



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 929

DATA: 31/03/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Fiorello

MATERIA: Scienza delle Costruzioni II + Eserc.

Prof. Chiaia

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

→ METODO DEGLI SPOSTAMENTI

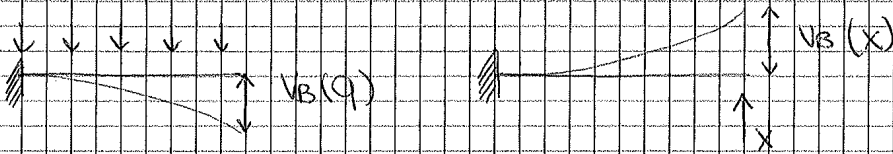
Il metodo degli spostamenti è il duale del Metodo delle forze. Si tratta di individuare quell'unico insieme di parametri cinematici che oltre alla congruenza impedisca anche l'equilibrio.

Si vanno quindi ad imporre spostamenti o rotazioni caratteristici del sistema, in modo tale che le $(n-g)$ reazioni iperstatiche soddisfino le $(n-g)$ reazioni di equilibrio.

ES. STRUTTURA MONODIMENSIONALE IPERSTATICA

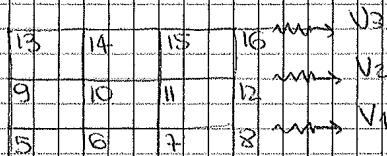


Eq di congruenza: $\Theta_B(q, x) = 0$

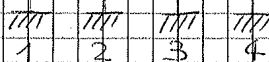


Eq di congruenza → il p.to B non si muove, ricavo la x.

ES. MAGLIA CHIUSA



3 volte iperstatico internamente



1 SO-ST esternamente
1 PER-ST internamente
cioè taglio o mozzo 3 connessioni

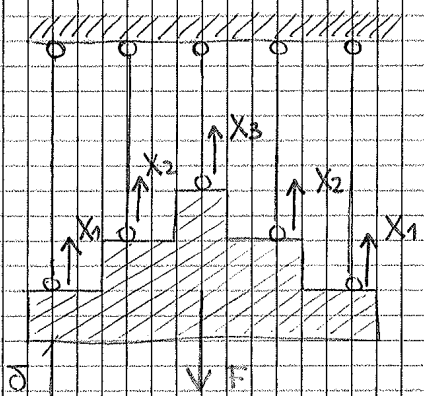
$$6 \times 3 = 18$$

$$3 \times 3 = 9$$

→ 27 gradi di iperstaticità

SISTEMI DI BIELLE IN PARALLELO

ES 1. SISTEMA SIMMETRICO CARICATO SIMMETRICAMENTE



la simmetria del sistema impone che anche lo spostamento risultante sarà simmetrico e potrà essere descritto da una sola incognita: lo spostamento δ di traslazione verticale verso il basso.

δ : parametro cinetico (incognita)

$$\delta = \frac{X_i}{k_i} = \frac{X_i \cdot L_i}{EA_i} \quad ; \quad X_i: \text{incognita iperstatica}$$

Eq di congruenza:

$$\delta_i = \frac{X_i \cdot L_i}{EA_i} = \delta \quad (1)$$

Eq di equilibrio

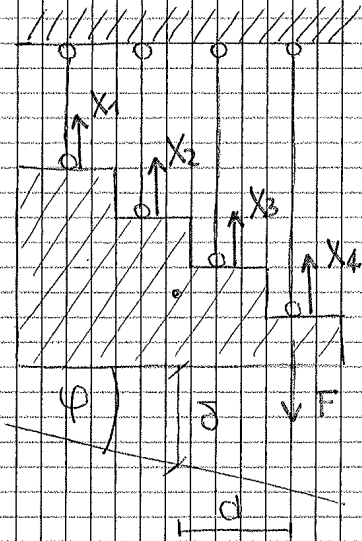
$$F = \sum X_i \quad (2)$$

la rigidità k dipende dalla lunghezza L dell'asta. voglio conoscere quale carico si prende ogni singola asta per verificare se si rompono o no.

usando il metodo degli spostamenti, la mia incognita è δ . se invece usavo il metodo delle forze avrei avuto 3 incognite: X_1, X_2, X_3 .

scrivo ora l'eq (2) prendo come parametro δ .

ES2: SISTEMA NON SIMMETRICO



Sistema n-2 volte iperstatico
 con n = 4 barre

A deformazione avvenuta
 il travaso risulterà ruotato
 di un angolo φ .

Assumiamo quindi δ e φ
 come incognite cinematiche

X_i : incognita iperstatica

Eq di congruenza linearizzata:

$$\delta_i = \frac{X_i L_i}{E_i A_i} = \delta + \varphi x_i \quad (1)$$

$\uparrow x_i$: ascissa della barra i-esima

oss: ipotizzo che φ sia piccolo $\rightarrow \tan \varphi \approx \varphi$

Eq di equilibrio alla traslazione verticale:

$$F = \sum X_i \quad (2)$$

Espresso in (2) le incognite cinematiche δ e φ
 \rightarrow mi serve un'ultra eq. per risolvere il sistema

Eq di equilibrio alla rotazione:

$$F \cdot d = \sum X_i x_i \quad (3)$$

\uparrow \uparrow ascissa barra
 reazione

Dalla (1) espresso X_i e ricavo che:

$$X_i = \frac{E_i A_i}{L_i} (\delta + \varphi x_i) \quad (4)$$

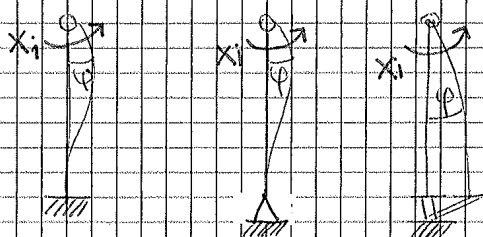
$\underbrace{\hspace{2cm}}$
 spostamento

NB in un sistema parallelo le aste più forti si prendono più cariche.

Per esprimere la relazione di proporzionalità tra p_i ed X_i (eq. (1)) posso trasformare il modo -incostri in un modo -cerniera ed applicare tutte le incognite iperstatiche X_i .
 Devo quindi determinare le relazioni elastiche p_i sui vari schemi iperstatici o sostituti ottenuti. I coeff. si sono ricavati impostando ai momenti X_i il ruolo di causa, e alle relazioni p_i il ruolo dell'effetto.

$$p_i = \frac{X_i}{K_i}$$

$$K_i = \frac{c EI}{L} \quad c \text{ dipende dal vincolo (rigidezza } c)$$



A parità di X_i , c è più grande nel primo schema perché è il sistema più rigido.

• Rigidezza flessionale di un'asta incastata: $K_i = \frac{4EI}{L}$

$$c = 4$$

• //

• // incernierata: $K_i = \frac{3EI}{L}$

$$c = 3$$

• //

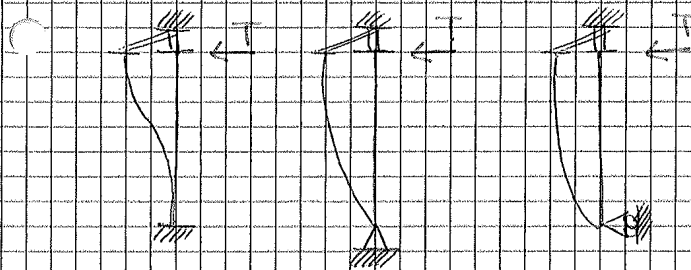
• // col doppio pendolo: $K_i = \frac{EI}{L}$

$$c = 1$$

Sostituisco lo (2) nello (1):

$$p = \frac{M}{\sum \frac{c_i EI_i}{L_i}} = \frac{M}{\sum K_i} = \frac{M}{K} \quad (3)$$

OSS Hip: se la struttura è suppla, trascuro la rigidità a taglio ed ho solo quella flessionale



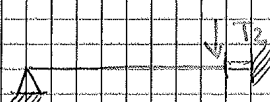
Neu' eq (2) devo far comparire delta



$$C_1 = 12$$

$$K_1 = 12 \frac{EI}{L^3}$$

$$\delta_B = \frac{1}{12} \frac{L^3}{EI}$$



$$C_1 = 3 \quad C_4 = 3$$

$$K_1 = \frac{3EI}{L^3}$$

$$\delta_B = \frac{2F_2 (2L_2)^3}{48 E_2 I_2} = \frac{F_2 L_2^3}{3E_2 I_2}$$



la 3^a trova per ordini di spostamento orizzontale trova liberamente -> non contribuisce alla distribuzione di F

$$T = \frac{C_i E_i I_i}{L_i^3}$$

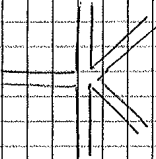
$$F = \sum \frac{C_i E_i I_i}{L_i^3} \delta$$

$$\delta = \frac{F}{\sum \frac{C_i E_i I_i}{L_i^3}} = \frac{F}{\sum K_i} = \frac{F}{K}$$

$$T_i = F \cdot \frac{\frac{C_i E_i I_i}{L_i^3}}{\sum \frac{C_i E_i I_i}{L_i^3}} = F \frac{K_i}{K}$$

CALCOLO AUTOMATICO DI TELAI

NODO INCASTRO:

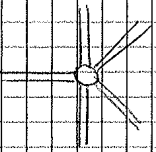


parametri cinematici:

3

2 traslazioni
1 rotazione

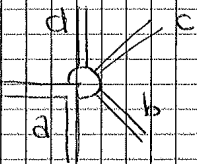
NODO CERNIERA



2+n

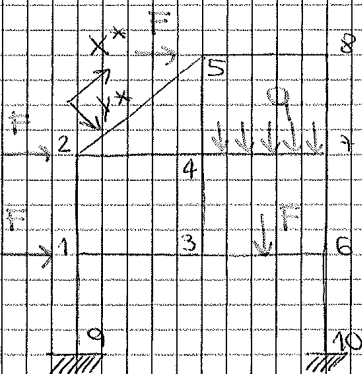
2 traslazioni
n rotazioni

NODO MISTO



3+n

2 traslazioni
1 rotazione a
n rotazioni b c d



Il metodo degli spostamenti
lo usa con i nodi ad
incastro.

