



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 933

DATA: 15/04/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Zorzi

MATERIA: Aerodinamica + Eserc.

Prof. Arina

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

1

AERODINAMICA

~~Autore~~: Anna Scarso

Ufficio: 2° piano Dimecs

Esame: si può rifiutare il voto solo una volta
c'è un esercizio su Matlab.

- 30' parte teorica con domande a risposta multipla → 16 p.ti

5 domande con risposte (3, 0, -1)

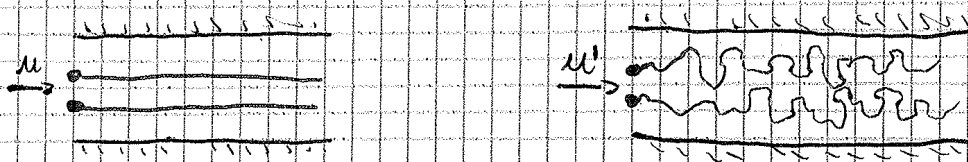
2 domande a risposta libera (3, 0, -1)
4 righe

- 1:45' esercizi di calcolo, procedimenti x trovare una formula, mezzo di Matlab
si possono usare i libri

Materiale: Appunti sul portale. Utilizzo di Matlab

Testi: prof. Cuori o Carpenter (internet)

Stessa cosa per l'esperimento di Reynolds (1883)



Visto che non si può avere una soluzione analitica, e sono trovate altre soluzioni i fratelli Wright utilizzarono un approccio sperimentale → utilizzo di galleggianti del vento.

Un altro approccio è l'approccio ANALITICO: si semplifica le formule di Navier-Stokes con delle semplificazioni → sviluppo di teorie per il calcolo dell'eq. Navier-Stokes.

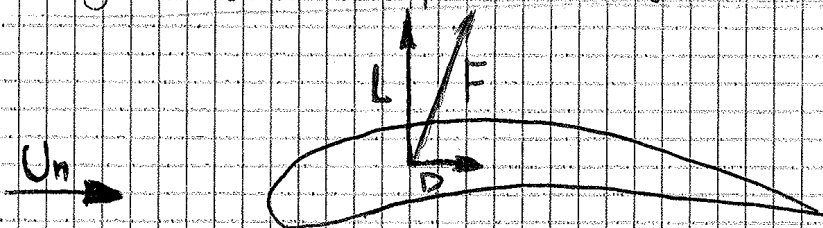
L'approccio CFD è quello + moderno che si basa sull'uso dei calcolatori x risolvere l'eq di Navier-Stokes. Lo passo x il calcolo solo è quello di conoscere un codice, derivante dalle teorie analitiche.

È quindi fondamentale conoscere bene l'analitico.

L'oggi che studieremo è il profilo alare



Si tratta di un oggetto che investito da una corrente viene spinto verso l'alto grazie ad una depressione ~~in~~ nel cello e una pressione ~~in~~ la base

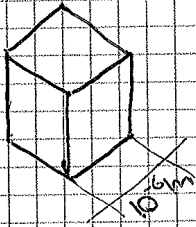


L: Lift (Portanza)

D: Drag (Resistenza)

es

Prendo un cubo ^{con} ~~di~~ $L = 1 \text{ m}$



Nel volume $\Omega = (10^{-6})^3 = 10^{-18} \text{ m}^3$

Grazie ad avogadro sappiamo che a 288 K e $101325 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$

in un volume di $\Omega_{\text{CN}} = 22,4 \text{ m}^3$ ci sono $N_0 = 6,023 \cdot 10^{26}$

molecole

Nel nostro volume ci saranno quindi $N = N_0 \frac{\Omega}{\Omega_0} = 6,023 \cdot 10^{26} \frac{10^{-18}}{22,4 \cdot 10} = 2,7 \cdot 10^2$

Inoltre ^{in queste} condizioni il LIBERO CAMMINO MEDIO (è la distanza tra una molecola e l'altra) dell'aria è

$$\lambda = 10^{-8} \text{ m}$$

$$\rightarrow K_h = \frac{\lambda}{L} \quad \text{NUMERO DI KNUDSEN}$$

Se $K_h \ll 1 \rightarrow$ posso usare la MECCANICA DEL CONTINUO $\rightarrow \lambda \ll L \rightarrow$ mi posso ^{invece}

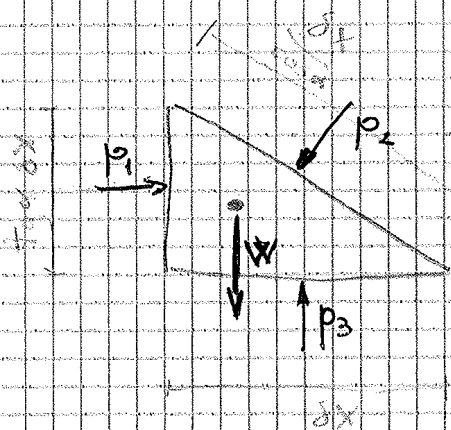
se + considerare le molecole.

Quando $K_h \approx 1$ (come nello spazio con λ aumentato) utilizzo il modello per tener conto di tutte le molecole (MODELLO MOLECOLARE)

Di adesso in poi parliamo di che fare con dei CAMPI FLUIDI

CAMPI \rightarrow parlate di proprietà che ci sono ~~continue~~ continue

Visto che sempre sia lungo la normale posso considerare la pressione come uno scalare e mi come un campo vettoriale \rightarrow ho solo un incognita



$$x \rightarrow) p_1 \cancel{tg \alpha} dx h - p_2 \frac{dx}{\cos \alpha} h \sin \alpha = 0$$

$$p_1 = p_2$$



$$z \uparrow) p_3 dx dx - p_2 \frac{dx}{\cos \alpha} dx \cos \alpha = \cancel{W}$$

$$p_3 = p_2$$

\Rightarrow LEGGE DI PASCAL \rightarrow pressione come scalare

Ricapitolando se ho un fluido in quiete esso è completamente descritto da temperatura, densità e pressione.

FLUIDO IN MOTO

Mentre prima le leggi della termodinamica non consideravano il tempo e che i cambiamenti non dipendevano dal tempo, nel caso di un fluido in moto (per es. da una zona calda a una fredda) la termodinamica p + ρ varia.

In questo caso possiamo approssimare che la molecola è in ogni punto in equilibrio termodinamico

La VELOCITÀ DELLA PARTICELLA è un vettore, data dalla vel. media di tutte le part., applicata alle singole particelle

Viene onde fuori da un punto di vista spaziale che quando faccio fluire un fluido in un condotto avrà una resistenza \rightarrow SCORRE VISCOSE che possono avere componenti normali, la superficie ha anche forze tangenziali
In questo caso quindi i 3 gradienti visti prima sono possibili

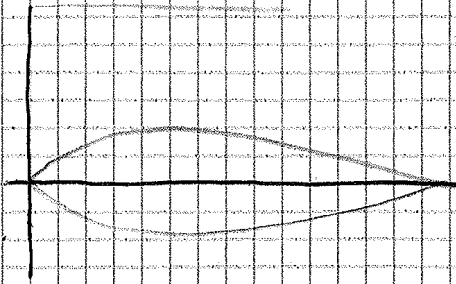
Gi sono delle leggi empiriche che descrivono queste curve

→ Per i gas $\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^n$ Rayleigh

$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2} \frac{T_0 + S}{T + S}$ Shulerkind

Se $h = \infty \Rightarrow$ PROFILO SIMMETRICO

es) NACA 0012



\rightarrow profilo dell'altro verso
 $y^-(x) = y^+(x)$
 \hookrightarrow profilo inverso

$$y_h(x) = \frac{y^+(x) + y^-(x)}{2}$$

es) NACA ~~00~~ hm

\hookrightarrow spessore

$$y^+ = y_m + f(x)$$

$$y^- = y_m - f(x)$$

($f_{max} = 12\%$ di l nel 0012)

es) NACA 6412 è il tipico profilo x turbolento

Considerando le pressioni parziali e totali

$$R = \int_0 \rho \underline{u} \, d\sigma$$

$$= \int_0 (\rho - \rho_\infty) \underline{u} \, d\sigma$$

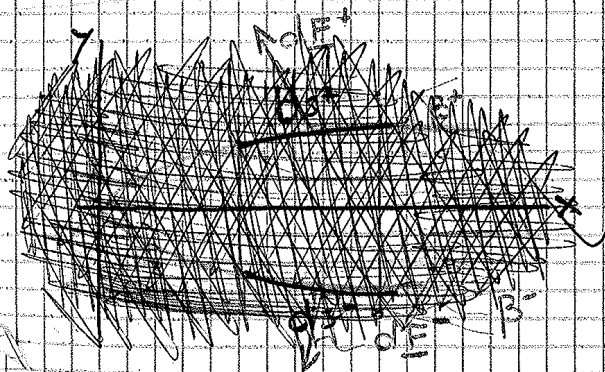
\rightarrow assoluta (quella statica)

$$\rightarrow \int \rho_\infty \, d\sigma = \rho_\infty \int d\sigma = \rho_\infty (\sigma_2 - \sigma_1) = 0 \rightarrow$$

non si servono le pressioni assolute

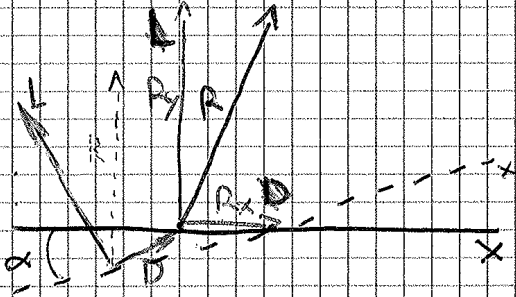
N.B. le pressioni assolute sono sempre positive

Prendiamo ora in analisi un pezzo del profilo



$$\rightarrow R_y = \int_0^l dF_y^+ + \int_0^l dF_y^- = \int [(p^- - p_\infty) - (p^+ - p_\infty)] dx$$

Quindi sul nostro profilo attorno ad un certo punto una risultante con una grande componente verticale e una piccola componente orizzontale verso il dietro

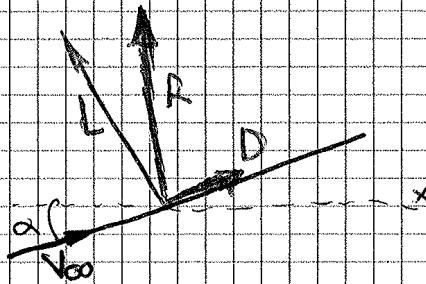


N.B spesso \times per s che R se N \approx 1
 vuol \approx corda dell'area di un angolo
 di incidenza α

