NUMERO: 936

DATA: 15/04/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Santoro

MATERIA: Geometria

Prof. Casnati

5/3/2012

Geometria Prof. Casnati Gianfranco

- Esercitazioni: D.ssa Galluzzi
  D.ssa Salari

- Ricevimento Lunedì ore 17:45

- Ultimo esame: 22/6 e 10/7

Sito http://calvino.polito.it/~casnati//didattica → dispense
http://cantor.polito.it/didattica

- NON ci sono testi per il corso, bastano le dispense.

"100 pagine di algebra lineare"
"geometria analitica piana"
"geometria analitica nello spazio" } Chiarli Greco Valabrega

Esame:

- Pre test a crocette, se si passa correggono la seconda parte, fatta da domande aperte o esercizi. Orale sotto sospetto di copiatura.

ISCRIZIONE

- Portare documento identità
- Scaricare programma

Matrice opposta

$A = (a_{i,j}) \quad 1 \le i \le m, \; 1 \le j \le n$

$\boxed{-A} = (-a_{i,j}) \quad 1 \le i \le m, \; 1 \le j \le n$

- Ha le stesse dimensioni, ma l'entrata in posizione i,j è l'opposto della posizione i,j della matrice originale.

- Unica matrice sempre opposta a sé stessa è quella nulla.

Matrice trasposta

$A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m,n} \to$ trasposta è in $\mathbb{R}^{n,m}$ la cui entrata è $(a_{j,i})$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$3 \times 2 \qquad 2 \times 3$

↳ [Scambio righe con colonne]

$\boxed{{}^tA}$

PROPRIETÀ

T1) $A \in \mathbb{R}^{m,n} \iff {}^tA \in \mathbb{R}^{n,m}$

T2) $-({}^tA) = {}^t(-A)$

T3) ${}^t({}^tA) = A$

Somma di matrici

- Date due matrici $A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$ si definisce somma di A e B la matrice $m \times n$ avente entrate i,j pari a $(a_{i,j} + b_{i,j})$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ \sqrt{2} & -1/2 \\ 0 & \pi \end{pmatrix} \quad A+B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3+\sqrt{2} & 7/2 \\ 5 & 6+\pi \end{pmatrix}$$

[Si può fare, sono nelle stesse dimensioni]

PROPRIETÀ

- È COMMUTATIVA $\quad A + B = B + A$
- È ASSOCIATIVA $\quad (A+B)+C = A+(B+C)$
- $A + 0_{m,n} = A$ — solo quello che posso sommare
- $\forall A \; \exists! -A \Rightarrow A + (-A) = 0$

$r_{1,1} \cdot c_{1,1} + r_{1,2} \cdot c_{2,1} + r_{1,3} \cdot c_{3,1} + \dots + r_{i,p} \cdot c_{p,i}$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{h=1}^{p} r_{i,h} \cdot c_{h,1}}$$

<u>ES.</u>

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(3 \cdot 7 + 1 \cdot (-1) + 7 \cdot 0\right) = (20)$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix} = \left(3 \cdot 7 + 1 \cdot (-7) + 7 \cdot (-2)\right) = (0)$$

↳ non soddisfa legge annullamento del prodotto

<u>Def. Generale</u>

- Siano $A \in \mathbb{R}^{m,p}$ e $B \in \mathbb{R}^{p,n}$:

$$A = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \dots \\ R_m \end{pmatrix} \qquad (a_{1,1} + a_{1,2} + \dots + a_{i,p}) = R_i$$

$$B = (C_1, C_2, \dots C_n) \qquad \boxed{A \cdot B}$$

$$C_j = \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \dots \\ b_{p,j} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} R_1C_1 & R_1C_2 & \dots & R_1C_n \\ R_2C_1 & R_2C_2 & \dots & R_2C_n \\ \vdots & & & \\ R_mC_1 & R_mC_2 & \dots & R_mC_n \end{pmatrix}$$

Lez. $\boxed{2}$ 8/3/2012

- <u>Condizioni</u>:
- Numero di colonne della prima = numero di righe della seconda,

$$m \times \cancel{p} \cdot \cancel{p} \times n = m \times n$$

se no non sono moltiplicabili tra loro.

Ex. $\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}} \underset{B}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}} \rightarrow 1 \times 3 \cdot 3 \times 2 \rightarrow$ si può fare

$\boxed{\text{Proprietà}}$ $\forall A \in \mathbb{R}^{m,p}$ $B \in \mathbb{R}^{p,q}$ $C \in \mathbb{R}^{q,n}$

Pr1) $(AB)C = A(BC)$ $m \times n = m \times n$

Pr2) $\exists! \, I_p \in \mathbb{R}^{p,p} \,/\, \left.\begin{array}{l} A I_p = A \\ I_p B = B \end{array}\right\}$ esiste una matrice quadrata che non influenza il prodotto

I_p ↓ MATRICE IDENTITÀ

Base per formazione di matrice 2x2

$I_p \, i,j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$ $\quad p=2 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ [Entrata diagonale è 1, quella extra diagonale è 0.]

$p=3 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Base per formazione di una matrice identità 3x3.

PrP) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

PrS1) $\forall D \in \mathbb{R}^{p,q}$

$A(B+D) = AB + AD$

PrS2) $\forall E \in \mathbb{R}^{m,p}$

$(A+E)B = AB + EB$

PrT) ${}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA$ → prodotto trasposta è uguale al prodotto delle singole trasposte ma scambiate di ordine.

$\underbrace{m \times p \;\; p \times q}$

${}^t(m \times q) = q \times m$

MATRICE INVERSA

- $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ si dice invertibile se $\exists B \in \mathbb{R}^{n,n}$ (stesse dimensioni) /
  $AB = BA = I_n$ → MATRICE INVERSA

- Vale per tutte tranne per la matrice nulla.

$\left.\begin{array}{l} A^2 = O_{n,n} \to \text{per assurdo } \exists B / AB = I_n \\ {*}\; A^2 B = O_{n,n} \cdot B = O_{n,n}, \text{ ma} \\ (AA)B = A(\underbrace{AB}_{I_n}) = A \end{array}\right\}$ Non corrisponde alla definizione

* ambo i membri per B.

$$\begin{cases} 2u + 3v - w = 1 \\ u + 2w = 0 \end{cases} \rightarrow v \text{ ha coeff.} = 0$$

- OMOGENEO = tutte le sue equazioni sono omogenee -

- Una soluzione di (*) é una sequenza ordinata di numeri $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots \overline{x}_n$ / $a_1\overline{x}_1 + a_2\overline{x}_2 + \dots + a_n\overline{x}_n = b_n$ sia un' identità numerica - Una soluzione di (**) é una soluzione comune a tutte le equazioni -

↳ É intersezione tra gli insiemi delle soluzioni -

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ MATRICE DEI COEFFICIENTI DI (**)

MATRICE INCOMPLETA

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$ MATRICE DEI TERMINI NOTI $$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$AX = B \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

↳ calcolando rimangono le eq. del sistema:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n = b_1$$
$$\dots$$

- La matrice completa di (**) é:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & & & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{array}\right)$$

$$a + b - c + d = 17 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 17$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 \end{pmatrix} \rightarrow$$ MATRICE COMPLETA

- $\begin{cases} 2u + 3v - w = 1 \\ u + 2w = 0 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$ $R_1 \Updownarrow R_2$ [INTERSCAMBIO]

$\begin{cases} u + 2w = 0 \\ 2u + 3v - w = 1 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right)$

$R_1 \Rightarrow R_2$

- $\begin{cases} -2u - 3v + w = -1 \\ u + 2w = 0 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

[SISTEMA PER SCALARE] ↳ non nullo

[moltiplico la stessa eq. per uno scalare (-1)]

- $(2u + 3v - w) = 1 \rightarrow \begin{cases} (2u + 3v - w) - 2(u + 2w) = 1 - 2(0) \\ u + 2w = 0 \end{cases}$

[METODO PER ADDIZIONE]

- Siano $\overline{u}, \overline{w}, \overline{v}$ soluzioni del sistema (danno identità)

$(2\overline{u} + 3\overline{v} - \overline{w}) - 2(\overline{u} + 2\overline{w}) = 1 - 2(0)$

[QUESTE OPERAZIONI NON VARIANO L'INSIEME DELLE SOLUZIONI]

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$ $R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$ $R_1 \rightarrow \frac{1}{3} R_1$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -5/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$

$\begin{cases} v - \frac{5}{3} w = \frac{1}{3} \\ u + 2w = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} v = 1/3 + \frac{5}{3} w \\ u = -2w \end{cases}$

Lez. 3

12/03/2012

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

[RIDUZIONE MATRICE]

- Scelgo PIVOT in una riga.
- Faccio diventare altri num. della colonna tutti zeri.
- Sommo a una riga il multiplo di un'altra riga.

$R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -5 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ $R_3 \rightarrow R_3 - R_1$

Osservazioni:

- $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $rk(A) \in$ numeri interi non negativi (o compreso)

$rk(O_{m,n}) = 0 \iff rk(A) = 0 \Rightarrow A = O_{m,n}$

$rk(A) = 1 \rightarrow$ righe di matrice di partenza sono proporzionali alla prima.

$\boxed{rk(A) = \min(m,n)}$ $\begin{cases} rk(A) \le m & \text{, in qualsiasi caso.} \\ rk(A) \le n & \text{, ci può essere un solo pivot per colonna.} \end{cases}$

Teorema di Rouché - Capelli

- Sia $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ e $B \in \mathbb{R}^{m,1}$

(*) $Ax = B$

(**) $AX = O_{m,1}$ $\rightarrow$ sistema associato ponendo matrice incompleta = matrice nulla

(*) 1 - Quando è compatibile?

- $rk(A) = rk(A|B)$ [rango m. completa = rango m. incomp.]

2 - Se (*) è risolubile, le sue soluzioni dipendono da $n - rk(A)$ parametri liberi. $(\infty^{n-rk(A)})$

3 - Se (*) è compatibile e x_0 è una sua soluzione particolare, $\Rightarrow$ insieme delle soluzioni di stella è uguale alla somma di x_0 e delle soluzioni del sistema associato.

- $\{\text{soluzioni di } (*)\} = \{x_0 + Y \mid Y \text{ è soluzione di } (**)\}$

(NB): uguale all'integrale indefinito; in quel caso sommi la soluzione particolare dell'integrale con "C", cioè soluzioni dell'integrale di 0.

Dim 3) $\supseteq$ $Ax_0 = B$ $\rightarrow$ abbiamo dimostrato che $Ax_0 = B$ include l'altro sistema

$AY = O_{m,1}$

$A(x_0 + Y) = Ax_0 + AY = B + O_{m,1} = B$

$x = x_0 + \underbrace{(x - x_0)}_{}$ $\rightarrow$ $A(x - x_0) = Ax + A(-x_0) = Ax - Ax_0 = B - B = O_{m,1}$

$\hookrightarrow$ Y è soluzione di (**)?

$\hookrightarrow$ è soluzione

Lez. $\boxed{4}$ 15/3/2022

- tengo conto solo di B_1

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} -1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -5 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} R_2 \to -R_2 \\ R_4 \to \frac{1}{2} R_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} -1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 5 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right) \quad R_1 \to R_1 - R_4 \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a = -1 + 2b - 2c - 4d$$
$$f = -1 + 3b - 3c - 5d$$
$$e = 1 - b + d$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 + 2b - 2c - 4d \\ b \\ c \\ d \\ 1 - b + d \\ -1 + 3b - 3c - 5d \end{pmatrix} \middle| \; b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

↓

Tutte le soluzioni sono date per qualsiasi valore di b, c e d.

$b = c = d = 0$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2b - 2c - 4d \\ b \\ c \\ d \\ -b + d \\ 3b - 3c - 5d \end{pmatrix} \longrightarrow$$

Soluzione generale per **Rouché - Capelli** (soluzione particolare + associato)

$$\underset{m \times n}{A} \underset{\downarrow}{x} = \underset{m \times p}{B}$$

dev'essere $n \times p$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

- $n \cdot p$ equazioni in $n \cdot p$ incognite

$$\begin{cases} a_{11} x_{11} + a_{12} x_{21} = b_{11} \\ a_{11} x_{12} + a_{12} x_{22} = b_{12} \\ a_{21} x_{11} + a_{22} x_{21} = b_{21} \\ a_{21} x_{12} + a_{22} x_{22} = b_{22} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11} \underbrace{(x_{11} \; x_{12})} + a_{12} \underbrace{(x_{21} \; x_{22})} = (b_{11} \; b_{12}) \\ a_{21} (x_{11} \; x_{12}) + a_{22} (x_{21} \; x_{22}) = (b_{21} \; b_{22}) \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} & b_{21} & b_{22} \end{array}\right)$$

↓

sono le righe della matrice incognita

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to R_3 = R_3 - R_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} R_3 \to \frac{1}{2} R_3 \\ R_2 \to \frac{1}{3} R_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & -1/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} R_2 \to R_2 - R_3 \\ R_1 \to R_1 - 2R_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1/6 & -1/6 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right) \quad R_1 \to R_1 - R_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1/6 & -5/6 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & -1/6 & -1/6 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

- $X_2 = (1/6 \;\; -5/6 \;\; 1/2)$
- $X_3 = (1/2 \;\; 1/2 \;\; -1/2)$
- $X_1 = (-1/6 \;\; -1/6 \;\; 1/2)$

→ Inverto X_1, X_2 e X_3 per avere i pivot in diagonale, cioè una matrice identità.