PROCEDIMENTO:

1. Numerare i nodi (dopo minimizzare la distanza tra 2 nodi successivi)
2. Assegnare riferimento locale alle travi
3. Isolare le travi (con i carichi di competenza)
4. Imporre gli spostamenti generalizzati ai nodi

Relazioni matriciali della trave i-j-esima

$$\begin{pmatrix} M_i \\ T_i \\ N_i \\ M_j \\ T_j \\ N_j \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} \\ \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{pmatrix}}_{\text{MATRICE RIGIDEZZA}} \underbrace{\begin{pmatrix} \varphi_i \\ v_i \\ w_i \\ \varphi_j \\ v_j \\ w_j \end{pmatrix}}_{\text{VETORE SPOSTAMENTO}} - \underbrace{\begin{pmatrix} M_i^0 \\ T_i^0 \\ N_i^0 \\ M_j^0 \\ T_j^0 \\ N_j^0 \end{pmatrix}}_{\text{CONTRIBUTO CARICO}}$$

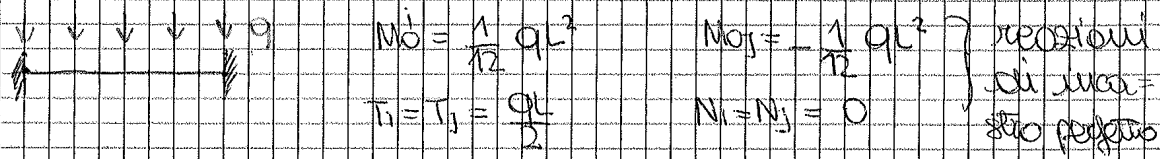
$\underbrace{\hspace{15em}}_{\text{CONTRIBUTO SPOSTAMENTI IMPOSTI}}$

Convenzioni di segno:



La matrice di rigidità K è simmetrica \rightarrow
 T_j per effetto di $v_i = T_i$ per effetto di v_j
 La diagonale di K è "densa", fuori dalla diagonale ci sono degli zeri \rightarrow non ci sono, in questi casi, interazioni tra spostamenti e reazioni

Si deve fare in modo di avere gli zeri raggruppati per facilitare i calcoli.
 Il vettore "contributo carico" contiene le reazioni delle travi sotto l'azione dei carichi esterni



Mettendo in evidenza $[k]$:

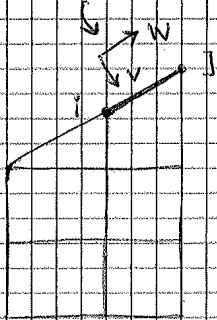
$$\boxed{\begin{matrix} [K_e] \{ \delta_e^* \} = \{ Q_e^* \} + \{ F_e^* \} & [1] \\ 6 \times 6 & 6 \times 1 & 6 \times 1 & 6 \times 1 \end{matrix}}$$

e: elemento

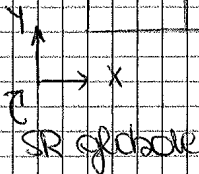
*: riferimento locale della trave

la [1] è la relazione per la singola trave nel SR locale

SR locale:



NB Calcolata la matrice di rigidezza locale $[K_e]$ sarebbe possibile ricavare gli spostamenti nodali $\{ \delta_e^* \}$ solo se si conoscano anche le forze $\{ Q_e^* \}$ le forze esterne $\{ F \}$ sono note mentre le reazioni $\{ Q \}$ sono incognite

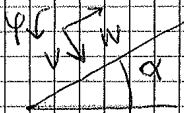


Devo trasformare la relazione [1] scritta in modo locale per una trave, in una relazione globale con SR unico per tutte le travi.

Devo eseguire 3 operazioni:

1. ROTAZIONE

SR locale $(y^* z^*) \rightarrow$ SR globale $(y z)$

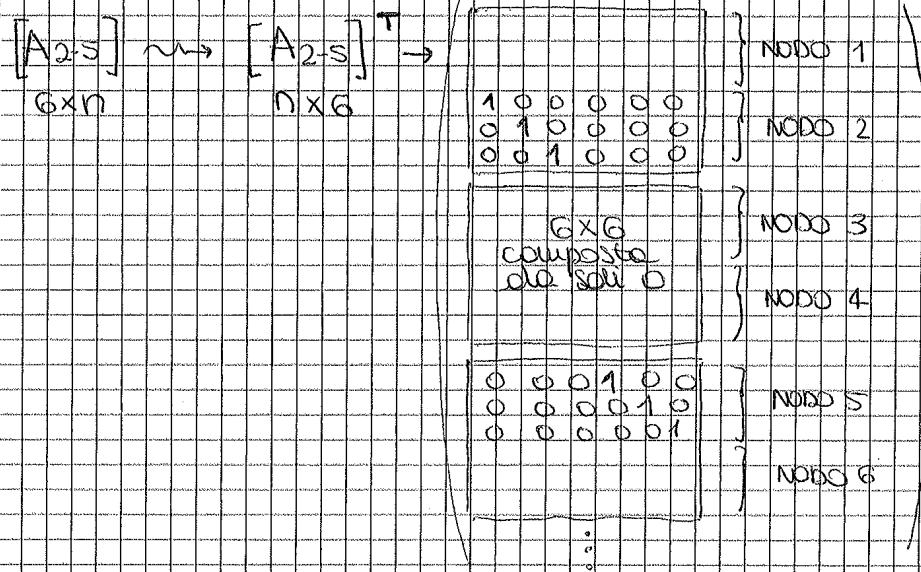


solo i vettori v e w devono ruotare, p è sempre lo stesso.

uso quindi la matrice di rotazione $[N] \rightarrow$

si tratta di ordinare tutti i parametri cinematici del sistema in un vettore, in modo tale da poter inserire gli spostamenti terminali dell'elemento generico e nelle posizioni che ad essi competono.

si crea quindi una matrice di espansione A_e per ogni elemento "e", con tutti sei tranne i 6 nodi unitari nelle colonne di competenza.



Posso immaginare la matrice $[A]$ come una matrice composta da tanti blocchi 6x6 con gli 1 in corrispondenza dei nodi 2 e 5.

$[A_e]$: matrice di espansione
6x6

$$\{\delta^e\} = [A_e]^T \{\delta_e\}$$

$$\{Q^e\} = [A_e]^T \{Q_e\}$$

$$\{F^e\} = [A_e]^T \{F_e\}$$

↑
ESPANSA

↑
IN DIM. LOCALE

Nel caso di travi reticolari, anche la matrice $[N]$ si riduce:

$$[N] = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

→ ES. TELAI A NODI FISSI

In questi telai i nodi non si spostano ma possono solo ruotare a meno dei contributi dovuti alla cedevolezza assiale delle travi

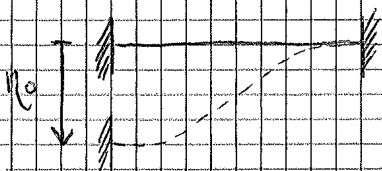
Se si trascura la cedevolezza assiale delle travi la matrice di rigidezza locale è, come nel caso delle travi reticolari di dimensione 2×2

$$\begin{bmatrix} M_i \\ M_j \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 4/L & 2/L \\ 2/L & 4/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_i \\ \psi_j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_i^0 \\ M_j^0 \end{bmatrix}$$

→ ES. TELAI SHEAR TYPE

Le teste delle colonne possono solo traslare ma NON ruotare, le solette sono molto rigide. Trascurato φ ed assunto come incognita gli spostamenti di piano

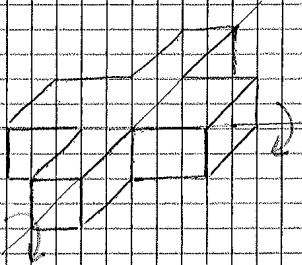
$$\begin{bmatrix} T_i \\ T_j \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 12/L^3 & -12/L^3 \\ -12/L^3 & 12/L^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ v_j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} T_i^0 \\ T_j^0 \end{bmatrix}$$



Ho sempre 3 incognite per nodo:

- 1 rotazione
- 1 momento flettente
- 1 momento torcente

Non ho nessuno spazio nodale per ipotesi



ciò che è flessionale per una trave, è torsionale per l'altro.