R_y è detta PORTANZA (LIFT) e R_x è dell' RESISTENZA (DRAG)

$$R_y = L = R_y \cos \alpha - R_x \sin \alpha$$

$$D = R_y \sin \alpha - R_x \cos \alpha$$



Ma $\alpha \ll 1 \rightarrow \sin \alpha \approx \alpha \ll 1$
 $\cos \alpha \approx 1$

$$\Rightarrow L \approx R_y$$

$$D \approx R_x$$

Noi \times il momento trascuriamo D

$$\rightarrow L = \int [(p^- - p_\infty) - (p^+ - p_\infty)] dx$$

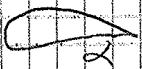
Per pressi si impone un punto x_0 con un M_0 dove ~~si dipende da L~~
 \rightarrow PUNTO FOCALE



$$\frac{\partial}{\partial x} (M_0 + Lx_0) = 0$$

Per i profili subsontici $x_0 = \frac{R}{4} \rightarrow$ FUOCO

10/0/13



$$F = f(\text{geometric}, l, v, p, \rho, T, e, \mu, k, T_w, g)$$

$$F \sim l^a v^b \rho^c T^d p^e e^f \mu^g k^h T_w^i g^l$$

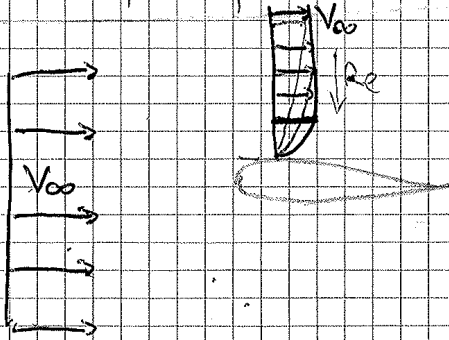
$$[Kg m s^{-2}] = [m]^a [m s^{-1}]^b [Kg m^{-3}]^c [K]^d [Kg m^{-3}]^{-e} [K]^e$$

$$[m^2 s^{-2}]^a [Kg m^{-3} s^{-1}]^b [Kg m K^{-1} s^{-1}]^c [K]^d [Kg m K^{-1} s^{-1}]^e$$

$$[K]^i [m s^{-2}]^l$$

$$\left\{ \begin{array}{l} l = c + e + g + h \\ m \\ s \\ K \quad Q = d + i - h \\ d = 2 - 2e - 2f - 2l = -3h + g \\ c = 1 - e - h - g \\ d = h - i \end{array} \right.$$

Vediamo questo fenomeno su un profilo d'ala

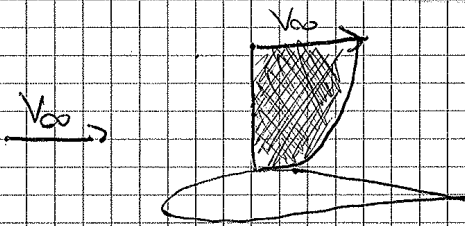


+ Re è alta + lo spessore perturbato è piccolo

→ STRATO LIMITE

Nello strato limite Re è molto importante se Re è abbastanza alta ad un certo punto all'interno dello strato limite avviene ~~la separazione~~ il passaggio a regime TURBOLENTO dove le particelle iniziano a viaggiare a caso

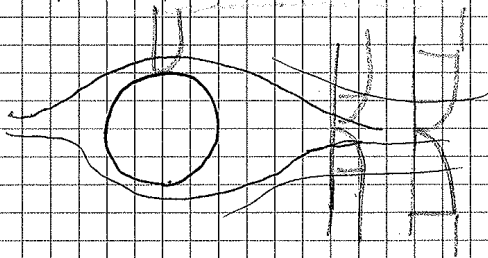
~~La~~ Nella strato limite le forze viscose sono fondamentali → sforzi di taglio.



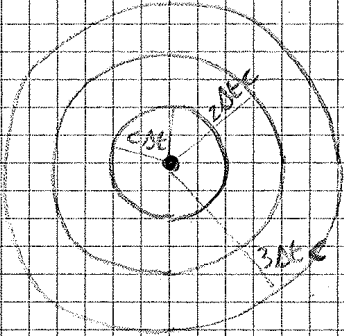
$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

→ All'aumentare di Re le forze viscose sono sempre - importanti, come nello strato limite, che, anche se piccola, diventa sempre

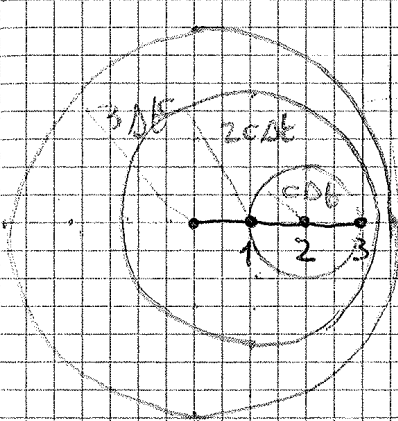
N.B. quando passo a turbolenza lo STRATO LIMITE si allarga sempre di +.



(emette un segnale)
 Una sorgente muove ~~una~~ un fluido fermo. Dopo Δt , il segnale sarà distante ~~di~~ $c \Delta t$
 Dopo un $2 \Delta t$ la sorgente emette un segnale.



Se la sorgente si muove a v volte per Δt alla posizione 1, 2, 3 per ogni Δt



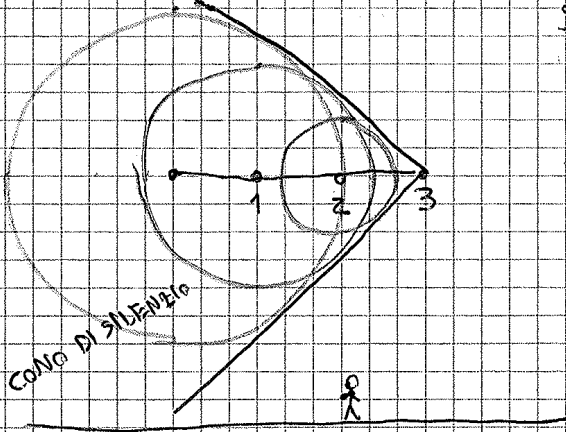
$3 \Delta t$ $3c \Delta t$

Subsonica

$v < c$

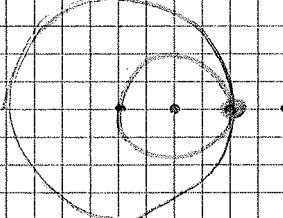
$M < 1$

$v > c$



Se viaggia a velocità del suono prima verso l'orecchio e poi cattura il suono

$v = c$



Le onde si sovrappongono \rightarrow grandi sollecitazioni

$$\Delta Q = Q(r+v\Delta t, t+\Delta t) - Q(r, t)$$

↳ DERIVATA LAGRANGIANA (o sostanziale)

$$\frac{DQ}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Q(r+v\Delta t, t+\Delta t) - Q(r, t)}{\Delta t} =$$

$$Q(r+v\Delta t, t+\Delta t) = Q(r, t) + \left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)_{r,t} \Delta t + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}\right) \frac{\Delta t^2}{2} + \dots + \left(\frac{\partial Q}{\partial s}\right)_{r,t} v\Delta t + \dots$$

N.B si vede quindi che le particelle non è solo in funzione di t , ma anche di $s \rightarrow$ dipende dalla posizione che occupa nello spazio

$$= \frac{\partial Q}{\partial t} + v \frac{\partial Q}{\partial s} \xrightarrow{\nabla Q \cdot e} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla Q$$

↳ DERIVATA DIREZIONALE LUNGO LA DIREZIONE DI VELOCITÀ (\underline{v})

$$\rightarrow \boxed{\frac{DQ}{Dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla Q}$$

La derivata Lagrangiana = derivata euleriana (a punto fermo) + derivata ~~convettiva~~ ^{convettiva}

→ in COORD. CARTESIANE

$$\boxed{\frac{DQ}{Dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + u \frac{\partial Q}{\partial x} + v \frac{\partial Q}{\partial y}}$$

$$\underline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial}{\partial y} \underline{j}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \text{N.B. } \underline{\nabla} Q &= \frac{\partial Q}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial Q}{\partial y} \underline{j} \\ \underline{\nabla} \cdot \underline{Q} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \\ \underline{\nabla} \times \underline{V} &= \dots \end{aligned}}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{D}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \underline{v}} \quad \text{FORMULAZIONE LAGRANGIANA}$$

N.B. $\nabla \cdot \underline{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$

- se $\nabla \cdot \underline{v} < 0 \Rightarrow \Delta \Omega < 0$ contrazione
- se $\nabla \cdot \underline{v} > 0 \Rightarrow \Delta \Omega > 0$ espansione

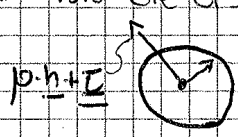
CONSERVAZIONE DI Q.T.A. DI MOTO

$$\boxed{Q = \rho \cdot \underline{v}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \underline{v} d\Omega = \int_{\Sigma} \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{n}) d\Sigma + \int_{\Omega} \rho \underline{f} d\Omega -$$

questo integrale
 volume
 flusso q.t. di momento

Ma oltre abbiamo visto che ci sono anche delle pressioni lungo $\underline{h} + \underline{\tau}$ dovute alle forze viscosi



N.B. $\underline{\tau}$ è una torzione

$$- \int_{\Sigma} \rho \underline{h} d\Sigma + \int_{\Sigma} \underline{\tau} \cdot \underline{n} d\Sigma \quad \text{forze integrate sull'eq. di cons. di m. ad}$$

$$\rightarrow \int_{\Omega} \frac{\partial \rho \underline{v}}{\partial t} d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla (\rho \underline{v} \underline{v}) d\Omega + \int_{\Omega} \rho \underline{f} d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \rho \cdot \underline{h} d\Omega$$

$$\rightarrow \frac{\partial \rho \underline{v}}{\partial t} + \nabla (\rho \underline{v} \underline{v}) = - \nabla \rho + \nabla \underline{\tau} + \rho \underline{f}$$

$$\rightarrow \rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} + \underline{v} \cdot \nabla (\rho \underline{v}) = - \nabla \rho + \rho \underline{f} + \nabla \underline{\tau}$$

$$\boxed{\rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \rho \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} = - \nabla \rho + \rho \underline{f} + \nabla \cdot \underline{\tau}} \quad \text{FORMA DIFFERENZIALE EULERIANA}$$

$$\rightarrow \boxed{\rho \frac{D \underline{v}}{Dt} = - \nabla \rho + \rho \underline{f} + \nabla \cdot \underline{\tau}} \quad \text{FORMA LAGRANGIANA}$$

$$\begin{aligned}
 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho E d\Omega &= - \oint_{\Sigma} \rho E \underline{v} \cdot \underline{n} d\Sigma - \oint_{\Sigma} \rho \underline{v} \cdot \underline{n} d\Sigma + \oint_{\Sigma} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{v}) \cdot \underline{n} d\Sigma + \\
 &+ \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{v} d\Omega - \oint_{\Sigma} \underline{q} \cdot \underline{n} d\Sigma
 \end{aligned}$$

Volume
Superficie
Conducibilità / % Fuoco
forze esterne

BILANCIO DI ENERGIA

$$\begin{aligned}
 \rightarrow \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (\rho E) d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho E \underline{v}) d\Omega &= - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho \underline{v}) d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{v}) d\Omega \\
 + \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{v} d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \cdot \underline{q} d\Omega
 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \nabla \cdot (\rho E \underline{v}) = - \nabla \cdot (\rho \underline{v}) + \nabla \cdot (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{v}) + \rho \underline{f} \cdot \underline{v} - \nabla \cdot \underline{q}$$

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} + \underline{E} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \underline{v} \cdot \nabla E + E \nabla \cdot (\rho \underline{v})$$

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} + \rho \underline{v} \cdot \nabla E = - \nabla \cdot (\rho \underline{v}) + \nabla \cdot (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{v}) + \rho \underline{f} \cdot \underline{v} - \nabla \cdot \underline{q}$$

$$\rho \frac{DE}{Dt} = - \nabla \cdot (\rho \underline{v}) + \nabla \cdot (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{v}) + \rho \underline{f} \cdot \underline{v} - \nabla \cdot \underline{q}$$

BILANCIO EN.
TOTALE

$$\underline{v} \cdot \left(\rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \rho \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} \right) = \underline{v} \cdot \left(- \nabla p + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} \right) + (\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}) \cdot \underline{v}$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \rho \underline{v} \cdot \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) = - \nabla p \cdot \underline{v} + (\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}) \cdot \underline{v}$$

Vel. ch. cin. = \underline{v}
Vel. q. tr. diota

BILANCIO
ENERGIA
MECCANICA

Studiamo ora il caso di un fluido in quiete

$$\underline{\underline{\underline{\Pi}}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} = -p \underline{\underline{\underline{I}}} \quad \text{matr. identica}$$

Nel fluido in movimento

Cerchiamo di utilizzare anche qui la pressione

Introduco le seguenti notazioni

che è
scappato

$$p = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \quad \rightarrow \text{quindi } p \text{ è il valor medio delle 3 tensioni principali}$$

$$\underline{\underline{\underline{\Pi}}} = - \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix}$$

$$= -p \underline{\underline{\underline{I}}} + \underline{\underline{\underline{\tau}}}$$

$$\begin{cases} \tau_{12} = \sigma_{12} \\ \tau_{13} = \sigma_{13} \\ \tau_{11} = \sigma_{11} + \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \sigma_{11} + p \end{cases}$$

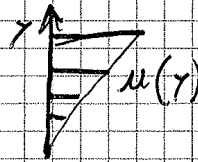
...