IMPO!

- Posso fare la verifica:

$$X = \begin{pmatrix} -1/6 & -1/6 & 1/2 \\ 1/6 & -5/6 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/6 & -1/6 & 1/2 \\ 1/6 & -5/6 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & -5 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

→ CAMPI DI NUMERI

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$Z_2 = \{0, 1\}$

$0+0=0$
$0+1=1+0=1$
$1+1=0$
$0 \cdot 1 = 0$
$1 \cdot 1 = 1$

$Z_3 = \{0, 1, 2\}$

$0+0=0$
$0+1=1+0=1$
$1+2=0$
$2+2=1$
$0 \cdot 1 = 0 \cdot 2 = 0$
$1 \cdot 2 = 2$
$2 \cdot 2 = 1$

- Al posto di $\in \mathbb{R}$, si mette $\in$ al campo della matrice.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 110

$$\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & -4\end{pmatrix} = 1(-4)-2(-2)=0$$

$$\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & -3\end{pmatrix} = 1(-3)-2(-2)=1$$

$$\det\begin{pmatrix}a_{11} & 0 & 0 & 0\\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{pmatrix} = a_{11}\det\begin{pmatrix}a_{22} & 0 & 0\\ a_{32} & a_{33} & 0\\ a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{pmatrix} =$$

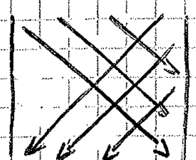
$$= a_{11}\cdot a_{22}\det\begin{pmatrix}a_{33} & 0\\ a_{43} & a_{44}\end{pmatrix} = \boxed{a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}}$$

$\det \rightarrow |A|$

- $$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11})(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}) - (a_{12})(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}) + (a_{13})(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

KRAMER



Regola di Sarrus

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{vmatrix} = -\cancel{1}+\cancel{1}+6 = 6$$

Prop. $A \in K^{n,n}$

1) Se A' è ottenuta scambiando due righe diverse, allora

$$\det(A') = -\det(A)$$

$\rightarrow A\tilde{A} = \tilde{A}A = \det(A) I_n \leftarrow$

- $\exists B \in K^{n,n} \mid AB = BA = I_n \quad AB = I_n$

$\Rightarrow \det(AB) = \det(I_n)$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$\det(A)\det(B) = 1$

$\Rightarrow$ se $\det(A) \neq 0$

$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \tilde{A}$

Lez. $\boxed{5}$ 19/3/2012

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & -5 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \tilde{A} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

METODO DI KRAMER

$Ax = B \rightarrow x = A^{-1}B$

$\hookrightarrow \in K^{n,n} \quad rk(A) = n$

- Sia B una matrice con una sola colonna $\in K^{n,1}$

(ex.) $\begin{cases} a_{11} + a_{12} = b_1 \\ a_{21} + a_{22} = b_2 \end{cases}$

$\exists$ una soluzione $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots \bar{x}_n)$

$$A = (C_1, C_2, \dots C_n) \Rightarrow B = \bar{x}_1 C_1 + \bar{x}_2 C_2 + \dots \bar{x}_n C_n)$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \bar{x}_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + \bar{x}_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} + \dots \bar{x}_n \begin{pmatrix} a_{m-1,n} \\ a_{m,n} \end{pmatrix}$$

$$(B\, C_2\, C_3 \dots C_n) = (\bar{x}_1 C_1 + \bar{x}_2 C_2 + \dots + \bar{x}_n C_n | C_2 | C_3 \dots C_n)$$

$$\det(B C_2 C_3 \dots C_n) = \det(x_1 C_1 + x_2 C_2 + \dots + \bar{x}_n C_n | C_2 | C_3 \dots C_n)$$

$$= \det(\bar{x}_1 C_1 C_2 C_3 \dots C_n) = \bar{x}_1 \det(C_1 C_2 C_3 \dots C_n) = \bar{x}_1 \det(A)$$

- Se $\vec{OP}$ e $\vec{OQ}$ sono non nulli, diciamo che sono **CONCORDI** se hanno lo stesso verso, **DISCORDI** altrimenti

(Def.) $\vec{OP}$, $\vec{OQ}$ e $\vec{OR}$ $\in V_n(O)$ si dicono complanari se e solo se O, P, Q e R sono contenuti in uno stesso piano.

↳ il vettore nullo è complanare con qualsiasi altra coppia di vettori.

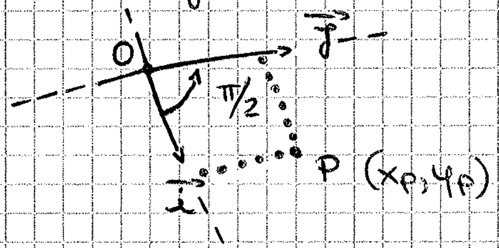
S_n O ⊢ = u

- **MODULO DI UN VETTORE** = $[\vec{v}_n \in (O)]$ il suo modulo (lunghezza, norma) è la lunghezza del segmento corrispondente rispetto a **u**.

$|\vec{v}|$ ↳ sempre positivo

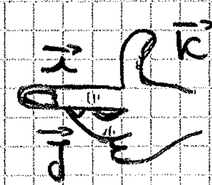
SISTEMI DI RIFERIMENTO

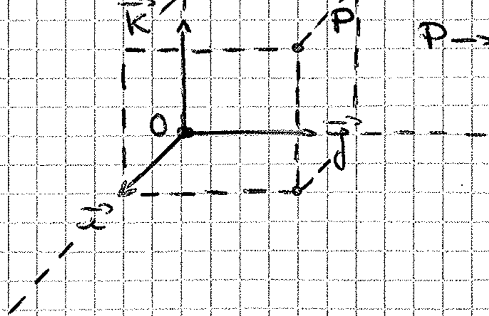
a) Nel piano
- dove O è l'origine del sistema di riferimento
- $\vec{i}, \vec{j} \in V_2(O)$ considerati **versori** (almeno uno non nullo), tale che $\vec{i}$ si sovrappone ad $\vec{j}$ con una rotazione antioraria di $\pi/2$ rad.



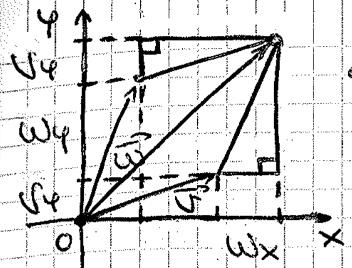
→ Qualsiasi punto può essere rappresentato

b) Nello spazio
- O origine del S.R.
- $\vec{i}, \vec{j} \in V_3(O)$ sono **versori** che formano un angolo di $\pi/2$ rad.
- $\vec{K} \in V_3(O)$ versore tale che la terna ordinata ($\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{K}$) sia ordinata secondo la regola della mano destra.





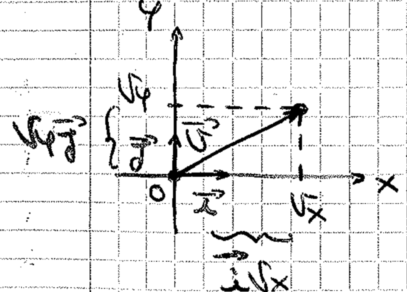
P → (x_P, y_P, z_P)



La somma è indipendente dal sistema di riferimento usato.

Prop. $\circ\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_n(O)$

1) $\vec{w} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{w}$
2) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
3) $\exists!\, \vec{0},\ \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$
4) $\exists!\, -\vec{v},\ \vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$
5) $\alpha\beta\vec{v} = \alpha(\beta\vec{v}) = \beta(\alpha\vec{v})$
6) $1\vec{v} = \vec{v}$
7) $(\alpha+\beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$
8) $\alpha(\vec{v} + \vec{w}) = \alpha\vec{v} + \alpha\vec{w}$



Prop. Fissato $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$, ogni $\vec{v} \in V_2(O), V_3(O)$ si scrive in maniera UNICA come:

$$\vec{v} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$$

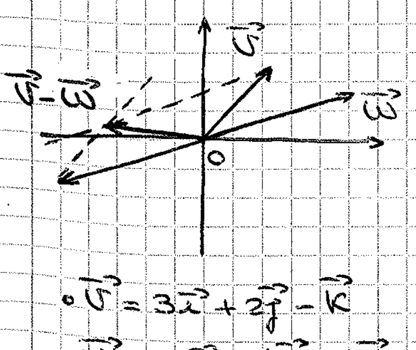
$$\vec{0} = (V_x - V'_x)\vec{i} + (V_y - V'_y)\vec{j} + (V_z - V'_z)\vec{k}$$

$$0 = |\vec{0}| = \sqrt{(V_x - V_x')^2 + \dots}$$

deve essere nullo, perciò $V_x = V_x'$

Dimostrata l'unicità

DIFFERENZA



$\circ\ \vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-\vec{w})$

$\vec{w} = (w_x\ w_y\ w_z)$

$-\vec{w} = (-w_x\ -w_y\ -w_z)$

stessa direzione, verso opposto, stesso modulo

Prop. $\vec{v}, \vec{w} \neq 0 \quad \vec{v}, \vec{w} \in V_n(O)$

$\circ\ \vec{v} \parallel \vec{w} \iff \exists \alpha \in \mathbb{R} : \alpha\vec{v} = \vec{w}$

$\circ\ \vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

$\circ\ \vec{w} = 6\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$ $\longrightarrow$ $3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} = \alpha(6\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k})$

$\to \nexists \alpha$, NON SONO PARALLELI

Prop. A, B, C sono allineati $\iff rk\begin{pmatrix} x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ x_C-x_A & y_C-y_A & z_C-z_A \end{pmatrix} \leq 1$

$rk\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} = 2 \rightarrow$ non sono allineati

A, B, C, D sono allineati $\iff rk\begin{pmatrix} x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ x_C-x_A & y_C-y_A & z_C-z_A \\ x_D-x_A & y_D-y_A & z_D-z_A \end{pmatrix} \leq 2$

oppure $\boxed{\det(A)=0}$
$\Downarrow$
È una matrice quadrata 3x3

- Sommando una riga all'altra, ottengo le coordinate del terzo punto, $rk_{MAX} = 2$ -

PRODOTTO SCALARE

Def. $O\vec{i},\vec{j},\vec{k}$

- $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$
- $\vec{w} = w_x\vec{i} + w_y\vec{j} + w_z\vec{k}$

$$<\vec{v},\vec{w}> = v_xw_x + v_yw_y + v_zw_z = (v_x\ v_y\ v_z)\begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ È UN NUMERO!

$<,>$ = prodotto scalare

TAVOLA PITAGORICA

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	1	0	0
$\vec{j}$	0	1	0
$\vec{k}$	0	0	1

$\vec{i} = 1\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$

$\vec{i} = 1\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$

$\vec{j} = 0\vec{i} + 1\vec{j} + 0\vec{k}$

Es. $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$
$\vec{w} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$

$<\vec{v},\vec{w}> = (3\cdot 1) + (2\cdot -1) + (-1\cdot -1) = 2$

A) Il prodotto scalare è commutativo:

$\alpha \in \mathbb{R} \quad \vec{u},\vec{v},\vec{w} \in V_n(O)$

$<\vec{v},\vec{w}> = <\vec{w},\vec{v}>$

B) $<\vec{u},\vec{v}+\vec{w}> = <\vec{u},\vec{v}> + <\vec{u},\vec{w}>$

C) $\alpha<\vec{v},\vec{w}> = <\alpha\vec{v},\vec{w}> = <\vec{v},\alpha\vec{w}>$

D) $<\vec{v},\vec{v}> \geq 0$ vale per ogni $\vec{v} = \vec{0}$

Def. • Dati $\vec v, \vec w \in \vec V_n(O)$, si dicono ORTOGONALI (o perpendicolari)

$\Longleftrightarrow \quad \langle \vec w, \vec v \rangle = 0 \quad [\vec w \perp]$

$\left.\begin{array}{l} \vec v = 3\vec i + 2\vec j - \vec k \\ \vec w = \vec i - 3\vec j - 3\vec k \end{array}\right\}$ non sono nulli, e $\langle \vec w, \vec v \rangle = 3 - 6 + 3 = 0$

↳ sono ortogonali

• Se $\vec v, \vec w \neq 0$

$\Rightarrow \cos \widehat{\vec v \vec w} = \dfrac{\langle \vec v, \vec w \rangle}{|\vec v||\vec w|} \qquad \widehat{\vec v \vec w} = \arccos \dfrac{\langle \vec v, \vec w \rangle}{|\vec v||\vec w|}$

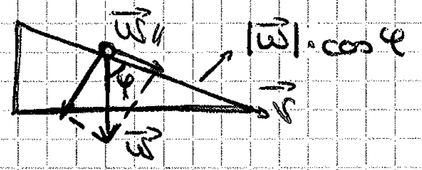
$$\frac{|\langle \vec v, \vec w \rangle|}{|\vec v||\vec w|} \leq 1$$

$|\langle \vec v, \vec w \rangle| \leq |\vec v||\vec w|$ ← DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY-SCHWARTZ

DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE → $|\vec v + \vec w| \leq |\vec v| + |\vec w|$

