



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO: 937

DATA: 15/04/2014

# **A P P U N T I**

STUDENTE: Santoro

MATERIA: Termocinetica, Termofluidodinamica + Eserc.

Prof. Zanino\_Savoldi

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

4/3/2013

# TERMOINETICA E TERMOFLUIDODINAMICA

prof. Zanino Roberto

Lez. 1

## OGGETTIVI

- Studio dello scambio termico e come venga influenzato dal moto dei fluidi -
- Ponte tra materie del biennio e corsi specifici -

- Libro di testo comunicato via e-mail

- Scaricare il software IHT da [www.wiley.com/go/gedal/incopeza](http://www.wiley.com/go/gedal/incopeza) (selezionare "student companion site") e installarlo sul pc -

- Sullo stesso sito si trovano anche sezioni supplementari del testo e risposte ad alcune esercitazioni -

## ORARIO

(L) 8:30 - 11:30

(MA) 11:30 - 14:30

(VE) 8:30 - 10

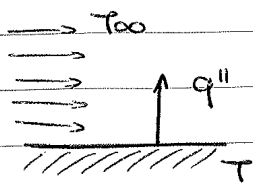
## ESERCITATORI

• L. Santedi

• R. Bonifetto

## MODALITÀ ESAME

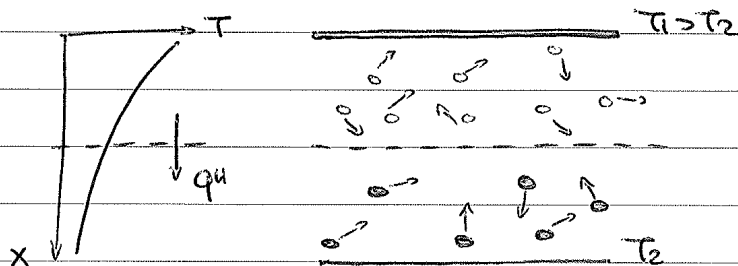
- Scritto con esercizi da svolgere
- Orale solo nel caso di voto scritto  $\geq 27$
- Non sarà possibile rifiutare il voto



Irraggiamento: qualsiasi superficie scaldata emette radiazioni, che possono finire su un'altra superficie, da quale ricambia (flusso netto).

**CONDUZIONE**

- Se prov' considerare il caso dei gas (pessimi conduttori): ci sar' un certo profilo di temperatura, che corrisponde a un'energia cinetica delle molecole. Sebbene il flusso netto di particelle sia nullo (moto macroscopico assente, conduzione) il moto della particella varia in base alla posizione e alla sua temperatura.

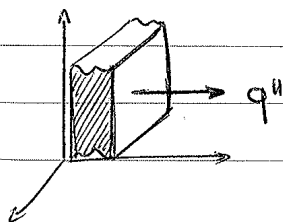


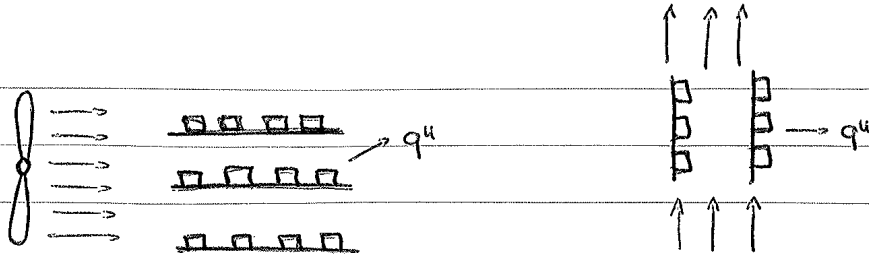
- Nel caso dei solidi, bisogna considerare il moto vibrazionale del reticolo cristallino e il moto degli elettroni liberi.

CASO UNIDIMENSIONALE

- legge di Fourier:

$$q_x'' = -K \frac{dT}{dx} \quad (\text{nello spazio: } \vec{q} = -K \cdot \nabla T)$$





flusso del fluido forzato  
da agente esterno

flusso dovuto a variazioni di densità  
in funzione di  $T$  e dalla forza di gravità  
↳ crea forze di galleggiamento  
(buoyancy)

• In questo caso, si parla di calore SENSIBILE (quello legato all'energia interna). In altre tipologie, entra in gioco il ruolo del calore LATENTE, utile per smaltire grandi quantità di calore.



Acc' inizio ho solo conduzione, a un certo punto sulla superficie si creano localmente bollicine di vapore, che poi si staccano. Nello staccarsi, si muove e genera convezione, ma smaltisce calore attraverso il cambiamento di fase. A temperature più alte, le bolle si uniscono e creano uno strato di vapore, causando una CRISI TERMICA.

$$q'' = h(T_s - T_\infty) \quad \text{legge di Newton}$$

•  $T_\infty$  è la temperatura di bulk, da non prendere troppo vicino a s.

$$q'' = k \frac{\Delta T}{L} \rightarrow k = [W/mK]$$

$$\left[ \frac{W}{m^2} \right] = \left[ \frac{W}{mK} \right] \left[ \frac{K}{m} \right]$$

$$q'' = h \Delta T \rightarrow h = [W/m^2K]$$

- Il problema è: quanto vale  $h$ ? Varia molto in base al tipo di convezione e alla differenza tra gas e liquidi. Serve per smaltire più calore a parità di differenza di temperatura.

$$q_{\text{irr}}^{\text{u}} = \frac{q}{A} = \epsilon E (T_s) - \alpha G = \epsilon G' (T_s^4 - T_{\text{sur}}^4)$$

↓  
Corpo grigio

• Posso riarrangerla come:

$$q_{\text{irr}} = h_{\text{rc}} A (T_s - T_{\text{sur}})$$

$h_{\text{rc}}$  = coefficiente di scambio termico radiativo

$$h_{\text{rc}} = \epsilon G' (T_s + T_{\text{sur}}) (T_s^2 + T_{\text{sur}}^2)$$

•  $q = q_{\text{cond}} + q_{\text{conv}} + q_{\text{irr}}$

ANALOGIA ELETTRICA = tradurre in terminologia elettrica i calcoli



$$\frac{V_A - V_B}{R_{\text{el}}} = I \quad \text{diventa} \quad \frac{T_A - T_B}{R_{\text{t}}} = q^{\text{u}}$$

• La termodinamica e la termodinamica sono delle indagini operative all'interno della termodinamica, che è il "contenitore" di tutto ciò.

PRIMO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA (conservazione dell'energia)

$$\Delta E_{\text{st}}^{\text{tot}} = Q - W$$

↳ Energia totale accumulata (stored) nel sistema

Q → ceduto (-)  
Q → assorbito (+)

L → fatto (+)  
L → subito (-)

- CALORE SENSIBILE → legato alla variazione di temperatura.
- CALORE LATENTE → legato alla variazione di stato.

### EQUAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA e TERMICA

- └ in un intervallo di tempo  $\Delta t$  (1)
- └ in un determinato istante (2)

(1) L'aumento di energia accumulata è pari al valore dell'energia meccanica e termica che entra nel volume di controllo, meno l'energia uscita dal sistema più l'energia generata nel volume di controllo.

$$\Delta E_{st} = E_{in} - E_{out} + E_g$$

(2) Considero stavolta le potenze, ma è uguale:

$$\dot{E}_{st} = \frac{dE_{st}}{dt} = \dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_g$$

• Equivale al primo principio, ma divide le varie forme di energia.

A) Se ho SISTEMA STAZIONARIO, ogni istante è uguale → SOTTO FORMA DI

$$\hookrightarrow \frac{dE_{st}}{dt} = 0 \quad \text{POTENZE}$$

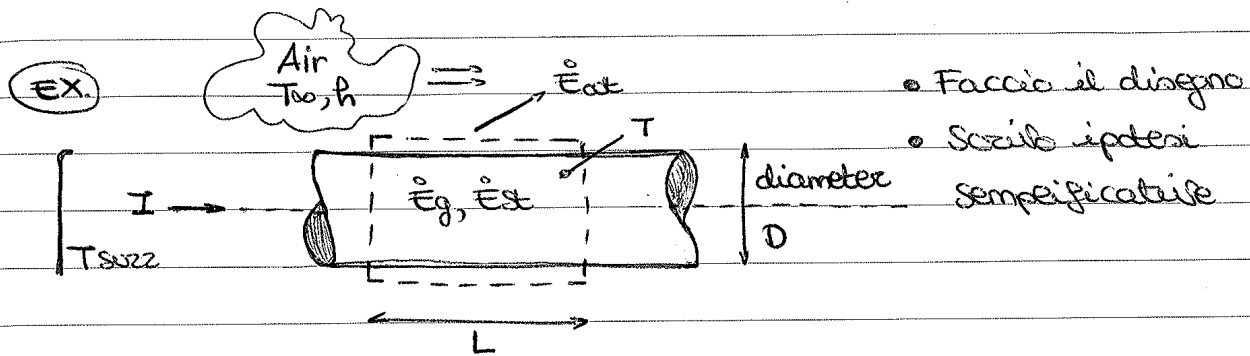
B) Individua i termini di energia che sono rilevanti nel mio problema.

$$E_{tot} \begin{cases} \text{Energia cinetica (EC)} = \frac{1}{2} m v^2 \\ \text{Energia potenziale (EP)} = mgh \end{cases}$$

NUMERO DI MACH

$$M = \frac{v}{c_s} \begin{cases} \rightarrow \text{velocità} \\ \rightarrow \text{velocità del suono} \end{cases}$$

•  $M \cong 0,3 \rightarrow$  corpo di moto incomprimibile



Ipotesi semplificative:

- Temperatura uniforme (non è assolutamente cost)
- Proprietà costanti ( $c, \rho, \epsilon = \alpha$ )
- Scambio d'irraggiamento tra superficie piccola e ambiente grande

$$\dot{E}_g - \dot{E}_{out} = \dot{E}_{st}$$

↳ energia sorgenti (meccanica + termica)

$$- \dot{E}_g = RI^2 = R'LI^2$$

$$- \dot{E}_{out} = h(\pi DL)(T - T_0) + \epsilon \sigma (\pi DL)(T^4 - T_{su22}^4)$$

↳ convezione e irraggiamento

$$- \dot{E}_{st} = \frac{dU_t}{dt} = \frac{d(mCT)}{dt} = \frac{d(\rho VCT)}{dt}$$

otengo:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{I^2 R - \pi D h (T - T_0) - \pi D \epsilon \sigma (T^4 - T_{su22}^4)}{\rho C (\pi D^2 / 4) L}$$

↳ Non è LINEARE (la variabile dipendente T non compare al primo grado)

②

- È differenziale del prim'ordine, non lineare, a variabili separabili, ordinaria - Posso solo vedere se il sistema può raggiungere uno stato stazionario ( $\frac{dT}{dt} = 0$ ).



[SECONDO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA]

- Kelvin-Planck: È impossibile creare una macchina operante ciclicamente che converta totalmente in lavoro il calore assorbito da una sorgente a temperatura costante.

$$\eta = \frac{W}{Q_{in}} = \frac{Q_{in} - Q_{out}}{Q_{in}} = 1 - \frac{Q_{out}}{Q_{in}}$$

per macchine reversibili:

$$\eta = 1 - \frac{T_{min}}{T_{max}} \quad (\text{Carnot})$$

- La forma generale è però:

$$\left[ \eta = 1 - \frac{T_{min}}{T_{max} - q_{in} R_t} \right]$$

Vale come Carnot solo se la resistenza termica o il calore assorbito è nullo.

La potenza generata dal motore è data da

$$\dot{W} = q_{in} \eta = q_{in} \left[ 1 - \frac{T_{min}}{T_{max} - q_{in} R_t} \right]$$

- o privilegio il rendimento ( $q_{in} \rightarrow 0$ , quindi  $\dot{W} \rightarrow 0$ ) e penalizzo  $\dot{W}$
- o privilegio la potenza ( $q_{in} \neq 0$ , quindi  $\dot{W} \neq 0$ ) e penalizzo  $\eta$

•  $K$  aumenta all'aumentare del calore specifico.