...

→ Quando ho un fluido in moto devo solo aggiungere la parte di σ_{11}

$$\underline{\underline{\underline{\nabla}}} \cdot \underline{\underline{\underline{\Pi}}} = \underline{\underline{\underline{\nabla}}} \cdot (-p \underline{\underline{\underline{I}}} + \underline{\underline{\underline{\tau}}}) = -\underline{\underline{\underline{\nabla}}} p + \underline{\underline{\underline{\nabla}}} \cdot \underline{\underline{\underline{\tau}}}$$

Nel caso incomprimibile $\nabla \cdot \underline{v} = 0$



$$p = -\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \sigma_{ii} = -\frac{1}{3} \sigma_{ii}$$

$$\pi_{ij} = -p \delta_{ij} + \sigma_{ij} = \sigma_{ij} + p \delta_{ij}$$

$$\tau_{ii} = \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33} = 0$$

$$\tau_{ii} = 0 \Rightarrow (2\mu + 3\lambda) \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\rightarrow \lambda = -\frac{2}{3}\mu$$

Stokes

Per le LEGGI DI FOURIER

$$\underline{q} = -k \nabla T$$

$$q_i = -k \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

→ Quindi le uniche incognite rimangono solo ρ, μ, ν

$$\begin{matrix} u = y \\ v = x \end{matrix}$$

$$(\sigma \cdot \nabla) \cdot \underline{v} = \left\{ \mu \left[(\nabla \underline{v} + \nabla \underline{v}^T) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \underline{v}) \underline{\underline{I}} \right] \cdot \nabla \right\} \cdot \underline{v} =$$

$$= \left\{ \mu \left[(\nabla \underline{v} + \nabla \underline{v}^T) (\nabla \cdot \underline{v}) - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \underline{v})^2 \underline{\underline{I}} \right] \cdot \nabla \right\} \cdot \underline{v}$$

in cartesiane = $\left\{ \mu \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) (\nabla \cdot \underline{v}) - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \underline{v}) \underline{\underline{I}} \right] \cdot \nabla \right\} \cdot \underline{v}$

$$= \left\{ \mu \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right] \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\}$$

$$= \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial u_k}{\partial x_k}$$

$$= \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 \right) - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 \right]$$

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial E}{\partial x_k} = -\rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \Phi + \rho \sum_i u_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K \frac{\partial T}{\partial x_i} \right)$$

X risolvere qualunque problema in derivata o derivata o derivata, nel caso di un fluido in moto stazionario che gira intorno ad un corpo con un certo foro.

A partire da queste eq. si cerca di creare dei teoremi che bastano a spiegare al meglio il comportamento di un dato fluido

$$\rightarrow \frac{D\omega}{Dt} = \underline{\omega} \cdot \nabla \underline{v} + \frac{\omega}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \rho \right) - \frac{1}{\rho^2} \left(\nabla \rho \times \nabla \rho \right) + \nabla \times \underline{j} + \nabla \times \left(\nabla \cdot \underline{\underline{\xi}} \right)$$

$$\rho \left[\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{\omega}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) + \underline{v} \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} - \underline{v} \frac{\omega \cdot \nabla \rho}{\rho^2} \right] = \omega \cdot \nabla \underline{v} + \dots$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\omega}{\rho} \right) + \rho \underline{v} \cdot \nabla \left(\frac{\omega}{\rho} \right) = \dots$$

$$\boxed{\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{\omega}{\rho} \right) = \underline{\omega} \cdot \nabla \underline{v} - \frac{1}{\rho^2} \left(\nabla \rho \times \nabla \rho \right) + \nabla \times \underline{j} + \nabla \times \left(\nabla \cdot \underline{\underline{\xi}} \right)}$$

EQ. DI VORTICITÀ

Analizziamo ogni termine

• $\underline{\omega} \cdot \nabla \underline{v}$ VORTEX STRETCHING (allungamento dei vortici) \rightarrow aumenta i vortici. Se $zD = 0 \Rightarrow = 0$

• $\frac{1}{\rho^2} (\nabla \rho \times \nabla \rho)$ componente di hh omogeneità della densità $\rightarrow \rho = \rho(p) \Rightarrow = 0$

• $\nabla \times \underline{j}$ ~~si annulla anche se $\rho = \text{cost.} \Rightarrow \dots = 0$~~
 le sorgenti di vorticità \rightarrow VANNO TRACCIO!
 se $\underline{j} = \nabla \underline{\Phi} \Rightarrow \nabla \times \underline{j} = 0$

• $\nabla \times (\nabla \cdot \underline{\underline{\xi}})$ diffonde la vorticità

Se il fluido è incomprimibile ~~se~~ e se siamo in 2D

$$\rho = \text{cost} \quad e \quad zD$$

$$\Rightarrow \frac{D\omega}{Dt} = 0 \quad \text{hh si crea vorticità}$$

se $\omega \neq 0$ e $\rho = \text{cost}$ $\frac{D\omega}{Dt} = \nu \nabla^2 \omega \rightarrow$ la vorticità si diffonde

Nel caso di un fluido ideale non viscoso $\Rightarrow \underline{\tau_{ij}} = 0$ (xolo ma k n Anze viscoso)

\Rightarrow la trasformazione è ISENTROPICA

Fluido ideale $\Rightarrow S = \text{cost}$

$$p = p(p, S) = p = p(p)$$

$$\Rightarrow \frac{p}{\rho^\gamma} = \text{cost}$$

\Rightarrow FLUIDO BALOTROPICO

Ma per conservazione $\rho = \text{cost}$, non togliamo la viscosità \rightarrow FLUIDO INCOMPRESSIBILE

Analizziamo ora le eq. con queste ipotesi $N_A \rightarrow$ se $\rho = \text{cost.} \Rightarrow M$ è piccolo $\Rightarrow T$ cambia poco

$$\rho = \text{costante} \Rightarrow \frac{D\rho}{Dt} = 0$$

$$\bullet \frac{\partial p}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla p = -\rho \nabla \cdot \underline{v}$$

$$\Rightarrow \underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0$$

Quindi la velocità deve essere SOLAMENTE IRROTAZIONALE

(e vol. non può essere a zero, ma deve conservarsi la portata \rightarrow se entra un 1L di H_2O , 1L di H_2O deve uscire)

$$\bullet \underline{\tau}_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Altra parte aggiuntiva che xolo in caso di compressione o dilatazioni

$$\bullet \text{eq. q.15 di nota in caso di compressione} \quad \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2 \partial x_j}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \underline{\tau}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] = \mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \right)$$

• Vediamo cosa succede con la vorticità

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{\omega}{\rho} \right) + \rho \underline{v} \cdot \nabla \left(\frac{\omega}{\rho} \right) = \underline{\omega} \cdot \nabla \underline{v} - \frac{1}{\rho} (\nabla \rho \times \nabla p) + \nabla \times \underline{g} + \nabla \times (\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}})$$

$\rho = \text{cost}$ → $\frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{\omega} = \underline{\omega} \cdot \nabla \underline{v} + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}$ eq. di vorticità per $\rho = \text{cost}$

• Vediamo l'eq. dell'energia

col coefficiente $\rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla T \right) = \rho \Phi + k \nabla^2 T$

quindi le variazioni di temperatura dipendono solo dall'afflusso e dal conduttività

con $\Phi = \nu \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right]$

Quindi nota il campo di vel. posso trovare la distri. di temperatura

Inoltre la velocità influenza la distri. di temp., ma non viceversa

Del problema termico ce ne occuperemo poco

D'ora in poi lavoreremo solo con $\rho = \text{cost}$.

→ utilizzeremo solo le eq. incaricate per dritta

Inoltre introduciamo il concetto di GRANDEZZE

NON DIMENSIONALI

$$\tilde{u}_i = \frac{u_i}{V_\infty}$$

$$\tilde{v} = \frac{v}{V_\infty}$$

$$\tilde{x}_i = \frac{x_i}{L}$$

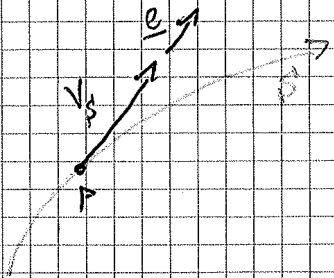
$$\tilde{p} = \frac{p - p_\infty}{\rho V_\infty^2}$$



27/10/13

$$\left\{ \begin{aligned} \nabla \cdot \underline{v} &= 0 \\ \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p \end{aligned} \right.$$

Analizziamo e studiamo la parte esterna valutando campo di velocità e di pressione



$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 = C(P)$$

L costante relativa al punto P

Questo in un caso STAZIONARIO e IRROTAZIONALE

$$\left\{ \begin{aligned} \underline{v} = \text{cost} \\ \text{STAZIONARIO} \end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{aligned} \underline{\omega} = 0 \\ \text{IRROTAZIONALE} \end{aligned} \right. \rightarrow \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) - (\underline{v} \times \underline{\omega}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p$$

Quindi in ogni caso stazionario e irrotazionale.

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 = C_{\text{tot}} = p_0$$

pressione totale \rightarrow se $\frac{1}{2} \rho v^2$ aumenta, p_0

diminuisce per mantenere p_0 cost.