$|\vec v + \vec w|^2 \leq (|\vec v| + |\vec w|)^2$ [Dim. nelle dispense]

Come decomporre un vettore su un altro (proiezione)



$\vec w_{\parallel} \,//\, \vec v \Rightarrow \vec w_{\parallel} = \alpha \vec v$

• Suppongo $|\vec v| = 1$

$|\vec w| \cos\varphi = |\vec v||\vec w| \cos(\widehat{\vec v \vec w}) = \langle \vec v, \vec w \rangle$

$\vec w_{\parallel} = \langle \vec w, \vec v \rangle \vec v$

$$\boxed{\vec w_{\parallel} = \frac{\langle \vec w, \vec v \rangle}{|\vec v|^2} \vec v}$$

• Se $|\vec v| \neq 1$

$\text{vers}(\vec v) = \dfrac{1}{|\vec v|} \cdot |\vec v|$

$\vec w_{\parallel} = \langle \vec w, \dfrac{1}{|\vec v|} |\vec v| \rangle \dfrac{1}{|\vec v|} \cdot |\vec v|$

ES. $\vec v = 3\vec i + 2\vec j + \vec k$

$\vec w = \vec i + \vec j + \vec k$

$\vec w = \vec w_{\parallel} + \vec w_{\perp}$

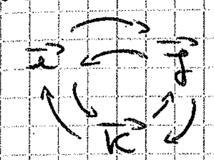
$\vec w_{\parallel} = \dfrac{4}{14}(3\vec i + 2\vec j + \vec k)$ → componente $\parallel$ a $\vec w$

$= \dfrac{6}{7}\vec i + \dfrac{4}{7}\vec j - \dfrac{2}{7}\vec k$

$\vec w_{\perp} = \vec w - \vec w_{\parallel} = \dfrac{1}{7}\vec i + \dfrac{3}{7}\vec j + \dfrac{9}{7}\vec k$

$\langle \vec v, \vec w_{\perp} \rangle = \dfrac{3}{7} + \dfrac{6}{7} - \dfrac{9}{7} = 0$

TRUCCO OROLOGIO:



- In senso orario, tiene segno positivo
- In senso antiorario, cambia il segno

- $(3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})\times(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}) = (3\vec{i})\times\vec{i} + (2\vec{j})\times\vec{j} + (-\vec{k})\times\vec{k} + (3\vec{i})\times\vec{j} + (3\vec{i})\times\vec{k} + (2\vec{j})\times\vec{i} + (2\vec{j})\times\vec{k} + (-\vec{k})\times\vec{i} + (-k)\times\vec{j} =$

$3\cancel{(\vec{i}\times\vec{i})}^{0} + 3(\vec{i}\times\vec{j}) + 3(\vec{i}\times\vec{k}) + 2(\vec{j}\times\vec{i}) + 2(\vec{j}\times\vec{k}) + 2\cancel{(\vec{j}\times\vec{j})}^{0}$
$-(\vec{k}\times\vec{i}) - (\vec{k}\times\vec{j}) - \cancel{(\vec{k}\times\vec{k})}^{0} = 3\vec{k} - 3\vec{j} - 2\vec{k} - \vec{j} + 2\vec{i} + \vec{i} =$

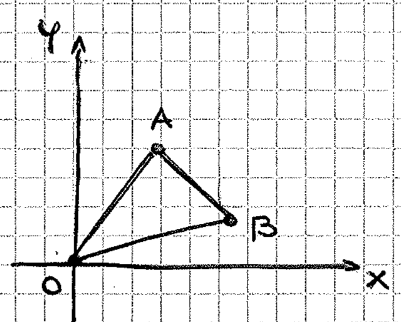
$= \boxed{3\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}}$

Prop. $\vec{v}, \vec{w} \in \vec{V}_n(O)$

- Se $\vec{v} \parallel \vec{w} \Rightarrow \vec{v}\times\vec{w} = \vec{0}$
- Se $\vec{v} \nparallel \vec{w} \Rightarrow \vec{v}\times\vec{w}$ ha:

NON DIPENDE DAL SISTEMA DI RIFERIMENTO

1) modulo $|\vec{v}||\vec{w}| \operatorname{sen} \widehat{\vec{v}\vec{w}}$
2) direzione ortogonale al piano individuato da $\vec{v}$ e $\vec{w}$
3) verso tale che la terna ordinata $\vec{v}, \vec{w}, \vec{v}\times\vec{w}$ sia ordinata secondo la regola della mano destra.



Area $= \frac{1}{2}\, a \cdot b \operatorname{sen}\gamma \rightarrow$ due lati e angolo compreso

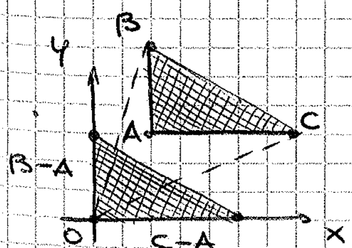
$\parallel$

$\frac{1}{2}|\vec{v}| \times |\vec{w}|$

$\vec{OA} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

$\vec{OB} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

$A = \frac{1}{2}|\vec{OA} + \vec{OB}| = \frac{1}{2}\sqrt{26}$



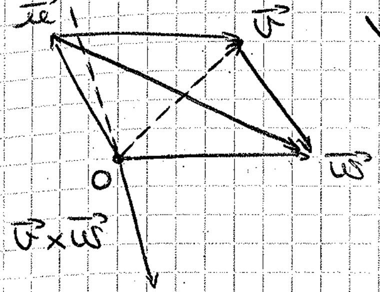
$\left.\begin{array}{l} B - A = \vec{OB} - \vec{OA} \\ C - A = \vec{OC} - \vec{OA} \end{array}\right\}$ sono congruenti, è dato da una traslazione

$\frac{1}{2}|(B-A)\times(C-A)| = \frac{1}{2}\sqrt{26}$

$A\,(1 \;\; 0 \;\; -1)$
$B\,(4 \;\; 2 \;\; -2)$
$C\,(2 \;\; 1 \;\; 0)$

$B - A = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$
$C - A = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

- Calcolare il volume di un tetraedro



$$V = \underbrace{\frac{1}{2}|\vec{v} \times \vec{w}|}_{\text{Area base}} \cdot \Big(\underbrace{-|\vec{u}|\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}\times\vec{w}})}_{\text{altezza}}\Big) \cdot \frac{1}{3} =$$

$$\boxed{h = -|\vec{u}|\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}\times\vec{w}})}$$

$$= -\frac{1}{6}|\vec{u}||\vec{v}\times\vec{w}|\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}\times\vec{w}}) = \frac{1}{6} < \vec{u}, \vec{v}\times\vec{w} >$$

- Il volume del tetraedro è $\frac{1}{6}$ del prodotto misto, preso con segno positivo. In caso di segno negativo, abbiamo invertito l'ordine degli spigoli.

  $\to$ V con segno = dà ordine spigoli

$$\begin{matrix} A & (3 & 2 & -1) \\ B & (1 & 1 & 1) \\ C & (2 & -1 & 0) \\ D & (0 & 0 & 0) \end{matrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 4+1+2+3 = 10$$

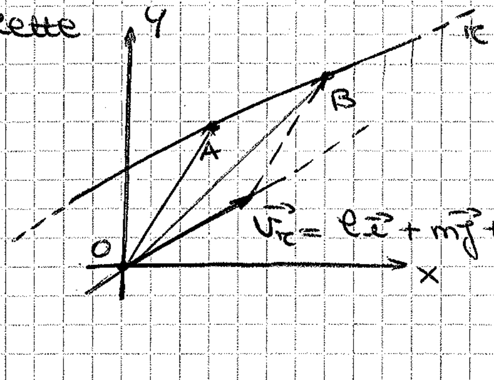
$$V_{OABC} = \frac{1}{6}|10| = \boxed{\frac{5}{3}}$$

$$\begin{matrix} A & (3 & 2 & 0) \\ B & (1 & 1 & 2) \\ C & (2 & -1 & 1) \\ D & (0 & 0 & 1) \end{matrix} \qquad \begin{aligned} A - D &= 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} \\ B - D &= \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \\ C - D &= 2\vec{i} \end{aligned}$$

$\to$ stessa matrice = stesso volume

GEOMETRIA ANALITICA

- Rette



- Per ogni retta r, esistono ∞ coppie di punti che la rappresentano.

- Dare una retta per l'origine

- Fisso vettore (non nullo) nell'origine: dà la direzione della retta

- Considerando $\vec{OA}$ e $\vec{OB}$, $\vec{OB}$ è diagonale del parallelogramma:

$$\left\{ \vec{OB} = \vec{OA} + t\vec{v_r} \right\}$$

- Dato un sistema di equazioni parametriche, posso sempre ricavare un vettore parallelo non nullo.

- Se due rette sono parallele → COINCIDENTI
  → PARALLELE DISTINTE (no punti comuni)

- Se due rette non sono parallele → INCIDENTI
  → SGHEMBE (no punti comuni)

(Ex.)

$$s \begin{cases} x = -2+t \\ y = -3-t \\ z = 3+t \end{cases} \qquad r \begin{cases} x = 1+3t \\ y = -1+2t \\ z = 2-t \end{cases}$$

↳ non complanari

$$\vec{v}_{\parallel s} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \qquad \vec{v}_{\parallel r} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$$

→ s e r non sono $\parallel$ ($r \neq \alpha s$), incidenti o sghembe?

ERRORE CLASSICO

$$\begin{cases} 1+3t = -2+t \\ -1+2t = -3-t \\ 2-t = 3+t \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2t = -3 \\ 3t = -2 \\ t = -1 \end{cases}$$

L'errore sta nel fatto che sto considerando uguali i 2 parametri t delle 2 equazioni!

CORRETTA

$$\begin{cases} 1+3t = -2+t' \\ -1+2t = -3-t' \\ 2-t = 3+t' \end{cases} \Longrightarrow \boxed{t=-1} \; \boxed{t'=0}$$

→ devo verificare che soddisfi anche la terza
↓
calcolo 2 incognite da 2 equazioni, la terza resta sola

↳ t e t' sono istanti diversi della stessa equazione

$$a \begin{cases} x = -2+t \\ y = -3-t \\ z = t \end{cases} \quad e \quad r \begin{cases} 1+3t = x \\ -1+2t = y \\ 2-t = z \end{cases}$$

sono $\parallel$?

$$\vec{v}_{\parallel a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \qquad \vec{v}_{\parallel r} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$$

→ NON sono $\parallel$

$$\begin{cases} 3t - t' = -3 \\ 2t + t' = -2 \\ t + t' = 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} t = -1 \\ t' = 0 \end{matrix}$$

→ non verificano la terza, sono SGHEMBE!

Ex. $A(1\ 1\ -1)$

$\vec{v}_\alpha = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

$3(x-1) + 2(y-1) - (z+1) = 0$

$3x + 2y - z = 6$ → equazione lineare

- $B \in \alpha$? $(1\ 2\ 1)$

  $3 + 4 - 1 = 6$ V $\quad B \in \alpha$

- $C \in \alpha$? $(1\ 2\ 0)$

  $3 + 4 = 6$ F $\quad C \notin \alpha$

NB Dare $1\vec{v}_\alpha$ o $2\vec{v}_\alpha$ non cambia, perché il piano rimane sempre $\perp$ a esso, cioè $/\!/$ con l'altro piano, ma passando per un punto sono coincidenti.

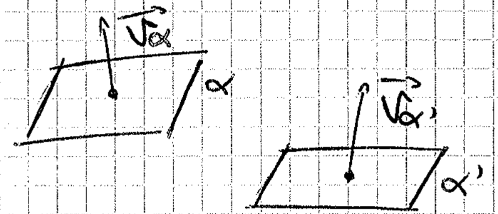
↳ cambia solo l'equazione del piano, che diventa un suo multiplo.

$ax + by + cz = d$

$a, b, c \neq 0$

$(a\ b\ c) \neq (0\ 0\ 0)$

- $\alpha: ax + by + cz = d$
- $\alpha': a'x + b'y + c'z = d'$



$\vec{v}_\alpha = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$

ES. $a \neq 0$, $b = 0$, $c = 0$ → $\left(\frac{d}{a}, 0, 0\right)$

- I piani sono $/\!/$ quando i vettori sono $/\!/$, cioè sono proporzionali tra essi.