Imponendo a ciascun estremo i 3 spostamenti generalizzati si ricavano le reazioni iperstatiche agli incastri ed essendo:

- φ : rotazione attorno all'asse x^*
- v : spostamento verticale
- θ : rotazione attorno all'asse z^*

si ha la seguente relazione matriciale:

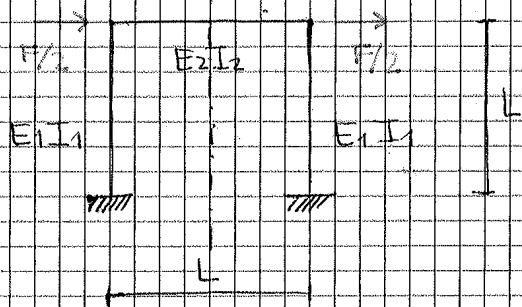
$$\begin{pmatrix} M_i \\ T_i \\ M_{ei} \\ M_j \\ T_j \\ M_{ej} \end{pmatrix} = E I \begin{pmatrix} 4/L & -6/L^2 & 0 & 2/L & 6/L^2 & 0 \\ -6/L^2 & 12/L^3 & 0 & -6/L^2 & -12/L^3 & 0 \\ 0 & 0 & G I_T / E I L & 0 & 0 & -G I_T / E I L \\ 2/L & -6/L^2 & 0 & 4/L & 6/L^2 & 0 \\ 6/L^2 & -12/L^3 & 0 & 6/L^2 & 12/L^3 & 0 \\ 0 & 0 & -G I_T / E I L & 0 & 0 & G I_T / E I L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_i \\ v_i \\ \theta_i \\ \varphi_j \\ v_j \\ \theta_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_i^o \\ T_i^o \\ M_i^o \\ M_j^o \\ T_j^o \\ M_j^o \end{pmatrix}$$

□ termini nuovi

□ termini già presenti nella matrice $[K]$

La matrice di rigidezza $[K]$ ha dimensioni 12×12 ma al di fuori della diagonale principale ci sono moltissimi zeri.
 ↳ VEDI MATRICE pg. 124 (carpenteria "SOC 2")

→ Esempio sulle strutture iperstatiche



La struttura risulta 3 volte iperstatica
 $V = 6$
 $g = 3 \rightarrow V - g = 3$

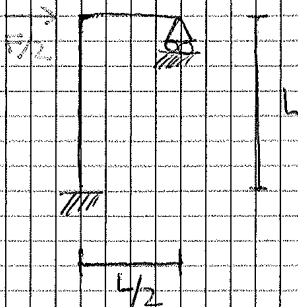
Si noti come a priori le caratteristiche strutturali del travetto sono ipotizzate differenti da quelle dei pilastri. (E.I.: rigidezza)

Ipotizzo riconoscibile la deformazione assiale

Il telaio è SIMMETRICO e caricato in modo

ANTISIMMETRICO: è possibile studiare solo metà struttura con l'inserimento di un carrello sull'asse di simmetria

In questo modo il grado di iperstaticità della struttura si riduce ad uno.



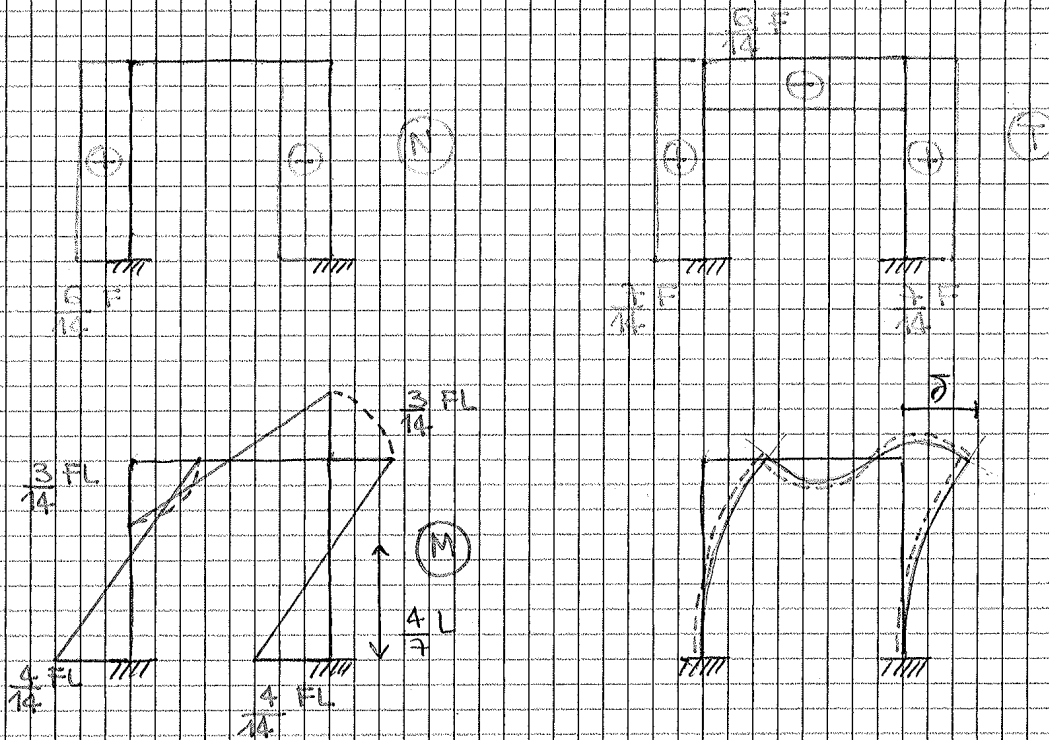
Le strutture iperstatiche sono sensibili alle variazioni termiche e ai cedimenti vincolari.

Si analizzano ora i diversi casi:

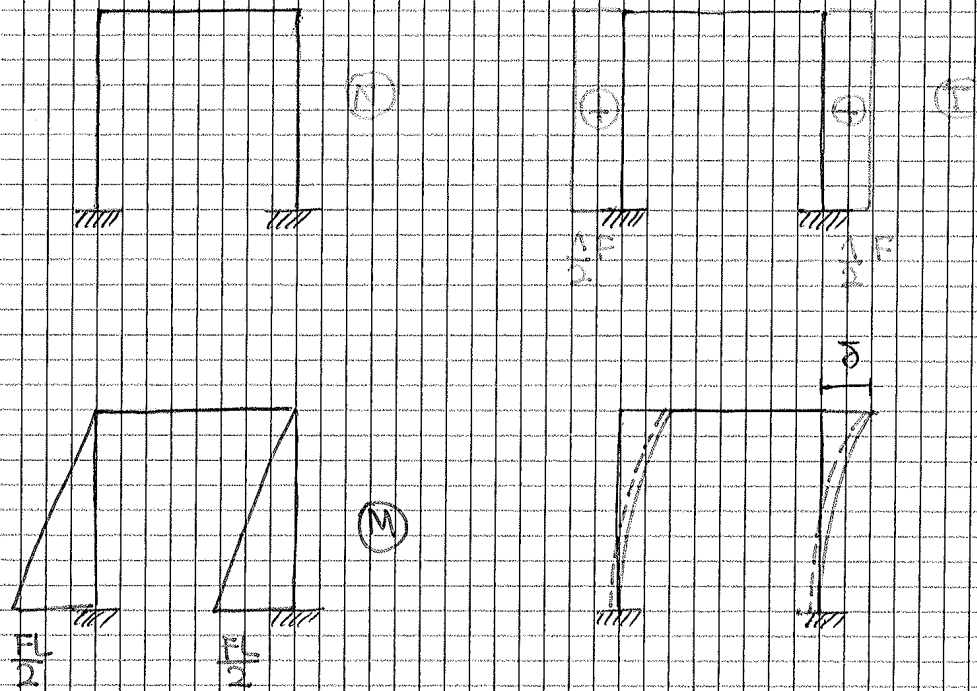
1. $E_2 I_2 / E_1 I_1 = 1$ (traversi e pedanti hanno la stessa rigidezza)
2. $E_2 I_2 / E_1 I_1 \rightarrow \infty$ (traverso infinitamente rigido)
3. $E_2 I_2 / E_1 I_1 \rightarrow 0$

In questo caso i 3 casi nelle equazioni sopra:

① $X_1 = \frac{4}{14} FL$ $X_2 = -\frac{3}{14} FL$ $\varphi = \frac{5}{84} \frac{FL^2}{E_1 I_1}$

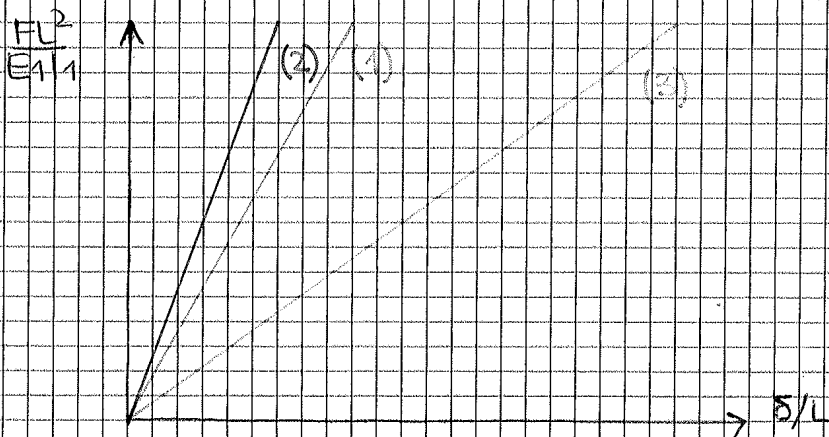


In questo caso T ed M si ripartiscono, il traverso collabora al funzionamento.