- Se  $P_0$  sia  $e^-$  di conduzione sia foni:

$$K = K_{e^-} + K_{fon}$$

$K_{e^-}$  è inversamente proporzionale alla resistività elettrica del materiale.

\* Vedere grafico andamento  $K$  in funzione della  $T$  ←

• I solidi, a seconda della loro natura, possono avere valori enormemente diversi (anche 3 ordini di grandezza). Anche con scala doppia logaritmica, noto comunque delle pendenze.

↳ (es. es.)

EFFETTI ALLA MICRO E MACRO SCALA: dipende da  $\lambda_{mfp}$ , grandezza microscopica. In sistemi con dimensioni confrontabile con  $\lambda_{mfp}$ , cambia tutta la legge della conduzione.

STATO FLUIDO = stato molto meno ordinato, non ha una forma assai definita. Con teoria cinetica dei gas, nel caso di un GAS (anche zeale) predice la sua conducibilità, ma nel caso di un liquido non esiste nulla.

GAS

$$K = \frac{1}{3} c_v \bar{p} \lambda_{mfp}$$

$$\lambda_{mfp} = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \pi d^2 p} \quad (\text{dalla teoria cinetica})$$

→  $k_B$  = costante Boltzmann ( $1,38 \cdot 10^{-23}$  J/K) →

↳ per passare da  $T$  a un'energia  $[J/K] \cdot [K] = [J]$

→  $p$  = pressione

→  $d$  = diametro molecola gas

→  $\alpha$  è sufficiente se non c'è generazione interna di calore  
 ↳ se c'è una sorgente, non vale

DIFFUSIVITÀ → combina capacità del materiale di trasmettere calore con la sua capacità di immagazzinare calore.

- $\alpha$  alta → risposta di conduzione molto alta (immediata)
- $\alpha$  bassa → risposta di conduzione lenta (intervallo di tempo)

**EQUAZIONE DELLA CONDUZIONE**

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

•  $k$  sta dentro la parentesi perché FUNZIONE della posizione e della TEMPERATURA.

→ Non è la forma più generale, perché è pensata per un sistema di coordinate cartesiane.

• COORDINATE CILINDRICHE:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( k r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( k r \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} =$$

↳ la differenza sta nell'espressione del gradiente

$$= \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

• COORDINATE SFERICHE: serve per considerare sistemi come la Terra

$$q'' = -k \nabla T = -k \left( i \frac{\partial T}{\partial r} + j \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + k \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} \right)$$

direzione radiale ←      ↳ direzione zenitale  
 ↳ direzione azimutale

# Lez. 4

21/3/2013

• Equazione parabolica = contiene derivate temporale di primo ordine, e derivate spaziali di secondo ordine -

- Equazioni che descrivono fenomeni di propagazione sono di tipo IPERBOLICO -
- Equazioni che contengono derivate spaziali di secondo ordine sono ELITTICHE -

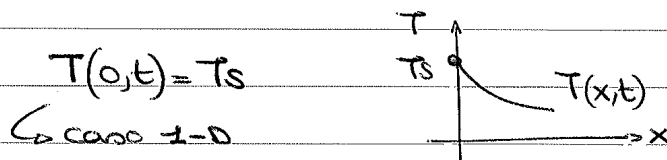
↳ Se nell'eq. del calore studio il caso STAZIONARIO (non conto la derivata temporale) diventa di tipo ELITTICO -

CONDIZIONI AL CONFINIO (poste in ogni punto del BORDO del dominio)

↳ NON contenute nell'equazione

① **DIRICHLET** → imposto il valore della funzione incognita in un pezzo del dominio (tratto o superficie)

• In questo caso il bordo corrisponde alla coordinata spaziale  $x=0$  -  
↳ ma vale per ogni istante di tempo

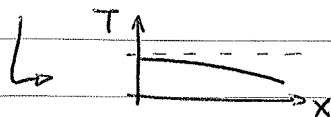


- Utile per sistema a contatto con una capacità termica infinita (non esiste, posso approssimarlo con ghiaccio fondente)

② **NEUMANN** → imposto un valore assegnato del flusso termico sul bordo (di scelta o superficie o tratto)

→ Valore FINITO  $\neq 0$  -  $-k \frac{\partial T}{\partial x} |_{x=0} = q_x$

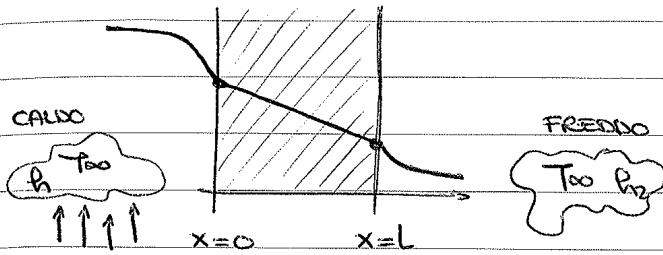
→ Valore ZERO: definisce un bordo ADIABATICO -  $-k \frac{\partial T}{\partial x} |_{x=0} = 0$



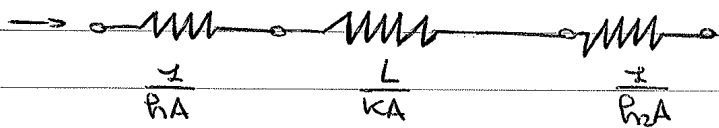
↳ **CONDIZIONE NEUMANN CROGENEA**

**J.P.Morgan**  
Asset Management

PARETE PIANA in CONDIZIONI STAZIONARIE



• Posso considerare una resistenza equivalente Solo in caso di :



- STAZIONARIETÀ
- ASSARZO DI SORGENTI
- SEMPLI UNIDIMENSIONALITÀ

[RESISTENZE TERMICHE]

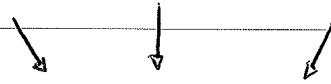
convezione

$$z/hA$$

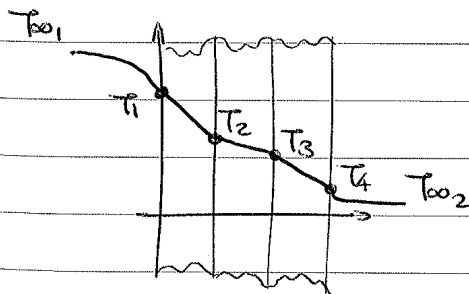
[m<sup>2</sup>K/W]

conduzione

$$L/kA$$



MULTISTRATO = c'è discontinuità nella pendenza della temperatura, tra uno strato e un altro (interfaccia), perché il



flusso deve rimanere continuo (non c'è generazione di calore) ma cambia k -



• Posso considerare una serie di resistenze termiche equivalenti:

$$R_{TOT} = \sum R_i = \frac{\Delta T}{q} = \frac{z}{UA}$$

U = coefficiente che tiene conto di tutti i tipi di scambio

- Aumentando la pressione, aumenta la zona di contatto e di conseguenza il flusso di contatto, molto maggiore di quello che attraversa il gas.  
 $\hookrightarrow$  MINORE  $\Delta P$ , migliore conducibilità

$\rightarrow$  Leggere, nelle tabelle, per cosa moltiplicare o dividere i valori.  
 $\hookrightarrow$  Vedere tabella 3.2

**MEZZI POROSI**  $\rightarrow$  combinazione di un solido e di un fluido stazionario

- o Posso dividerli in 2 categorie: (sabbia, spugna, ...)
- $\leftarrow$  non vero in generale

- MEZZI POROSI SATURI = quando il fluido è o un gas, o un liquido, ma NON una combinazione dei due
- MEZZI POROSI NON SATURI = contiene sia gas sia liquido, è un sistema a tre fasi.

Per estrarre petrolio e simili dal sottosuolo, devo avere una grande competenza sui mezzi porosi. Altro ramo è la CCS (Carbon Capture Sequestration), tecnologia che darebbe per permettere di catturare il carbonio dallo smaltimento degli impianti energetici (ex. CO<sub>2</sub>) e pomparla sottoterra, per non intaccare l'atmosfera. La CCS è l'unico metodo verosimile per poter abbattere la CO<sub>2</sub>. Se sbagliamo, CO<sub>2</sub> è più pesante dell'aria, si sostituisce all'ossigeno e pratica morte per asfissia. Vedere caso del Lake N'ias in Tanzania. In Italia un solo impianto a Porto Tolle, sul delta del Po.

SATURO

$$q_x = \frac{K_{eff} A}{L} (T_1 - T_2)$$

$K_{eff}$  = conducibilità effettiva, dipende dalle proprietà delle due fasi del mezzo

$\rightarrow$  Porosità del mezzo = frazione in volume occupata dal fluido nel mezzo saturo.  
 (E)

## PROGRAMMA IHT

• Quando apri, aprisce la Quick Start Guide

→ Ha due funzioni:

- Scoprire e risolvere equazioni
- Disegnare semplici grafici
- Risolvere piccoli problemi

**SOLVE**



Da' soluzioni  
al problema

**EXPLORE**



Commenta la  
soluzione

**TOOLS**

La posso selezionare il tipo di flusso  
(interno, esterno...) e la forma del  
sistema, che influenzano il coefficiente  
di convezione  $h$ .

### EXAMPLES

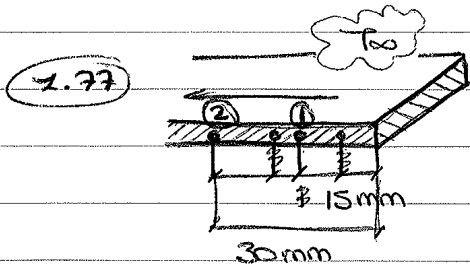
L' riportano il numero dell'esercizio del libro,  
servono come tutorials.

• Il programma contiene molti commenti, permettono di rileggerlo dopo  
tempo.

- Devi mettere valore iniziale per avviare il processo iterativo  
che risolve il problema per tentativi (non sono equazioni lineari)
- Se è troppo diverso dal dato vero, non funziona

$$U = 6,25 \cdot 10^{-5} \cdot (38)^2 = \boxed{6,3 \text{ m/s}}$$

• Se  $h > 10 \text{ W/m}^2\text{K}$ , la convezione naturale può essere considerata molto inferiore a quella forzata. In questo caso, l'ipotesi regge bene.



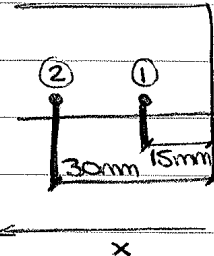
$$\lambda = 25 \text{ W/mK}$$

$$T_1 = 60^\circ\text{C}$$

$$T_2 = 50^\circ\text{C}$$

$$T_{\text{amb}} = 100^\circ\text{C}$$

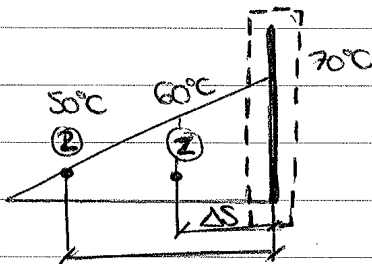
$h?$



Ipotesi FLUSSO TERMICO SEGUE DIREZIONE x (1D)

PROPRIETÀ COSTANTI DELL'ACCIAIO

CONDIZIONI STAZIONARIE

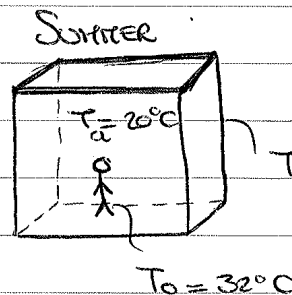
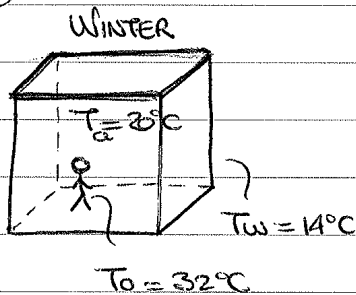


$$q = \lambda \frac{T_1 - T_2}{\Delta S} = 25 \cdot \frac{(60 - 50)}{18 \cdot 10^{-3}} = \boxed{10 \text{ kW/m}^2}$$

$$h = \frac{q}{\Delta T} = \frac{10 \cdot 1000}{(100 - 70)} = \boxed{333 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}}$$

• Il profilo di temperatura è costante, ogni 15 mm aumenta di  $10^\circ\text{C}$ , superficie sarà a  $70^\circ\text{C}$ .