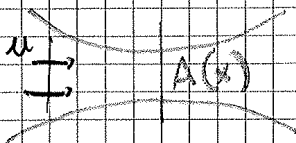
\rightarrow conversione energetica in pressione e viceversa

$$\rightarrow \boxed{p + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_0}$$

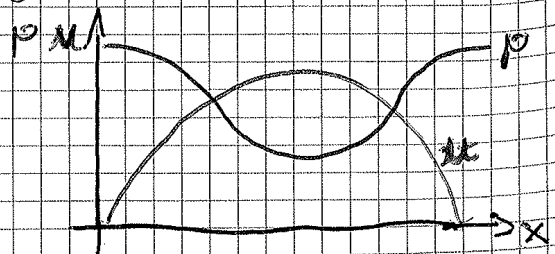
L pressione totale

APPLICAZIONI

• Applicazione ad un tubo che si restringe (CONDOTTO CONVERGENTE - DIVERGENTE)

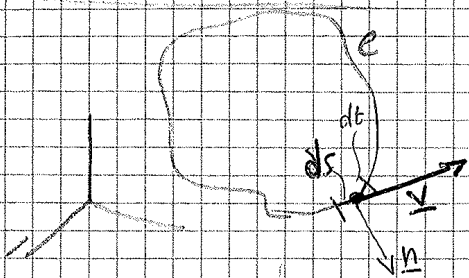


$$\left\{ \begin{aligned} \rho u A &= \text{cost} \\ p + \frac{1}{2} \rho v^2 &= p_0 \end{aligned} \right.$$



CIRCUITAZIONE

Prendiamo un circuito chiuso (e). In ogni punto definisco il vettore velocità \underline{v} e la normale \underline{n}

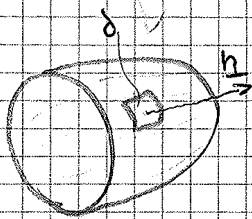


$$\underline{t} ds = d\underline{s}$$

$$\Gamma = \oint_e \underline{v} \cdot \underline{t} ds = \int_\sigma \underline{\omega} \cdot \underline{n} d\sigma$$

CIRCUITAZIONE

→ ho cioè che l'integrale chiuso dell'elemento sulla superficie $\underline{n} d\sigma$ la variazione di vorticità sulla superficie

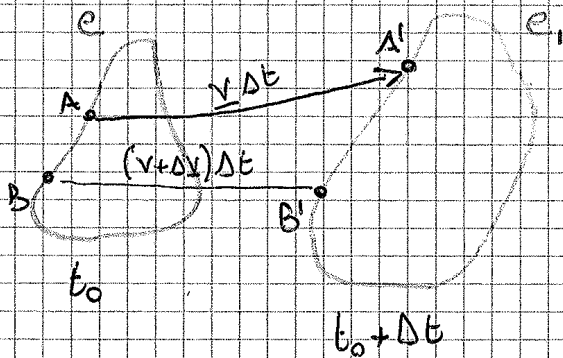


$$d\Gamma = \underline{\omega} \cdot \underline{n} d\sigma$$

circuito per un circuito infinitesimo

TEOREMA DI KELVIN

Prendo un linee chiuso che si sposta nel tempo



A me interessa sapere se ω può cambiare nel tempo

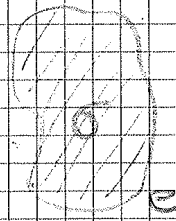
→ per capita mi chiedo come varia la circuitazione (cambiamento del giro)

$$\begin{aligned} \frac{D\Gamma}{Dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Gamma_1 - \Gamma}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\oint_{e_1} \underline{v}_1 \cdot d\underline{s}_1 - \oint_e \underline{v} \cdot d\underline{s} \right] \\ &= \oint_e \frac{D}{Dt} (\underline{v} \cdot d\underline{s}) \rightarrow \end{aligned}$$

Quindi nel nostro caso dove $p = \text{cost}$

$$\frac{dM}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\sigma} \underline{\omega} \cdot \underline{n} \, d\sigma = 0$$



TEOREMA DI KELVIN (HELMHOLTZ)

Se invece di prendere un circuito chiuso grande prendo un circuito infinitesimo (che comprende una sola particella)



$$dM = \underline{\omega} \cdot \underline{n} \, d\sigma$$

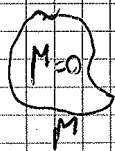
$$\frac{d}{dt} (\underline{\omega} \cdot \underline{n} \, d\sigma) = 0$$

⇒ la vorticità viene solo trasportata senza modificarsi

→ rimane sempre costante

→ TEOREMA DI KELVIN

Questo può vale solo se NON c'è un corpo in mezzo, altrimenti devo tagliare la linea (in \mathbb{R}^3 è chiuso \rightarrow in funzione \mathbb{R}^2)



$$\Gamma = \Gamma_1 \Leftrightarrow n \text{ c'è il corpo}$$



N.B. Una corrente unipolare ha $\underline{\omega} = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$

→ tutte le linee di corrente che passano sopra o sotto il corpo hanno $\underline{\omega} = 0$



$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \Phi) + \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) - \cancel{v \times \omega} = -\frac{1}{\rho} \nabla p$$

$$\nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = C_{ost}(t)$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = C_{ost}(t)}$$

BERNOULLI NON STAZIONARIO
($\omega = 0$)

N.B. nel caso stazionario e lineare cancello il 1° e il 4° termine

Quindi ho il fluido si adagia alla situazione istantanea di quel momento

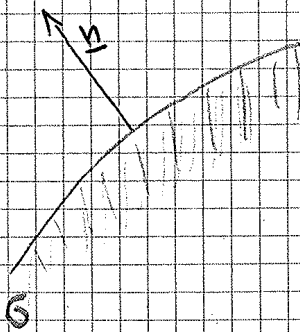
Cambia e si radelega a quel momento. cambia si radelega (e $C(t)$ cambia)

→ è come studiare ~~un~~ tanti flussi stazionari → in cui nessuno di quello che succede poi.

⇒ ha dipendere solo dalle CONDIZIONI AL CONTORNO

CONDIZIONI AL CONTORNO

Prendiamo una parete ~~che~~ che investe una parete



$$\underline{v} \cdot \underline{n} = \underline{v}_n \cdot \underline{n}$$

$$\nabla \Phi \cdot \underline{n} = \underline{v}_n \cdot \underline{n} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \underline{v}_n \cdot \underline{n}$$

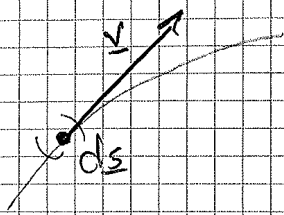
$$\Rightarrow \underline{v}_n = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$$

→ CONDIZIONE A PARETE

→ la componente normale deve essere = 0

→ condizione di tangenzialità

Da voglia di risolvere una linea di corrente irrotazionale in 3D



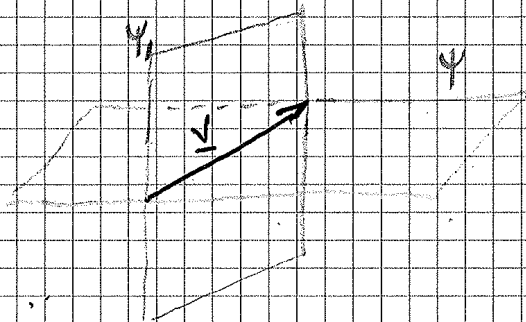
$$\underline{ds} \times \underline{v} = 0$$

$$(dx \underline{i} + dy \underline{j} + dz \underline{k}) \times (u \underline{i} + v \underline{j} + w \underline{k}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ dx & dy & dz \\ u & v & w \end{vmatrix} = (w dy - v dz) \underline{i} + (u dz - w dx) \underline{j} + (v dx - u dy) \underline{k} = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} a(x, y, z) dx + b(\dots) dy + c(\dots) dz = 0 \\ a_1(x, y, z) dx + b_1(\dots) dy + c_1(\dots) dz = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \Psi(x, y, z) = C \\ \Psi_1(x, y, z) = C_1 \end{cases}$$



Il vettore \underline{v} è un vettore che giace contemporaneamente su Ψ e su Ψ_1

$$\rightarrow \underline{v} \perp \begin{cases} \nabla \Psi \\ \nabla \Psi_1 \end{cases} \quad \rightarrow \begin{cases} \underline{v} \cdot \nabla \Psi = 0 \\ \underline{v} \cdot \nabla \Psi_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{v} \parallel (\nabla \Psi \times \nabla \Psi_1)$$

$$\Rightarrow \underline{\mu v} = \nabla \Psi \times \nabla \Psi_1 \quad \text{FUNZIONE DELLA LINEA DI CORRENTE}$$

$$\rightarrow \nabla \cdot (\underline{\mu v}) = \nabla \cdot (\nabla \Psi \times \nabla \Psi_1) = 0$$

Se $\mu = 0 \Rightarrow \underline{v} = \nabla \Psi \times \nabla \Psi_1$, e verificando l'ipotesi di incompressibilità ed irrotazione.

Nell'altro procedimento utilizzando $\underline{\Phi}$

$$\underline{\Phi} \Rightarrow \underline{v} = \nabla \Phi \quad (\underline{\omega} = 0) \Rightarrow \nabla \cdot (\nabla \Phi) = 0 \Rightarrow \boxed{\nabla^2 \Phi = 0} \quad \text{EQ. DI LAPLACE}$$

Quindi con $\nabla \underline{v} = \nabla \Psi \times \nabla \Psi_1$, in piano isotropico $\rho = \text{cost.}$

con $\nabla^2 \Phi = 0$ " " $\underline{\omega} = 0$

$$\Rightarrow \nabla \times (\nabla \Psi \times \nabla \Psi_1) = 0 \quad \text{soddisfa A e z}$$

2D

$$\frac{\partial}{\partial z} (\dots) = 0 \quad \underline{\omega} = 0$$

$\Psi = \Psi(x, y)$ \downarrow di corrente

$\Psi_1 = z$

$$\rightarrow \underline{v} = \nabla \Psi \times \nabla z = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \Psi_x & \Psi_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \Psi_y \underline{i} + \Psi_x \underline{j}$$

$$u \underline{i} + v \underline{j} = \Psi_y \underline{i} - \Psi_x \underline{j}$$

$$\rightarrow \Phi_x = u = \Psi_y \quad \nabla \cdot \underline{v} = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\Phi_y = v = -\Psi_x$$

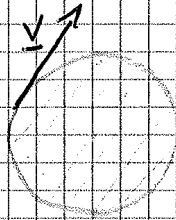
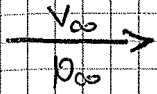
$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\omega} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \underline{k} = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 \rightarrow \nabla^2 \Psi = 0$$

Sono delle soluzioni al problema di Laplace \rightarrow in funzioni armoniche

Prendiamo un corpo investito da corrente



$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2}$$

Risultato Bernoulli

$$p + \frac{1}{2} \rho V^2 = p_\infty + \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 = p_0$$

costante L'pressione statica

N.B. Bernoulli vale

solo se ho c.s. ...

irrotazionale

$$\rightarrow p - p_\infty = \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 \left(1 - \frac{V^2}{V_\infty^2} \right)$$

$$\Rightarrow C_p = 1 - \frac{V^2}{V_\infty^2}$$

\rightarrow

$$\begin{cases} \nabla^2 \Phi = 0 \\ C_p = 1 - \frac{|\nabla \Phi|^2}{V_\infty^2} \end{cases}$$

La soluzione C_p è, secondo il Bernoulli

(1)

NB per trovare il campo di velocità, mi basta trovare 2 soluzioni $\Phi_{1,2}$ arbitrarie

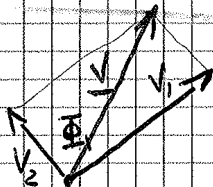
$$\nabla^2 \Phi_1 = 0$$

$$\Rightarrow \nabla^2 (\Phi_1 + \Phi_2) = 0$$

$$\nabla^2 \Phi_2 = 0$$

Questo mi dà il mio campo \rightarrow METODO DELLA SINGOLARITÀ

Vediamo secondo le velocità



$$u_1 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}$$

$$v_1 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}$$

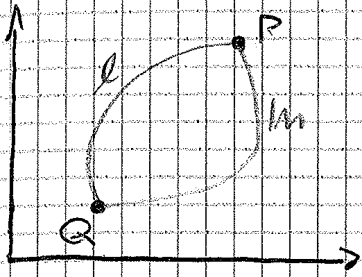
$$u_2 = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}$$

$$v_2 = \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}$$

$$u_1 + u_2 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\Phi_1 + \Phi_2) = u$$

$$v_1 + v_2 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (\Phi_1 + \Phi_2) = v$$

Prendiamo 2 punti e 2 traiettorie l, m . l e m sono definite da velocità diverse e.



quindi m è definita Φ_P sia uguale a Φ_Q .