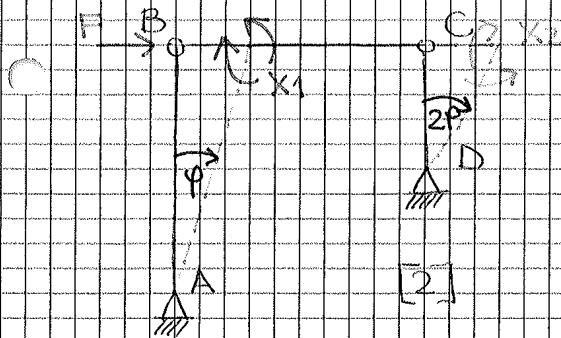
↳ confronto tra i 3 casi

A parità di forza applicata, risulta evidente come un telaio shear type (2) comporti uno spostamento minore del traverso ($\sim 33\%$ in meno rispetto ad (1)), mentre quello maggiore si ha imponendo la condizione $E_2I_2/E_1I_1 \rightarrow 0$ (3)



La transizione da (1) a (3) è utile per studiare gli effetti dello rigidezza dei nodi nelle strutture metalliche.

Unisco le due cerniere in B e C

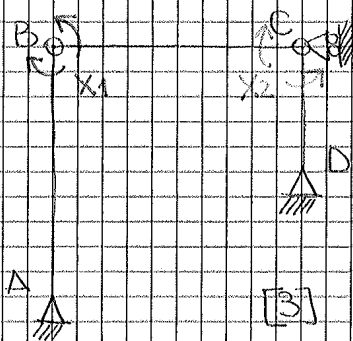


La struttura è diventata 1 volta iperstatica. Devo trovare i centri di rotazione assoluti e relativi per determinare la rotazione della struttura.

Le incognite sono X_1 , X_2 e φ .

Se usassi il metodo delle forze avrei solo un incognito (es. reazione orizzontale nella cerniera in D) ma nessuno informazioni sugli spostamenti δ e sulle rotazioni φ .

Dalla reticolare associata si legano subito le componenti di rotazione rigida dei due membri (rispetto a φ e 2φ).



Collo schema [3] a nodi fissi ottenuto secondo gli spostamenti della reticolare associata [2], si ricavano le rotazioni elastiche.

Le equazioni risolvibili devono essere 3.

- 2 eq di congruenza
- 1 eq di equilibrio.

Ricavo così le incognite:

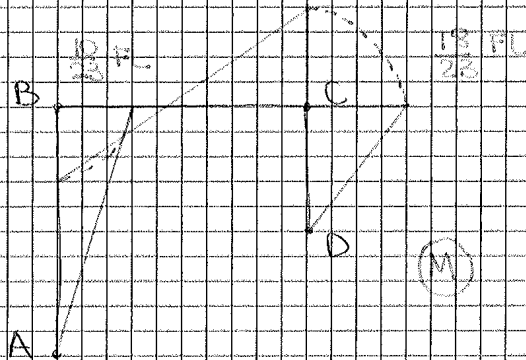
$$X_1 = -\frac{10}{23} FL$$

$$X_2 = \frac{18}{23} FL$$

$$\varphi = \frac{22}{69} \frac{FL^2}{EI}$$

Ricavo lo spostamento δ :

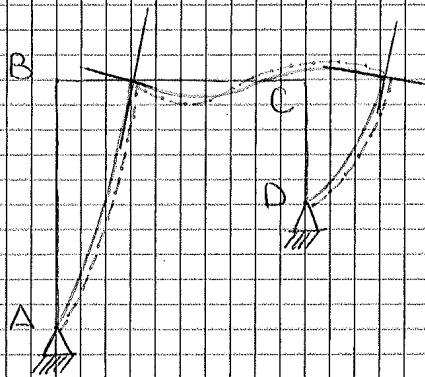
$$\delta = \varphi \cdot 2L = \frac{44}{69} \frac{FL^2}{EI}$$



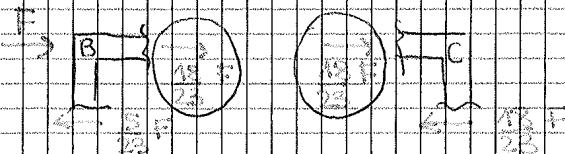
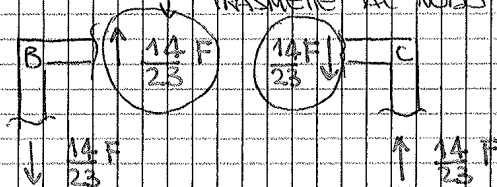
Nel modo B sono tese le fibre interne.

Per disegnare la DEFORMATA:

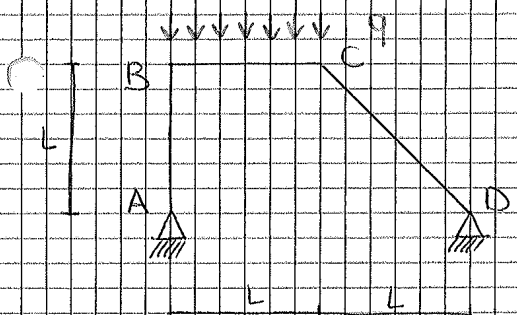
1. disegnare i nodi spostati di un δ pari a quello calcolato (nodi B e C)
2. disegno lo deformato dei travi con momento a segno costante e le relative tangenti.
3. traccio lo deformato degli altri travi.



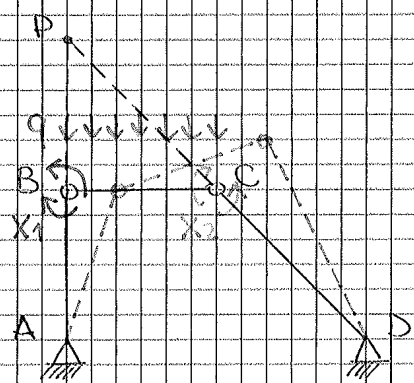
REAZIONE CHE LA TRAVE TRASMETTE AL NODO



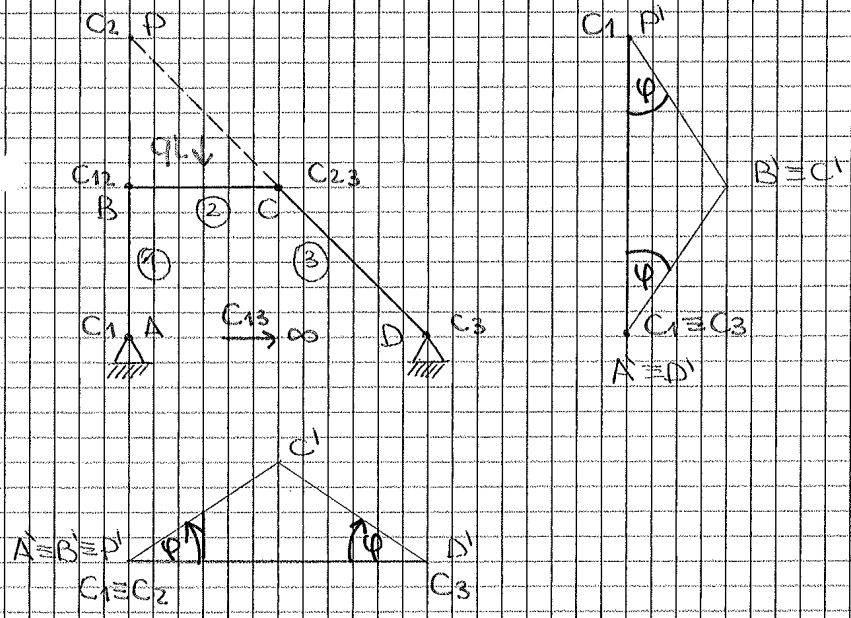
ESEMPIO DI TELAO A MAGLIE NON ORTOGONALI



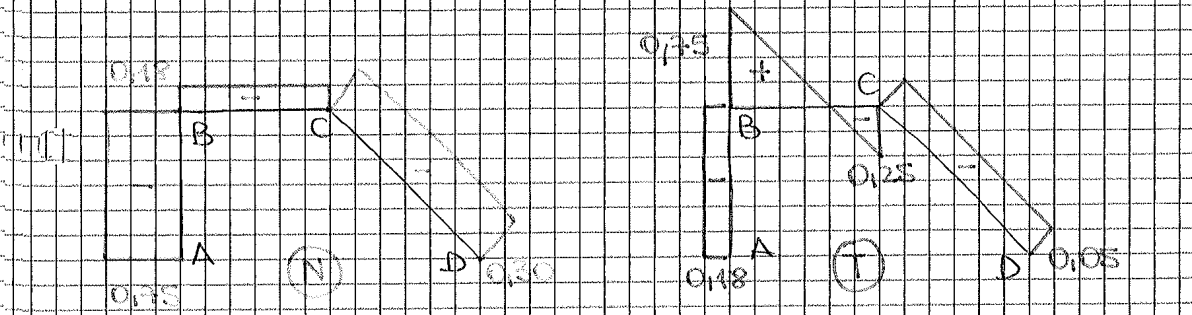
A e D sono connessioni fisse.
 l'insieme in B e C due
 due connessioni rendendo
 edente lo struttura.