1.29



$$E = 0,90$$

$$h = 2 \text{ W/m}^2\text{K}$$

$$A_{\text{min}} = 1,5 \text{ m}^2$$

• Come mai d'inverno sento più freddo? L'umino e l'aria sono alla stessa temperatura nei due casi. Resta solo l'irraggiamento (conduzione)

J.P.Morgan  
Asset Management



IN:  $\rho = 950 \text{ kg/m}^3$   
 $i = 461,4 \text{ kg/kg}$

OUT:  $\rho = 1,243 \text{ kg/m}^3$   
 $i = 3700,6 \text{ kg/kg}$

Ipotesi CONDIZIONI STAZIONARIE (no accumulo calore nel passaggio)  
 VELOCITÀ MEDIA SULLA SEZIONE  $\rightarrow$  Importante!!

$I_{out} - I_{in} = \dot{m} (i_{out} - i_{in}) = 1,5 (3700,6 - 461,4) = \boxed{4,86 \text{ MW}}$

$\hookrightarrow$  entalpie

$E_{out} - E_{in} = \dot{m} \left( \frac{V_{out}^2}{2} - \frac{V_{in}^2}{2} + g z_{out} - g z_{in} \right) = \boxed{6,32 \text{ kW}}$

$\hookrightarrow$  valutiamo differenze di potenza

$gL = g(z_{out} - z_{in})$

• Le velocità le ricavò usando la formula inversa della portata, nota la densità in entrata e in uscita -

$G = \rho A \cdot v \Rightarrow v = \frac{G}{\rho A} \begin{cases} v_{in} = 0,176 \text{ m/s} \\ v_{out} = 90,6 \text{ m/s} \end{cases}$

q?

$\phi - \dot{W} = \left( \frac{d}{dt} \right)_{sc} \dot{m} \pm G (\Delta h + \Delta ec + \Delta ep)$   
 $\hookrightarrow$  stazionarietà

$\phi = \pm \sum_{k=1}^N G_k (h_k + e_k + e_{pk}) = \dot{m} (\Delta i + \Delta em)$

$\Rightarrow q = \dot{m} (\Delta i + \Delta em) \approx \boxed{4,86 \text{ MW}}$

$\hookrightarrow$  contributo quasi trascurabile

• Per unità di superficie è circa  $1 \text{ MW/m}^2$ , molto molto intenso -

# Lez. 6

15/3/2013

## METODO ALTERNATIVO DI CONDUZIONE

- Metodo per l'analisi con l'equazione generale della conduzione già integrata - Si applica però solo sotto determinate condizioni:
  - STAZIONARIE
  - IN ASSENZA DI Sorgenti
  - IN ASSENZA DI FLUSSI TERMICI AL LATI (se no non è 1-D)

→ La potenza termica  $q_x$  trasmessa lungo la direzione  $x$  non cambia, sotto queste condizioni (termine di derivata temporale e sorgenti nullo, rimane solo la divergenza, togliendo contributi laterali rimane un solo contributo con derivata nulla, cioè costante).

$$\cancel{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{q} = \dot{q}} \quad \int \nabla \cdot \vec{q} \, dV = \oint \vec{q} \cdot d\vec{S} \quad (\text{Gauss})$$

Se la potenza è costante:  $\int q_x \, dx = q_x \int dx$   
↳ ipotesi

$$q_x \int_{x_0}^x dx = - \int k(T) \, dT \cdot A_x$$

$$\frac{q_x \int dx}{A_x} = - \int k(T) \, dT$$

Se abbiamo intervalli di tempo e spazio:

$$\boxed{\frac{q_x \Delta x}{A_x} = - k(T) \Delta T}$$

## SISTEMI DI RIFERIMENTO

- Non saranno mai sfere o cilindri perfetti, dobbiamo aggiustare noi le coordinate a seconda del problema.

◁ Sistema radiale:  $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( k r \frac{dT}{dr} \right) = 0$  (ignora tutto ciò che non dipende dal raggio)

raggiamento - la soluzione generale è

$$T = - \frac{\dot{q}}{2k} x^2 + Gx + G_2$$

e integrando ottengo le costanti (impongo condizioni iniziali e finali)

• Temperatura massima

$$T(0) = T_0 = \frac{\dot{q}L^2}{2k} + T_1$$

- Nei materiali sottoposti a stress termici si generano tensioni se sotto = posti a gradienti di temperatura, e possono contribuire alla mancata resistenza del materiale - Esiste un numero che riassume tutte queste sollecitazioni, deve stare al di sotto di un certo valore limite (dati dalle normative) -

### SISTEMI RADIALI

CILINDRO:  $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{\dot{q}}{k} = 0$

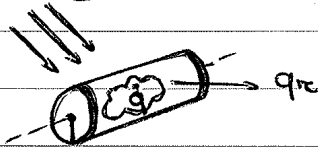
Per vedere andamenti, vedere appendice C -

da cui ottengo:  $r \frac{dT}{dr} = - \frac{\dot{q}}{2k} r^2 + G$

e infine:

$$T(r) = - \frac{\dot{q}}{4k} r^2 + G \ln r + G_2$$

Cond. FEU id



• Debbo porre una CONDIZIONE DI SIMMETRIA nel caso di CILINDRO PIENO, nel caso sia PIANO non occorre -

• Se impongo una condizione sul bordo, ottengo anche in questo caso un andamento della temperatura di tipo parabolico -

Saltare sezioni 3.7-3.8-3.9, rileggere 3.6

## SOLUZIONE ANALITICA

- Nel caso in cui devo calcolare i valori della temperatura punto per punto non posso usare il calcolatore (che usa numeri, ma in quantità finite). Il metodo analitico, invece, ci dà una funzione che descrive l'andamento di ogni punto. Nei casi semplici, dona anche un'idea della fisica del problema.

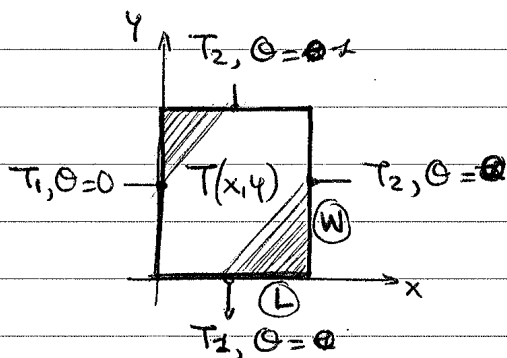
### • METODO DI SEPARAZIONE DELLE VARIABILI

$$\nabla^2 T = 0 \quad \text{in 2-D} \rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

- Impongo una condizione al contorno nel dominio, che è un rettangolo essendo un'equazione di tipo ellittico, in ogni punto.

→ SEMPLICITÀ DOMINIO

→ CONDIZIONI CONTORNO



Cambio variabile, introduco  $\Theta$ :

$$\Theta = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}, \text{ così le condizioni al contorno sono}$$

molto più semplici!

$$\begin{aligned} \Theta(0, y) &= 0 & \Theta(L, 0) &= \theta \\ \Theta(L, y) &= \theta & \Theta(x, 0) &= \theta \end{aligned}$$

- L'idea è cercare una soluzione che sia data dal prodotto di due funzioni, una solo in  $x$  e una solo in  $y$ . Ipotezziamo che esista:

$$\Theta(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$$

e sostituendo e dividendo per  $xy$  e l'equazione di partenza, ottengo:

$$-\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2}$$

$$0 = C_1 (C_3 e^{-\lambda y} + C_4 e^{\lambda y})$$

per verificare ciò, serve che  $C_1$  sia uguale a zero  $\rightarrow$   $C_1 = 0$

$\rightarrow$  Impongo la condizione sul lato sud, dove  $\Theta = 0$

$$C_2 \sin(\lambda x) (C_3 + C_4) = 0$$

per verificare ciò,  $(C_3 + C_4)$  deve annullarsi  $\rightarrow$   $C_3 = -C_4$

$\hookrightarrow$  (se fosse  $C_2 = 0$ ,  $\Theta$  verrebbe sempre 0, non verificando la condizione  $\Theta = 1$ )

$$\Theta = C_2 C_4 \sin(\lambda x) (e^{+\lambda y} - e^{-\lambda y})$$

$\rightarrow$  Impongo la condizione sul bordo est, dove  $x = L$

$$C_2 C_4 \sin(\lambda L) (e^{+\lambda y} - e^{-\lambda y}) = 0$$

• L'unica possibilità è che il seno di  $\lambda L$  sia pari a zero, cioè  $\lambda$  deve far sì di annullare il valore del seno.

$$\rightarrow L \lambda_n = n\pi \quad n = 1, 2, \dots$$

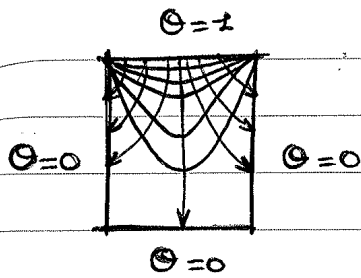
$$\lambda_n = \left( \frac{n\pi}{L} \right)$$

$\rightarrow$  Però, per ogni  $\lambda$  ho una soluzione diversa, ma esattissima. Dato che il problema di partenza è lineare, la soluzione risulti dalla sovrapposizione di tutte queste soluzioni associate a un certo valore di  $\lambda$ .

$$\Theta = C_2 C_4 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right)$$

dove il seno risolve la parte esponenziale. Ma è una sovrapposizione non banale, perché va fino all'infinito:

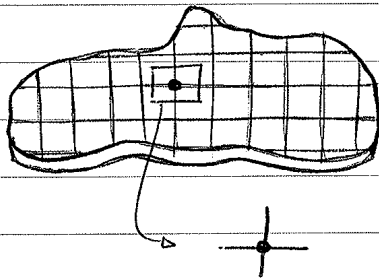
$$\Theta = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right)$$



Negli spigoli del dominio notiamo un addensamento delle linee di conduzione, dovuto alle ipotesi su  $\Theta$ .

### SOLUZIONI NODALI → (Soluzioni numeriche)

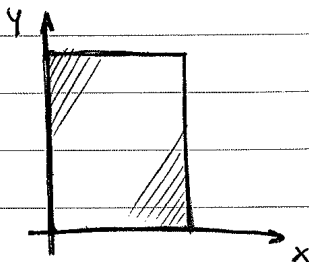
- I calcolatori lavorano con approssimazioni, ne è però dietro anche nelle soluzioni, non spariscono. Gran casino già a partire dalle cifre di  $\pi$ ; inoltre, posso considerare solo un numero finito di soluzioni. Mettendo insieme ciò, capisco che devo introdurre una DISCRETIZZAZIONE DEL DOMINIO. In pratica, devo individuare particolari posizioni (nodi) dove cercherò di calcolare valori approssimati e finiti di temperatura (cioè considero solo alcuni punti). Devo approssimarlo a un problema algebrico,



con tante equazioni approssimate algebriche (uniche che si usano il calcolatore) quante sono le incognite, ossia i punti che voglio conoscere.

- 1) Discretizzazione del dominio (nodi)
- 2) Approssimazione algebrica del problema di partenza
- 3) Soluzione del problema algebrico

### METODO NUMERICO DI SOLUZIONE



Questo dominio posso ottenerlo come prodotto di due domini 1-D (enti est e sud)

- Posso pensare di discretizzare quindi i due domini 1-D, prendendo una serie di punti, di cui due sono fissi (estremi) e altri posso prenderli equispaziali.