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{array}\right)}_{A|B}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$$

$rk(A) = rk(A|B) \iff \alpha = \alpha' \quad (rk(A) = rk(A|B) = 1)$

$rk(A) = 1$, $rk(A|B) = 2$ $\Big\}$ $\alpha /\!/ \alpha'$, $\alpha \neq \alpha'$

$rk(A) = rk(A|B) = 2 \iff \alpha \cap \alpha'$ (rette)

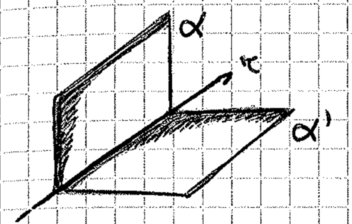
ES. $A = (1\ {-1}\ 0)$
$B = (0\ 0\ {-1})$
$C = (0\ 2\ 3)$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 6(x-1)+4(y+1)-2z=0$$

$$= 6x-6+4y+4-2z=0$$

$$6x+4y-2z=2$$

↳ Equazione del piano



$$r: \begin{cases} 3x+2y-z=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

$$r/\!/: (3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})\times(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}) = 3\vec{k}-3\vec{j}-2\vec{k}+2\vec{i}-\vec{j}+\vec{i} =$$
$$= 3\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k}$$

$\vec{i} \to \vec{j}$, $\vec{k}$

• Se $x=0$ $\begin{cases} 2y-z=1 \\ y+z=0 \end{cases} \to \begin{matrix} y=1/3 \\ z=-1/3 \end{matrix}$

$P(0\ \ 1/3\ \ {-1/3})$ $\begin{cases} x=3t \\ y=\frac{1}{3}-4t \\ z=-\frac{1}{3}+t \end{cases}$

2° METODO

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$R_2 \to R_2+R_1$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$R_1 \to R_1-\frac{2}{3}R_2$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1/3 & 0 & -1 & 1/3 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$R_1 \to -R_1$
$R_2 \to \frac{1}{3}R_2$ $\left(\begin{array}{ccc|c} -1/3 & 0 & 1 & -1/3 \\ 4/3 & 1 & 0 & 1/3 \end{array}\right)$ $\begin{cases} z=-1/3+\frac{1}{3}x \\ y=1/3-\frac{4}{3}x \end{cases}$

$$\begin{cases} x=t \\ y=1/3-4/3t \\ z=-1/3+1/3t \end{cases} \qquad \cancel{t} = x = -\frac{3}{4}\left(y-1/3\right) = 3\left(z+\frac{1}{3}\right)$$

$$\begin{cases} 4x=-3y+1 \\ 3y+12z=-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=x_A+\ell t \to t=\frac{x-x_A}{\ell} \\ y=y_A+mt \to t=\frac{y-y_A}{m} \\ z=z_A+nt \to t=\frac{z-z_A}{n} \end{cases}$$

• Se $t=0$ $\frac{x-x_A}{0}=\frac{y-y_A}{m}=\frac{z-z_A}{n}$

$$\boxed{\ell(y-y_A)=m(x-x_B)}$$

$$\begin{cases} x=x_A+\ell t \\ y=y_A+mt \end{cases} \to \begin{cases} x=x_A+(x_B-x_A)t \\ y=y_A+(y_B-y_A)t \end{cases} \qquad t=\frac{x-x_A}{x_B-x_A} \qquad t=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}$$

CONFRONTO DUE RETTE SCRITTE IN MODO DIVERSO

$$\begin{cases} x = x_A + \ell t \\ y = y_A + mt \\ z = z_A + nt \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

Lez. $\boxed{9}$ 2/4/2012

$$r: \begin{cases} 3x + 2y - z = -1 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases} \qquad 0 \in s$$

$$\begin{cases} 3t = 1 \\ 4t = 0 \end{cases} \quad \emptyset \to \text{parallele} \quad \to \text{sghembe}$$

- $s \parallel \vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$
- $r \parallel \vec{v_1} = (3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) \times (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$

$$= 3\vec{k} - 3\vec{j} + 2\vec{k} + 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{i} =$$
$$= 3\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$$

$s \nparallel r \to$ sono SGHEMBE

$$\begin{matrix} r \\ \\ s \\ \\ \end{matrix} \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \\ a'''x + b'''y + c'''z = d''' \end{cases} \qquad \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{array}\right)}_{A|B}$$

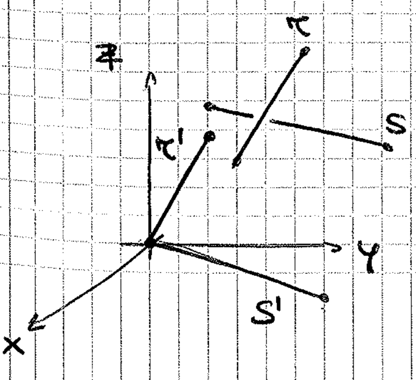
(the first three columns form A)

rk(A)	rk(A|B)
2	2
2	3
3	3
3	4

⌈ Non ci sono incognite libere (rk max.), c'è solo una soluzione ⌋

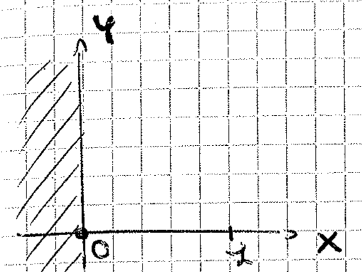
- Le eq. di r non sono proporzionali, sono piani non // tra loro.

rk (A)	rk (A|B)	
2	2	$r = s$
2	3	$r \parallel s$ $r \neq s$
3	3	$r \cap s$ = 1 punto $(n - rk = 0)$
3	4	sghembe



$r \parallel s$ $r \neq s \iff r' = s'$

r e s sghembe $\iff r' \cap s' = 1$ punto



$D_{x,y} \ni 1/n \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$D_{x,y} \supseteq \left\{ \frac{1}{n} \right\}$

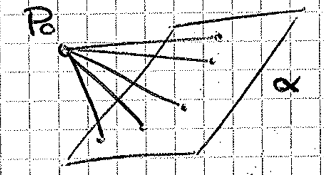
$\left.\begin{array}{l} \inf y = 0 \\ \inf x = 0 \end{array}\right\} \boxed{D_{x,y} = 0}$, ma non hanno punti comuni

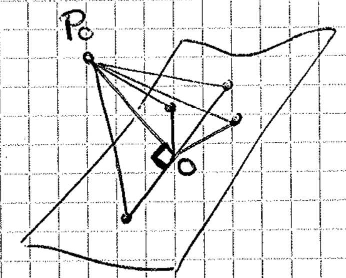
---

PUNTI, RETTE, PIANO

A) Punto/piano

Calcolo la distanza tra P_0 e tutti i punti, poi vedo l'inf.





$\overline{P_0 O} \in$ retta $\perp$ al piano

$d(\{P_0\}, \alpha) \leq d(P_0 O)$

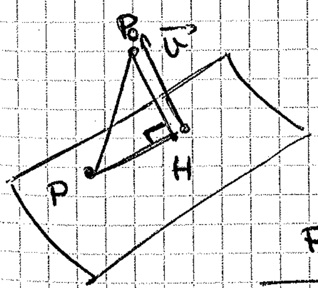
$d(P_0 O) \in D_{P_0, \alpha}$

$\forall P \in \alpha \quad d(P_0 P) \geq d(P_0 H) \Rightarrow \inf D_{\{P_0\}\alpha} \geq d(P_0, \alpha)$

$$\Rightarrow \boxed{D_{\{P_0\}\alpha} = \inf D_{\{P_0\}\alpha}}$$

$P_0 \quad (x_0, y_0, z_0)$

$\alpha : ax + by + cz = d$



$\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$

$\vec{v}_{/\!/} = \left| \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{|\vec{v}|} \cdot \underbrace{\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2}}_{1} \right| = \left| \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{|\vec{v}|} \right|$

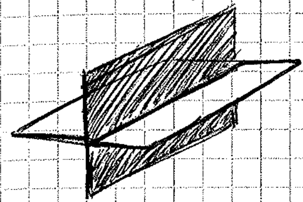
$P(x, y, z) \in \alpha$

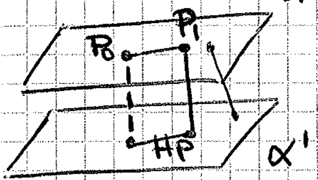
$\overrightarrow{P_0 - P} = (x_0 - x)\vec{i} + (y_0 - y)\vec{j} + (z_0 - z)\vec{k}$

$\alpha \perp a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$

POSIZIONI TRA PIANI

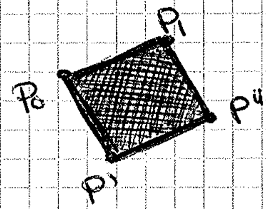
- Se $d(\alpha, \beta) = 0$ → COINCIDENTI
  → PARALLELI, INCIDENTI SU UNA RETTA





$$D(\alpha, \alpha') = \inf \{ d(P_0, P') \mid P_0 \in \alpha, P' \in \alpha' \} =$$

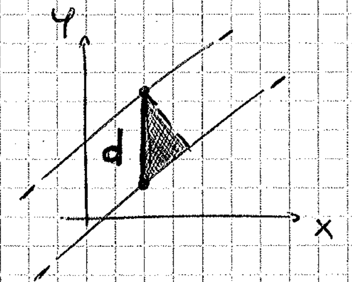
$$= \left\{ \inf_{P_0 \in \alpha} \left(\inf_{P' \in \alpha'} \{ d(P_0, P') \} \right) \right\} = \inf_{P_0 \in \alpha} \{ d(P_0, \alpha) \}$$



ES.

$ax + by + cz = d$ (α)

$ax + by + cz = d'$ (α') → posso supporre uguale il primo membro



$P_0 (x_0, y_0, z_0)$

$ax_0 + by_0 + cz_0 = d$

$$d = \frac{|\overbrace{ax_0 + by_0 + cz_0}^{d} - d'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} =$$

$$= \boxed{\frac{|d - d'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$ → DISTANZA FRA DUE PIANI

$2(3x + 2y - z = 1)$

$6x + 4y - 2z = 33$

$$d = \frac{|33 - 2|}{\sqrt{36 + 16 + 4}} = \boxed{\frac{31}{\sqrt{56}}}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 110

ES. $r \begin{cases} x = 1+t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$ $r' \begin{cases} x = -t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$ IN EQUAZIONI PARAMETRICHE

- $\vec{v} \parallel r = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ - $\vec{v} \parallel r' = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ $\rightarrow$ r e r' $\not\parallel$

$\begin{cases} 1+t = -t' \\ t = 2t' \\ 2t = t' \end{cases}$ $\begin{cases} -3t' = 1 \\ 4t' = t' \end{cases}$ $\begin{cases} t' = -1/3 \\ t = -2/3 \\ -4/3 = -1/3 \; \boxed{F} \end{cases}$ $\rightarrow$ Non ha soluzioni, sono rette SGHEMBE.

$<R-R', \vec{v}_r> = 0$ $R-R' = (1+t-t')\vec{i} + (t-2t')\vec{j} + (2t-t')\vec{k}$

$<R-R', \vec{v}_{r'}> = 0$

$<(1+t-t')\vec{i} + (t-2t')\vec{j} + (2t-t')\vec{k}, \vec{v}_r> = 1+t+t'+t-2t'+4t-2t'$

$<R-R', \vec{v}_{r'}> = -1-t-t'+2t-4t'+2t-t'$

$\begin{cases} 6t - 3t' = -1 \\ 3t - 6t' = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2+12t'-3t' = -1 \\ 3t = 1+6t' \end{cases}$ $\begin{cases} 9t' = -1 \\ t = -\frac{1}{3} \end{cases}$ $t' = -\frac{1}{9}$

$R\left(1-\frac{1}{3}; -1/3; -\frac{2}{3}\right)$ $d(r;r') = d(R,R') = \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}} =$

$R'\left(1/3; -\frac{2}{3}; -1/3\right)$ $= \frac{\sqrt{3}}{3}$

$u \begin{cases} x = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}t \\ y = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}t \\ z = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3}t \end{cases}$ $\boxed{\vec{v} \parallel u = \frac{1}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} - \frac{1}{3}\vec{k}}$

$R(xyz)$

$x_R - x_{R'}$
$y_R - y_{R'}$
$z_R - z_{R'}$

SFERE E CIRCONFERENZE IN S_3

$C \in S_3$ $\quad r \in]0; +\infty[$

la sfera $S(C, r)$ di centro C e raggio r è $\{P \in S_3 \mid d(P;C) = r\}$

- Fissato $O\, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ $\quad S(C,r) = \{P(xyz) \mid \sqrt{(x-x_C)^2+(y-y_C)^2+(z-z_C)^2} = r\} =$

$C(x_C, y_C, z_C) \quad P(x,y,z)$

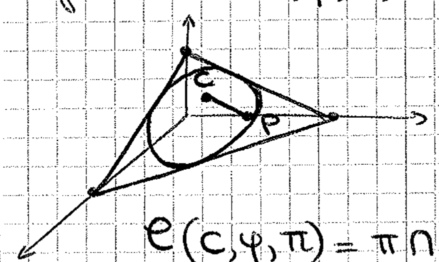
NB) Se $r<0$, ha un valore IMMAGINARIO, cioè non esistono punti dello spazio perché quella sia una sfera.

• SFERA CON CENTRO NELL'ORIGINE E RAGGIO 0 → Sfera degenere → Un punto (l'origine)

→ Quando $r=0$, è sfera degenere, coincide con il punto che è il suo centro.