Usa il teorema delle catene cinematiche per trovare
 i gradi di libertazione assoluta e relativa.

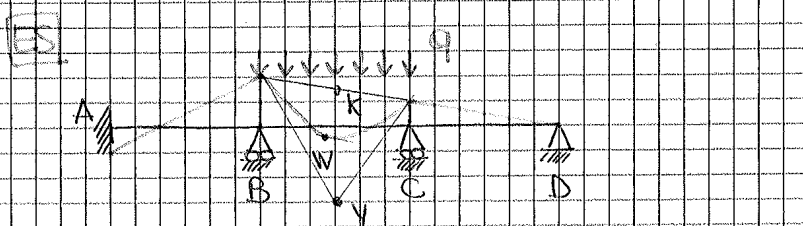


Perche' C13 e' lungo su una retta di as, le aste ① e ③ subentrano dello stesso angolo phi.

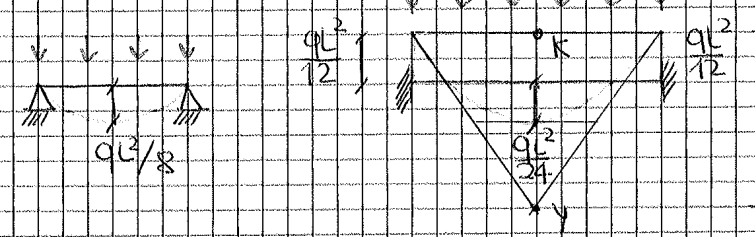


le travi sono meno compresse perché lì ho il carico distribuito quindi ho più momento flessionale.
 La struttura è simile ad un arco ed infatti è tutta compressa.

TRACCIAMENTO INTUITIVO DEL DIAGRAMMA DI MOMENTO



Schema:



\uparrow valore di M se c'è un carico concentrato

Il momento massimo di M su BC è in corrispondenza di W, quindi spostato rispetto al centro.



Nelle strutture a nodi fissi i momenti massimi vanno sempre verso le parti meno rigide.

TRAVI RETTILINEE E CURVE

Le travi curve vengono usate quando si usano materiali poco resistenti a trazione.

↳ Eq. indefinite di equilibrio

Le caratteristiche della sollecitazione nella sezione di una trave sono le reazioni interne trasmesse dalla stessa sezione.

Nel caso di trave piana, le caratteristiche di sollecitazione sono tre:

- sforzo normale N che è la componente della forza Tg di' asse della trave
- lo sforzo di taglio T che è la componente della forza ortogonale di' asse della trave
- momento flettente M che è il momento della forza che si trasmettono le due sezioni di trave, rispetto alla sezione considerata.

Le convenzioni sui segni sono:

- N positivo se di trazione
- T positivo se tende a far ruotare in senso orario il traliccio di trave su cui agisce
- M positivo se tende a far piegarla in basso



Notando che $d\theta/2$ rappresenta sia l'angolo compreso tra la corda mediana e le sezioni terminali, che l'angolo compreso tra la tg mediana e le tg estreme, è possibile imporre l'equilibrio alla rotazione dell'elemento rispettivamente nelle direzioni della tangente e della corda mediana:

OSS servito le eq di traslazione in direzione di pds e qds con per ottenere equazioni compatte solo uno dei 2 carichi esterni

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad pds - N \cos \frac{d\theta}{2} + (N+dN) \cos \frac{d\theta}{2} + T \sin \frac{d\theta}{2} + \\ + (T+dT) \sin \frac{d\theta}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$\downarrow \quad qds - N \sin \frac{d\theta}{2} - (N+dN) \sin \frac{d\theta}{2} - T \cos \frac{d\theta}{2} + \\ + (T+dT) \cos \frac{d\theta}{2} = 0$$

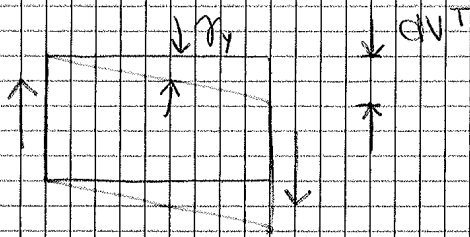
Per l'eq di equilibrio alla rotazione, scelgo il punto K (punto di intersezione dei prolungamenti dei vettori N ed N+dN), così che lo spazio normale e qds non abbiano contributo poiché hanno braccio nullo.

$$\begin{aligned} \curvearrowright \quad mds + dM - pds \left(\frac{r}{\cos \frac{d\theta}{2}} - r \right) - T r \operatorname{tg} \frac{d\theta}{2} - \\ - (T+dT) r \operatorname{tg} \frac{d\theta}{2} = 0 \end{aligned}$$

Poiché l'angolo $d\theta/2$ è infinitesimo è lecito confondere l'angolo stesso con il suo seno o la sua tangente. $\rightarrow d\theta/2 \sim 1$

TRAVI AD ASSE RETTILINEO - SPAZIO

concio elementare di trave ad asse rettilineo e sezione simmetrica rispetto all'asse Y , soggetto a momento flettente M e taglio netto T_y . Le deformazioni dovute a queste due



caratteristiche producono spostamenti relativi tra i baricentri delle due sezioni estreme del concio esclusivamente nella direzione dell'asse Y .

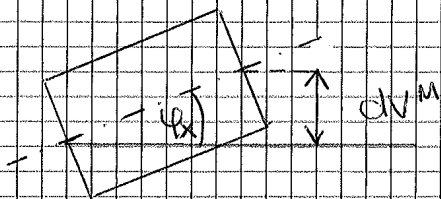
Nel caso del taglio si ha:

$$dV^T = T_y \cdot dz$$

con dV^T spostamento in direzione Y dovuto al taglio, T_y scorrimento delle due sezioni e dz lunghezza del concio elementare.

Nel caso del momento flettente e considerando la rotazione φ_x del concio si ha:

$$dV^M = -\varphi_x \cdot dz$$



NB si sono trascurati gli infinitesimi di ordine superiore dovuti alla curvatura flessionale, cioè alla variazione di rotazione $d\varphi_x$.

$$d(dV^M) = -\frac{1}{2} d\varphi_x \cdot dz$$

Tra le componenti del vettore deformativo ci sono gli scarti
 menti (γ_x, γ_y), la dilatazione assiale (ϵ_z), le curvatures
 (χ_x, χ_y) e l'angolo unitario di torsione (θ).

Tra le componenti del vettore degli spostamenti figurano
 oltre alle componenti ordinarie (u, v, z), quelle generalizzate
 ($\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$) cioè gli angoli di rotazione attorno agli
 assi di riferimento.

Anche le EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO si possono
 scrivere in forma matriciale:

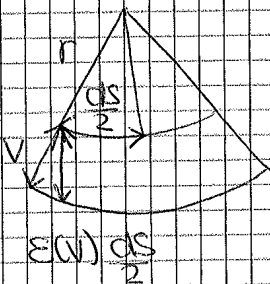
$$\begin{bmatrix}
 d/dz & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & d/dz & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & d/dz & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & d/dz & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & d/dz & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d/dz
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 T_x \\
 T_y \\
 N \\
 M_x \\
 M_y \\
 M_z
 \end{bmatrix}
 +
 \begin{bmatrix}
 q_x \\
 q_y \\
 p \\
 m_x \\
 m_y \\
 m_z
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}$$

CARATTERISTICHE STATICHE FORZE GENERALIZZATE ESTERNE

In forma compatta: $[a]^* \{Q\} + \{F\} = \{0\}$ ($[a]^T = [a]^*$)

TRAVI PIANE AD ASSE CURVILINEO

Uglio trovare la relazione tra q ed η per
 la trave curvilinea.

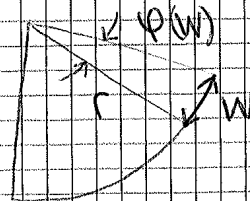


ϵ è funzione di v . Lo ϵ hanno
 il contributo sia di N che di
 T per la trave curvilinea.

$ds = r d\theta$

Lo spostamento assiale w produce una variazione
 di angolo $\varphi(w)$ che a meno di infinitesimi
 di ordine superiore vale

$\varphi(w) = \frac{w}{r}$



γ
 $\left\{ \begin{array}{l} \frac{dV}{ds} : \text{contributo dello stato reticolare} \\ -\frac{W}{r} : \text{dominio di interazione tra spostamento} \\ \varphi : \text{osside e rotazionale} \end{array} \right.$

$\frac{V}{r}$ e $\frac{W}{r}$ sono equivalenti cinematici dell'interazione tra N e T .

Nel confronto con le eq. statiche, in forma matriciale, si osserva che, a meno dei segni opposti dei termini non differenziali, la matrice statica è la trasposta di quella dinamica.

