w$

$z^n = r^n e^{in\theta} = \rho e^{i\varphi} = w$

$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2,\ y_1 = y_2 \Rightarrow \begin{cases} r^n = \rho \\ n\theta = \varphi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$z_k = \sqrt[n]{\rho}\,e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{2} + i\,\text{sen}\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) \rightarrow$ n soluzioni distinte

vertici di ~~un~~ un poligono reg di n lati ← si trovano sulla circonf di raggio $\sqrt[n]{\rho}$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

- eq. differenziale = eq. in cui compaiono 1 variabile indipendente x e una funzione $y = y(x)$ e una o più delle sue derivate

Risolvere un'eq. differenziale significa trovare la funzione $y = y(x)$ che soddisfa l'eq. o sul dominio di y o su un suo sottoinsieme

- eq. differenziali ordinarie = $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$
funzione reale di n+2 variabili reali

es.: $F(x, y, y', y'') \rightarrow$ 4 variabili reali

- ordine dell'eq. = massimo grado di derivata
nell'esempio precedente l'ordine è 2

- eq. differenziale in forma normale = separo la derivata di ordine maggiore dalle altre
$y^{(n)} = h(x, y, \dots, y^{(n-1)})$

- eq. differenziale autonoma = se non compare la variabile indipendente
la F non dipendono dalla variabile indipendente x

es.: $y' = ky \rightarrow$ autonoma
$y' = 2x \rightarrow$ non autonoma

- problema di Cauchy = $\begin{cases} y' = h(x, y) \rightarrow \text{eq. differenziale } + \\ y(x_0) = y_0 \rightarrow \text{condizione} \end{cases}$ = per scegliere quale delle infinite soluzioni scegliere

N.B. = il numero di costanti coincide con l'ordine dell'eq. differenziale
Il problema di Cauchy di un equazione di ordine n, avrà ~~n~~ n-1 condizioni (1 ∀ costante)

- soluzioni (o integrale) = funzione $y(x)$ tale che $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^n(x)) = 0 \quad \forall x$
non c'è l'unicità della soluzione: dipendono da n costanti arb.
↓
O per risolvere l'integrale si usa tipicamente l'integrazione → la soluzione è un integrale

esempio:
$y' = 2x \rightarrow y = x^2 + c$
$y'' = a \rightarrow y' = ax + c_1 \rightarrow y = \frac{1}{2}ax^2 + c_1x + c_2 \rightarrow$ 2 soluzioni arbitrarie

• utilizzo dell'eq. differenziali
dinamica delle popolazioni = crescita ed evoluzioni di popolazioni
↓
$y = y(t)$ t = tempo → descrive l'aumento o diminuzione di una data popolazione nel tempo
nel tempo

Si suppone che il tasso di crescita (DERIVATA) → $y' = ky$
coeff. di riproduzione; totale individui presenti
↓
$y(t) = ce^{kt}$ → soluzioni

la popolazione cresce in maniera esponenz. → $y'(t) = cke^{kt} = k(ce^{kt}) = k \cdot y(t)$

c → ? = per trovare una funzione specifica aggiungo una condizione
ad esempio il numero di popolazione al momento iniziale $y(0) = y_0$

$y(t) = y_0 e^{kt}$ → soluzione con condizione iniziale → condizioni iniziali oppure
(condizioni al contorno)

$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx \Rightarrow H(y) = G(x) + c \rightarrow y = H^{-1}(G(x)+c)$

$H(y) \quad G(x)$

applicazioni:

- $y' = Ky \rightarrow$ eq. differenziale del primo ordine a variabili separabili

$g(x) = K \rightarrow G(x) = Kx + c$

$h(y) = y \rightarrow H(y) = \frac{1}{2}y^2$

$\int \frac{dy}{y} = \int K\,dx \Leftrightarrow \ln|y| = Kx + c \rightarrow |y| = e^{Kx} e^c \Rightarrow y = e^{Kx+c}$

c costante $\Rightarrow y = ce^{Kx}$

- $\begin{cases} y' = Ky(M-y) \\ y(0) = 1 \end{cases} \rightarrow$ problema di Cauchy