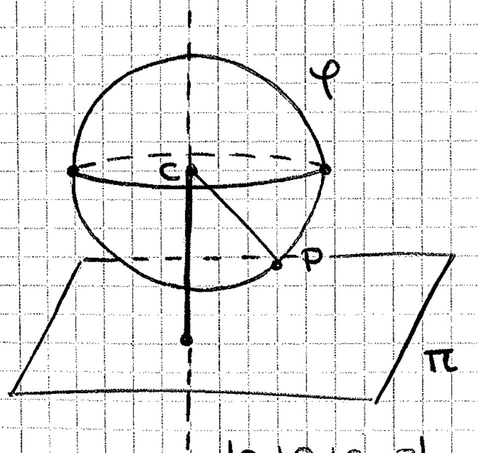
Def. $\pi \subseteq S_3$, $C \in \pi$, $\rho \in]0,+\infty[$, la circonferenza $\mathcal{C}(C,\rho,\pi)$ del piano π di centro C e raggio ρ è:

$$\{P \in \pi \mid d(P,C) = \rho\}$$



$$\mathcal{C}(C,\rho,\pi) = \pi \cap \mathcal{S}(C,\rho)$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=3 \end{cases}$$



$d = r$ → tangente

$d < r$ → secante

$d > r$ → esterne

• Prendo la retta passante per C e ortogonale al piano.

$$\rho = \sqrt{r^2 - d(C,\pi)^2}$$

$$d(C,\pi) = \frac{|0+0+0-3|}{\sqrt{1+1+1}} = \sqrt{3}$$

$r<0$, non può essere ($r=1$, $d(C,\pi)=\sqrt{3}$)

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=h \end{cases}$$

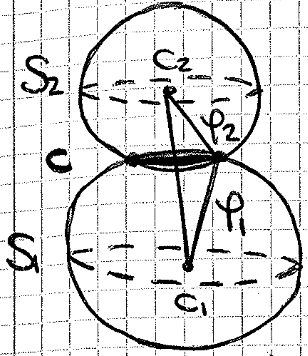
$\frac{|h|}{\sqrt{3}} < 1$ → è circonferenza solo quando $-\sqrt{3} < h < \sqrt{3}$

$d(C,\pi) < \rho$ — π tg alla sfera con $h = \pm\sqrt{3}$

circonferenza di raggio ϕ immaginario $h<-\sqrt{3}$ $h>\sqrt{3}$

• $\sqrt{1-\frac{h^2}{3}} = \frac{1}{2}$

$\frac{3-h^2}{3} = \frac{1}{4}$ → $\boxed{h = \pm\frac{3}{2}}$



$C = S_1 \cap S_2$

$P = (x, y, z) \in C \Rightarrow$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z - \delta_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z - \delta_2 = 0 \end{cases}$$

$$\left[(\alpha_1 - \alpha_2) x + (\beta_1 - \beta_2) y + (\gamma_1 - \gamma_2) z + \delta_1 - \delta_2 = 0 \right]$$

$\downarrow$

PIANO RADICALE DELLA COPPIA DI SFERE (non concentriche)

Eccetto il caso in cui le due sfere sono **CONCENTRICHE**

$\mathcal{C} = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$

$\mathcal{C} \subseteq S_3 \neq S_1\ S_2$

$S_1 \cap S_3 = \mathcal{C}$

$$x^2 + y^2 + z^2 + \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 - (x^2 + y^2 + z^2 + \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z + \delta_3) =$$
$$= \lambda (\alpha_1 - \alpha_2) x + (\beta_1 - \beta_2) y + (\gamma_1 - \gamma_2) z + \delta_1 - \delta_2$$

$\Longrightarrow$ EQUAZIONE DI S_3 È DELLA FORMA:

$$\left[x^2 + y^2 + z^2 + \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 + \lambda (\text{eq. piano radicale}) = 0 \right]$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

- Determinare $S \supseteq \mathcal{C}$

$(7, -1, 3) \in S$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 + \lambda (x + y + z - 1) = 0$$

$$49 + \cancel{1} + 9 - \cancel{1} + 7\lambda - \lambda + 3\lambda - 1\lambda = 0$$

$$8\lambda = -58$$

$$\boxed{\lambda = -\frac{29}{4}} \rightarrow \text{ESISTE (non sempre)}$$

FUNZIONI A VALORI IN $\mathbb{R}^n$

Def. Una funzione a valori in $\mathbb{R}^n$ è un'applicazione da un insieme $I \subseteq \mathbb{R}$ a valori in $\mathbb{R}^3$ -

quasi sempre aperto

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$t \rightarrow f(t) = (f_1(t), f_2(t)) \dots f_n(t))$$

• Se $\exists i \mid V_i \neq 0 \iff f$ è REGOLARE

ES. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$t \to (t^2, t^3)$

$f'(t) = (2t, 3t^2) \to$ non è regolare

$S_3 \quad O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

$\updownarrow$

$\mathbb{R}^3$

$C \in S_3$ si dice curva se esiste $f: I \to \mathbb{R}^3$ continua tale che $C = im(f)$; $f: I \to \mathbb{R}^3$ si dice rappresentazione parametrica di C. C si dice piana se esiste un piano $\pi \supset C$. In caso contrario si dice sghemba.

ES. r retta in $\mathbb{R}^3$

$\parallel$

$im \{ t \to (a_1 + V_1 t, a_2 + V_2 t, a_3 + V_3 t) \}$

$f\varphi : I \to \mathbb{R}^2$

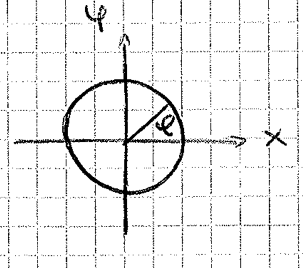
$t \to (t, \varphi t)$

$f: I \to \mathbb{R}$ continua

$\Gamma f = \{ (t, f(t)) \mid t \in I \}$

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$t \to (\cos t, \operatorname{sen} t) = \varphi(\cos t, \operatorname{sen} t) \quad \varphi > 0$

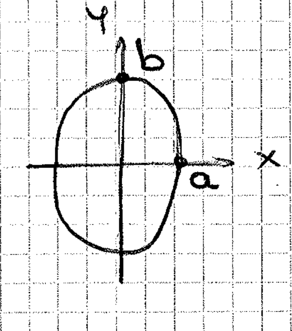


ES. $a, b > 0$

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$t \to (a\cos t, b \operatorname{sen} t)$

$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$



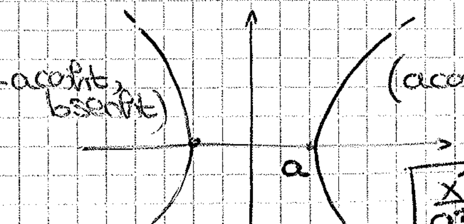
$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$t \to (\cosh t \cdot a, \operatorname{senh} t \cdot b)$

$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

• Se $a, b > 0$

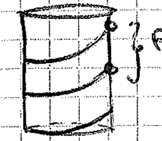


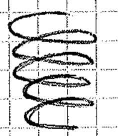
$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$

(ES.) ELICA CILINDRICA DI RAGGIO $\rho > 0$ e PASSO h -

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$t \to (\rho\cos t, \rho\sin t, ht)$



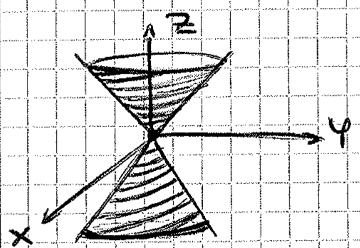

Elica cilindrica

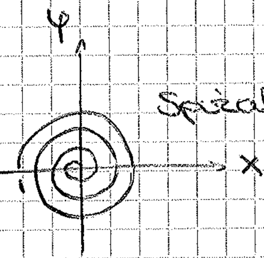
Proiezioni elica su un piano -

ELICA CONICA DI RAGGIO $\rho > 0$ e PASSO h -

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$t \to (t\rho\cos t, t\rho\sin t, ht)$





Spirale di Archimede

Def. La curva C si dice regolare se esiste almeno una parametrizzazione di C che è regolare -

(ES.) 1) cubica sghemba
2) $t \to (a_1 + V_1 t, a_2 + V_2 t, a_3 + V_3 t)$
3) $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ (V) $\begin{cases} x = t^3 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ (F) $\to x' = 3t^2$ (non è iniettiva)
$\hookrightarrow$ x' si annulla in un punto
4) $t \to (\rho\cos t, \rho\sin t)$
$t \to (-\rho\cos t, \rho\sin t)$ $\quad t =]0, 2\pi[$

(NB.) $t \to (t^2, t^3)$ NON È REGOLARE -

RETTA TANGENTE A UNA CURVA

Def. $f: I \to \mathbb{R}^3$ parametrizzazione della curva C -

- Un'applicazione $t: J \to I$ si dice CAMBIO DI PARAMETRO per C se è continua e suriettiva -

$g = f \circ t : J \to \mathbb{R}^3 \to$ Riparametrizzazione di C -

- Il cambio di parametro si dice regolare se $t \in C^1(J, I)$ e $t' \neq 0$ su J -

Def.: $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^3$ curva regolare

$f: I \to \mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^3$ parametrizzazione regolare

$P_0 = f(t_0) \in \mathcal{C}$

$\Rightarrow$ la retta di eq. parametrica

$$\begin{cases} x = f_1(t_0) + f_1'(t_0)\tau \\ y = f_2(t_0) + f_2'(t_0)\tau \\ z = f_3(t_0) + f_3'(t_0)\tau \end{cases}$$

è detta **RETTA TANGENTE** a $\mathcal{C}$ in P_0.

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = s^3 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

ES.

$$\begin{cases} x = a_1 + v_1 t \\ y = a_2 + v_2 t \\ z = a_3 + v_3 t \end{cases} \qquad f = (a_1 + v_1 t, a_2 + v_2 t, a_3 + v_3 t)$$

$$f' = (v_1, v_2, v_3)$$

$A(a_1, a_2, a_3)$

$\vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}$

retta tangente a r in $A = f(0)$

$$\begin{cases} x = a_1 + v_1 \tau \\ y = a_2 + v_2 \tau \\ z = a_3 + v_3 \tau \end{cases}$$

ES. $\varphi: I \to \mathbb{R}$

$\Gamma_\varphi = \mathrm{im}\left(t \xrightarrow{f_\varphi} (t, \varphi(t))\right) \subseteq \mathbb{R}^2$

$\varphi \in C^1(I, \mathbb{R})$

$t_0 \in I \quad (t_0, \varphi(t_0))$

$$\begin{cases} x = t_0 + 1 \cdot \tau \\ y = \varphi_0 + \varphi'(t_0)\tau \end{cases} \qquad \tau \in \mathbb{R}$$

$$\frac{x - t_0}{1} = \frac{y - \varphi_0}{\varphi'(t_0)} \to y = \varphi_0(t_0) + \varphi'(t_0)(x - t_0)$$

ES. $t \xrightarrow{f} (\varphi\cos t, \varphi \sin t) \to$ non iniettiva

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$t \xrightarrow{f'} (-\varphi \sin t, \varphi \cos t)$

$t_0 \in \mathbb{R}$

$]t_0 - \pi, t_0 + \pi[$

- $\mathcal{C} \in \mathbb{R}^3$ sia una curva regolare:

  $f: I \to \mathcal{C}$ parametrizzazione regolare di $\mathcal{C}$

  $g: I \to \mathcal{C}$

$\Rightarrow g = f \circ t$ $\quad t$: cambio regolare

in aggiunta $f, g \in C^2 \Rightarrow t \in C^2$

$$g' \times g'' = t' \cdot f' \times (t'' f' + t'^2 f'') = t' t'' \cdot \underbrace{\cancel{f' \times f'}}_{=0} + t'^3 \cdot f' \times f''$$

$$g' = (f \circ t)' = f'(t(s)) \cdot t'(s)$$

$$g'' = f''(t(s)) \cdot t'(s) \cdot t'(s) + t''(s) f'(t(s))$$

- $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^3$ curva regolare $f: I \to \mathcal{C}$ param. regolare di $\mathcal{C}$ di classe C^2:

  $P_0 = f(t_0) \in \mathcal{C}$ si dice di flesso se $(f' \times f'')(t_0) = 0$; se $\mathcal{C}$ non ha punti di flesso si dice BIREGOLARE.

- Se $P_0 \in \mathcal{C}$ NON è di flesso, il piano per P_0 perpendicolare a $(f' \times f'')(t_0)$ si dice PIANO OSCULATORE a $\mathcal{C}$ in P_0.

ES. $\quad r \begin{cases} x = a_1 + v_1 t \\ y = a_2 + v_2 t \\ z = a_3 + v_3 t \end{cases}$

ES. $\quad \varphi: I \to \mathbb{R}$

$\Gamma_\varphi = \mathrm{im}\left(t \xrightarrow{f_\varphi} (t, \varphi(t))\right)$

$\varphi \in C^2(I, \mathbb{R})$

$f(a_1 + v_1 t, \dots)$

$f'(v_1, \dots)$

$f''(0, 0, 0)$

$f' \times f'' = (0, 0, 0)$

Eq. del piano osculatore

$$\begin{vmatrix} x - f_1(t_0) & y - f_2(t_0) & z - f_3(t_0) \\ f_1'(t_0) & f_2'(t_0) & f_3'(t_0) \\ f_1''(t_0) & f_2''(t_0) & f_3''(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

Def. $f: [a,b] \to \mathbb{R}^3$ continua; diciamo che l'arco di curva f é RETTIFICABILE se $\ell(f; a,b) = \sup\{\ell(P_0, P_1 \ldots P_n)\}$ esiste FINITO. In tal caso $\ell(f;a,b)$ viene detta lunghezza dell'arco $f[a,b]$.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{|f(t_{i+1}) - f(t_i)|}{|t_{i+1} - t_i|} (t_{i+1} - t_i)$$

Prop. $f: [a,b] \to \mathbb{R}^3$ di classe $f \in C^1([a,b], \mathbb{R}^3) \Rightarrow$ arco di curva f é RETTIFICABILE

e la lunghezza dell'arco é $\ell(f, a, b) = \int_a^b |f'(t)|\, dt$.