Pongo $\Phi_Q = 0$

$$\Phi_P = \int_{Q,l}^P \underline{v} \cdot \underline{t} ds = \int_{Q,m}^P \underline{v} \cdot \underline{t} ds$$

$$\int_{Q,l}^P \underline{v} \cdot \underline{t} ds - \int_{Q,m}^P \underline{v} \cdot \underline{t} ds = 0$$

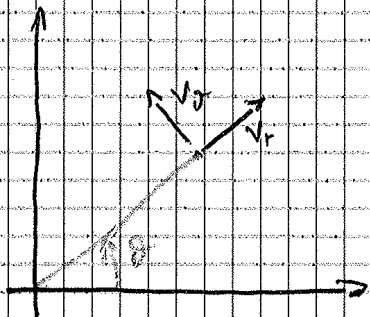
$$\int_{Q,m}^P \underline{v} \cdot \underline{t} ds + \int_{P,l}^Q \underline{v} \cdot \underline{t} ds = 0$$

$$0 = \oint_{l+m} \underline{v} \cdot \underline{t} ds = \int_{\sigma} \underline{\omega} \cdot \underline{n} d\sigma$$

Quindi, avendo noi posto $\omega = 0$, $\Phi_{P,l} = \Phi_{P,m}$

$\rightarrow \Phi$ NN DIPENDE DAL PERCORSO $\Leftrightarrow \underline{\omega} = 0$ su Π il percorso

La stessa cosa vale in coordinate polari:



$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}$$

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}$$

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

Quindi Φ e Ψ , essendo entrambe soluzioni del problema di Laplace e quindi entrambe armoniche, sono collegate

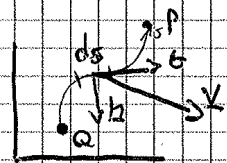
$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy = -v dx + u dy$$

$$= \left[v \left(-\frac{dx}{ds} \right) + u \left(\frac{dy}{ds} \right) \right] ds$$

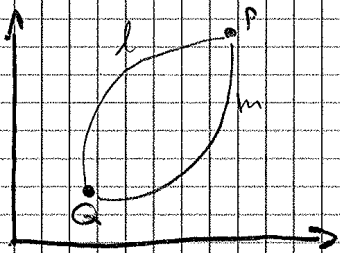
$$\underline{m} = \frac{dy}{ds} \underline{i} - \frac{dx}{ds} \underline{j}$$

$$\rightarrow \boxed{d\Psi = \underline{v} \cdot \underline{h} ds}$$

$$\Psi_P - \Psi_Q = \int_Q^P \underline{v} \cdot \underline{h} ds$$



Dipende dal percorso?



Procedo come prima

$$\Psi_P = \int_{Q,m}^P \underline{v} \cdot \underline{h} ds = \int_{Q,l}^P \underline{v} \cdot \underline{h} ds$$

$$\int_{Q,m}^P \underline{v} \cdot \underline{h} ds + \int_{P,l}^Q \underline{v} \cdot \underline{h} ds = 0$$

$$\oint_{m,l} \underline{v} \cdot \underline{h} ds = \int_{\sigma} \nabla \cdot \underline{v} d\sigma = 0$$

Quindi NON DIPENDE DAL PERCORSO

Questo campo $\vec{e} = \text{ovunque finché in un polo} \rightarrow \# \text{ SINGOLARITÀ (origine)}$

\Rightarrow CAMPO A SORGENTE UNIFORME

In O la $\text{div} \neq 0$ e la v ha direzioni infinite.

Se voglio calcolare la corrente lungo il raggio unitario

$$Q = \int_0^{2\pi} v_r r d\theta$$

L_{orbitale}

$$v_r = \frac{q}{2\pi r}$$

$$K = \frac{q}{2\pi}$$

25/10/12

$$\begin{cases} \nabla^2 \Phi = 0 \\ \nabla^2 \Psi = 0 \\ C_p = 1 - \frac{v^2}{v_{\infty}^2} \end{cases}$$

Abbiamo cominciato a ~~trovare~~ trovare dei campi che risolvono queste equazioni.

~~Abbiamo visto~~ Abbiamo visto che Ψ e Φ sono soluzioni delle eq di Laplace. In particolare

$$\Phi = ux + vy$$

$$\Psi = -uy + vx$$

In coord. polari abbiamo visto che per avere $\text{div} \vec{e} = 0$ dobbiamo avere $v_r = K$

La portata Q data da (vedi disegno di prima)

$$Q = \int_0^{2\pi} v_r r d\theta = 2\pi K \rightarrow K = \frac{Q}{2\pi} \quad v_r = \frac{Q}{2\pi r}$$

Questo vale per qualunque circonferenza

SIGNIFICATO DELLA FUNZ DI CORRENTE in coord. polari

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\nabla \phi = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = v_{\phi} = \frac{q}{2\pi r}$$

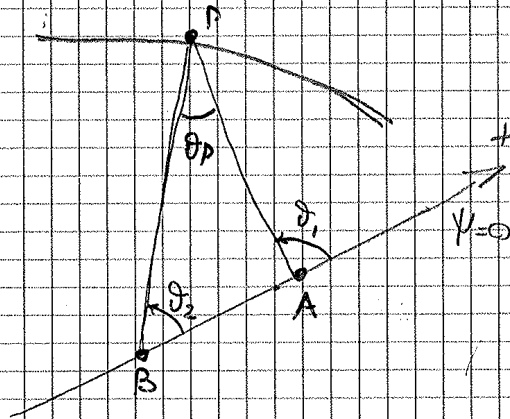
$$\Rightarrow \psi = \frac{q\theta}{2\pi} + \text{cost} \rightarrow \psi = \frac{q}{2\pi} \text{tg}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

POZZI E SORGENTI (CAMPO DI DOPPIETTA)

A: +q

B: -q

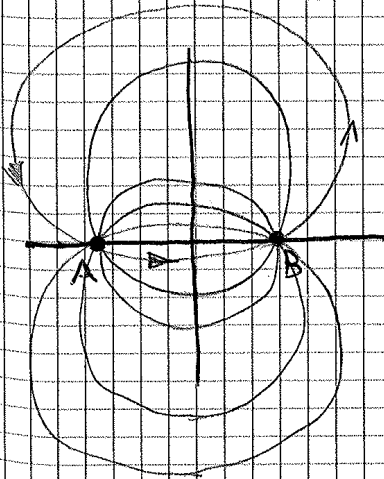
A, B punti di SINGOLARITÀ



$$\psi = \frac{q}{2\pi} (\theta_1 - \theta_2) = \frac{q\theta_p}{2\pi}$$

$$\theta_1 = \theta_2 + \theta_p$$

Se $\psi = \text{cost} \Rightarrow \theta_p = \text{cost}$



Le sorgente spara fuori e il pozzo riprende, perché sorgente e pozzo sono di diverso intensità

continua su fogli

SIGNIFICATO DEL POTENZIALE

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\mu}{2\pi r^2} \cos \theta$$

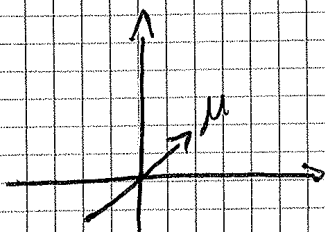
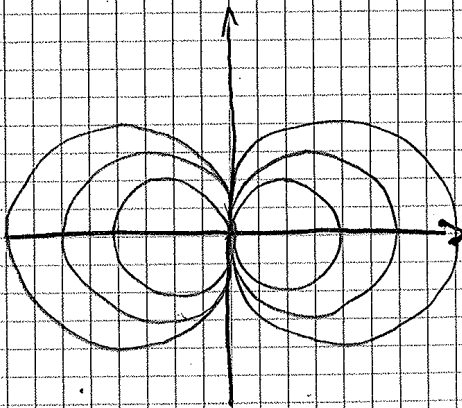
$$\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = - \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\mu}{2\pi r^2} \sin \theta$$

$$\rightarrow \boxed{\Phi = - \frac{\mu}{2\pi} \cos(\theta - \alpha)}$$

LINEE ISOPOTENZIALI

$$\Phi = - \frac{\mu}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Quindi le linee sono tre circonferenze tangenti all'origine sul x e da de x ~~line~~



$$\psi = \frac{\mu}{2\pi} \sin(\theta - \alpha)$$

$$\Phi = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu}{2\pi} \ln r \right)$$

$$\rightarrow V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = V_{\infty} \left(\frac{d^2}{r^2} - 1 \right) \cos \theta$$

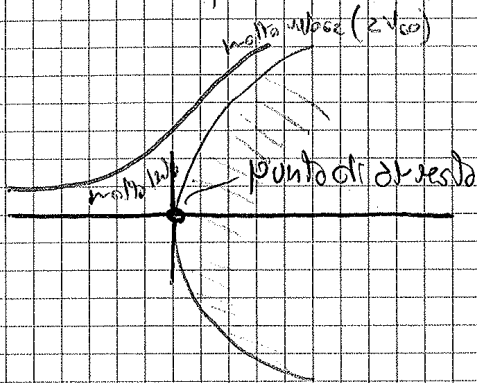
$$V_{\theta} = - \frac{\partial \Psi}{\partial r} = V_{\infty} \left(\frac{d^2}{r^2} + 1 \right) \sin \theta$$

(4)

Se $\theta = 0$ $V_r = 0$

$V_{\theta} = 2V_{\infty} \sin \theta \rightarrow$ sopra la sfera $V = 2V_{\infty}$

Cosa succede nel punto di attacco $\theta = \psi = \cos \theta$?



L'unico vel. che rispetta le condizioni iniziali

È una vel. verso l'alto

→ in questo punto ho max pressione e la velocità + piccola.

Pendiamo una corda e distribuiamo su di lei la lunghezza delle sorgenti

→ posso ottenere tutti i corpi che voglio (anche un profilo alare) ho simmetria.

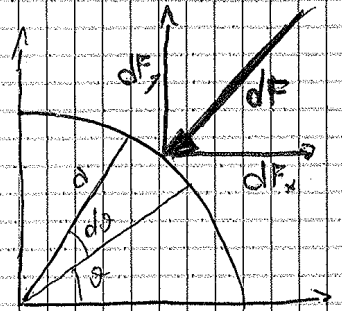
V_{∞}



$$q = \int_0^l q(x) dx = 0$$

$$D = F_x = \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 d \left[\int_0^{2\pi} (1 - 4 \sin^2 \theta) \cos \theta d\theta \right]$$

$$L = F_y = \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 d \left[\int_0^{2\pi} (1 - 4 \sin^2 \theta) \sin \theta d\theta \right]$$



Dimostrano che le forze sono nulle e che, essendo simmetriche, si annullano

→ PARADOSSO DI D'ALAMBERT

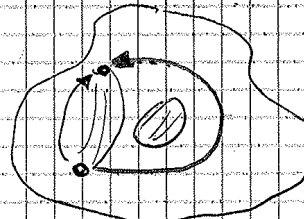
Applichiamo le eq. di Laplace ad un corpo senza buchi

$$\nabla^2 \Phi = 0$$



Introduco un buco → diventa un corpo DOPPIAMENTE CONNESSO

$$\nabla^2 \Phi = 0$$



Prendiamo un circuito sul corpo buco. Posso definire quanto voglio il percorso.

Se so da un certo punto intrappolo il buco (→) → Laplace assume ∞ valori.