$y' = Ky(M-y) \rightarrow$ eq. differenziale a variabili separabili

$g(x) = K$

$h(y) = y(M-y) = My - y^2$

① integrali singolari:

$h(y) = 0 \Leftrightarrow y(M-y) = 0 \quad \begin{cases} \bar{y}_1 = 0 \\ \bar{y}_2 = M \end{cases}$

② $h(y) \neq 0$

$\int \frac{dy}{y(M-y)} = \int K\,dx \Leftrightarrow \frac{1}{M}\ln|y| - \frac{1}{M}\ln|M-y| = Kx + c \rightarrow \frac{1}{M}\ln\left|\frac{y}{M-y}\right| = Kx + c \Rightarrow *$

Risolvo l'integrale a sx: $\int \frac{1}{y(M-y)}dy \Rightarrow \frac{1}{y(M-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{M-y} \rightarrow AM - Ay + By \quad \begin{cases} AM = 1 \rightarrow A = \frac{1}{M} \\ B - A = 0 \rightarrow B = A \end{cases}$

$= \int \frac{1}{M}\frac{1}{y}dy + \int \frac{1}{M}\frac{1}{M-y}dy = \frac{1}{M}\ln|y| - \frac{1}{M}\ln|M-y|$

$* \ln\left|\frac{y}{M-y}\right| = (Kx + c)M$

$\left|\frac{y}{M-y}\right| = e^{MKx} e^{cM} \Leftrightarrow y = ce^{MxK}(M-y) \Leftrightarrow y = Mce^{MKx} - yce^{MKx} \Leftrightarrow y = \frac{Mce^{Kx}}{1+ce^{MKx}}$

costante

potrebbe che sia positivo

INT. GENERALE

③ per l'integrale particolare:

$y(0) = \frac{Mc}{1+c} = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{M-1} \rightarrow$ sostituisco questo valore all'int. generale e ottengo l'integrale particolare

- $\begin{cases} y' = (y+1)(x-1) \\ y(0) = 1 \end{cases} \rightarrow$ problema di Cauchy

$y' = (y+1)(x-1) \Rightarrow$ eq. diff. a variabili separabili

$g(x) = x - 1$

$h(y) = y + 1$

① integrali singolari: $h(y) = 0 \Rightarrow \bar{y} = -1$

② $h(y) \neq 0$

$\int \frac{dy}{y+1} = \int (x-1)dx \Rightarrow \ln|y+1| = \frac{1}{2}x^2 - x + c \rightarrow y + 1 = e^{\frac{1}{2}x^2 - x}e^c$

$y = ce^{\frac{1}{2}x^2 - x} - 1 \rightarrow$ integrale generale

$y(0) = c - 1 = 1 \Rightarrow c = 2$

$y = 2e^{\frac{1}{2}x^2 - x} - 1 \rightarrow$ integrale particolare

N.B.: in alcuni casi non è possibile esplicitare y in funzione di x

$y' = \frac{e^x + 1}{e^y + 1} \rightarrow$ eq. diff a variabili separabili

$g(x) = e^x + 1$

$h(y) = \frac{1}{e^y + 1}$

① integrali singolari: $\nexists y: h(y) = 0$

② $\int (e^y + 1)\,dy = \int (e^x + 1)\,dx \Rightarrow e^y + y = e^x + x + c$

3

• eq. omogenee: $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \to \varphi$ è una funzione continua

Sia $z = \frac{y}{x} \to z$ è una funzione di x, infatti $z(x) = \frac{y(x)}{x}$

$y = zx \Rightarrow y' = z'x + z$

$\downarrow$

$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \Leftrightarrow z'x + z = \varphi(z) \Rightarrow z' = \frac{\varphi(z) - z}{x} = \frac{1}{x}(\varphi(z) - z) \to$ eq. differenziale a variabili separabili

① integrali singolari: $\varphi(z) - z = 0 \rightsquigarrow z^*$ radice dell'equazione $\Rightarrow z(x) = z^*$