- $g: I \to \mathbb{R}^3$

  (g_1, g_2, g_3)

  $|g| = \sqrt{g_1^2 + g_2^2 + g_3^2}$

- $A, B \in \mathbb{R}^3$

  $A(a_1, a_2, a_3)$

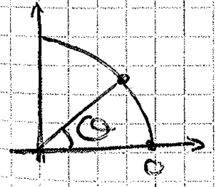
  $B(b_1, b_2, b_3)$

$$\begin{cases} x = a_1 + (b_1 - a_1)t \\ y = a_2 + (b_2 - a_2)t \\ z = a_3 + (b_3 - a_3)t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\int_0^1 \sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2 + (b_3-a_3)^2}\, dt = \left[\sqrt{\quad}\; t\right]_0^1 = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + \ldots}$$

Es. $\varphi > 0$ $\quad t \xrightarrow{f} (\varphi\cos t, \varphi\operatorname{sen} t)$

$t \xrightarrow{f'} (-\varphi\operatorname{sen} t, \varphi\cos t)$ $\quad f|_{[0,2\pi]}$



$$\int_0^{\Theta} \sqrt{(-\varphi\operatorname{sen} t)^2 + (\varphi\cos t)^2}\, dt = \int_0^{\Theta} \sqrt{\varphi^2}\, dt = \int_0^{\Theta} \varphi\, dt =$$

$$[\varphi t]_0^{\Theta} = \boxed{\varphi\Theta}$$

$\theta'(t) = |\gamma'(t)| > 0$ $\qquad \theta : I \to J$

$\boxed{\gamma \circ \theta^{-1} = g}$ $\qquad \theta^{-1} : J \to I$

↳ la parametrizzazione intrinseca della curva

• $|g'(s)| = (\gamma \circ \theta^{-1})'(s) = \gamma'(\theta^{-1}(s)) \cdot \underbrace{(\theta^{-1}(s))}_{1} = \boxed{\dfrac{\gamma'}{|\gamma'|}}$ → è un versore

---

Lez. $\boxed{14}$ (13 saltata per Juve-Roma) 26/4/12

$V_n(O)$ $\qquad \mathbb{R}^I \supseteq$

$K^{n,n}$ $\qquad \mathbb{R}^I \supset C^0(I,\mathbb{R}) \supset C^1(I,\mathbb{R}) \supset \dots \supset C^p(I,\mathbb{R}) \supset C^{p+1}(I,\mathbb{R})$

$\mathbb{R}^I$ $\qquad\qquad \uparrow$

K^n $\qquad\qquad]a,b[$

$$\{\underset{m\times n}{A}X = \underset{m\times p}{B} \mid X \in K^{n,p}\} \subseteq K^{n,p} \text{ è sottospazio vettoriale } \iff B = 0_{m\times p}$$

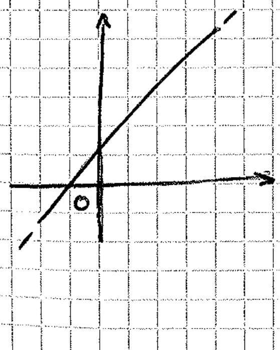
$\mathbb{R}^2 \longleftrightarrow \mathbb{R}^{2,1}$

$ax + by = c$

$(a \ b)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (c)$

[SE È SOTTOSPAZIO, C DEV'ESSERE 0]

$m = 1$
$n = 2$
$p = 1$ $\quad$ è sottospazio $\mathbb{R}^{2,1} \iff c = 0$



$W = \{(x,y) \mid ax + by = c\}$

$0_{\mathbb{R}^2} = (0,0) \in W$

$a \cdot 0 + b \cdot 0 = c \implies c = 0$

• Se $c = 0$, $\quad (x_1, y_1) \quad (x_2, y_2) \in W$

$\Updownarrow \qquad \Updownarrow$

$ax_1 + by_1 = 0 \qquad ax_2 + by_2 = 0$

$(ax_1 + by_1) + (ax_2 + by_2) = 0$

• V sv/K

W_1 $W_2 \subseteq V$ ssv

$\Rightarrow W_1 \setminus W_2 \to$ no (se entrambi contengono lo zero, la differenza no)

$\Rightarrow W_1 \cap W_2 \to$ sì

$\Rightarrow W_1 \cup W_2 \to$ SE E SOLO SE UNO È CONTENUTO NELL'ALTRO

$$\begin{matrix} w' \in W_1 - W_2 \\ w'' \in W_2 - W_1 \end{matrix} \Rightarrow \left[w' + w'' \notin W_1 \cup W_2 \right]$$

Prop. V ssv/K $W_1, W_2 \subseteq V$ ssv $\Rightarrow W_1 \cap W_2$ è ssv di V

Dim. • $\left.\begin{matrix} 0_V \in W_1 \\ 0_V \in W_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0_V \in W_1 \cap W_2$

• $\alpha \in K$

$w \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow \alpha w \in W_1 \cap W_2$

$\left.\begin{matrix} w \in W_1 \Rightarrow \alpha w \in W_1 \\ w \in W_2 \Rightarrow \alpha w \in W_2 \end{matrix}\right\}$

• $w', w'' \in W_1, W_2 \overset{?}{\Rightarrow} w' + w'' \in W_1 \cap W_2$ sì

Es. $\mathbb{R}^2$

$W_1 \{ a_1 x + b_1 y = 0 \}$

$W_2 \{ a_2 x + b_2 y = 0 \}$

$W_1 \cap W_2 \begin{cases} a_1 x + b_1 y = 0 \\ a_2 x + b_2 y = 0 \end{cases} \to$ SISTEMA OMOGENEO, è sottospazio

Prop. V ssv/K $\{W_i\}_{i \in I}$ ssv/K $\Rightarrow \bigcap_{i=I} W_i$ è ssv/K.

$$C^\infty(I, \mathbb{R}) = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} C^p(I, \mathbb{R})$$

Def. V ssv/K $\quad V_1, V_2, \dots, V_n \in V$ FISSATI

• Diciamo che $v \in V$ è combinazione lineare di $V_1, V_2, \dots V_n$ se esistono $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n \in K$ |

$$v = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots \alpha_n V_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i V_i$$

• L'insieme di tutte le combinazioni lineari di $V_1, V_2, \dots V_n$ si indica con

$$\mathcal{L}(V_1, V_2, \dots V_n) \subseteq V$$

Se $V = \mathcal{L}(V_1, V_2, \dots, V_n)$ diremo che $V_1, V_2, \dots, V_n$ sono GENERATORI di V e che V è FINITAMENTE GENERATO (f.g.).

- $V_3(O) \Longleftrightarrow \mathbb{R}^3$

$\vec{i} \longleftrightarrow e_1$

$\vec{j} \longleftrightarrow e_2$

$\vec{k} \longleftrightarrow e_3$

$\mathbb{R}^{2,2} \longleftrightarrow \mathbb{R}^4$

$\cancel{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}} \longleftrightarrow (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$

$E_{ij} \longleftrightarrow$ sommo

$E_{11} \longleftrightarrow e_1$

$E_{12} \longleftrightarrow e_2$

$E_{21} \longleftrightarrow e_3$

$E_{22} \longleftrightarrow e_4$

Es. $V_1\ (2,-1,1) \in \mathbb{R}^3$

$V_2\ (1,1,2)$

$v(1,0,1)$ $\qquad v = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2$

$w\ (0,0,1) = e_3$ $\qquad (1,0,1) = \alpha_1 (2,-1,1) + \alpha_2 (1,1,2)$

$$\begin{cases} 1 = 2\alpha_1 + \alpha_2 \\ 0 = -\alpha_1 + \alpha_2 \to \alpha_1 = \alpha_2 \\ 1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_1 = 1/3 \\ \alpha_2 = 1/3 \end{cases} \qquad (1/3, 1/3)$$

$\boxed{v = \frac{1}{3} V_1 + \frac{1}{3} V_2}$ $\qquad v \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$

$w \notin \mathcal{L}(V_1, V_2)$ (sistema incompatibile)

- La c.l. la posso scrivere solo in un modo, non ne esistono altri. Questo perché se no non posso dare un'unica direzione.

Es. {polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$ nell'indet. x} $= \mathbb{R}[x]$

<u>NON</u> È FINITAMENTE GENERATO

- $p_1, p_2, \dots, p_n$

$\alpha_1 p_1, \alpha_2 p_2, \dots, \alpha_n p_n$

$a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_n p_n$

- Grado del prodotto con una costante $\leq$ grado polinomio
- Grado della somma $\leq$ grado polinomi

Prop. V ssv/K $\quad V_1, V_2, \dots, V_k \in V$

$\Rightarrow \mathcal{L}(V_1, V_2, \dots, V_k)$ è ssv/K

Dim.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 110

- V_1 e.d.

$\Updownarrow$

$\exists \alpha_1 \neq 0 \quad \alpha_1 V_1 = 0_V$

$\Updownarrow$

$V_1 = 0_V$

- Dire che due vettori sono linearmente dipendenti vuol dire che uno è uguale al multiplo di un altro.

- V_1, V_2 e.d.

$\Updownarrow$

$\exists \alpha_1, \alpha_2$ non contemp. nulli $\mid \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 = 0_V$

$\Updownarrow$

Se $\alpha_1 \neq 0 \Rightarrow V_1 = -\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) V_2$

Se $\alpha_1 = 0 \Rightarrow V_2 = -\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) V_1$

$\downarrow$

PARALLELISMO

- V_1, V_2, V_3 e.d.

$\Updownarrow$

$\exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ non contemp. nulli $\mid \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3 V_3 = 0_V$

$\Updownarrow$

Se $\alpha_1 \neq 0 \quad V_1 = \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) V_2 + \left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right) V_3$

Se $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 \neq 0 \quad V_2 = \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) V_1 + \left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right) V_3 \quad \longrightarrow$ COMPLANARIETÀ

Se $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 \neq 0 \quad V_3 = \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_3}\right) V_1 + \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_3}\right) V_2$

Prop. V ssv$/K$ $\quad V_1, V_2, \dots, V_n \in V$

- Sono ed $\iff$ uno di essi è cl degli altri due
- Sono ed $\iff$ uno di essi è cl di quelli che lo precedono nell'ordine fissato.

Dim. $V_1, V_2, \dots, V_n$ sono e.d.

$\Updownarrow$

$\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ non tutti nulli $\mid \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots + \alpha_n V_n = 0_V$

$\Updownarrow$

Se $\alpha_i \neq 0 \quad \alpha_i V_i = -\alpha_1 V_1 - \dots - \alpha_{i-1} V_{i-1} - \alpha_{i+1} V_{i+1} - \dots - \alpha_n V_n$

$V_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} V_1 - \dots - \left(\frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}\right) V_{i-1} - \left(\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}\right) V_{i+1} - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_i} V_n$

Lez. 15 (dopo parte per Roma Terza Media) 3/5/2012

NB Se $V_1, \dots, V_n$ sono generatori, allora $\forall V$ si ha che sono generatori.

Se $V_1, \dots, V_n$ sono l.i., $V_1, \dots, V_{i-1}, V_{i+1}, \dots, V_n$ sono l.i.

Prop. V sv/K $B = (V_1, V_2, \dots, V_n)$ base di V.
Allora $\forall v \in V \ \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K \mid v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i V_i$

[Dim. sul libro] $\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots = B_1 V_1 + B_2 V_2 + \dots B_n V_n$

$(\alpha_1 - B_1)V_1 + (\alpha_2 - B_2)V_2 + \dots = 0_V$

Def. V sv/K e $B = (V_1, V_2, \dots V_n)$
$v \in V$. L'unica n-upla di numeri $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$ tale che $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i V_i$ viene detta n-upla delle componenti di v rispetto a V e si indica con $[V]_B$.

Es. $V_3(O)$ $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
$v = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$
$[V]_B = (a, b, c)$

Prop. V sv/K $B = (V_1, V_2, \dots, V_n) \Rightarrow \forall \lambda \in K, V, V', V'' \in K$
- $[\lambda V]_B = \lambda [V]_B$
- $[V' + V'']_B = [V']_B + [V'']_B$

K^n $e_1, e_2, \dots, e_n$
$x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in K^n \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ $\overline{(x_1, x_2 \dots x_n)}$

$\mathcal{C} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ base di K^n
$[x]_{\mathcal{C}} = x$ → le componenti di un elemento rispetto a una base sono l'elemento stesso. Tale base è detta BASE CANONICA.

$= (\alpha_1 + \alpha_n \beta_1) v_1 + \dots + (\alpha_{n-1} + \alpha_n \beta_{n-1}) v_{n-1} \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$

- Scartando qualcosa di linearmente dipendente, non cambio lo spazio generato.

2) **Dim.** $v_1 \dots v_n$ l.i. $\rightarrow$ Dato ciò, esiste sicuramente una base che li contiene

V è fg $\rightarrow \exists\, w_1 \dots w_n \in V$

$V = \mathcal{L}(w_1 \dots w_n)$

$v_1 \dots v_n w_1 \dots w_n$ generatori di V $\Big\}$ Sicuramente non scarto membri da v_1 a v_n, al massimo da w_1 in poi.