STATICA

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{ds} & -\frac{1}{r} & 0 \\ \frac{1}{r} & \frac{d}{ds} & 0 \\ -1 & 0 & \frac{d}{ds} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q \\ p \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

DINAMICA

$$\begin{bmatrix} \gamma \\ \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ds} & -\frac{1}{r} & 1 \\ \frac{1}{r} & \frac{d}{ds} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{ds} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ W \\ \varphi \end{bmatrix}$$

$$[a]^* [q] + [F] = [0] \\
 [q] = [a]^{-1} [q]^*$$

I termini non differenziali nello spostamento hanno cambiato segno.

si ha quindi:

$$[\partial]^* [H] [\partial] [N] \{\eta\} + [N] \{F\} = \{0\}$$

Pre-moltiplicando entrambi i membri per $[N]^T$ si ottiene infine:

$$([N]^T [\partial]^* [H] [\partial] [N]) \{\eta\} = - \{F\}$$

(eq. di forme per le travi curve)

Il problema elastico per le travi curve e per gli archi:

$$[\mathcal{K}] \{\eta\} = - \{F\} \quad \text{per } 0 < s < l$$

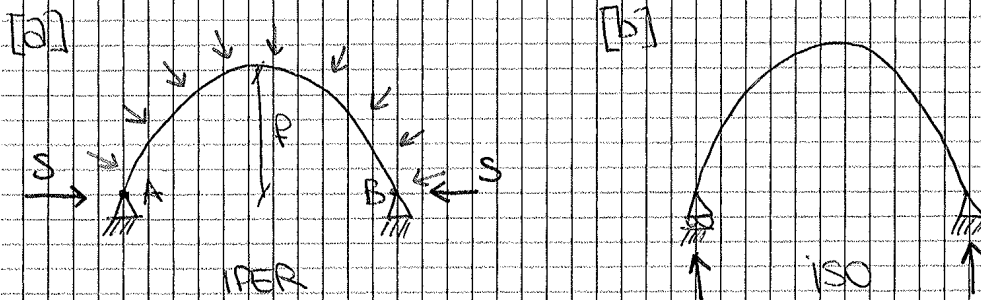
$$([N]^T [H] [\partial] [N]) \{\eta\} = \{0\} \quad \text{per } s=0, l$$

$$\{\eta\} = \{\eta_0\} \quad \text{per } s=0, l$$

ARCHI

L'arco è una struttura che viene progettata sotto peso proprio, il carico accidentale è irrilevante. La resistenza dell'arco è per FORMA in virtù delle caratteristiche geometriche. Il fine progettuale è quello di orientare le forze per non avere momenti flettenti.

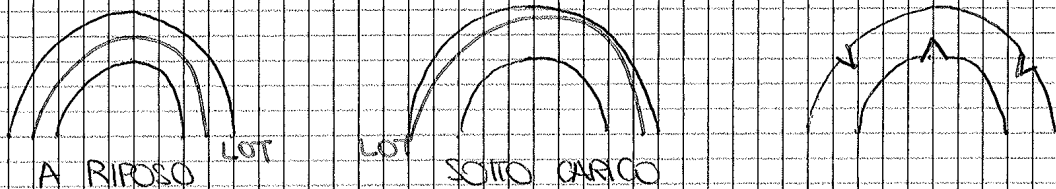
↳ come varia la spinta di un arco al ↓ della sua pendenza?



L'arco può essere classificato in base all'andamento dell'INTRADOSO:

- ARCO A TUTTO SESTO
- ARCO A SESTO ACUTO
- ARCO A SESTO RIBASSATO
- ARCO A SESTO RIALZATO
- ARCO RAMPANTE

Quando avviene la rotura di un arco, di solito le rotture si evidenziano all'introdosso in chiave o nell'estrodosso.

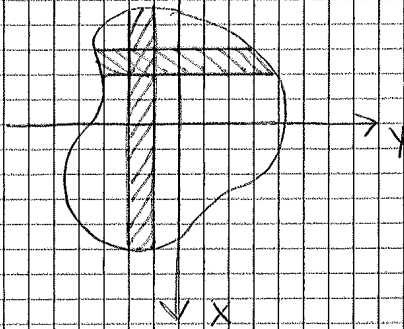


LOT: line of thrust

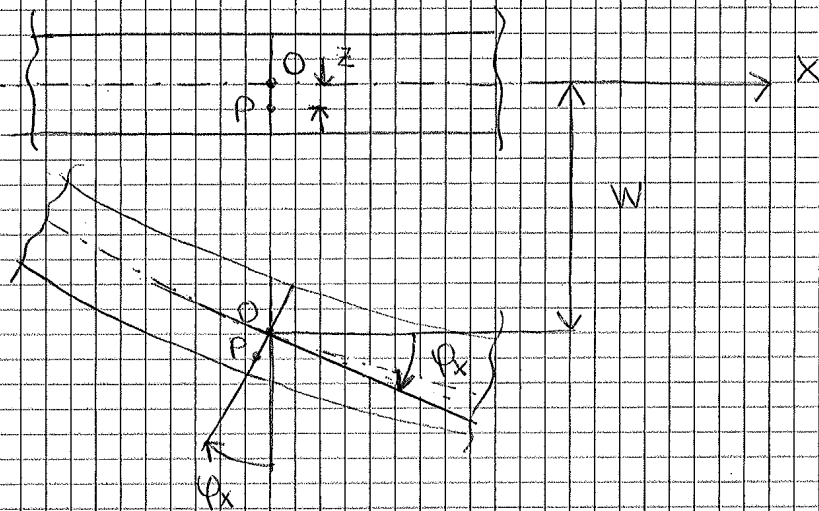
Per archi hanno delle costruzioni di tipo statico:

- INCASTRATI
- CON 2 CERNIERE
- CON 3 CERNIERE
- A SPINTA ELIMINATA

L'ipotesi cinematica di Kirchhoff assume che i segmenti ortogonali al mozzo medio, a deformazione avvenuta, restino ortogonali al mozzo medio deformato.

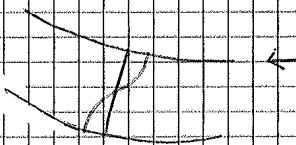


Divido la costa in strisce e considero le strisce come travi.



ϕ_x : angolo di rotazione attorno all'asse y

ϕ_y : angolo di rotazione attorno all'asse $-x$



la distorsione di taglio nel mozzo medio con l'ipotesi di Kirchhoff viene trascurata perché h è piccola.

Le sezioni trasversali restano ortogonali al piano medio. Essendo lineare la rotazione delle sezioni trasversali, ho delle equazioni lineari per u e v .

Dall'ipotesi cinematica segue per derivazione il campo deformativo.

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} z = - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z \\ \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} z = - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} z \\ \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad \text{CAMPO DEFORMATIVO}$$

Le ϵ_x e ϵ_y dicono che la deformazione può essere vista come 2 ordini di deformazione e sono a z e alla curvatura.

$$\begin{cases} \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) z = - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \left(- \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \right) \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \left(- \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \right) \end{cases}$$

γ_{xz} e γ_{yz} dicono che il piano medio resta piano e non ci sono distorsioni.

γ_{xy} : distorsione in un punto qualunque della lastra di 2 fibre dirette inizialmente come x ed y .

nei punti in cui le 2 strisce si incontrano queste coloriamo e si genera γ_{xy} . E' come se fosse un grigliato.

Lo spessore h è talmente piccolo da dover
 possibilmente di sviluppo la tensione σ_z molto
 basse quindi trascurabili.

In conseguenza nasce uno stato tensionale piano

NB Ricordiamo però che uno stato non può
 essere deformativo piano e tensionale piano
 allo stesso tempo.

Ho uno stato tensionale piano perché non ho
 tensioni con pedici z .

In realtà però sto dimenticando ϵ_z .

Ho escluso gli svincolamenti di h zero quando
 faccio l'equazione costitutiva non posso

escludere l'esistenza di ϵ_z anche se assumo
 che $\epsilon_z \ll \epsilon_x, \epsilon_y$ considero quindi $\epsilon_z = \text{costante}$
 anche se in realtà non è così.

Invece le relazioni costitutive:

$$\sigma_x - \nu \sigma_y = E \epsilon_x$$

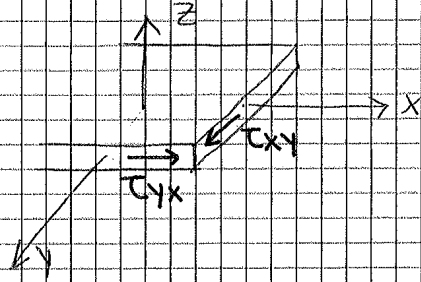
$$\nu \sigma_y - \nu^2 \sigma_x = E \nu \epsilon_y$$

da cui per combinazione lineare, si ricavano
 le espressioni del campo tensionale lineare con z :

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) = \frac{E}{1-\nu^2} (\chi_x + \nu \chi_y) z \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) = \frac{E}{1-\nu^2} (\chi_y + \nu \chi_x) z \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \chi_{xy} \cdot z \end{aligned} \right.$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \chi_{xy} \cdot z$$

$$= G$$

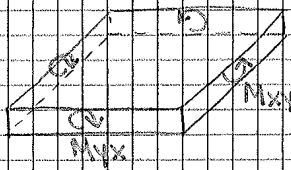


Anche se τ hanno un andamento triangolare
 il piano medio è scarico
 anche per le τ

Integrando le tensioni lungo h , si ottengono
 le caratteristiche della sollecitazione interna.

Sono i momenti flettenti e il momento
 torcente per unità di lunghezza:

$$\begin{cases} M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z \, dz \\ M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z \, dz \\ M_{xy} = M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z \, dz \end{cases}$$



← la τ da cui deriva è sul
 piano di normale x con
 direzione y .