Poiché $y = zx \Rightarrow y(x) = z^* x \to$ integrali singolari

N.B.: gli integrali singolari sono delle rette

② integrali generali: $z' = \frac{1}{x}(\varphi(z) - z)$

$$\int \frac{dz}{\varphi(z) - z} = \int \frac{1}{x} dx$$

$H(z) \qquad G(x) + c \Rightarrow H(z) = G(x) + c \Rightarrow z(x) = H^{-1}(G(x) + c)$

$y(x) = H^{-1}(G(x) + c)\, x \to$ integrali generali

Inoltre poiché $\int \frac{1}{x} dx = G(x) = \ln|x|$

$y(x) = x \cdot H^{-1}(\log|x| + c) \to$ soluzione generale dell'eq. omogenea

- applicazioni:

• $y' = 2\frac{y}{x} - 1$ $(x > 0)^*$, sia $z = \frac{y}{x} \Rightarrow z'x + z = 2z - 1$, $z' = \frac{z-1}{x} = \frac{1}{x}(z-1)$

① int. singolare: $z - 1 = 0 \Rightarrow z(x) = 1 \Rightarrow y(x) = x$

② int. generale:

$$\int \frac{dz}{(z-1)} = \int \frac{1}{x} dx \to \log|z-1| = \log|x| + c, \quad c = \log c^+$$

$= \log|x| + \log c^+$

$= \log c^+|x| \Rightarrow |z-1| = c^+ x \to$ tolgo $|\ |$ ad x perché $x > 0^*$

N.B.: $|z-1| = c^+ x$ significa che: $\begin{cases} z-1 > 0 \Rightarrow c^+ x \\ z-1 < 0 \Rightarrow -c^+ x \end{cases} \Rightarrow cx = z - 1$

$z - 1 = cx \to z = cx + 1 \Rightarrow y(x) = cx^2 + x \to$ soluzione generale

• $x^2 y' = y^2 + xy + x^2 \to y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} + 1$ sia $z = \frac{y}{x} \Rightarrow$ $y' = z'x + z$

$z'x + \cancel{z} = z^2 + \cancel{z} + 1$

$z' = \frac{z^2+1}{x} = \frac{1}{x}(z^2+1)$

① int singolari: $z^2 + 1 = 0$ mai $\to$ non ci sono integrali singolari

② int. generali: $\int \frac{1}{z^2+1} dz = \int \frac{1}{x} dx \to \arctan z = \log|x| + c$

$z = \tan(\log|x| + c)$

$y(x) = x \tan(\log|x| + c)$

5

• eq. del secondo ordine riconducibili al primo: $y'' = h(x, y') \to$ non compare esplicitamente la variabile y non derivata

sia $z = y' \Rightarrow z' = y'' \Rightarrow z' = h(x, z)$

Quindi $y(x) = \int z(x)\, dx$.

Però essendo una equazione di secondo ordine, dovremmo avere due costanti.

Infatti, risolvendo l'eq. $z' = h(x, z)$ troveremo una soluzione del tipo $z(x) = z_{c_1}(x)$

Tuttavia, la soluzione generale dell'eq differenziale di partenza è dato dal seguente ris.:

$y(x) = \int z_{c_1}(x)\, dx = Z_{c_1}(x) + c_2 \to$ costante 2

In definitiva: $y(x, c_1, c_2) = \int z(x, c_1)\, dx = Z(x, c_1) + c_2 \to$ int. generale di $y'' = h(x, y')$

Verifichiamo il risultato ottenuto:

$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

$y' = c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 x}$

$y'' = c_1 \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + c_2 \lambda_2^2 e^{\lambda_2 x}$

$$y'' + ay' + by = c_1\lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + c_2 \lambda_2^2 e^{\lambda_2 x} + a c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 x} + a c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 x} + b c_1 e^{\lambda_1 x} + b c_2 e^{\lambda_2 x} = 0$$

$$c_1 e^{\lambda_1 x} \underbrace{(\lambda_1^2 + a\lambda_1 + b)}_{= 0 \to \lambda_1 \text{ radice}} + c_2 e^{\lambda_2 x} \underbrace{(\lambda_2^2 + a\lambda_2 + b)}_{= 0 \to \lambda_2 \text{ è una radice}} = 0$$

N.B.: la soluzione generale dipende da due costanti.