(Es.) $\mathbb{R}^4$ $v_1 = (1, 2, 3, -1)\ \alpha_1$

$v_2 = (1, -2, 0, 2)\ \alpha_2$

$v_3 = (1, 0, 0, -5)$

$\mathbb{R}^4 = \mathcal{L}(c_1, c_2, c_3, c_4)$

$v_1\ v_2\ v_3\ c_1\ \cancel{c_2}\ \cancel{c_3}\ \cancel{c_4}$

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = c_1$? No

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = c_2$? Sì $\rightarrow$ scartato

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = c_3$? Sì $\rightarrow$ scartato

---

DIMENSIONI DI UNO SPAZIO VETTORIALE

Dim. Lemma (Steinitz)

V ss/K $v_1, v_2, \dots, v_n$ l.i.

$w_1, w_2, \dots w_m$ generatori $\Rightarrow \boxed{n \leq m}$

$$\begin{aligned} a_{11} w_1 + a_{12} w_2 + \dots + a_{1m} w_m &= v_1 \\ a_{21} w_1 + a_{22} w_2 + \dots + a_{2m} w_m &= v_2 \\ &\vdots \\ a_{n1} w_1 + a_{n2} w_2 + \dots + a_{nm} w_m &= v_n \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & v_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & v_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & v_n \end{array}\right)$$

- Se n non fosse $\leq m$, almeno una riga dev'essere 0, perciò avremmo una contraddizione, perché nonostante tutti i coefficienti uguali a zero, il risultato sarebbe diverso da zero per ipotesi.

(Prop.) V sv/K $B = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ $D = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ basi di V

$\Rightarrow \boxed{n = m}$

Dim.

B generatori D l.i. $\Rightarrow n \geq m$ (Lemma)

B l.i. D generatori $\Rightarrow n \leq m$ (Lemma)

Def. V sv/K

1) Se $V = \{0_V\}$ diciamo che V ha dimensione 0 e scriviamo $\dim_K(V) = 0$

2) Se $V \neq \{0_V\}$ ed è fg diciamo dimensione di V il numero di elementi di una qualsiasi base di V. Indichiamo tale numero con

$\dim_K(V) = 0$ $\hookrightarrow$ sono sempre lo stesso numero

$\mathcal{L}(V_1, V_2, V_3, ---, V_n)$

- permutando due righe $\mathcal{L}(V_2, V_1, V_3, ---, V_n) = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + --- + \alpha_n V_n$
  $\alpha_1 V_2 + \alpha_2 V_1 + --- + \alpha_n V_n$

  $\downarrow$

  [rk non cambia]

- moltiplico per scalare $\mathcal{L}(\lambda V_1, \lambda V_2, ---, V_n) = \alpha_1 \lambda V_1 + \alpha_2 \lambda V_2 + --- + \lambda \alpha_n V_n$

  $\lambda \neq 0$ pongo $\alpha\lambda = \beta$

  $\downarrow$

  [rk non cambia]

- sommo riga a un'altra $\mathcal{L}(V_1, V_2 + \lambda V_1, ---, V_n + \lambda V_1) = (\alpha_1 - \lambda\alpha_2) V_1 + ---$

  pongo $\alpha_1 - \lambda\alpha_2 = \beta$

  $\downarrow$

  [rk non cambia]

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & --- \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} & --- \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & a_{35} & --- \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 & 0 & --- \end{pmatrix}$$

Le prime tre righe sono indipendenti. La quarta pure, perciò la dimensione della matrice è uguale al rango stesso della matrice.

$$V \xrightarrow{[\ ]_B} K^n$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i V_i = 0_V \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i [V_i]_B = 0_{K^n} \right]$$

$\mathbb{R}^{2,2}$ $e_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $e_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = (e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22})$

$e_{21}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $e_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right]_B = (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$$

Lez. (saltata per cena Musical) 10/05/'12

(After Rome, Cresime e Robin Hood)

APPLICAZIONI LINEARI

(prop.) $f: V \to W$ a.e.

1) $im(f) \leq W$ ssv

2) Se $w \in im(f)$ e $V_0 \in V, | f(V_0) = w$

$\Rightarrow f^{-1}(w) = \{ V_0 + v \mid f(v) = 0_W \} = \{ V_0 + v \mid v \in f^{-1}(0_W) \} =$

$= \{V_0\} + f^{-1}(0_W)$

• $A \in K^{m,n}$

$\mu_A : K^{n,1} \to K^{m,1}$

$X \to AX$

$im(\mu_A) \subseteq K^{m,1}$ [osservazione: μ_A é SURIETTIVA $\Leftrightarrow dim_K(im(\mu_A)) = m$ –]

– Un sistema di generatori per μ_A é dato da $E_{11}, E_{21}, ---, E_{n1}$ –
↳ sono le colonne di una matrice $e_1 \quad e_2 \quad e_n$

$\mathcal{L}(\mu_A(E_{11}), \mu_A(E_{21}), --- (\mu_A E_{n1})) = im(\mu_A)$

$\boxed{\mu_A \text{ é SURIETTIVA} \Leftrightarrow rk(A) = m}$
↳ ha immagine tutto R

• $Ker(\mu_A) = \{X \in K^{n,1} \mid \mu_A(X) = 0_{m,1}\} = \{X \in K^{n,1} \mid AX = 0_{m,1}\}$

$\boxed{dim(Ker(\mu_A)) = n - rk(A)}$

$\boxed{\mu_A \text{ É INIETTIVA} \Leftrightarrow rk(A) = n}$

– Quale affermazione é vera?
1) $\exists f: \mathbb{R}^{12,1} \to \mathbb{R}^{117,1}$ a.e. suriettiva
2) $\forall f: \mathbb{R}^{12,1} \to \mathbb{R}^{117,1}$ a.e. é iniettiva
~~3)~~ $\exists f: \mathbb{R}^{12,1} \to \mathbb{R}^{117,1}$ a.e. iniettiva
4) Nessuna delle precedenti é vera

1) $f = \mu_A \quad A \in \mathbb{R}^{117,12}$
$rk(A) = 117$, ma $rk(A) \leq 12$, perció non puó essere suriettiva! $\boxed{F}$

2) $\mu_{0_{117,12}} \quad \mathbb{R}^{12,1} \to \mathbb{R}^{117,1}$
$X \to 0_{117,1}$ non é iniettiva! $\boxed{F}$

$rk(A) = 12$, ma altri ranghi non danno iniettività –

3) $rk(A) = 12$ → basta prendere una matrice con 12 colonne non nulle!

$\boxed{V}$

è su $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in K^n \Rightarrow \left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right]_{\mathcal{B}} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$

$\mu_A : K^{n,1} \to K^{m,1} \quad A \in K^{m,n}$

μ_A ISOMORFISMO

$\Rightarrow \mu_A$ iniettiva $\Rightarrow rk(A) = n$

$\Rightarrow \mu_A$ suriettiva $\Rightarrow rk(A) = m$

$m = n = rk(A)$

$A \in K^{m,n} \quad rk(A) = n$

$\mu_A : K^{m,1} \to K^{n,1}$

$\varphi : X \to Y$ invertibile

$\exists \psi : Y \to X \quad \psi \circ \varphi = id_X \quad \varphi \circ \psi = id_Y$

$\mu_{A^{-1}} : K^{n,1} \to K^{n,1}$

$\mu_{I_n} : K^{n,1} \to K^{n,1}$

$X \to I_n X = X$

Prop. V, W ssv/K $\quad f : V \to W$

isom. $\Rightarrow f^{-1} : W \to V$ è $\underset{\cong}{\underline{a.l.}}$ (quindi è isomorfismo)

↳ L'inverso di un isomorfismo è un isomorfismo.

$V \cong W \quad id_V$

- $V \xrightarrow{f} W \quad W \xrightarrow{f^{-1}} V$ simmetrica
- $V \xrightarrow{f} W \quad W \xrightarrow{g} U \quad V \xrightarrow{g \circ f} U$

Prop. V, W ssv/K f.g.

$V \cong W \Leftrightarrow \dim_K(V) = \dim_K(W)$

Dim. $\Rightarrow$

$V \xrightarrow{f} W$ ← isomorfismo

$\mathcal{B}$ base di V $\quad n = \dim_K(V)$

$\mathcal{D}$ base di W $\quad m = \dim_K(W)$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f \ \text{iso}} & W \\ \text{iso}\ [\ ]_{\mathcal{B}}^{-1} \uparrow & & \downarrow \text{iso}\ [\ ]_{\mathcal{D}} \\ K^n & \xleftarrow{g} & K^m \end{array}$$

$K^{n,1} \dashrightarrow K^{m,1}$

$[\ ]_{\mathcal{D}} \circ f \circ [\ ]_{\mathcal{B}}^{-1}$

g isomorfismo $\Rightarrow n = m$

$\Leftarrow \dim_K(V) = \dim_K(W) = n$

$\left.\begin{array}{l}\mathcal{B} \text{ base di } V \\ \mathcal{D} \text{ base di } W\end{array}\right\}$ hanno lo stesso numero di elementi

$$V \xrightarrow{[\ ]_{\mathcal{B}}} K^n \xrightarrow{[\ ]_{\mathcal{D}}^{-1}} W$$

ISOMORFISMO

$$\left.\begin{array}{l} [f(E_{1,1})]_{D} = (1,3,0) \\ [f(E_{1,2})]_{D} = (2,0,-1) \\ [f(E_{2,1})]_{D} = (-1,0,0) \\ [f(E_{2,2})]_{D} = (0,1,0) \end{array}\right\}$$ Componenti rispetto alla base D

- matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mu^{D}_{B}(f)$$

$$\mu_A [v]_B = [\ ]_D \circ f \circ [\ ]_B^{-1}([v]_B) = [\ ]_D \circ f(v) = 0_{n,1}$$

$$Ker(f) = \mathcal{L}\left([\ ]_B^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}\right) \qquad \mathcal{L} = \left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -2\end{pmatrix}\right)$$

- $[\ ]_B^{-1}\big|_{Ker(\mu_A)}$ $\quad Ker(\mu_A) = Ker(f)$

  é ISOMORFISMO -

  $[\ ]_D\big|_{im(f)}$ $\quad im(f) \longrightarrow im(\mu_A)$

  é ISOMORFISMO -

$$\begin{array}{c} (1\ \ 3\ \ 0) \\ (2\ \ 0\ \ -1) \\ (-1\ \ 0\ \ 0) \\ (0\ \ 1\ \ 0) \end{array}$$

- Se lo spazio generato da **4** vettori ha dimensione **3**, come generatori devo scegliere

  $\longrightarrow$ 3 vettori linearmente indipendente -

$$dim(Ker(f)) = n - rk\left(\mu^{D}_{B}(f)\right)$$
$$dim(im(f)) = rk\left(\mu^{D}_{B}(f)\right)$$

Prop. (Teorema della dimensione)

$f : V \to W$ a.e. $\quad V, W$ f.g.

$$dim(im(f)) + dim(Ker(f)) = dim(V)$$

corollario

V, W ssv/K f.g. $\quad f : V \to W$ a.e.

1) Se f é SURIETTIVA $\Rightarrow dim_K(W) \leq dim_K(V)$
2) Se f é INIETTIVA $\Rightarrow dim_K(W) \geq dim_K(V)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 110

$v \to [v]_{\mathcal{B}} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ $\quad$ $\lambda v \to [\lambda v]_{\mathcal{B}} = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2 \dots \lambda\alpha_n)$

$\xrightarrow{f} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i$ $\quad$ $\xrightarrow{f} \sum_{i=1}^{n} \lambda\alpha_i w_i$

$$\boxed{f(\lambda v) = \lambda f(v)}$$

$$g\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) \underset{a.l.}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, g(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i$$

corollario $\quad V, W$ ssv/K $\quad \mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ base di V

1) Se $f, g : V \to W$ a.l.

$f(v_i) = g(v_i) \quad i = 1, 2, \dots, n$

$\Rightarrow f = g$

Lez. $\quad$ (e saltate per compleanno e ballottaggio) Garelli - Bogna $\quad$ 24/5/'12

P ortogonale $P \in \mathbb{R}^{n,n}$

${}^tP \cdot P = I_n$

NB
- P ortogonale $\Leftrightarrow$ P invertibile e $P^{-1} = {}^tP$
- P ortogonale $\Leftrightarrow P \cdot {}^tP = I_n$
- I_n è ortogonale $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$
- ${}^tP \cdot P = I_n$

$\det({}^tP \cdot P) = \det(I_n) = 1$

$\det({}^tP)\det(P) = [\det(P)]^2 = 1 \Rightarrow \det(P) = \begin{cases} +1 & \text{ortogonale SPECIALE} \\ -1 & \text{ortogonale NON SPECIALE} \end{cases}$

$$\det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi = 1$$

- P ortogonale

$P = (P_1, P_2, P_3, \dots, P_n) \in \mathbb{R}^{n,1}$

$\mathcal{B} = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ è base ORTONORMALE rispetto al $\langle\,,\rangle$ euclideo

$$\underset{{}^tP}{\begin{pmatrix} P_{11} & P_{21} \\ P_{12} & P_{22} \end{pmatrix}} \underset{P}{\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}} = \underset{I_n}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \qquad \begin{cases} P_{11}^2 + P_{21}^2 = 1 \\ P_{11}P_{12} + P_{21}P_{22} = 0 \to \langle P_1, P_2 \rangle \\ P_{12}P_{11} + P_{22}P_{21} = 0 \\ P_{12}^2 + P_{22}^2 = 1 \to \langle P_2, P_2 \rangle \end{cases}$$

- Data una base qualunque di uno spazio vettoriale, riesco a costruire una base ortonormale -

METODO

$$v \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w * \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ -1 \\ -\alpha \end{pmatrix} \to \in E_A(-1), \text{ é combinazione lineare}$$

$< v, w > = 0$ (condizione $\perp$)

$1 + \alpha + 1 = \cancel{\alpha} - \cancel{\alpha} + 0$

$\boxed{\alpha = -2}$

[Idea: "drizzo" un secondo vettore di quello spazio in modo che sia $\perp$ al primo -]

base ortogonale

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ Sono una base ortonormale di } E_A(-1)$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right]$$

sono VERSORI

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

versore della terza base

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Prop.