Tra le ∞ soluzioni ce ne sono con partenza nulla o no. Noi dobbiamo

scegliere la soluzione giusta (dobbiamo trovare il giusto buco) → TEOREMA DEL BUCO

⇒ Se c'è un buco ho un salto e quindi devo portarci

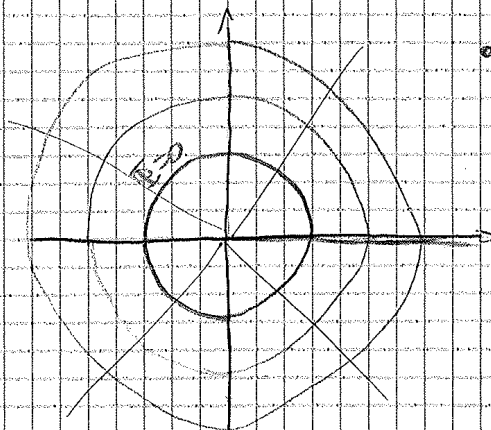
→ Avevamo visto che

$$\Phi = \frac{q}{2\pi} \log\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

$$\psi = \frac{q\theta}{2\pi}$$

• senso orario

$$0 \rightarrow \psi = 0 \quad \Phi = 0$$



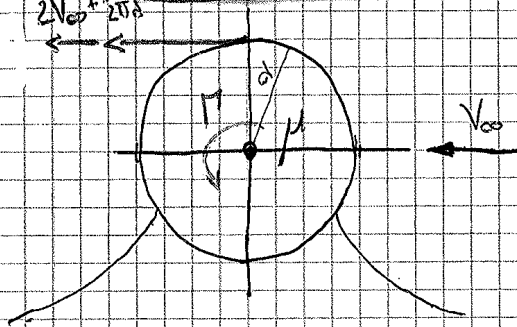
- Se ho un ~~salto~~ buco $\neq 0$ per giro ho un $\psi = q$
- costante (2 giri $\rightarrow \psi = 2q$)
- $\theta = 0 \rightarrow \psi = 0$

$$v_2 r_2 d\theta - v_1 r_1 d\theta = 0$$

$$M = \oint \underline{v} \cdot \underline{b} ds = \int \overbrace{(\nabla \times \underline{v})}^{\omega} \cdot \underline{h} ds$$

Visto che ora abbiamo trovato il vortice, possiamo introdurre le portanze del cilindro

CILINDRO CON PORTANZA



$$r = d$$

$$v = V \sin \theta$$

$$\omega^2 = \frac{M}{2\pi r^2 V_\infty}$$

In questo caso ho portanza

$$\Psi = -V_\infty y + \frac{M}{2\pi r} \sin \theta - \frac{M}{2} \lg \left(\frac{r}{r_0} \right)$$

$$= -V_\infty r \left(\frac{\partial^2}{r^2} - 1 \right) - \frac{M}{2} \lg \left(\frac{r}{r_0} \right)$$

$$\Rightarrow v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = V_\infty \left(\frac{\partial^2}{r^2} - 1 \right) \cos \theta$$

$$v_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = V_\infty \left(\frac{\partial^2}{r^2} + 1 \right) \sin \theta + \frac{M}{2\pi r}$$

Per $r = d$ (sul cilindro)

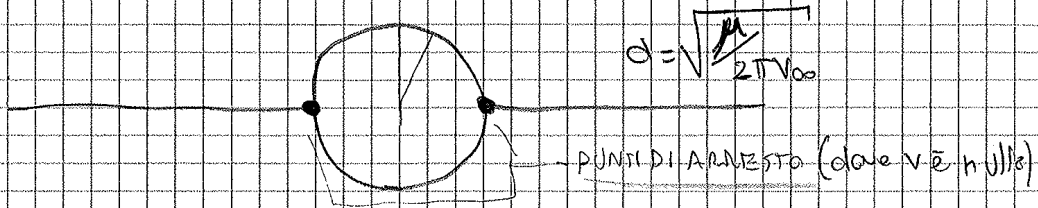
$$\rightarrow v_r = 0$$

$$v_\theta = 2V_\infty \sin \theta + \frac{M}{2\pi d}$$

Quindi se le sfere girano sopra una velocità fredda (dovuta a M) e sotto una velocità kinare \rightarrow PORTANZA \rightarrow EFFETTO MAGNUS

\rightarrow

Nel caso di $M=0$

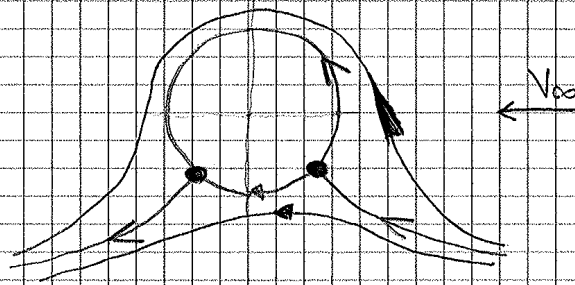


La cosa importante sul cilindro è trovare i punti di arresto.

$r=d$ $v = V_{\theta} = 2V_{\infty} \sin \theta + \frac{M}{2\pi d} = 0$

$\sin \theta_{arresto} = - \frac{M}{4\pi d V_{\infty}}$

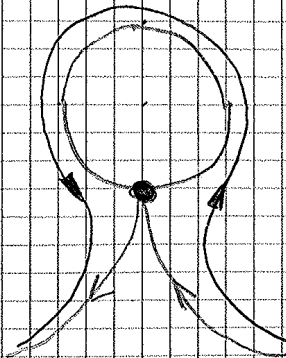
Per $M < 4\pi d V_{\infty}$



$|\theta_0| < \frac{\pi}{2}$

La parte del flusso che passa sopra deve andare molto + velocemente di quella in basso.

Per $M = 4\pi d V_{\infty}$



$\theta_0 = - \frac{\pi}{2}$

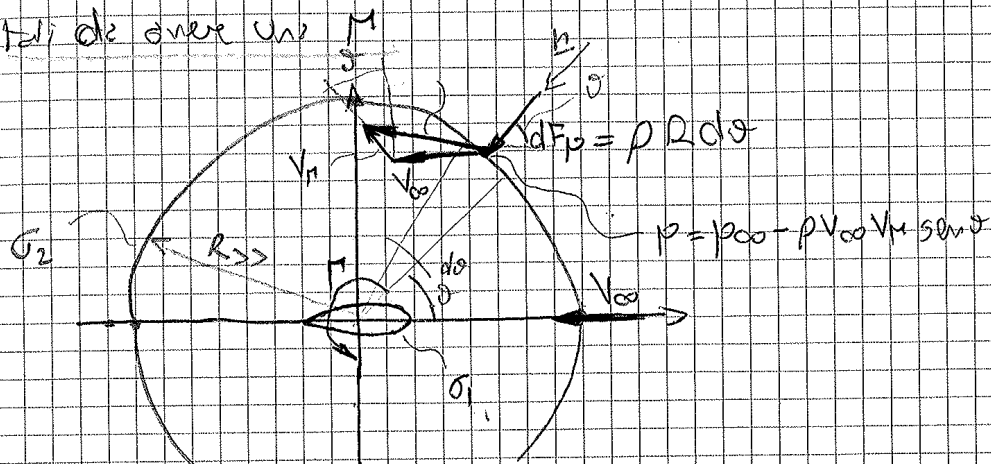
È il caso limite. Se M aumenta ancora →

TEOREMA DI KUTTA-JOUKOWSKI

Voglio vedere cosa succede per un cilindro di sezione qualunque

Prendiamo un corpo delimitato da una certa corrente. Gli applico un insieme di vortici
 due superficie σ_1 e σ_2 e investito

tali da avere una



Analizziamo il tutto con l'eq. di eq. di moto

$$\underline{v} \cdot \nabla \underline{v} = -\nabla p$$

Il nostro corpo è dentro un cilindro di superficie σ_2 molto + grande

Integro il volume $\int_{\Omega} \rho \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla p d\Omega$

$$\rightarrow \oint_{\sigma_1 + \sigma_2} \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{n}) d\sigma = - \oint_{\sigma_1 + \sigma_2} p \underline{n} d\sigma =$$

$$= \oint_{\sigma_1 + \sigma_2} \rho \underline{u} (\underline{v} \cdot \underline{n}) d\sigma = \oint_{\sigma_1 + \sigma_2} \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{n}) d\sigma \rightarrow$$

$$= - \int_{\sigma_2} p \cdot \underline{n} d\sigma - \underbrace{\int_{\sigma_1} p \cdot \underline{n} d\sigma}_F$$

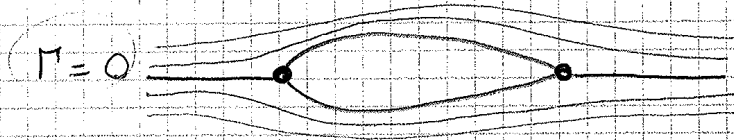
$$\rightarrow \oint_{\sigma_1 + \sigma_2} \rho \underline{u} (\underline{v} \cdot \underline{n}) d\sigma = F_x - \int_0^{2\pi} \rho R \cos \alpha d\alpha \rightarrow$$

$$\rightarrow F_y = -\rho V_{\infty} \frac{M}{\sum \Delta x} R \quad (20)$$

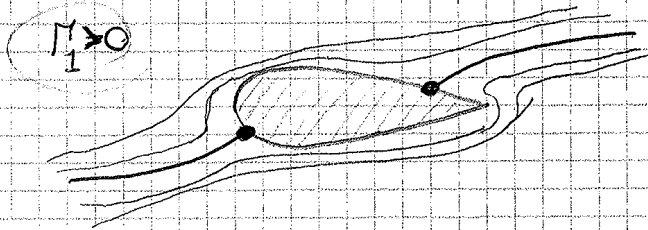
$$F_y = \rho V_{\infty} M = -L$$

→ H si portanza solo se c'è circolazione.

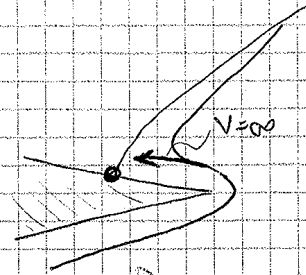
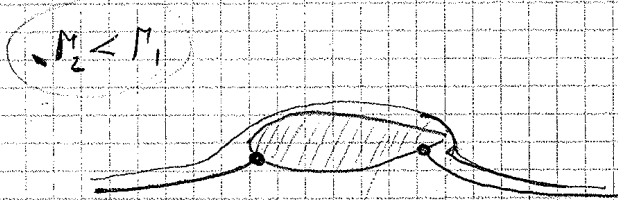
Se penetra un profilo simmetrico



I p.ti di arresto sono sul bordo di attacco e di uscita.



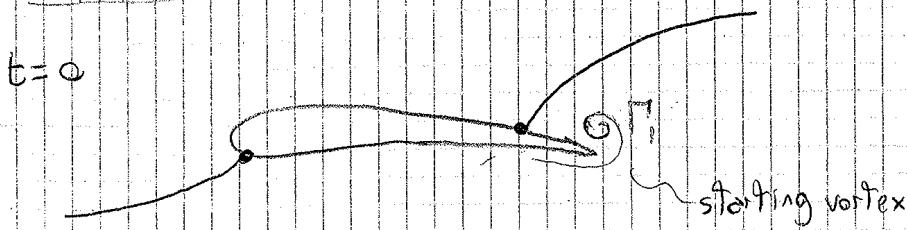
I p.ti di arresto si spostano.