- L'approssimazione migliora o peggiora al variare di  $h$ , ma in che modo?  $h$  non è altro che il  $\Delta x$  (ne considero uno alla volta)

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_i \approx \frac{T(x_i + \Delta x) - T(x_i)}{\Delta x}$$

La precisione dell'approssimazione in che modo dipende da  $\Delta x$ ? Se tende a zero, il denominatore deve andare a zero, e di conseguenza anche il numeratore, se no viene un  $\infty$  e non serve a nulla. Soltanto se anche il numeratore tende a zero posso calcolarlo, se no zicchiamo che si vada al di sotto della precisione di macchina (pezzi azzardamento) e che quindi il risultato sia imprevedibile.

- Ma posso anche scrivere:

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{(i,j)} \approx \frac{T(x_i) - T(x_i - \Delta x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{(i,j)} \approx \frac{T(x_i + \Delta x) - T(x_i - \Delta x)}{2\Delta x}$$

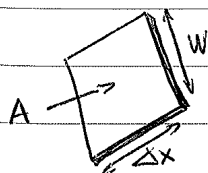
Quale forma scelgo? La scelta dipende solo dalla precisione che ci garantisce, a parità di costo scelgo la più precisa.

Lez. **8** (su IHT senza computer! --')

19/3/2013

continuazione (1.42)

$$\text{ESPESA} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{potenza}}}{P_{el}} / \left( \frac{\Delta x}{\Delta t} \right) \cdot W = \frac{P_{el}}{V \cdot W} \left[ \text{J/m}^2 \right]$$



↳ potenza su unità di area captata dal side

$$\text{ESPESA} = 21,9 \text{ MJ/m}^2$$

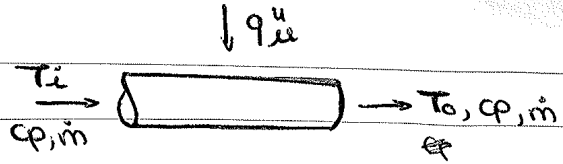
$$P_{potabile} = \eta \cdot q''_{sde}$$

$$\hookrightarrow [W/m^2] = [J/s/m^2]$$

$$t^* = \frac{\text{ESPESA}}{P_{potabile}} = \frac{\text{ESPESA}}{\eta \cdot q''_{sde}} = \boxed{6 \cdot 10^5 \text{ s}}$$

J.P.Morgan  
Asset Management

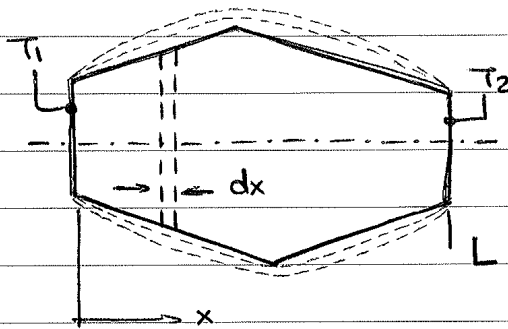
BILANCIO FORZATA D'ACQUA



$$q''_u = \dot{m} c_p (T_o - T_i) \rightarrow (T_o - T_i) = \frac{q''_u}{\dot{m} c_p} = \boxed{45,6^\circ\text{C}}$$

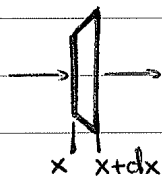
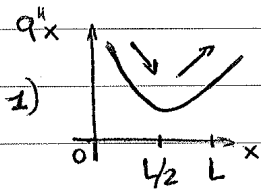
$$\eta = \frac{q''_u}{q''_{sdein}} = \boxed{0,6}$$

2.2



$T_1 > T_2$

È un cilindro con zaggi sempre  $\neq$



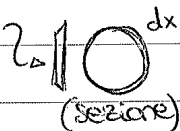
$$\dot{E}_{in} = \dot{E}_{out}$$

$$q_x = q_{x+dx} \rightarrow q_x = \text{costante}$$

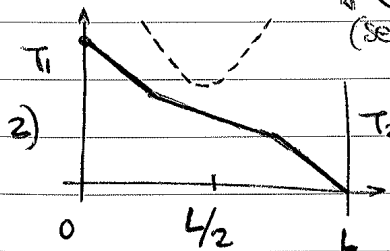
$$q''_x = \frac{q_x}{A} \rightarrow \text{sono inversamente proporzionali}$$

$\hookrightarrow$  l'area è direttamente proporzionale a  $x^2$

$$q''_x = \frac{q_x}{\alpha x^2} \rightarrow \text{È DI TIPO PARABOLICO}$$

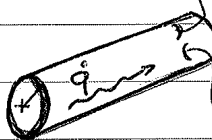


$$\hookrightarrow q_x = q''_x \cdot (\alpha x^2) \text{ [parabola]}$$



Dalla derivata seconda capisco andamento della derivata prima

2.28



$$T(r) = 900 - 5,26 \cdot 10^5 r^2 \quad \dot{q} = 600 \cdot 10^5 \text{ W/m}^3$$

$$r_0 = 0,030 \text{ m}$$

$$k = 30 \text{ W/m}^2\text{K}$$

$$\rho = 1100 \text{ kg/m}^3$$

$$c_p = 800 \text{ J/kgK}$$



$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_g = \Delta \dot{E}_{st} > 0$$

$$\dot{E}_{out} = \dot{q}_{conv} + \dot{q}_{cond, gap} + 3 \dot{q}_{rad}$$

$$Ah(T_c - T_{\infty}) + K_g A \frac{(T_c - T_b)}{t} + 3 A_L K_L \frac{(T_c - T_b)}{L} = \boxed{0,15 \text{ W}}$$

• Su IHT

$$\rightarrow E_{dot{G}} = A_s * h^* (T_c - T_{inf}) + K_g * A_s * (T_c - T_b) / t + 3 * A_L * K_L * (T_c - T_b) / L$$

- Non mettere caratteri singola (h, t, ...) (/ \* 0) // equazione risolvibile  
↳ per causare più pezzi

$$E_{dot{G}} = 150 \text{ e}^{-3} // \text{W}$$

$$T_{inf} = 20 + 273,15$$

$$A_s = L_1 * L_2$$

$$K_g = 0,0263$$

$$L_1 = 0,008$$

$$T_b = 35 + 273,15$$

→ Impongo a ±  
quelle mancanti

$$L_2 = 0,004$$

$$t = 0,002$$

$$h = 50,0$$

$$A_L = 0,001 * 0,00025$$

$$L = 0,004$$

$$K_L = 25,0$$

• Poi dico "Solve" e tratto i risultati a destra

- Se voglio che  $T_c$  sia massimo 40°C, ea metto:

$$T_c = 40 + 273,15$$

→ Se varia  $K_L$   $K_L = 200,00$

Cliccando expeze → selezione variabile, valore partenza e azzio,  
↓  
e ogni quanto voglio analizzarla

Avrei molte colonne

di risultati

- Supponendo che i connettori metallici abbiano una conducibilità elettrica abbastanza alta, con aree di sezione  $A$  - Trascuriamo la conduzione attraverso il gas presente tra i semiconduttori -

$$R_{e,s} = \rho_{e,s}(2L)/A \quad \Rightarrow \quad \boxed{q = \frac{I^2 \rho_{e,s}}{A^2_{e,s}}}$$

↳ generazione volumetrica [W/m<sup>3</sup>]

- Assumendo le proprietà termofisiche costanti e che le resistenze di contatto siano uguali e trascurabili, posso esprimere il flusso termico fuori e dentro il semiconduttore - Vedere appendice C7 -

$$q(x=L) = 2A_{c,s} \left[ \frac{k_s}{2L} (T_1 - T_2) + \frac{I^2 \rho_{e,s} L}{A^2_{c,s}} \right]$$

$$q(x=-L) = 2A_{c,s} \left[ \frac{k_s}{2L} (T_1 - T_2) - \frac{I^2 \rho_{e,s} L}{A^2_{c,s}} \right]$$

[Il coefficiente 2 indica che considero entrambi i pellets e non solo un.]

- Facendo il bilancio energetico all'interfaccia tra i conduttori e il semiconduttore a  $x=L$ :

$$q_1 = q(x=-L) + q_{p,1} = q(x=-L) + I S_{p-n} T_1$$

Con il semiconduttore a  $x=L$ :  $q_2 = q(x=L) - I S_{p-n} T_2 = q(x=L) + I S_{p-n} T_2$

- Combinando e' equazione di prima con questa:

$$q_1 = \frac{k_s A_{c,s}}{L} (T_1 - T_2) + I S_{p-n} T_1 - 2 \frac{I^2 \rho_{e,s} L}{A_{c,s}}$$

$$q_2 = \frac{k_s A_{c,s}}{L} (T_1 - T_2) + I S_{p-n} T_2 - 2 \frac{I^2 \rho_{e,s} L}{A_{c,s}}$$

• Generalizzando le equazioni di prima:

$$q_1 = \frac{1}{R_{t, \text{cond}, \text{mod}}} (T_1 - T_2) + I Sp_{-n, \text{eff}} T_2 - I^2 Re_{, \text{eff}}$$

$$q_2 = \frac{1}{R_{t, \text{cond}, \text{mod}}} (T_1 - T_2) + I Sp_{-n, \text{eff}} T_2 + I^2 Re_{, \text{eff}}$$

$$P_n = q_1 - q_2 = I Sp_{-n, \text{eff}} (T_1 - T_2) - 2I^2 Re_{, \text{eff}}$$

Dove  $Sp_{-n, \text{eff}} = N Sp_{-n}$ ,  $Re_{, \text{eff}} = N Re_{, s}$  e  $R_{t, \text{cond}, \text{mod}} = L / NA_{sks}$

• Per calcolare il rendimento del sistema:

$$\eta = P / q_1$$

con passaggi algebrici otteniamo  $\eta = \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) \frac{\sqrt{1 + 2\bar{T}} - 1}{\sqrt{1 + 2\bar{T}} + T_2/T_1}$

dove  $z = \frac{S^2}{Pe_{, s} ks}$   $\hookrightarrow \bar{T} = T_{\text{media}}$

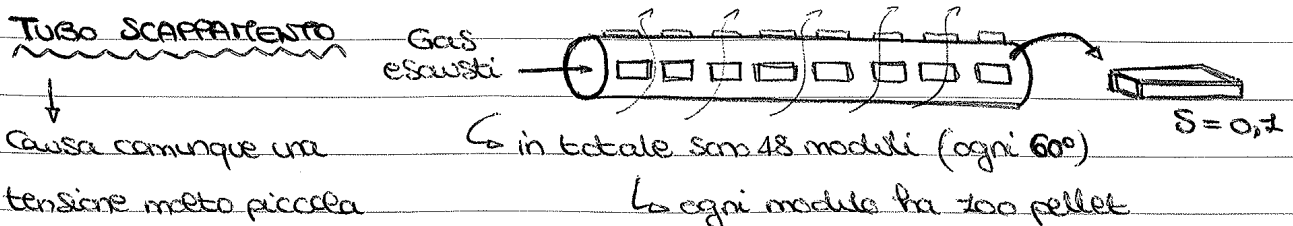
• Poiché  $\eta$  cresce grazie a  $2\bar{T}$ , possiamo considerare questo fattore come indicatore del rendimento (se  $\rightarrow \infty$ ,  $\eta \rightarrow 1$ , come Carnot).

Per ottenere un  $2\bar{T} \rightarrow \infty$ , debb aumentare  $\bar{T}$   $\hookleftarrow \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) \cdot z$

(limitato dalla R dei materiali) o aumentare

z (materiali con  $\rho$  o  $K$  molto basse, delo combinabile al massimo).