② $\Delta = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a}{2}$

se applichiamo la formula precedente (caso ①) otteniamo una soluzione che dipende solo da una costante.

Moltiplichiamo quindi $y_2(x)$ per x: $y(x) = y_1(x) + y_2(x) =$

$= c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_2 x} \to \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

$= c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$

$= (c_1 + c_2 x) e^{\lambda x} \to$ soluzione generale caso ②

Verifichiamo il risultato ottenuto:

$y(x) = (c_1 + c_2 x) e^{\lambda x}$

$\cancel{y'(x) = c_1 e^{\lambda x} \lambda + c_2 x e}$

$y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$

$y' = c_1 \lambda e^{\lambda x} + c_2 e^{\lambda x} + c_2 x \lambda e^{\lambda x}$

$y'' = c_1 \lambda^2 e^{\lambda x} + c_2 \lambda e^{\lambda x} + c_2 \lambda e^{\lambda x} + c_2 x \lambda^2 e^{\lambda x}$ $c_2 x \lambda^2$ *

$\cancel{y'' + ay' + by = c_1\lambda^2 e^{\lambda x} + c_2\lambda e^{\lambda x} + c_2 \lambda e^{\lambda x} + c_2 x \lambda^2 e^{\lambda x} + a c_1 \lambda e^{\lambda x} + a c_2 e^{\lambda x} + a c_2 x \lambda e^{\lambda x} + b c_1 e^{\lambda x} + b c_2 x e^{\lambda x} =}$

$\cancel{= e^{\lambda x}(c_1 \lambda^2 + c_2 \lambda + c_2 \lambda + c_2^* x \lambda^2 + a c_1 \lambda + a c_2 \lambda + a c_2 \lambda x + b c_1 + b c_2 x) =}$

$\cancel{= e^{\lambda x}[c_1(\lambda^2 + a\lambda + b) + c_2(\lambda^2 x + 2\lambda}$

$$y'' + ay' + by = c_1 \lambda^2 e^{\lambda x} + c_2 \lambda e^{\lambda x} + c_2 \lambda e^{\lambda x} + c_2 \lambda^2 x e^{\lambda x} + a c_1 \lambda e^{\lambda x} + a c_2 e^{\lambda x} + a c_2 x \lambda e^{\lambda x} + b c_1 e^{\lambda x} + b c_2 x e^{\lambda x} =$$

$$= e^{\lambda x}(c_1 \lambda^2 + c_2 \lambda + c_2 \lambda + c_2 \lambda^2 x + a c_1 \lambda + a c_2 + a c_2 \lambda x + b c_1 + b c_2 x) =$$

$$= e^{\lambda x}(c_1(\lambda^2 + a\lambda + b) + c_2(2\lambda + \lambda^2 x + a + a\lambda x + bx)) =$$

$$= \underset{\neq 0}{e^{\lambda x}}(c_1 \underset{= 0}{(\lambda^2 + a\lambda + b)} + \underset{\neq 0}{c_2}(x \underset{= 0}{(\lambda^2 + a\lambda + b)} + \underbrace{2\lambda + a}_{\neq 0})) =$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \to$ radice di $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

$$= \cancel{c_2 (\lambda}\ \underset{\neq 0}{c_2 e^{\lambda x}} \underset{= 0}{(2\lambda + a)} = 0$$

$= 0$ perché $\lambda = -\frac{a}{2}$ è radice di $\lambda^2 + a\lambda + b$

③ caso $\Delta < 0 \Rightarrow$ 2 radici complesse e coniugate $\begin{cases} \lambda_1 = \gamma + i\mu \\ \lambda_2 = \gamma + i\mu \end{cases}$

$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

$= \cancel{c_1 e^{\gamma + i\mu x}} + \cancel{c_2 e^{\gamma - i\mu}} =$

$= c_1 e^{(\gamma + i\mu)x} + c_2 e^{(\gamma - i\mu)x} = c_1 e^{\gamma x} e^{i\mu x} + c_2 e^{\gamma x} e^{-i\mu x} =$

$= c_1 e^{\gamma x}(\cos \mu x + i \operatorname{sen} \mu x) + c_2 e^{\gamma x}(\cos \mu x - i \operatorname{sen} \mu x)$

non può essere una soluzione dell'eq. $y'' + ay' + by$ perché non è tale che $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ovvero vogliamo una soluzione espressa mediante funzioni reali.