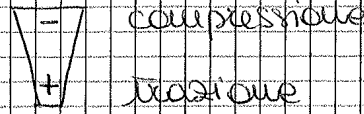
→ Ruolo del momento torcente.

Per avere il comportamento "a piastra", il
 rapporto tra le dimensioni di una piastra
 rettangolare dovrebbe essere < 1.5 .

Se invece la piastra è allungata, il
 comportamento a piastra si realizza in
 prossimità dei bordi (M_{xy} importante), mentre
 in mezzavia sostanzialmente lavorano solo
 le trasse più corte.

NB Rigidezza flessionale $12EI$ vs mb^3

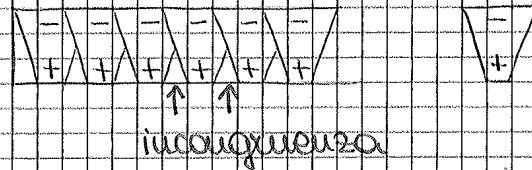
$$EI_{TRAVE} = \frac{Eh^3}{12}$$



effetto Poisson

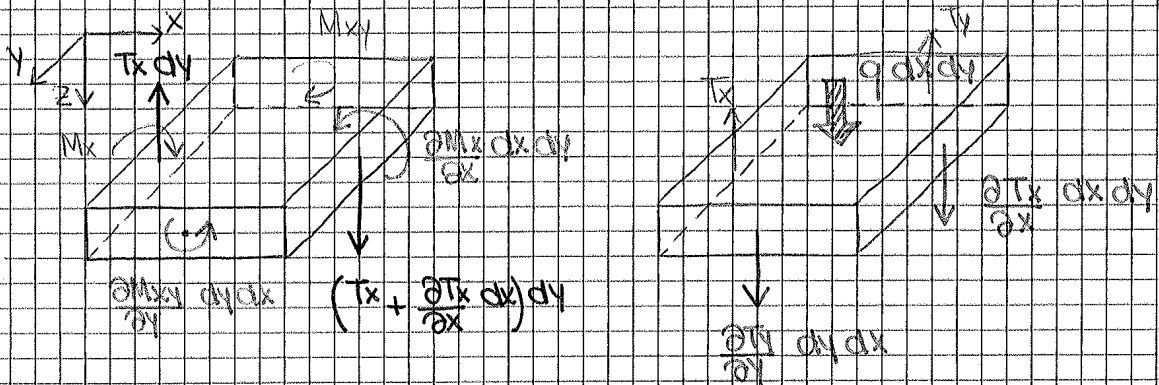
$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$s \ll L, b$$



SOLUZIONE FLESSIONALE DUE LASTRE PIANE
 → EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO

Si considera un elemento infinitesimo di lastra, sottoposto al carico esterno e alle caratteristiche statiche:



- equilibrio alla rotazione attorno ad y;
- equilibrio alla traslazione z;
- equilibrio alla traslazione x ed y

noio γ_x e γ_y gli spostamenti dovuti agli sforzi taglianti T_x e T_y .

Le equazioni cinematiche definiscono le caratteristiche deformative in funzione degli spostamenti generalizzati:

$$\begin{bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{bmatrix}$$

Le eq cinematiche vengono ricavate trascurando quelle statiche

NB γ_x e γ_y contraddittorio e ipotesi iniziali di Kirchhoff

Le prime 2 equazioni sono quelle della trave

[2]
5x3

Le equazioni statiche in piano ristrette

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & -1 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

nel caso delle lastre piatte, la dualità statico-cinematica, è espressa dal fatto che la MATRICE STATICA, a meno del segno dei termini unitari, è la trasposta di quella CINEMATICA.

Le equazioni cinematiche, statiche, e costitutive, in forma compatta:

$$\{q\} = [a] \{\eta\} \quad \text{EQ. CINEMATICHE}$$

$$[a]^* \{Q\} + \{F\} = \{0\} \quad \text{EQ. STATICHE}$$

$$\{Q\} = [H] \{q\} \quad \text{EQ. COSTITUTIVE}$$

Si definisce l'operatore matriciale di campo:

$$[A] = [a]^* [H] [a]$$

$3 \times 3 \quad 3 \times 5 \quad 5 \times 5 \quad 5 \times 3$

Il problema elastico della nostra mano inflessa si rappresenta con la seguente equazione operatoriale unita di relative condizioni al contorno:

$$[A] \{\eta\} = - \{F\} \quad \forall P \in S$$

$$[N]^T \{Q\} = \{P\} \quad \forall P \in C_1$$

$$\{\eta\} = \{\eta_0\} \quad \forall P \in C_2$$

C_1 : porzione del contorno C dove sono assegnate le condizioni statiche.

C_2 : porzione complementare dove sono assegnate condizioni cinematiche (o vincolari).

Dato $\{\eta\}$ il versore normale al contorno C_1 è semplice esplicitare la condizione di equivalenza al contorno.

$$\begin{bmatrix} n_x & n_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_x & 0 & n_y \\ 0 & 0 & 0 & n_y & -n_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_n \\ M_{nx} \\ M_{ny} \end{bmatrix}$$

ESUAZIONE DI SOPHIE GERMAIN

trascurando la deformabilità a taglio, è possibile giungere ad un'equazione differenziale nella sola incognita cinematica W . Derivando le equazioni di equilibrio si ha:

$$\bullet \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - T_x = 0 \rightarrow \frac{\partial T_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$\bullet \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - T_y = 0 \rightarrow \frac{\partial T_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}$$

HO 3 curvature in funzione di $W \rightarrow$ ho delle derivate quarte.

Introducendo le equazioni costitutive nell'eq di traslazione scritta in funzione dei momenti* si ottiene la:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad \text{ESUAZIONE DI SOPHIE GERMAIN}$$

eq differenziale del 4° ordine del piano elastico.

USO l'operatore lagrangiano:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

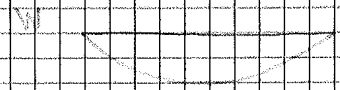
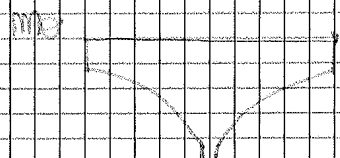
si ottiene:

$$\nabla^4 W = \frac{q}{D}$$

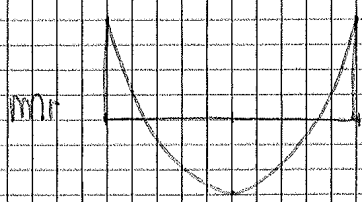
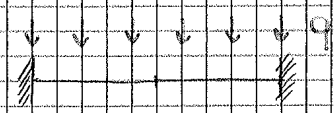
NB Analogia con l'eq delle linee elastiche delle travi.

$$\bullet \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + q = 0 \quad \bullet \begin{cases} M_x = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \\ M_y = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

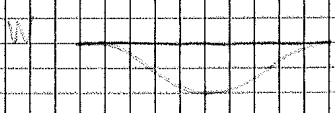
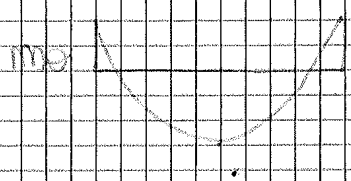
↳ PIASTRA CIRCOLARE APOGGIATA CON P CONCENTRATO



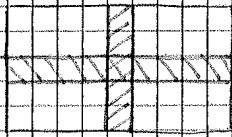
↳ PIASTRA CIRCOLARE INCASTRATA CON P DISTRIBUITO



In mezzo: $M_r^{MAX} = M_0^{MAX}$



PIASTRE RETANGOLARI

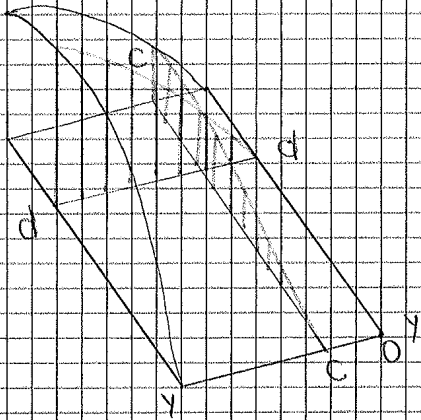


Qui non ho momenti torcenti per simmetria.

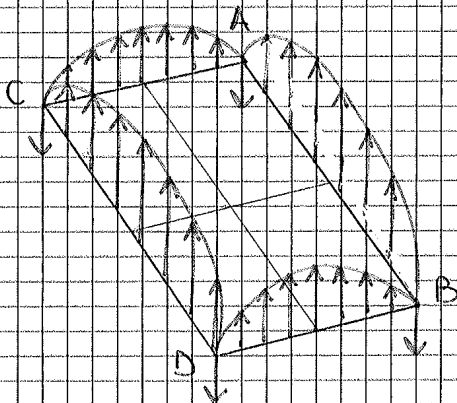


Prendo due assi generiche

Le sbalze più corte vicino ai bordi sono più rigide \rightarrow si genera un momento torcente sulle sbalze lunghe.



Il momento torcente M_{xy} cresce verso lo spigolo.



Le reazioni verticali sono max sugli assi di simmetria.

Per effetto dei momenti torcenti la losca tende ad alzare gli spigoli \rightarrow introduco le forze verticali concentrate negli spigoli.

per abbassarli \rightarrow hanno gli spostamenti e nascono dei momenti torcenti maggiori lungo la diagonale.