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$ SIMMETRICA

$\Rightarrow \exists P \in \mathbb{R}^{n,n}$ ortogonale $|$ ${}^tPAP = P^{-1}AP = \Lambda$ diagonale

$$\det(P) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{6} = -\frac{(\cancel{1} + 2 + \cancel{1} + 2)}{6} = -\frac{6}{6} \to \text{non speciale}$$

- Se voglio cambiare segno al det, DEVO cambiarlo alla COLONNA, mai ad una RIGA!

FORME QUADRATICHE

- $\mathbb{R}^n$ euclideo

$\mathbb{R}^{n,1}$ $\quad < x, y > = {}^t x y = {}^t x I_n y$

$\mathbb{R}^2$ $< (x_1, x_2)(y_1, y_2) >^0 = 3x_1y_1 + 2x_2y_2$ (p.s. non euclideo)

$$= (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Matrice diagonale $\Rightarrow$ simmetrica

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix} \longrightarrow (x_1,x_2,x_3)\,A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \lambda_1 x_1^2+\lambda_2 x_2^2+\lambda_3 x_3^2$$

- Se $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3>0$ é DEFINITA POSITIVA
  - Perché sia nulla, $x_1=x_2=x_3=0$
- $\lambda_1>0 \quad (1\,0\,0)\,A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\lambda_1>0$

Prop. $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ 0 & 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n,n}$

1) Λ é definita positiva $\Leftrightarrow \lambda_i>0 \quad i=1,\dots,n$
2) Λ é semidef. positiva $\Leftrightarrow \lambda_i\geq 0 \quad i=1,\dots,n$
3) Λ é definita negativa $\Leftrightarrow \lambda_i<0 \quad i=1,\dots,n$
4) Λ é semidef. negativa $\Leftrightarrow \lambda_i\leq 0 \quad i=1,\dots,n$
5) Λ non é definita se $\exists\, i,j \mid \lambda_i\geq 0 \;\; \lambda_2\leq 0$

- ${}^t x A x \quad x=\overset{\text{invertibile}}{P}y$

${}^t y\, \underbrace{{}^t P\, A P}\, y \qquad {}^t PAP = D$ diagonale, con entrate diagonali uguali agli autovalori

$\downarrow$

A é (semi)def. positiva (negativa) se i suoi autovalori sono $\geq (\leq)\, 0$

$$A\ \begin{vmatrix}1-t & 2\\ 2 & 1-t\end{vmatrix} = t^2-2t-3 = \begin{matrix}\nearrow -3\\ \searrow 1\end{matrix} \longrightarrow \text{indefinita}$$

$\det(A)$ = prodotto delle radici del $p(A) = -3 \longrightarrow$ vuol dire che le radici hanno segno diverso

- Se ho un polinomio a coefficienti reali, so subito se ha soluzione nulla (manca termine noto).

REGOLA DI CARTESIO

$$\overset{\neq 0}{a_0} t^n + a_1 t^{n-1} + a_2 t^{n-2} + \dots + a_{n-1}t + a_n \in \mathbb{R}[t]$$

$$(a_0\ a_1\ a_2 \dots a_{n-1}\ a_n)$$

- Ogni volta che la radice ha segno $\neq$ da quella precedente, aumento di 1 il contatore.

Il numero di variazione di segno = il numero di radici positive con molteplicità

• Ma

$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = -1 \rightarrow \emptyset$

$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 0 \rightarrow$ rappresenta l'origine

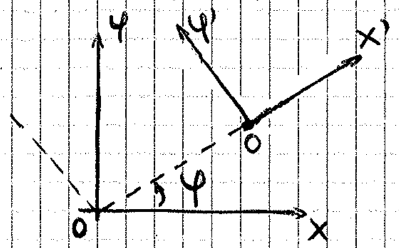
$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 0 \rightarrow$ è l'unione di due rette che si intersecano nell'origine

$y^2 = 1 \rightarrow$ sono due rette // all'asse x

$y^2 = -1 \rightarrow \emptyset$

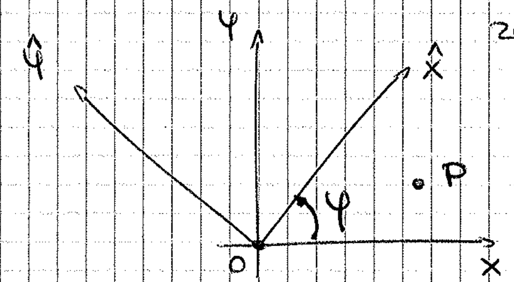
$y^2 = 0 \rightarrow$ asse ascisse con molteplicità due

$x^2 + 2xy + 2y^2 = 1$



ROTOTRASLAZIONI = trasformazioni composte da rotazione e traslazione in un dato ordine.

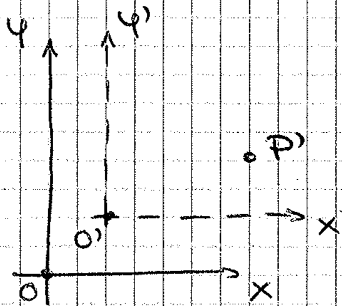
rotazione



$P(x,y)$

$P = (\hat{x}, \hat{y})$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\text{sen}\varphi \\ \text{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$



$O'(\mu, \nu)$

traslazione

$P'(x, y)$

$P' = (x+\mu, y+\nu)$

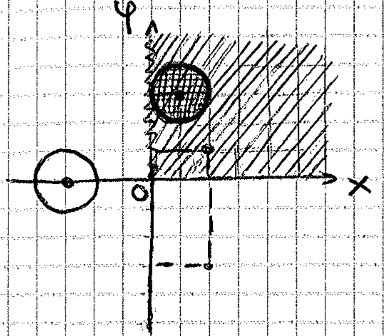
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix}$

Rototraslazione

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\text{sen}\varphi \\ \text{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix}$

$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R} \qquad \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n, n+1[$

ES. $\quad U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y > 0\}$



$\bar{x} \geq 0$

$(\bar{x}, 0) \quad B((\bar{x},0), \delta) \to$ I punti sull'asse x sono punti di frontiera, perché sopra di esso i punti $\in U$, sotto $\in \mathbb{R}^2 - U$ (hanno $y<0$) -

$U^\circ = \{(x,y) \mid x, y > 0\}$

$\partial U \supseteq \{(x,0) \mid x \geq 0\} \cup \{(0,y) \mid y \geq 0\}$

$\{(x,y) \mid x < 0 \text{ o } y < 0\}$

$\left[\partial U_1 \cap \partial U_2 \neq \partial(U_1 \cap U_2)\right]$

un punto $\qquad$ un insieme

$\left[\partial(U_1 \cup U_2) = \{(x,0) \mid x \leq 0\} \cup \{(0,y) \mid y \leq 0\}\right]$

$(\mathbb{R}^n)^\circ = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é aperto (Insieme é APERTO se coincide con la sua parte interna)

$\emptyset = \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n \to \emptyset$ é chiuso

$\mathbb{R}^n$ e $\emptyset$ sono sia aperti sia chiusi -

Ma: $\emptyset^\circ = \emptyset$ é aperto

$\mathbb{R}^n \setminus \emptyset = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é chiuso

$\{U_i\}_{i\in I} \quad U_i \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto

$\bar{x} \in \bigcup_{i\in I} U_i \Rightarrow \exists \bar{i} \mid \bar{x} \in U_{\bar{i}} \Rightarrow \exists \delta > 0,\ B(\bar{x}, \delta) \subseteq U_{\bar{i}} \subset \bigcup_{i\in I} U_i$

$U_n =]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[\quad n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

$\bigcap_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} U_n \qquad U^\circ$ é aperto

Per trovare frontiera:

$U^\circ \to$ non sta lì

$(\mathbb{R}^n \setminus U)^\circ \to$ non sta lì

$\partial U = \mathbb{R}^n \setminus (U^\circ \underbrace{\cup}_{\text{unione}} (\mathbb{R}^n\setminus U)^\circ) \to$ CHIUSO

FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI REALI

$U \subseteq \mathbb{R}^n$

$f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in U\}$

$U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$

$x \longrightarrow (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$

$f_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$

Es. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$(x,y) \longrightarrow (x+y, x-y, 3x)$

$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x,y) \to (x+y)$

$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x,y) \to (x-y)$

$f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x,y) \to (3x)$

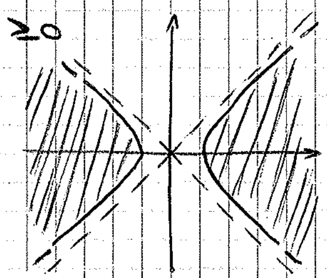
Es. $(x,y) \longmapsto \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}$

Dom f $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \neq (0,0)\}$

$= \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (sono tutti punti interni, è aperto)

$(x,y) \longmapsto \sqrt{x^2-y^2-1}$

$x^2-y^2-1 \geq 0$



LIMITE DI FUNZIONE A PIÙ VARIABILI

Def. $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ $\bar{x} \in U'$

$L \in \mathbb{R}^m$

- Diciamo che il limite per x tendente a $\bar{x}$ di $f(x)$ è L ($\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = L$) se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \mid x \in B(\bar{x}, \delta) \cap U \setminus \{\bar{x}\} \Rightarrow f(x) \in B(L, \varepsilon)$ -

$L = (L_1, L_2 \dots L_n)$
$f = (f_1, f_2 \dots f_n)$

$$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = L \iff \lim_{x \to \bar{x}} f_i(x) = L \quad i(1, 2, \dots n)$$

$|f(x) - L| \leq |f(x)_1 - L_1| + |f(x)_2 - L_2| + \dots$

$|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \geq |x_i|$

$(f_1(x) - L, 0, 0, \dots, 0) +$
$(0, f_2(x) - L, 0, \dots, 0)$

$|f_1(x) - L_1| \leq |f(x) - L|$

U connesso per archi

$g[0,1] \to U$ continua

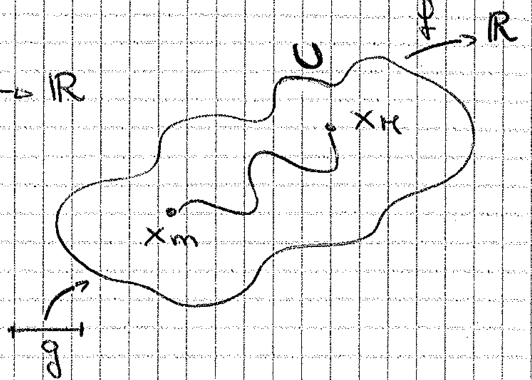
$g(0) = m$

$g(1) = M$

$f \circ g\,[0,1] \to \mathbb{R}$

$f \circ g\,(0) = m$

$f \circ g\,(1) = M$



(Prop.) U compatto e connesso per archi

$f: U \to \mathbb{R}$ continua

$\Longrightarrow$ f assume tutti i valori fra il suo minimo e il suo massimo.

(Def.) $U \subseteq \mathbb{R}^n$ $\quad \bar{x} \in U^\circ$

$v \in \mathbb{R}^n$ $\quad |v| = 1$ (versore)

$f: U \to \mathbb{R}$

Diciamo che f è derivabile nella direzione di v se esiste finito

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\bar{x}+tv) - f(\bar{x})}{t} .$$

nel punto $\bar{x}$

In tal caso chiamiamo tale limite derivata di f in $\bar{x}$ nella direzione di v e scriviamo:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) .$$

Se $\bar{v} = e_i = (0, 0, 1, 0 \dots 0)$ si scrive $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$ [Derivata parziale di f rispetto a x_i]

$g[0,1] \to \mathbb{R}^n$ $\qquad f \circ g\,[0, ?] \to \mathbb{R}$

$t \to \bar{x} + tv$ $\qquad t \to f(\bar{x}+tv)$

F

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = \frac{dF}{dt}(0)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{sen}\frac{y}{x}\right)(\bar{x},\bar{y}) = \frac{f((\bar{x},\bar{y}) + t(1,0)) - f(\bar{x},\bar{y})}{t} = \frac{f(\bar{x}+t,\bar{y}) - f(\bar{x},\bar{y})}{t}$$

- $\frac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{sen}\frac{y}{x}\right) = -\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}$
- $\frac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{sen}\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}$

[**NON** è la generalizzazione della derivata di funzione in una variabile.]

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 110