Infatti, facendo alle opportune scelte sulle costanti si ottengono soluzioni che hanno solo valori reali:

- $c_1 = c_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow y(x) = \frac{1}{2} e^{\gamma x} \cos \mu x + \frac{1}{2} e^{\gamma x} \cancel{i \operatorname{sen} \mu x} + \frac{1}{2} e^{\gamma x} \cos \mu x - \frac{1}{2} e^{\gamma x} \cancel{i \operatorname{sen} \mu x} = e^{\gamma x} \cos \mu x$
- $c_1 = \frac{i}{2}, c_2 = \frac{i}{2} \Rightarrow y(x) = -\frac{i}{2} e^{\gamma x} \cos \mu x + \frac{1}{2} e^{\gamma x} i \operatorname{sen} \mu x + \frac{i}{2} e^{\gamma x} \cos \mu x + \frac{1}{2} e^{\gamma x} i \operatorname{sen} \mu x = e^{\gamma x} \operatorname{sen} \mu x$

Conclusione: la soluzione generale di un eq. differenziale di secondo ordine che ha $\Delta < 0$ è espressa mediante funzioni complesse.

Tuttavia è possibile esprimere tali soluzioni tramite funzioni reali, facendo opportune scelte sulle costanti.

$y_p(x) = -5-2x-x^2 \Rightarrow y_G(x) = y_p(x)+y_0(x) = c_1 e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}x} + c_2 e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}x} - 5 - 2x - x^2$

② q(x) è trigonometrica

$q(x) = k_1\cos\omega x + k_2 \operatorname{sen}\omega x \Rightarrow y_p(x) = a\cos\omega x + b\operatorname{sen}\omega x$

esempio:

$y''+y = \operatorname{sen}2x$

• $\lambda^2+1=0 \to \lambda_1=-i\,;\ \lambda_2 = i \Rightarrow y_0(x) = \cancel{c_1\cos^{ix}+c_2\operatorname{sen}^{ix}}$

$\lambda_1 = \gamma+i\mu \Rightarrow \gamma=0,\ \mu=1 \Rightarrow y_0(x) = e^{\gamma x}(c_1\cos\mu x + c_2\operatorname{sen}\mu x) = c_1\cos x + c_2 \operatorname{sen} x$

$\lambda_2=\gamma-i\mu$

• $\left.\begin{array}{l} y_p(x) = a\cos 2x + b\operatorname{sen}2x \\ y'_p(x) = -2a\operatorname{sen}2x + 2b\cos 2x \\ y''_p(x) = -4a\cos 2x - 4b\operatorname{sen}2x \end{array}\right\} \Rightarrow -4a\cos 2x - 4b\operatorname{sen}2x + a\cos 2x + b\operatorname{sen}2x = \operatorname{sen}2x$

$-3a\cos 2x - 3b\operatorname{sen}2x = \operatorname{sen}2x \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ -3b=1\,;\ b=-\frac{1}{3} \end{cases}$

$y_p(x) = -\frac{1}{3}\operatorname{sen}2x \Rightarrow y_G(x) = c_1\cos x + c_2\operatorname{sen}x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}2x$

③ q(x) è esponenziale

$q(x) = ke^{\gamma x} \Rightarrow y_p(x) = ae^{\gamma x}$

esempio

$y''-3y'+2y = e^{4x}$

• $\lambda^2-3\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \begin{cases}1\\2\end{cases} \Rightarrow y_0(x) = c_1e^x + c_2 e^{2x}$

• $\left.\begin{array}{l} y_p(x) = ae^{4x} \\ y'(x) = 4ae^{4x} \\ y''(x) = 16ae^{4x} \end{array}\right\} \Rightarrow 16ae^{4x} - 12ae^{4x} + 2ae^{4x} = e^{4x} \Rightarrow 6ae^{4x} = e^{4x} \Rightarrow 6a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{6}$

$y_p(x)=\frac{1}{6} e^{4x} \Rightarrow y_G(x) = c_1e^x+c_2e^{2x}+\frac{1}{6}e^{4x}$

N.B. può accadere che y_p è inclusa in y_0. In tal caso $y_p(x) = x\,y_p(x)$ o aumento di un grado $y(p)$.