H<sub>2</sub>O in pressione (105°C)



FORMULAZIONE SOTTO FORMA MATRICIALE (4.5.2)

↳ approssimazione alle differenze finite

• Consideriamo un sistema di  $N$  equazioni in  $N$  temperature incognite, identificando i nodi posso trasformarlo in un procedimento algebrico:

$$a_{11}T_1 + a_{12}T_2 + a_{13}T_3 + \dots + a_{1N}T_N = C_1$$

$$a_{21}T_1 + a_{22}T_2 + a_{23}T_3 + \dots + a_{2N}T_N = C_2$$

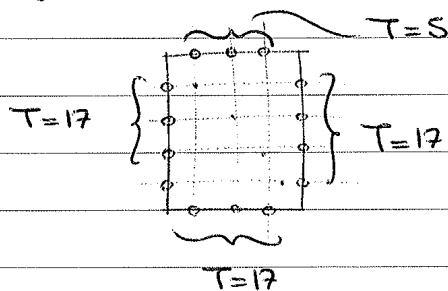
...

$$a_{N1}T_1 + a_{N2}T_2 + a_{N3}T_3 + \dots + a_{NN}T_N = C_N$$

In forma matriciale:

$$[A][T] = [C] \rightarrow \text{funzione}$$

Questa descrive la temperatura in ogni punto **INTERNO**, non sul bordo, dove regna la **CONDIZIONE AL CONFINO** - Per la condizione di Dirichlet, ho



temperature imposte nei nodi sul bordo.

↳ anzi' un solo coefficiente diverso da zero in ogni nodo - 2 coefficienti diversi da zero stanno sulla **DIAGONALE**.

• La matrice è **SPARSA**, con sparsità **IRREGOLARE** se il numero dei nodi è casuale, se no è una sparsità **REGOLARE**, che segue cioè uno schema unico.

$$A = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & & & \\ & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Struttura a banda: i coefficienti non zero sono in una banda attorno alla diagonale.

↳ non so però risolverlo, neanche con Kramer, che per sistemi grandi non si può calcolare.

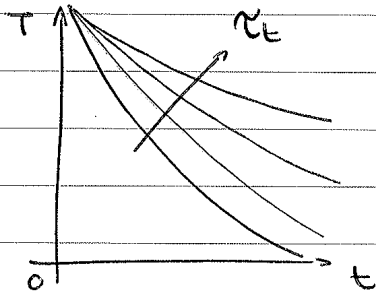
• A priori,  $\theta$  di  $(T - T_{\infty})$  sarebbe quella superficiale, mentre  $\theta$  di  $dT/dt$  è una temperatura mediata sul corpo. Grazie alle ipotesi, sono la stessa cosa. Introducendo la differenza di  $T$   $\theta$ :

$$\frac{PVC}{hAS} \ln \frac{\theta_1}{\theta_2} = t$$

$$\Rightarrow \frac{\theta}{\theta_1} = \frac{T - T_{\infty}}{T_1 - T_{\infty}} = \exp \left[ - \left( \frac{hAS}{Vc\rho} \right) t \right]$$

• Nell'analogia elettrica, posso considerare la costante termica di tempo del circuito, espressa come:

$$\tau_t = \left( \frac{1}{hAS} \right) PVC \cong RC_t$$



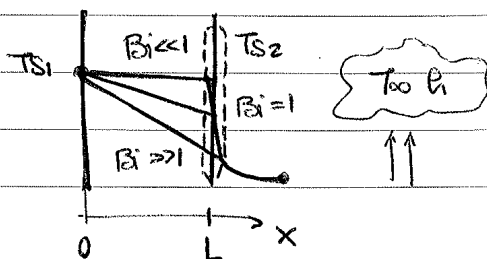
più cresce  $\tau_t$ , più è esponenziale decresce lentamente, cioè ci mette di più a raggiungere il valore  $T_{\infty}$ .

• Integrando e sostituendo  $\theta$ , trovo l'energia.

• VALIDITÀ DEL METODO = è un' approssimazione della realtà, non esattamente quello. La temperatura infatti non può rimanere esattamente uniforme in tutto il

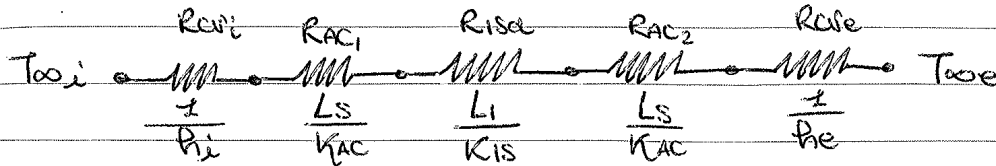
Abbiamo tolto la dipendenza dalle coordinate spaziali  $\leftarrow$  il fluido, perché non avrebbe gradiente di  $T$  (d $T$ /d $t \rightarrow \phi = -kA \frac{dT}{dx} = 0$ , adiabaticità).

$\rightarrow$  Il gradiente è sufficientemente piccolo da poter essere trascurato?



[Se fluido ha  $C \rightarrow \infty$ ,  $T$  non varia]

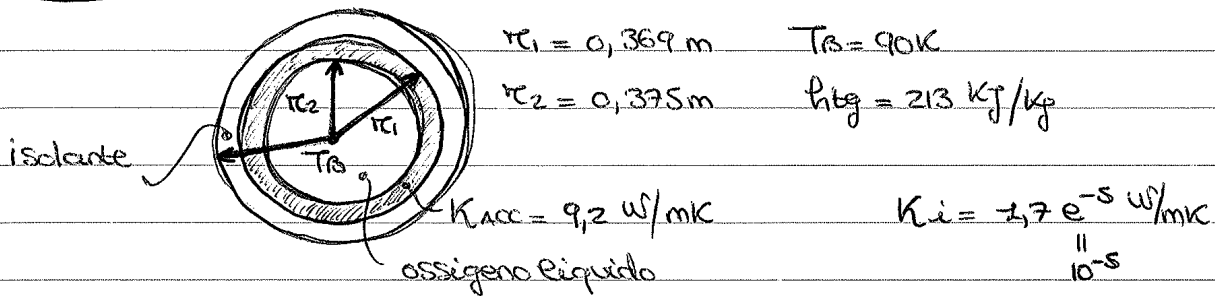
$\dot{q}$



$$R_{TOT} = \frac{1}{h_i} + \frac{L_s}{K_{AC}} + \frac{L_i}{K_{IS}} + \frac{L_s}{K_{AC}} + \frac{1}{h_e} = 0,2 + 0,2 + 2 \cdot 5 \cdot 10^{-5} + 1,09 = 1,49 \text{ K/W}$$

essendo  $\dot{q} = \frac{T_{00e} - T_{00i}}{R_{TOT}} = \boxed{14,07 \text{ W/m}^2}$

3.68



$\dot{m}_{O_2} = 1 \text{ Kg/giorno}$

$T_{00} = 240 \text{ K}$

$h = 20 \text{ W/m}^2\text{K}$

Spessore isolante ( $r_3$ )?

IPOTESI

- Proprietà costanti
- Scegliamo isolante con pefesze prop. izzag.
- Condizione stazionarie (non cambia massa, O<sub>2</sub> varia stato)
- Monodimensionalità sferica
- Trascuro effetto convezione

- Per ottenere  $K_{ul}$  posso moltiplicare il calore latente per la portata convertita in  $\text{Kg/s}$ :

$$\dot{q} = P_{max} = 213 \cdot \frac{1}{24 \cdot 60 \cdot 60} = 2,46 \cdot 10^{-3} \text{ Kw} = 2,46 \text{ W}$$

$$R_{TOT} = \frac{T_{00} - T_B}{\dot{q}} = \frac{60,98}{2,46} = 24,78 \text{ K/W}$$

↳ piccolo, condizioni criogeniche

$L_0$  è area sferica in base a  $r_3$ , non

posso considerarla nella R come costante

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT_f}{dr} \right) = - \frac{\dot{q}}{k_f} \quad \text{combustibile} \quad (\dot{q} = \text{fuel})$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT_c}{dr} \right) = 0 \quad \text{guaina} \quad (c = \text{cladding})$$

CONDIZIONI AL CONFINO

$$\textcircled{1} \quad T_f \Big|_{r=r_1} = T_c \Big|_{r=r_1} \quad \left. \vphantom{T_f} \right\} \text{Interfaccia}$$

$$\textcircled{2} \quad -k_c \frac{dT_c}{dr} \Big|_{r=r_2} = h(T_c - T_\infty)$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{dT_f}{dr} \Big|_{r=0} = 0 \quad (\text{MAX. T AL CENTRO})$$

$$\textcircled{4} \quad -k_c \frac{dT_c}{dr} \Big|_{r=r_1} = -k_f \frac{dT_f}{dr} \Big|_{r=r_1} \quad \rightarrow \text{flusso all' interfaccia}$$

$$\cancel{r} \frac{dT_f}{dr} = - \frac{\dot{q}}{2k_f} r^2 + C_1 \quad \rightarrow \quad \frac{dT_f}{dr} = - \frac{\dot{q}}{2k_f} r + \frac{C_1}{r}$$

$$\rightarrow \boxed{T_f = - \frac{\dot{q}}{4k_f} r^2 + C_1 \ln r + C_2}$$

$$\frac{dT_c}{dr} = \frac{C_3}{r} \quad \rightarrow \quad \boxed{T_c = C_3 \ln r + C_4}$$

$$\textcircled{3} \quad \boxed{C_1 = 0}$$

$$\textcircled{1} \quad - \frac{\dot{q}}{4k_f} r_1^2 + C_2 = C_3 \ln r_1 + C_4$$

$$\hookrightarrow \boxed{C_2} = C_3 \ln r_1 + C_4 + \frac{\dot{q} r_1^2}{4k_f}$$

$$\textcircled{4} \quad -k_f \left( - \frac{\dot{q}}{2k_f} r_1 \right) = -k_c \left( \frac{C_3}{r_1} \right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_3} = - \frac{\dot{q}}{2k_f} \frac{r_1^2}{k_c} = \boxed{-244}$$

$$\textcircled{2} \quad C_3 \ln r_2 + C_4 = h(T_c - T_\infty) \Rightarrow \boxed{C_4} = \frac{-h T_\infty - C_3 \ln r_2}{1-h} = \boxed{300,49}$$

$$\frac{EAG'}{PVC} \int_0^t dt = \int_{T_i}^T \frac{dT}{T^4 - T_{suz}^4}$$

$$t = \frac{PVC}{4EAG'T_{suz}^3} \left\{ \ln \left| \frac{T_{suz} + T}{T_{suz} - T} \right| - \ln \left| \frac{T_{suz} + T_i}{T_{suz} - T_i} \right| + 2 \left[ \tan^{-1} \left( \frac{T}{T_{suz}} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{T_i}{T_{suz}} \right) \right] \right\}$$

• Il problema è che la temperatura è implicita, il tempo è in funzione della temperatura e non viceversa, zittina ad essere qualcosa di non lineare. Nel caso di scambio radiativo con lo spazio profondo ( $T_{suz} \rightarrow 0$ ) posso ricambiare un nuovo integrale:

↳ Kelvin

$$t = \frac{PVC}{3EAG'} \left( \frac{1}{T^3} - \frac{1}{T_i^3} \right)$$

• Blendo, posso vedere questa  $t(r)$  come  $T(t)$  (inverted case)  $L \rightarrow L$

e posso calcolare...

\*

NON È UNA ITERAZIONE!!

A PUNTO FISSO (non vuole x tentativi, da solo valori a  $T_{fix}$  ottenere  $t$ )

↳ l'ho analizzato bene male, dipende dallo intervallo considerato

2. Assenza di radiazione: imponendo  $\Theta = T - T_{\infty}$ , ottengo

$$\frac{d\Theta}{dt} + a\Theta - b = 0$$

dove  $a = \frac{hA}{PVC}$  e  $b = [(q_s^* A_s + \dot{E}_g) / PVC]$  - Introduciamo una nuova variabile dipendente,  $\Theta'$ :

$$\Theta' = \Theta - \frac{b}{a}$$

otengo così un'equazione lineare risolvibile

$$\frac{d\Theta'}{dt} + a\Theta' = 0$$

• Il modello a parametri concentrati ha tuttavia validità molto limitata.

\* Il tempo continua ad essere la variabile indipendente, ma se voglio imporre lo un istante di tempo come la poss. ricavare  $T$ ?