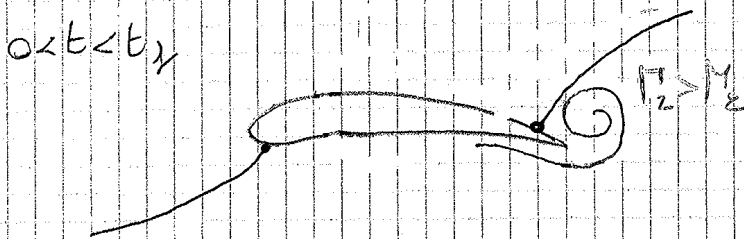
Nei corpi con una spiga ad un certo punto vicino all'uscita le particelle dovrebbero investire direttamente in uno spazio inesistente \rightarrow velocità ∞ , invece avviene e poi se $v \rightarrow \infty \Rightarrow$ non regge le leggi della fisica \rightarrow deve trovare un M tale da non avere velocità ∞ (cioè dove il flusso non torna indietro) \rightarrow CONDIZIONE DI KUTTA

Dal punto di vista pratico significa che a due portanze ha bisogno di corpi spigolosi.

Supponiamo che il mio modello in galleria del vento nell'istante $t=0$ sia

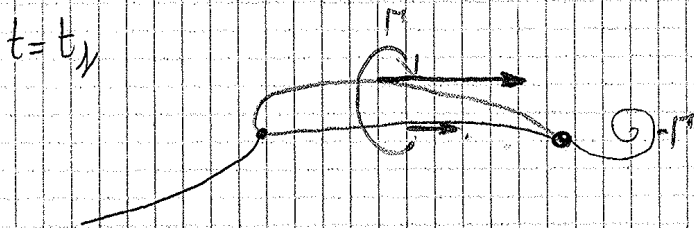


Dietro al profilo si crea un piccolo vortice che cresce nel tempo



Il vortice si porta e con velocità il punto d'arresto verso il bordo di uscita

Alla fine quindi avrà il punto di arresto sul bordo di uscita



Per il teorema di Kelvin si dovrà instaurare anche un vorticità uguale e contraria sul profilo, e fare in modo che i due flussi si possano ricondurre alle free

(+ veloce sopra e + lento sotto), altrimenti mi avrò il punto di arresto sull'uscita

→ la vorticità sul profilo accelera il flusso sul dorso creando portanza

Se aumenta l'angolo di attacco il $-M$ aumenta, aumenta anche M → aumento L

Esistono vari metodi a strutturare un profilo:

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\partial W}{\partial x} + i \frac{\partial W}{\partial y}$$

posso scegliere la derivata che voglio, ma sono =

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi}{\partial x} = u - iv$$

$$\frac{dW}{diz} = -i \frac{\partial W}{\partial y} = -i \frac{\partial \Phi}{\partial y} + i \frac{\partial \Psi}{\partial y} = u - iv$$

mi muovo sotto
→ rotazione di $\pi/2$

$$\left| \frac{dW}{dz} \right| = |u - iv| = V$$

(es. $W = z^2 \quad \frac{dW}{dz} = 2z = V$)

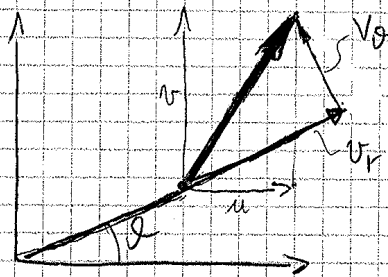
In coord. pol. \rightarrow

$$V_r - i V_\theta =$$

$$= u \cos \theta + v \sin \theta - i(v \cos \theta - u \sin \theta)$$

$$= u(\cos \theta + i \sin \theta) - i v(\cos \theta + i \sin \theta) =$$

$$= (u - iv) e^{i\theta} = \frac{dW}{dz} e^{i\theta}$$



Per una linea chiusa:



$$W = \frac{M}{2\pi i} (-\cos(\theta - \alpha) + i \sin(\theta - \alpha))$$

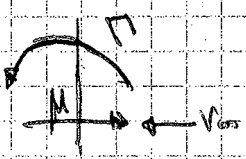
$$W = -\frac{M}{2\pi i} e^{-i(\theta - \alpha)} = -\frac{M}{2\pi i} e^{-i\theta} e^{i\alpha} = -\frac{M}{2\pi i} e^{-i\theta} e^{i\alpha}$$

QUESTO PER UNA DOPPIETTA.

L'USO DELLE FORMULAZIONI COMPLESSE SONO UTILI PER TRATTARE CONDIZIONI NON ABBIANDE E PER TRATTARE ELEMENTI NON POSIZIONATI NEGLI ORIGINI

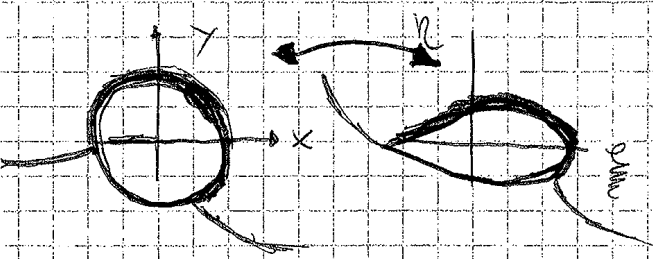
BASTA FORZARE $(z - z_0)$ DOVE z_0 È IL PUNTO IN CUI SI TROVA LA SINGOLARITÀ.

I POTENZIALI COMPLESSI TOTALI SI OTTENGONO DALLA SOMMA DEI SINGOLI POTENZIALI.



$$W = -M_0 z = \frac{M}{2\pi i z} - i \frac{M}{2\pi} \log z$$

LA TRASFORMAZIONE DI COORDINATE È UNA COSETTA CHE PERMETTE DI COLLEGARE BIVARIANTI UN PUNTO IN UN SISTEMA E UN PUNTO IN UN ALTRO



$$w = u + iv$$

OGNI LINEA CHIUSA PUÒ ESSERE RIDOTTA A UN CERCINO PER IL TEOREMA DI RIEMANN

NON TRASFORMO SOLO IL PIANO E LE FORME GEOMETRICHE, MA ANCHE LE LINEE A ϕ E ψ COSTANTI, DISTORCENDOSI.

UNA PROPRIETÀ FONDAMENTALE AFFERISCE A UNA TRASFORMAZIONE SIA CONFORME E CHE SI CONSERVANO GLI ANGOLI.

$$w_x = v_y \quad w_y = -v_x$$

$$\phi_x = \psi_y$$

$$\phi_y = -\psi_x$$

CON LA TRASFORMAZIONE DEVO OTTENERE

$$\phi_w = \psi_w$$

$$\phi_z = -\psi_w$$

IO CONSIDERO w COME FUNZIONE DI z O \bar{z}

$$\phi_x = \psi_y \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \bar{w}}$$

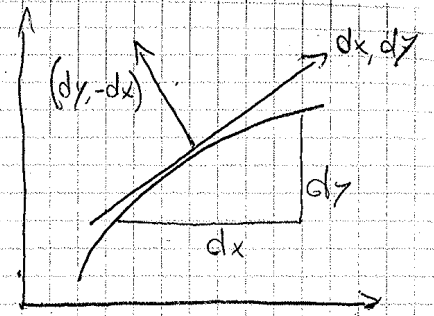
E UGUALMENTE CON \bar{z}

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \bar{w}}$$

$$\oint_{\gamma} \frac{dw}{dz} dz = \oint_{\gamma} (u-iv)(dx+idy)$$

$$= \oint_{\gamma} (u dx + v dy) + i \oint_{\gamma} (u dy - v dx)$$

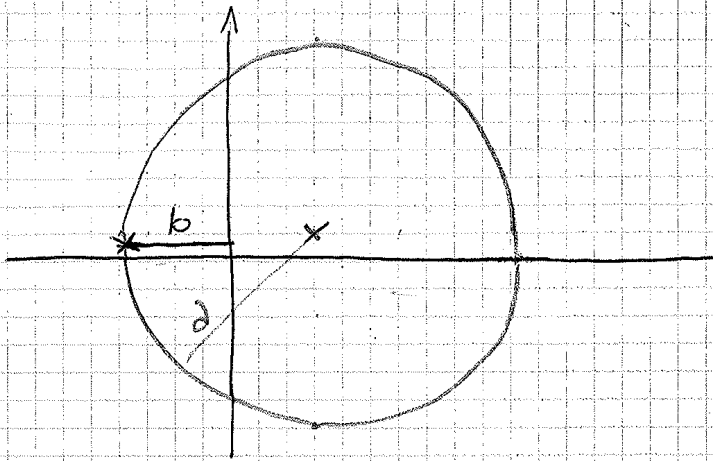
$$= M + i Q$$



$$i u dx + v dy = \underline{v} \cdot \underline{b}$$


$$u dy - v dx = \underline{u} \cdot \underline{b}$$

07/11/13

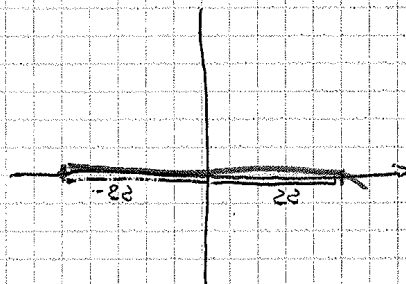
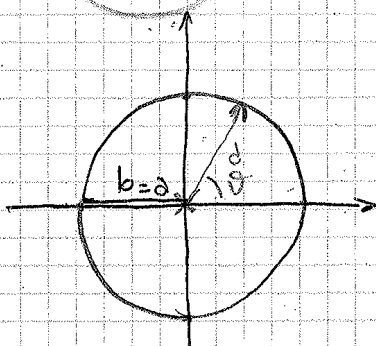


$\Rightarrow \boxed{z = r e^{i\theta} + \frac{b^2}{r} e^{-i\theta}}$ TRASFORMATA DI KUTJA YOUKOWSKI

Il mondo di Kutta-Youkowski è tale trasformazione è molto simile ad un profilo alare

N.B. Kutta-Youkowski necessita di avere $0 < b < a$.  NO  NO

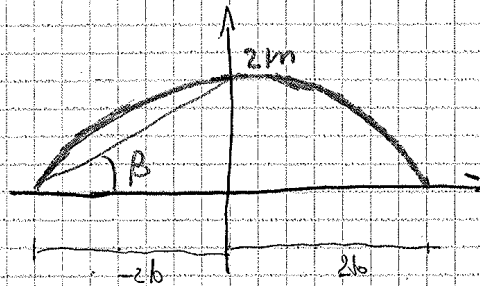
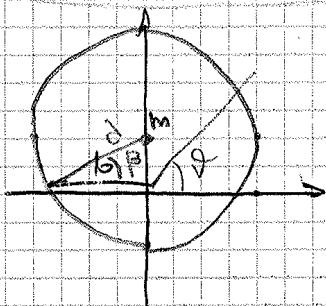
- Se $b = d$ (cerchio centrato sull'origine)



$$\begin{aligned} z &= d e^{i\theta} + \frac{d^2}{d} e^{-i\theta} = \\ &= d(\cos\theta + i\sin\theta + \cos\theta - i\sin\theta) \end{aligned}$$

$\xi + i\eta = 2a \cos\theta \rightarrow$ per $\eta = 0 \Rightarrow$ la trasformazione è una LAMINA PIANA
 $\xi = 2a \cos\theta$