- esempio: $y''=x$

• $\lambda^2=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=0 \Rightarrow y_0(x) = c_1e^{0x}+c_2xe^{0x} = c_1+c_2x$

• $\cancel{y_p(x)=x,\ y'_p(x)=1,\ y''_p(x)=0 \Rightarrow 0x=0}$ $\left.\begin{array}{l} y_p(x) = a+bx+cx^2 \\ y'_p(x) = b+cx \\ y''_p(x) = 0+c \end{array}\right\} \Rightarrow x=0$ è inclusa nella soluzione dell'omogenea

aumento di un grado

$y_p(x) = a+bx+cx^2+dx^3$ da cui $y_p(x)=\frac{1}{6}x^3 \Rightarrow y_G(x) = c_1+c_2x+\frac{1}{6}x^3$

- esempio $y''-y=e^x$

$y_0(x) = c_1e^x+c_2e^{-x}$

$y_p(x) = \frac{1}{2}e^x \to$ ma quando $c_1=\frac{1}{2}$, la soluzione ~~della~~ particolare è inclusa in quella dell'omogenea

moltiplico per x la soluzione particolare

$y_p(x) = \frac{1}{2}xe^x \Rightarrow y_G(x) = c_1e^x+c_2e^{-x}+\frac{1}{2}xe^x$

TEOREMI: Successioni

- convergenza / divergenza 1

Sia an una successione monotona. Allora an converge oppure diverge
Se an è monotona crescente, essa converge al sup se è limitata superiormente, diverge se è illimitata superiormente
Se an è monotona decrescente, essa converge all'inf se è limitata inferiormente, diverge se è illimitata inferiormente

Ip:
an è monotona crescente
$\sup\{a_n\} = l$

Tesi:
$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\} = l$

Dimostrazione:
Per ipotesi a_n è monotona crescente $\Rightarrow \forall n \geq n_\varepsilon,\ a_n \geq a_{n_\varepsilon}$
Per ipotesi $\sup\{a_n\} = l \Rightarrow \forall \varepsilon > 0:\ l-\varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq l$
Segue che $l-\varepsilon \leq a_{n_\varepsilon} \leq a_n \leq l < l+\varepsilon$, ovvero $a_n \in I(l)\ \forall \varepsilon > 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$

Ip:
an è monotona crescente
$\sup\{a_n\} = +\infty$

Tesi:
$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

Dimostrazione:
Per ipotesi a_n è monotona crescente $\Rightarrow \forall n \geq n_A,\ a_n \geq a_{n_A}$
Per ipotesi $\sup\{a_n\} = +\infty \Rightarrow \forall A > 0:\ \exists a_{n_A} \geq A$
Segue che $a_n \geq a_{n_A} > A$, ovvero $a_n \in (A; +\infty) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0\ \exists n_A : \forall n \geq n_0,\ n > n_A \Rightarrow a_n > A$

Ip:
an è monotona decrescente
$\inf\{a_n\} = l$

Tesi
$\lim_{n\to\infty} a_n = l$

Dimostrazione:
Per ipotesi a_n è monotona decrescente $\Rightarrow \forall n \geq n_\varepsilon,\ a_n \leq a_{n_\varepsilon}$
Per ipotesi $\inf\{a_n\} = l \Rightarrow \forall \varepsilon > 0:\ l \leq a_{n_\varepsilon} < l+\varepsilon$
Segue che $l \leq a_n \leq a_{n_\varepsilon} < l+\varepsilon$, ovvero $a_n \in I(l) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon\ \forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$

Ip:
an è monotona decrescente
$\inf\{a_n\} = -\infty$

Tesi
$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

Dimostrazione:
Per ipotesi a_n è monotona decrescente: $\forall n \geq n_A,\ a_n \leq a_{n_A}$
Per ipotesi $\inf\{a_n\} = -\infty \Rightarrow \forall A > 0\ \exists a_{n_A} < -A$
Segue che