→ Sommo  $T$  ad ambo i membri:  $t + T = F(t) + T$

$$\Rightarrow \boxed{T = F(t) + T - b} \quad \dots \text{E POSSO ITERARE!}$$



A questo punto:  $\Theta^* = f(x^*, F_0, B_i)$

- Se il numero di Biot rimane lo stesso (variazioni minime delle grandezze), anche  $\Theta^*$  avrà andamento uguale - Useremo perciò  $\Theta^*$

PARERE ANA CON SCAMBIO CONVETTIVO → soluzione esatta

- Si può di nuovo attuare la separazione delle variabili e ottengo nuovamente una serie; eccetto alcuni casi con  $F_0$  molto piccoli, questa serie può essere approssimata da pochi termini, a volte anche solo uno.

$$\Theta^* = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp\left[-\xi_n^2 F_0\right] \left[\cos(\xi_n x^*)\right]$$

dove  $C_n$  è uguale a  $\frac{4 \operatorname{sen} \xi_n}{2 \xi_n + \operatorname{sen}(2\xi_n)}$  e il valore di  $\xi_n$  corrisponde

alle radici reali dell'equazione trascendentale  $\xi_n \tan \xi_n = B_i$ .

Tuttavia, la soluzione ci dice che la variabile  $\Theta^*$  decresce secondo una curva esponenziale al quadrato, per questo posso considerare solo i primi valori - Questa soluzione è valida per  $0 \leq F_0 \leq \infty$ .

→ Soluzione approssimata

- Con Fourier abbastanza grande (cioè  $t^*$ ), ossia  $F_0 > 0,2$  (cioè del 20% del tempo caratteristico di penetrazione  $L^2 \rho / \alpha$ ), tutti i termini della soluzione oltre il primo danno contributo trascurabile - la soluzione diventa:

$$\Theta^* = C_1 \exp\left[-\xi_1^2 F_0\right] \left[\cos(\xi_1 x^*)\right]$$

$$\Rightarrow \Theta^* = \Theta_0^* \cos(\xi_1 x^*) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \xi_1 \text{ si ricava dalle tabelle} \\ \text{a seconda di Biot e della} \\ \text{geometria.} \end{array} \right.$$

**IMPo!** La dipendenza temporale di  $T$  in ogni punto del muro è la stessa del piano equatoriale.

date i  $\beta_n$  sono le radici positive dell'equazione trascendentale

$$\sum_n \frac{J_2(\beta_n)}{J_0(\beta_n)} = Bi$$

- Per  $Bi > 0,2$ , domina solo il primo termine della serie ( $n=1$ ) -  
 $L_0$  in  $\beta_1$  è lunghezza caratteristica e il raggio

Soluzione approssimata  $\rightarrow \Theta^* = C \exp(-\beta_1^2 Fo) J_0(\beta_1 \pi^*)$

posso scrivere  $\Theta^* = C \exp(-\beta_1^2 Fo)$  e di conseguenza

$$\Theta^* = \Theta_0^*$$

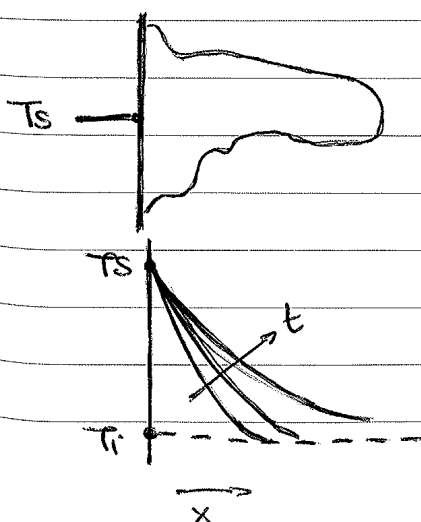
### [SOLIDO SEMI-INFINITO]

- È interessante perché il tempo caratteristico di penetrazione del calore tende all'∞ (deve attraversare lunghezza ∞), e quindi rappresenta bene soluzione per intervalli di tempo molto piccoli in pareti finite (non fa in tempo a percorrerlo tutto, posso vederlo come fosse seminfinito) - Presenta un metodo alternativo per proporre soluzioni alle equazioni alle derivate parziali - la forzante è sempre un cambiamento ISTANTANEO della condizione al contorno sull'unica parete  $z=0$  - Posso avere tre casi:

①  $T(x,0) = T_i$

$T(0,t) = T_s \rightarrow$  costante, ma  $\neq T_i$

(DIRICHLET)



- In tempi piccoli, la frazione di corpo che si accorge del gradiente di temperatura è piccola, ma con il passare del tempo il calore propaga, la frazione di corpo aumenta, finché tutto il corpo va a  $T_s$ .

- Trasformiamo  $\partial T / \partial x$ : → diventa totale perché ipotizziamo che sia solo funzione di  $\eta$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{dT}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{(4\alpha t)^{1/2}} \frac{dT}{dy}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{d}{dy} \left[ \frac{\partial T}{\partial x} \right] \frac{dy}{dx} = \frac{1}{4\alpha t} \frac{d^2 T}{dy^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{dT}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{2t(4\alpha t)^{1/2}} \frac{dT}{dy}$$

È QUASI IL CONTRARIO DELLE SEPARAZIONE DELLE VARIABILI: QUI NON LE SEPARO, LE CERCO DI RACCHIUDERE TUTTE DENTRO UNA UNICA  $\eta$ .

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$-\frac{x}{2t(4\alpha t)^{1/2}} \cdot \frac{dT}{dy} = \alpha \frac{1}{2t} \frac{d^2 T}{dy^2}$$

$$-\eta \frac{dT}{dy} = \frac{1}{2} \frac{d^2 T}{dy^2} \implies \boxed{\frac{d^2 T}{dy^2} = -2\eta \frac{dT}{dy}}$$

• Abbiamo ottenuto un'equazione di più facile soluzione, molto più semplice dell'equazione alle derivate parziali di partenza.

CONDIZIONI INIZIALI E AL CONFINO

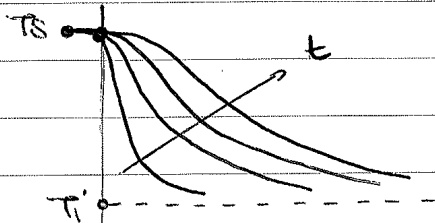
$$\textcircled{1} \quad x=0 \implies \eta=0 \quad T(\eta=0) = T_s$$

• Essendo equazione di secondo ordine, ho bisogno di 2 condizioni al contorno nella variabile  $\eta$ . La seconda condizione sta in  $\eta \rightarrow \infty$  (posso vederla come  $t \rightarrow 0$ , così  $\eta$  tende all'infinito).

$$T(\eta \rightarrow \infty) = T_i \quad (\text{sarebbe } T(x,0) = T_i)$$

$$t \rightarrow 0 \implies \eta \rightarrow \infty$$

- La velocità di propagazione è infinita, deve essere così per giustificare i risultati ottenuti. Eccetto per intervalli di tempo molto molto brevi (va corretta nell'equazione del telegrafista) va bene nella pratica, considero che azzeccò a  $T_i$  anche se non è esattamente così.



Man mano che cresce il tempo, la posizione con  $T_i$  aumenta.

- Possiamo calcolare il flusso con Fourier:

$$q''_s = -k \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = -k(T_s - T_i) \frac{d(\operatorname{erfc} \eta)}{d\eta} \frac{d\eta}{dx} \Big|_{\eta=0}$$

$$q''_s = k(T_s - T_i) \left( \frac{2}{\sqrt{\pi}} \right) \exp(-\eta^2) (\alpha t)^{-1/2} \Big|_{\eta=0}$$

$$\boxed{q''_s = \frac{k(T_s - T_i)}{(\pi \alpha t)^{1/2}}}$$

- ② Flusso termico costante  $q''_s = q''_0$

$$T(x,t) = T_i + \frac{2q''_0 (\alpha t / \pi)^{1/2}}{k} \exp(-\dots)$$

dove il secondo membro è detto  $\operatorname{erfc} u = 1 - \operatorname{erf} u$

↳  $\operatorname{erfc}$  complementare

$$\textcircled{3} \frac{T(x,t) - T_i}{T_0 - T_i} = \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \right) - \left[ \exp\left( \frac{\rho x}{k} + \frac{\rho^2 \alpha t}{k^2} \right) \left[ \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + \frac{\rho \sqrt{\alpha t}}{k} \right) \right] \right]$$

↳ dipende da molte più variabili, ma è nota

- Condizione di superficie:  $-k \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = h [T_0 - T(0,t)]$

2 - DISCRETIZZO IL PROBLEMA SPAZIALE → discretizzazione di  $x, y$

$$T = T(x, y, t) \Rightarrow T = T_{i,j}(t) \approx T(x_i, y_j, t)$$

↳ approssimazione della  $T$  in  $i, j$  nell'istante  $t$ .

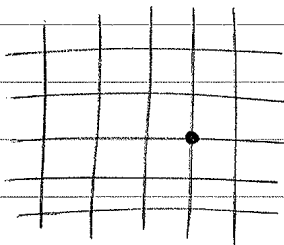
- Ottengo qualcosa di simile a delle equazioni differenziali ordinarie nel tempo, ho un'equazione per ogni nodo, ottengo un sistema.
- Il calcolatore non può ancora risolvere, devo fare un'altra discretizzazione, stavolta della variabile  $t$ .

$$T_{i,j}(t) \Rightarrow T_{i,j}^n \approx T(x_i, y_j, t_n) \Rightarrow \boxed{Az = b}$$

dove  $A$  è la matrice dei coefficienti, enorme.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \text{ nel nodo } i, j \text{ approssimato in } \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \approx \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}$$

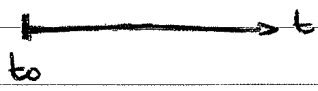


$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

$$\frac{1}{\alpha} \frac{dT_{i,j}}{dt} = \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}$$

$\forall i, j = \text{NODO INTERNO}$

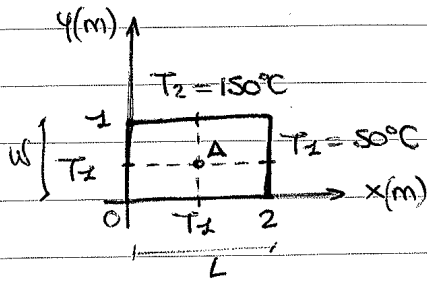
PASSO NUDO → discretizzo la variabile temporale



- Possiamo voler sapere l'evoluzione nel tempo di una certa  $T$
- Possiamo voler studiare un caso stazionario come evoluzione asintotica.

# Lez. 14

9/4/13



$T(1, 0, 5) \rightarrow$  temperatura nel centro A?