- se il cerchio è sull'asse immaginario



Viene una lamina incurvata come un arco di cerchio (o un lamina piana incurvata)

$$V_B = 0 = 2V_{\infty} \sin(\pi + \alpha) + \frac{M}{2\pi d}$$

$$\rightarrow \frac{M}{2\pi d} = 2V_{\infty} \sin \alpha$$

$$M = 4\pi d V_{\infty} \sin \alpha$$

$$L = \rho V_{\infty} M = 4\pi d V_{\infty}^2 \rho \sin \alpha$$

$$\rightarrow \boxed{C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 (4d)}} = \frac{2\pi \sin \alpha}{\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 (4d)} \stackrel{\text{per basse incidence}}{\approx} \boxed{2\pi \alpha} \rightarrow \text{il } C_L \text{ è molto semplice e dipende solo dall'angolo } \alpha$$

$$V = 2V_{\infty} \sin(\theta + \alpha) + 2V_{\infty} \sin \alpha$$

$$|f'(z)| = \left| 1 - \frac{b^2}{z^2} \right| = \left| 1 - \frac{d^2}{d^2} e^{-2i\theta} \right|$$

$$= |1 - \cos 2\theta + i \sin 2\theta|$$

$$= \sqrt{2(1 - \cos 2\theta)}$$

$$\boxed{|f'(z)| = 2 |\sin \theta|}$$

Quindi si trova la vel. delle trasformate

$$V^* = \frac{2V_{\infty} \overbrace{\sin \theta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \theta}^{\sin(\theta + \alpha)} + 2V_{\infty} \sin \alpha}{2 |\sin \theta|}$$

$$= V_{\infty} \left(\cos \alpha + \sin \alpha \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \right)$$

$$\boxed{V^* \approx V_{\infty} \left(1 + \alpha \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \right)}$$

• Se $\theta = 0$ $V^* = \infty$

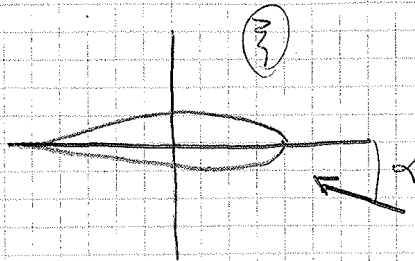
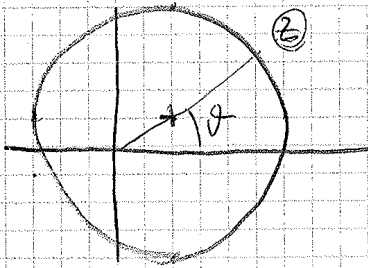
• $\theta = \pi$ $V^* = V_{\infty}$

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = \lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{-\sin \theta}{\cos \theta} = 0$$

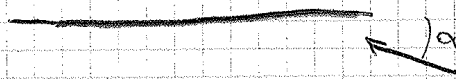
$$\boxed{C_D = 1 - \left(\frac{V^*}{V_{\infty}} \right)^2}$$

12/11/13

Abbiamo visto ^{i profili} ~~di~~ di Kutta-Zoukowski, che \rightarrow partito da una circonferenza di centro z_0 e raggio R si trasforma in un profilo alare, o una lamina piana o un arco di semicerchio.

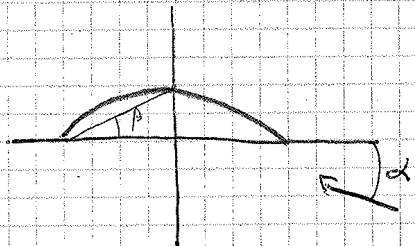


$$C_L = 2\pi\alpha$$



$$V = V_{\infty} \left(1 + \alpha \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} \right)$$

$$C_L = 2\pi(\alpha + \beta)$$



$$V = V_{\infty} \left(1 + \alpha \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} + 2\beta \sin\theta \right)$$

La limitazione dei profili di Kutta-Zoukowski è che è sempre + o - lo stesso profilo (nonostante sposti il centro). Inoltre il profilo non è molto realistico

\rightarrow deve trovare altre trasformazioni che mi creino dei profili + realistici.

- Ci sono le TRASF. DI SCHWARZ-CHRISTOFFEL che è una transf. in serie (con tanti termini) che è + complicata e diverge. \rightarrow difficile da calcolare \rightarrow si vuole un computer.

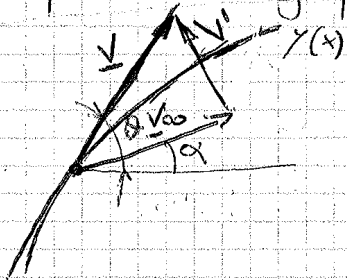
• ...

→ sul bordo $\sigma) (\nabla\phi + \nabla\psi) \cdot \underline{n} = 0 \rightarrow$ COND. DI TANGENZA

all' $\infty) \nabla\psi \rightarrow 0$

Kutta cond

→ Dal punto di vista grafico



Le condiz. impone la tg alla superficie di \underline{V}

→ la v' fa sì che la V_{∞} sia deviate fuori dal arco tg

$$\text{tg } \theta = \frac{dy}{dx}$$

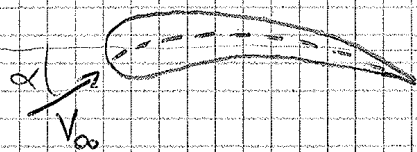
$$\underbrace{(V_{\infty} \cos \alpha + u')}_{u} n_x + \underbrace{(V_{\infty} \sin \alpha + v')}_{v} n_y = 0$$

$$\frac{V_{\infty} \sin \alpha + v'}{V_{\infty} \cos \alpha + u'} = \frac{dy}{dx}$$

Utilizzo le cond. di tg. per trovare v' nota il resto

$$v' = (V_{\infty} \cos \alpha + u') \frac{dy}{dx} - V_{\infty} \sin \alpha \rightarrow \text{è un probl. complicato (per trovare } v' \text{ devo avere } u' \text{ e viceversa...)}$$

Come le cause del disturbo:



• **INCIDENZA** → $V = V_{\infty} + (V_{\infty} \alpha \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta})$ disturbo
 (→ approssimazione a linea piana)

• **INARCAMENTO** → $V \approx V_{\infty} + 2V_{\infty} \beta \sin \theta$ disturbo
 (approssimazione a arco di cerchio)

introduca le piccole perturbazioni

$$= V_{\infty}^2 + \underbrace{2V_{\infty} u' \cos \alpha}_{\text{all'ordine di } \epsilon} + \underbrace{2V_{\infty} v' \sin \alpha}_{\epsilon^2} + \underbrace{(u'^2 + v'^2)}_{\epsilon^2}$$

$$\approx 1 - 1 - 2 \frac{u'}{V_{\infty}}$$

$$C_p \approx -2 \frac{u'}{V_{\infty}}$$

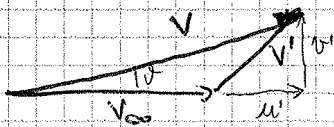
→ C_p diventa lineare → semplifica enormemente la vita.
 xché integrando C_p trova L e

Per risolvere il mio problema risolvo singolarmente i 3 problemi di INGLEZZA, INARCAMENTO E

SPESSE applicando le formule

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \alpha + \frac{v'}{V_{\infty}} \\ C_p = -2 \frac{u'}{V_{\infty}} \end{array} \right.$$

Inoltre osservando visto che:



Secondo questo grafico u' modifica il modulo di V_{∞} ,
 mentre v' applica la condizione di tangenza

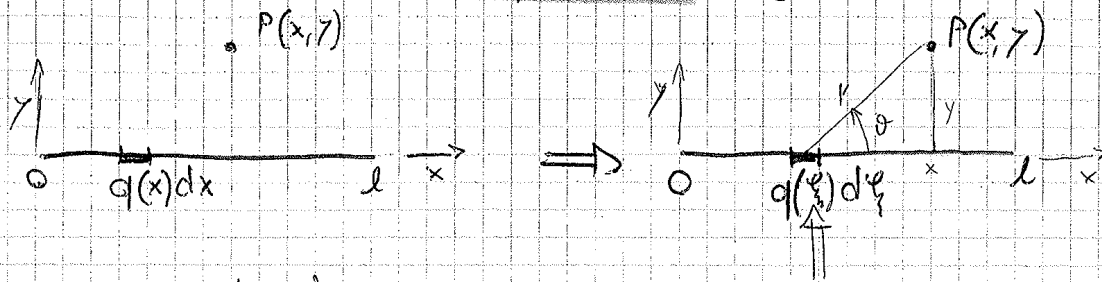
Quindi applicando le teorie delle piccole perturbazioni il problema diventa

$$a) V_{\infty} \cdot \frac{h}{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial h} = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \alpha + \frac{v'}{V_{\infty}}$$

$$b) \nabla \varphi \rightarrow 0$$

Kutta cond.

Prendi una una lamina dove ogni punto è una sorgente → DISTRIBUZIONE DI SORGENTI



Per poter descrivere il punto \$P\$ devo introdurre una nuova variabile \$\xi\$ che si sovrappone a \$x\$

$$d\varphi(x, y) = \frac{q(\xi)}{2\pi} \lg [(x-\xi)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}} d\xi$$

$$\varphi(x, y) = \int_0^l \frac{q(\xi)}{2\pi} \lg [(x-\xi)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}} d\xi \rightarrow$$

$$du' = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$\lg \sqrt{x} = \frac{1}{2} \lg x \rightarrow \frac{d}{dx} \lg \sqrt{x} = \frac{1}{2} \frac{1}{x}$$

$$\rightarrow du' = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} q(\xi) d\xi \frac{1}{2} \frac{(x-\xi)}{(x-\xi)^2 + y^2}$$

$$dv' = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{2\pi} q(\xi) d\xi \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2}$$

Ho quindi trovato le Wolfs indotte sulla lamina.

Or mi interessa vedere che cosa succede per \$y \rightarrow 0\$

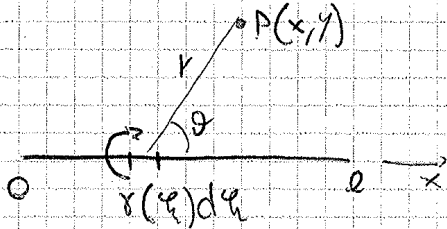
$$y \rightarrow 0$$

$$du'(x, 0) = \frac{1}{2\pi} q(\xi) d\xi \frac{1}{x-\xi}$$

$$w(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{q(\xi)}{x-\xi} d\xi \rightarrow$$

Queste sono le 2 formule da servommi a studiare la distribuzione di corrente

Cosa succede per la DISTRIBUZIONE DI VORTICI



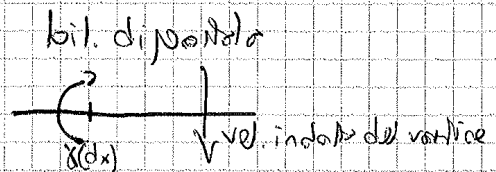
$$d\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \gamma(\xi) \theta^{-1} \frac{y}{(x-\xi)}$$

$$du = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \gamma(\xi) d\xi \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2}$$

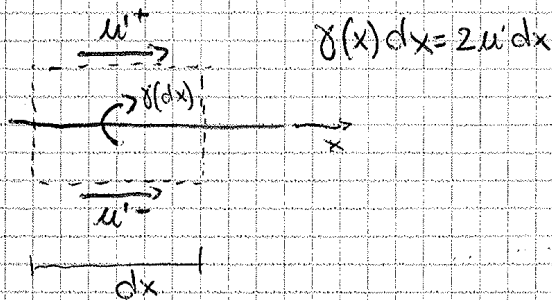
$$dv_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{2\pi} \gamma(\xi) d\xi \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2 + y^2}$$

Per $y \rightarrow 0$ come prima

$$v_1(x, 0) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{\gamma(\xi) d\xi}{x-\xi}$$



$\rightarrow \Pi_1$ vortici danno contributo come quelli agli estremi.



$$u(x, 0)^\pm = \pm \frac{\gamma(x)}{2}$$