$\hookrightarrow$  primi 5 termini della serie

$$\Theta(x, y) = \frac{T - T_2}{T_2 - T_1} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \frac{\sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi W}{L}\right)}$$

$\hookrightarrow$  2 termini con n pari sono nulli  
 $(n=2 \rightarrow (-1)^{n+1} = 1)$

• Se  $\begin{cases} x=1 \\ y=0,5 \\ W=1 \\ L=2 \end{cases}$

$\hookrightarrow$   $\sum$  va da 1 a 9 per avere 5 non nulli

$$\Theta(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^9 \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi}{2}\right)}$$

$n=1 \rightarrow \Theta = 0,255$  (adimensionalità)

$n=3 \rightarrow \Theta = -0,063$

$n=5 \rightarrow \Theta = 0,008$

$n=7 \rightarrow \Theta = -0,001$

$n=9 \rightarrow \Theta = 0,000$

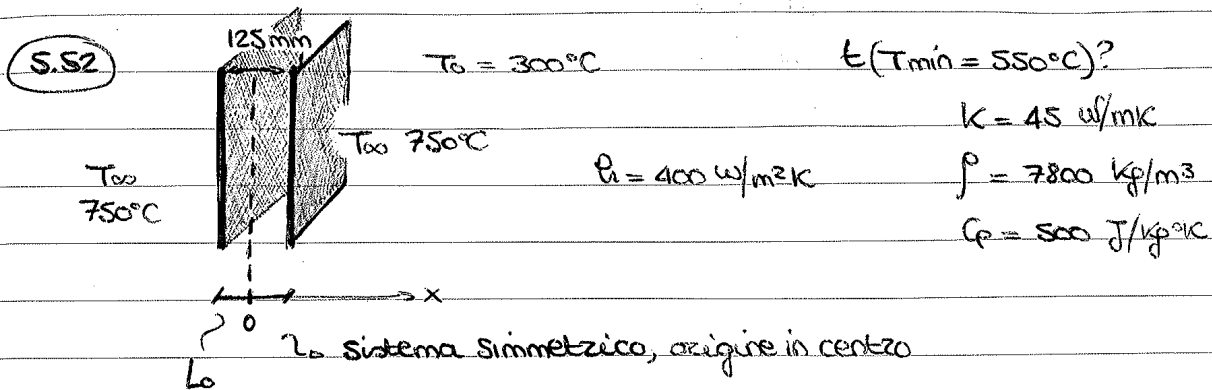
$$\Theta(1, 0, 5) = [\Theta_{n=1} + \Theta_{n=3} + \Theta_{n=5} + \Theta_{n=7} + \Theta_{n=9}] \frac{2}{\pi} = 0,445$$

$$T = \Theta(T_2 - T_1) + T_1 = \boxed{94,5^\circ\text{C}}$$

• Che errore avremmo commesso considerando solo i primi 3 termini?

$$\frac{0,001}{0,445} \cdot \frac{2}{\pi} \approx 1\%$$

PROBLEMA IN TRANSITORIO (metodo dei parametri concentrati)  $\rightarrow Bi = \frac{V}{Sp} \ll 0,1$



Ipotesi  $Fo > 0,2$  (devo verificare che la soddisfi)

$$\Theta^* = C_1 \exp\left[-\frac{\rho^2}{\rho_i^2} Fo\right] \left[ \cos\left(\frac{\rho_1 x^*}{L_0}\right) \right]$$

valore  $\lambda(\cos 0)$  ←

↑  $(x/L_0)$

con  $x^* = 2x/L$ , a me interessa l'asse, con  $x=0 \Rightarrow x^*=0$

$$\frac{\Theta_0^*}{\Theta_\infty^*} = \frac{C_1 \exp\left(-\frac{\rho^2}{\rho_i^2} Fo\right)}{C_1}$$

↳ incognita

↳ dalle tabelle in funzione di  $Bi$  ed  $t$ , calcolabile per le tabelle usando  $L_0$  come dimensione caratter.

$$Fo = -\frac{\ln\left(\frac{\Theta_0^*}{\Theta_\infty^*}\right)}{\frac{\rho^2}{\rho_i^2}} = 1,902$$

↳ (detto nella tabella)

$$\rightarrow Bi = \frac{\rho_i L}{k} = 0,556$$

↳ (da questo valore calcolo  $C_1$  e  $\rho_1$ , e poi tratto  $Fo$ )

Per trovare  $Bi$ , faccio l'interpolazione:

$$\frac{Bi_1 - 0,556}{Bi_1 - Bi_2} = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 - \rho_2}$$

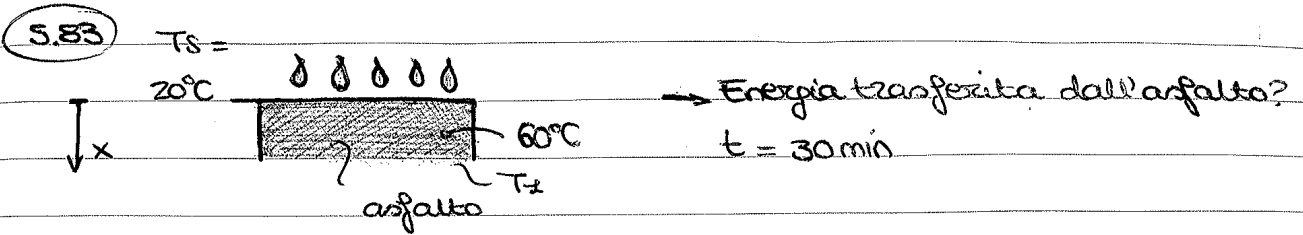
con  $Bi_1, Bi_2, \rho_1, \rho_2$  dati dalle tabelle

$$\Theta_{\min}^* = \frac{T_{\min} - T_0}{T_\infty - T_0} = 0,4444$$

$\Rightarrow Fo > 0,2$ , ipotesi verificata.

$$Fo = \frac{\alpha t}{L_c^2} \Rightarrow t = \frac{Fo L_c^2}{\alpha} \approx \boxed{644,5}$$

↳  $\left[ \frac{\text{K}}{\rho c_p} \right]$



Ipotesi Asfalto solido semi-infinito (per  $x > 0$ )

$$q'' = \frac{k(T_s - T_z)}{\sqrt{\pi \alpha t}}$$

$$Q'' = \int_0^{30 \text{ min}} q'' dt$$

$$Q'' = \int_0^{1800} \frac{k(T_s - T_z)}{\sqrt{\alpha \pi t}} dt = \frac{k(T_s - T_z)}{\sqrt{\alpha \pi}} \int_0^{1800} t^{-1/2} dt = -\frac{k(T_s - T_z)}{2\sqrt{\alpha \pi}} \cdot \sqrt{t} \Big|_0^{1800}$$

$$= -\frac{2k(T_s - T_z)}{\sqrt{\alpha \pi}} \cdot \sqrt{1800} = \boxed{-6,65 \cdot 10^5 \text{ J/m}^2}$$

Lez. **15**

12/4/13

otteniamo:

$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha} \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} = \frac{T_{m-1,n}^p + T_{m+1,n}^p - 2T_{m,n}^p + T_{m,n-1}^p + T_{m,n+1}^p - 2T_{m,n}^p}{(\Delta x)^2}$$

• Metodo esplicito: posso riciclare la temperatura  
 ↳ metodo all'istante  $n+1$  partendo solo dalla  $T$  all'istante  $n$   
 "Eulero in avanti" (al secondo membro non compare mai  $n+1$ )

• Metodo implicito: al secondo membro ho solo  $n+1$  e non  $n$ .  
 ↳ metodo "Eulero all'indietro"

|| NEL CASO ESPlicito LA MATRICE SPARSA SARÀ A STRUTTURA DIAGONALE,  
 || NEL CASO IMPLICITO NON SI SA.

→ Metodo cruzato in tempo al primo ordine



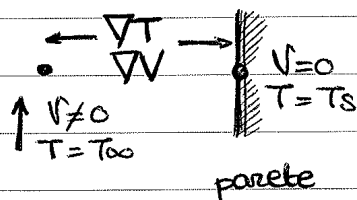
La sua matrice è:

$$A = \begin{pmatrix} / & / & / & / & / \\ / & 0 & / & / & / \\ / & / & / & / & / \\ / & / & / & / & / \\ / & / & / & / & / \end{pmatrix}, \text{ ma non so quanto costi -}$$

- Nel caso in avanti il costo è proporzionale al numero di incognite, mentre in questo caso i valori non nulli non sono solo sulla diagonale -

### CONVEZIONE

- Problema molto complicato, difficoltoso nasce dal fatto che i corpi non erano in movimento finché, erano fermi - Il problema è il calcolo del coefficiente  $h$ , uno dei problemi principali dell'ingegneria energetica odierna - Importanza dello strato limite, al contatto con la parete e l'aria si ferma, c'è uno strato tra quel punto e il moto di partenza, è uno strato detto LIMITE, uno strato di transizione - Il moto dei fluidi è strettamente legato allo scambio termico, ed influenza - Ogni strato limite ha il suo duale, cioè ad ogni strato IDRAULICO corrisponderà uno strato TERMICO e viceversa, cioè il calore influenza la variazione della velocità e viceversa -

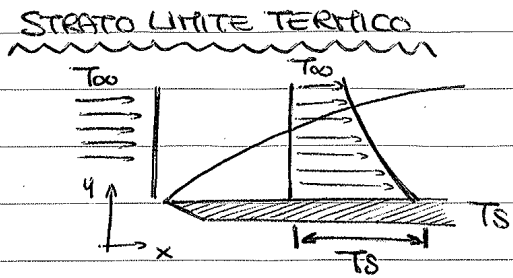


PREVALENZA = differenza di pressione  
↳ permette ai fluidi di circolare

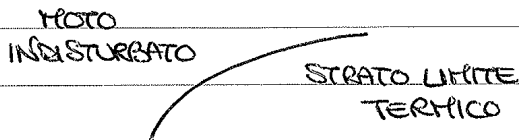
- La velocità (e quindi la portata), in condizioni di stessa prevalenza, sarà maggiore nei casi in cui l'attrito è minore, cioè il fluido non viene rallentato più di tanto -

- $\Delta$  rappresenta strato limite IDRAULICO
- $R$  rappresenta strato limite TERMICO e IDRAULICO

- Altro tipo di convezione è quello naturale (free), importante perché nella



- Se  $ea T_s > T_{oo}$ , i punti a contatto con la piastra avranno  $T = T_s$ , per poi allontanarsi fino ad azzerare alla  $T_{oo}$  del fluido.



## Lez. 16

15/04/'13

(dopo Torino - Roma  
☺ 1-2)

- Ad ogni distanza  $x$ , possiamo ricavare il flusso attraverso la legge di Fourier per  $y=0$ :

$$q_s'' = -k_f \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (\text{visto dal lato del fluido})$$

- Quest' espressione vale perché il fluido, a contatto con la piastra, non è in moto. Questo flusso può anche essere espresso attraverso la legge di Newton:

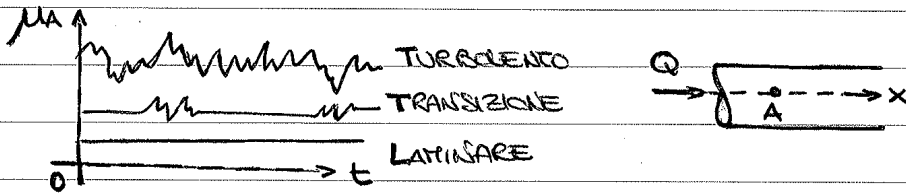
$$q_s'' = h(T_s - T_{oo}) \quad \rightarrow \text{legge caratteristiche alla parete e caratteristiche nella zona di bulk}$$

- Mettendo in relazione queste due formule si può ricavare il coefficiente  $h$ :

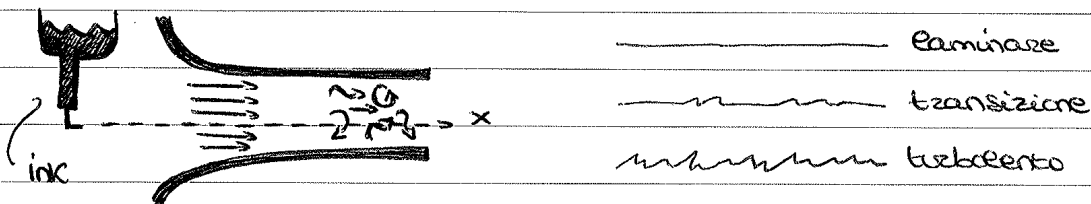
$$h = \frac{-k_f (\partial T / \partial y) |_{y=0}}{T_s - T_{oo}}$$

È un metodo operabile per trovare  $h$ , ma non è così semplice, c'è un  $\partial T / \partial y$ , ma noi non conosciamo questo gradiente, è un'incognita del problema. Solitamente  $h$  era un valore in input, serve per fare i conti: questa relazione serve a capire che  $h$  è influenzato importantemente dallo strato limite termico.

vanno nelle 2 (spesso 3) direzioni della velocità - Il profilo di velocità ha una zona "uniforme" molto più ampia, il mescolamento delle particelle tende ad uniformare la velocità, che andando però andasse a zero alla parete causa un izzepidimento netto nell'ultimo tratto - la natura caotica di questo processo fa sì che in ogni punto ci sia un transitorio costante e casuale, non è più ordinato, la velocità non sarà costante punto per punto - la portata però è sempre la stessa -

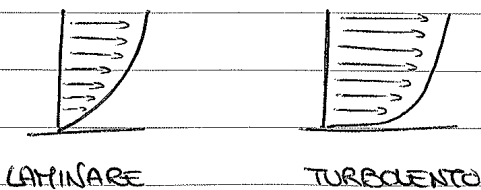


ESPERIENZA DI REYNOLDS



→ (maggiore scambio termico)

- Per causare maggiore turbolenza (pagando però in termini di attrito) uso un prandtl di turbolenza, cioè un tubo con all'interno un'elica, agito e mescolate in modo maggiore -



Il gradiente di velocità a parete sarà MAGGIORE nel caso TURBOLENTO -

↳ il prezzo da pagare sarà aumento attrito -

**NUMERO REYNOLDS**

↳ nel caso della piastrina

$$Re = \frac{\rho v_0 x}{\mu}$$

aumenta all'aumentare della x (grandezza caract.)

- Ha un vasto range di valori, ma negli esercizi, considerando  $x = x_c$ , posso usare un valore standard -



FLUSSO COMPRESSIBILE = al variare della pressione, varia anche la densità  
(caso convezione naturale, aria più o meno rarefatta) -

Ma noi non considereremo questo tipo di moto, cerchiamo quando posso considerarlo incompressibile; il parametro è il NUMERO DI MACH:

$$Ma = V/V_s$$

↳ Velocità del suono

- Se questo numero è inferiore a 0,3 (al quadrato  $\approx 0,1$ ), la sua influenza sarà inferiore al 10% e potremo trascurarla -

### PARAMETRI DI SIMILARETÀ

- Servono delle dimensioni caratteristiche:

$$x^* = \frac{x}{L} \quad y^* = \frac{y}{L} \quad \rightarrow \text{adimensionalizzo le Variabili}$$

Altre variabili adimensionali possono essere:

$$u^* = \frac{u}{U} \quad v^* = \frac{v}{V}$$

da cui ricaviamo le variabili da utilizzare nelle formule:

$$u = u^* V \quad v = v^* V \quad x = x^* L \quad y = y^* L$$

Per ricavare  $u$  userei la conservazione della quantità di moto lungo  $x$ , per  $T$  userei quella dell'energia, e di conseguenza per  $v$  userei quella di continuità -

$$\left[ \mu^* = f(x^*, y^*, Re_L, \frac{dp^*}{dx^*}) \right]$$

A parità di valore di  $Re$ , anche con differenze di altri parametri, otterremo dei risultati simili - Il termine  $\frac{dp^*}{dx^*}$  rappresenta l'influenza della geometria nella variazione della velocità - Al posto di una decina di parametri, me ne rimangono 4 -

• In una geometria assegnata,

$$[Nu = f(x^*, Re, Pr)]$$

→ a parità di  $Re$  e  $Pr$ , fluidi diversi per viscosità, densità, ecc., avranno lo stesso numero di Nusselt - viene detta condizione di **SIMILITUDINE IDRODINAMICA** (posso produrre una stessa situazione in modo più semplice) -

$$\overline{Nu} = \frac{\overline{h}L}{k_f} = f(Re, Pr)$$

↳ nusselt medio, scompare la dipendenza da  $x^*$

### INTERPRETAZIONE FISICA DELLE PARAMETRIZZAZIONI ADIMENSIONALI

- Reynolds: nasce dalla forma adimensionata del bilancio della quantità di moto, bilancio che contiene forze per unità di volume - È un rapporto tra forze d'inerzia e le forze viscose agenti sul fluido -

$$[Re] = \frac{F_i}{F_v} = \frac{\rho V^2/L}{\mu V/L^2} \approx \left[ \frac{\rho V L}{\mu} \right]$$

$$F_i = \rho V \cdot DV$$

$$F_v = \mu DV^2$$

dove  $L$  è una dimensione caratteristica -

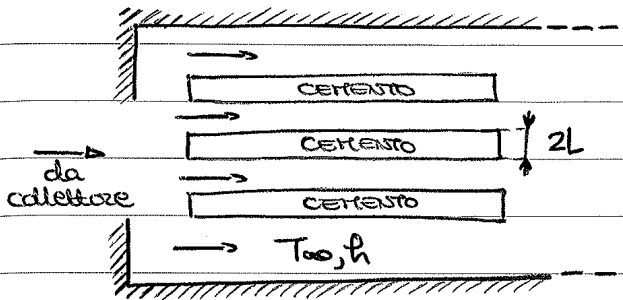
REYNOLDS PICCOLI → LAMINARE

REYNOLDS GRANDI → TURBOLENTO

• Nel caso in cui  $L=1 \implies \frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{\text{sen } \varphi_1}{\varphi_1} Q_0^*$

**CLINDRO**  $\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{2J_1(\varphi_1)}{\varphi_1} Q_0^*$

(5.99)



$Q/Q_0 = 0,9$   
 $t = 8h$   
 $T_i = 40^\circ C$   $2L = ?$   
 $h = 35 W/m^2K$   
 $T_{\infty} = 200^\circ C$

③  $Q_0^* = C_1 \exp(-\varphi_1^2 Fo) \cos(\varphi_1 x^*) \implies \frac{Q}{Q_0} = \left\{ 1 - \frac{\text{sen } \varphi_1}{\varphi_1} \right\} \frac{Q_0^*}{Q_0}$   
 Vale 1 quando  $x^* = 0$   
 ②  $Q_0^* = \left( \frac{Q}{Q_0} + 1 \right) \frac{\varphi_1}{\text{sen } \varphi_1}$   
 ④  $Fo = \frac{\alpha t}{L^2}$   $Bi = \frac{hL}{K}$  ⑤

$\left[ \varphi_1 \tan \varphi_1 = Bi \right]$  VERIFICA  $C_1 = \frac{4 \text{sen } \varphi_1}{2\varphi_1 + \text{sen}(2\varphi_1)}$  ①  $Fo = \frac{hL Q_0^*}{\frac{Q}{Q_0}}$   
 $-\varphi_1$

- (Hp) - CONDIZIONE 1-D  
 -  $Fo > 0,2$  (tempo molto grande, vado sul sicuro)  
 -  $Bi > 0,1$  (cemento, non grande conduttore, K piccola)

• Nelle tabelle delle appendici trova il valore di K

- PROPRIETÀ COSTANTI ( $T = 300 K$ )

Ipotesi  $\varphi_1 = \text{qualcosa}$ , e ripeto il calcolo finché  $\varphi_1 \approx \varphi^{(n-1)}$

Solitamente, comincio da  $\varphi_1 = 2 \sim$  radianti

Imparagoglio

Da	$\varphi_1$	$C_1$	$Q_0^*$	$Fo$	$L$	$Bi$	
Ricavo	$C_1$	$Q_0^*$	$Fo$	$L$	$Bi$	$\varphi_1$	$\rightarrow$ e verifico che vada bene

$\hookrightarrow$  segue come controllo

$$\eta_f = \frac{\tanh^2(ml_f)}{ml_f}$$

da cui  $m = \sqrt{\frac{2h}{kE}}$

$$W = (N-1)S + t$$

$$q_c = \frac{\Delta T}{R_{tot}}$$

$R_{tot} = 2$  resistenze conduttive più una dovuta alle alette

caso b) il numero di alette varia -

Lez. **18** (dopo morte del Pomero) ÷

19/4/23

TABELLA 6.2 / PAG. 394 → raccoglie equazioni adimensionalizzate

$$\left[ \mu^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \frac{dp^*}{dx^*} + \frac{1}{Re_L} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right] \rightarrow \text{Equazione quantità di moto nello strato limite}$$

$$\left[ \mu^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + u^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Re_L Pr} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \right] \rightarrow \text{Numero di Nusselt è funzione solo di } Re_L \text{ e } Pr$$

↳ questa funzione ci dà indicazioni solo strato limite termico

INTERPRETAZIONE FISICA

•  $Re_{p, mds}$  → confronto tra la forza d'inerzia e la forza viscosa, dimensionale, e tra le due forze erano nella forma:

$$F_I = \rho u \frac{\partial u}{\partial x} \quad [PV^2/c]$$

$$F_S = \mu \nabla^2 V = \mu V/L^2$$

$$\frac{F_I}{F_S} = \frac{\rho V^2/L}{\mu V/L^2} = \frac{\rho V L}{\mu} = Re_L$$

• la transizione tra stato laminare e turbolento dipende dal valore di queste forze. Al crescere delle  $F_I$  rispetto alle  $F_S$  aumenta la sensibilità del mio fluido alle piccole variazioni, diventa un moto disordinato.



- È duale con il numero di Reynolds

**GRASHOFF** → rapporto forze di galleggiamento e forze viscosi

$$Gr = \frac{\rho g (T_s - T_\infty) L^3}{\nu^2}$$

↳ viscosità cinematica

Analogia tra scambio per quantità di moto e energia

- Legame tra coefficienti di attrito e numero di Nusselt

È richiesto che  $\frac{dp^*}{dx^*} = 0$  (trascurabile  $P_{ng} x$ ) e che il numero di Prandtl valga all'incirca 1. In questo caso, c'è analogia completa.

- Gradiente a parete della velocità e della temperatura

$$\left. \frac{S_{u^*}}{S_{y^*}} \right|_{y^*=0} = \frac{C_f \cdot Re_L}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{Nu = \frac{C_f \cdot Re_L}{2}}$$

$$\left. \frac{dT^*}{S_{y^*}} \right|_{y^*=0} = Nu$$

↳ se conosco la velocità, ho tutto

poiché

$$u^* = f(x^*, y^*, Re_L, \frac{dp^*}{dx^*}) \quad \text{e} \quad T^* = f(x^*, y^*, Re_L, Pr, \frac{dp^*}{dx^*})$$

- La relazione è una similitudine tra stato limite dinamico e termico.

**STANTON**

$$\boxed{St = \frac{h}{\rho V c_p} = \frac{Nu}{Re_L Pr}}$$

→ se conosco la velocità, posso ricavare  $h$

↳ MOLTO UTILE!

- Se  $Pr \neq 1$ , entra in gioco l'analogia di Reynolds, che lega insieme i parametri chiave dell'ingegneria.

ANALOGIA DI REYNOLDS

$$\boxed{St = C_f/2}$$

# Lez. 19

22/4/'13

## DERIVAZIONE DELLE EQUAZIONI DELLE LEGGI DI CONSERVAZIONE

• Possono essere formulate in forma differenziale o in forma integrale, e possono essere ricavate da un punto di vista Euleroiano o Lagrangiano.

Euleroiano = considero un volume di controllo

Lagrangiano = considero una certa particella fluida

Nel caso euleroiano uso sistema di riferimento del laboratorio, mentre nell'altro caso la massa di fluido può muoversi e deformarsi. Solitamente si parla in termini EULERIANI (forze su unità di volume,  $N/m^3$ ).

- PROBLEMI A FRONTIERA MOBILE = descrivono casi in cui il fluido e la sua frontiera si spostano nel tempo, fa comodo approccio Lagrangiano.

CONSERVAZIONE	/	ENERGIA	= Perché usiamo queste 3 leggi?
	-	MOTO	= Perché bastano 3 e non conosciamo una quarta equazione?
	\	MASSA	

• I parametri da conoscere sono Temperatura, Velocità e un valore associato alla massa (densità). Devo considerare un volume non troppo piccolo, ma neanche troppo grande. Ad ogni volumetto, posso associare una temperatura, una velocità e una (densità); facendo in questo modo, ottengo la loro distribuzione. Dopodiché, per ricavare altre variabili (come entalpia, ecc) manca un' EQUAZIONE DI STATO che legghi le funzioni note a quelle incognite. Senza quindi questa equazione per poter conoscere il sistema conclusivo.

→ Ma da dove saltano fuori queste leggi?