MOMENTI PRINCIPALI

Relativamente ad un punto dello stato, si dicono DIREZIONI PRINCIPALI DEI MOMENTI ξ e η le due direzioni ortogonali ove si annulla il momento torcente M_{xy} e quindi si annullano le tensioni tangenziali τ_{xy} (ISOSTATICHE DEI MOMENTI) coincidono con quelle principali delle tensioni.

Si determinano i MOMENTI PRINCIPALI M_{ξ} e M_{η} , e' uno massimo e l'altro minimo nel punto, ove $M_{\xi\eta}$ è nullo.

Le DIREZIONI PRINCIPALI DELLE CURVATURE sono le due direzioni ortogonali secondo cui si annulla il doppio di torsione $\chi_{xy}/2$.

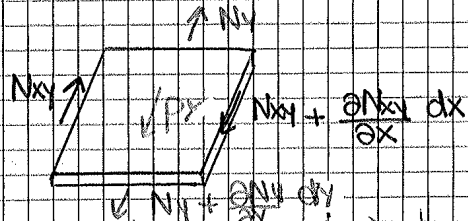
Nel caso in cui il MATERIALE E' ISOTROPO, e' equoziale costitutiva mostra come le direzioni principali dei momenti e le direzioni principali delle curvature coincidono.

1) Considero di equilibrio uno elemento lungo l'asse y fornisce:

$$(N_y + \frac{\partial N_y}{\partial y} dy) dx - N_y dx + (N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} dx) dy - N_{xy} dy + P_y dx dy = 0$$

da cui:

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + P_y = 0$$



Ci sembrerebbe una terza equazione perché ho 3 incognite statiche: $N_x, N_y, N_{xy} \rightarrow$ ho un problema una volta iperstatico.

In definitiva si ottiene

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [a]^* [q] + [f] = [0]$$

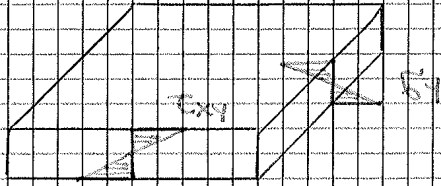
Applicando il PLV (esercizio*) si ottengono le equazioni cinematiche.

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ \theta_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad [q] = [a] [r]$$

E_x ed E_y rappresentano le due dilatazioni assiali, mentre θ_{xy} rappresenta lo scostamento angolare nel piano medio.

In fine u e v rappresentano, rispettivamente, gli spostamenti lungo x e lungo y .

Lo stato di Kirchhoff era flessionale:



L'elasticità sarà anche influenzata da D (la possiamo far comparire).

NB Non ho accoppiamento tra soluzione membrana e flessionale. Posso studiare i 2 problemi separatamente ed avere il principio di sovrapposizione degli effetti (così non solo per le lastre curve)

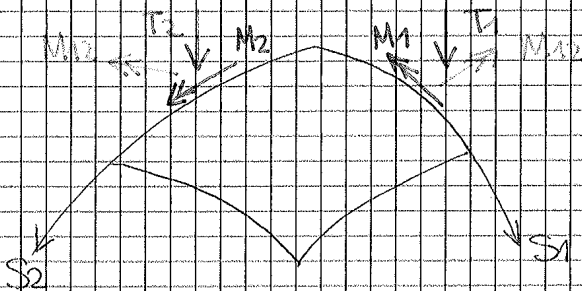
LASTRE A COPPIA CURVATURA

Valle e ipotesi di Kirchhoff sullo spessore che deve essere sottile ma non troppo per avere rigidezza flessionale. Le lastre a doppia curvatura hanno una sezione che non è più costante nel piano.



Se la lastra è a doppia curvatura, si può scegliere un sistema di coordinate curvilinee principali s_1 ed s_2 sulle quali la spessore media presenti la massima e la minima curvatura.

- Il regime flessionale è costituito da:
 - tagli T_1, T_2 , momenti flettenti M_1, M_2 , momento torcente M_{t2} .
 - spostamenti U_1, U_2 tra ciascuno direzione principale di curvatura e la normale al piano tangente, curvature flessionali χ_1, χ_2 e curvatura torsionale χ_{t2} .



↳ per MATRICI vedi pg. 378 - 382 "SDC1" computeri

Le ultime 5 righe della matrice 8×8 sono quelle di Kirchhoff, le prime 3 equazioni le ho scritte in funzione di D solo per comodità.

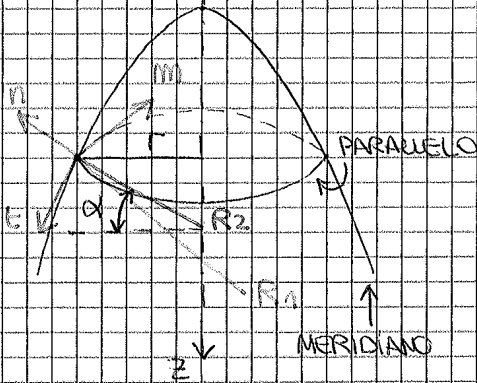
Le equazioni costitutive sono state derivate domandando il problema membrana e flessionale.

Le equazioni cinematiche che definiscono le caratteristiche deformative in funzione degli spostamenti generalizzati (u_1, u_2, u_3, φ_1 e φ_2) si possono porre in forma matriciale.

$$\{q\} = [a] \{r^*\} \quad \{r^*\} \text{ nel SE ridotto}$$

Le equazioni indefinite di equilibrio sono 5: 3 di equilibrio alla traslazione nelle 3 direzioni e 2 di equilibrio alla rotazione attorno agli assi tangenti S_1 ed S_2 .

R_2 giace sul piano parallelo, ma la sua proiezione giace sul piano parallelo.



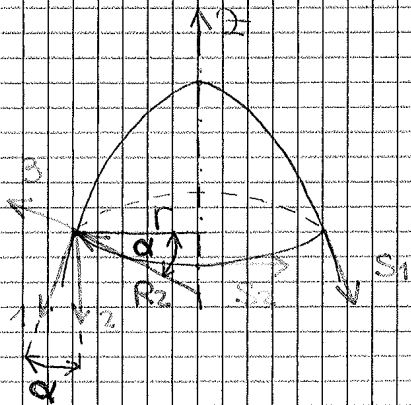
R_1 : raggio di curvatura del meridiano

R_2 : raggio di curvatura delle sezioni normali definita dai versori t ed n

$r = R_2 \cos \alpha$: raggio parallelo

Il raggio di curvatura r è l'inverso della curvatura.

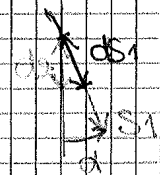
Il centro di curvatura di R_1 può essere ovunque, R_2 invece ha il centro di curvatura sull'asse z .



Indicando con s_1 la coordinata curvilinea lungo i meridiani, e con s_2 la coordinata curvilinea lungo i paralleli si ha

$$ds_1 = ds = \frac{dz}{\cos \alpha}$$

$$ds_2 = r d\theta$$



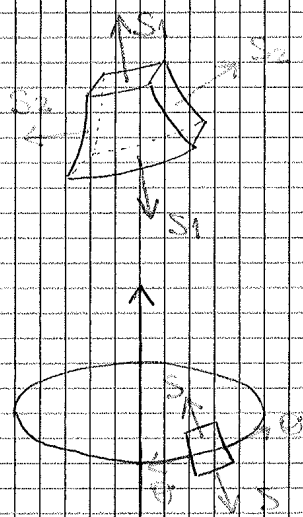
α è l'angolo che la tangente t al meridiano fa con l'asse di simmetria, uguale all'angolo che la normale n alla superficie fa con il raggio r .

θ è la longitudine.

Le equazioni cinematiche per le lastre di rivoluzione caricate in modo generico si presentano come segue:

$$\begin{bmatrix} E_s \\ E_\theta \\ \gamma_{s\theta} \\ \gamma_s \\ \gamma_\theta \\ \gamma_{s\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sin \alpha}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{R_2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & (\frac{\partial}{\partial s} - \frac{\sin \alpha}{r}) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{R_1} & 0 & \frac{\partial}{\partial s} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sin \alpha}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & (\frac{\partial}{\partial s} - \frac{\sin \alpha}{r}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \phi_s \\ \phi_\theta \end{bmatrix}$$

Naturalmente le equazioni statiche si presentano in maniera perfettamente duale (vedi pg. 37)



Quello che avviene sulle linee di normale s_2 , lo chiamo θ . Quello che avviene lungo i meridiani lo chiamo s . E_s ed E_θ sono le deformazioni delle strisce dirette come i meridiani e i paralleli. La distanza delle mottonelle curvilinee è chiamata $\gamma_{s\theta}$. Le lastre a doppia curvatura esibiscono il comportamento membranale.

$$M_{se} = 0 \rightarrow X_{se} = 0$$

$$T_{\alpha} = 0 \rightarrow T_{\alpha} = 0$$

Sulle forze dove la normale è tangente al parallelo non c'è il taglio T_{α} .

$$N_{se} = 0 \rightarrow F_{se} = 0$$

Non ho distorsione nel piano dello sfilamento.

Si annullano le 3 caratteristiche di sollecitazione e deformazione.

Il problema ora ha 5 incognite e 3 equazioni e sarà un problema 2 volte iperstatico.

$$T_s \neq 0 \rightarrow T_s \neq 0$$

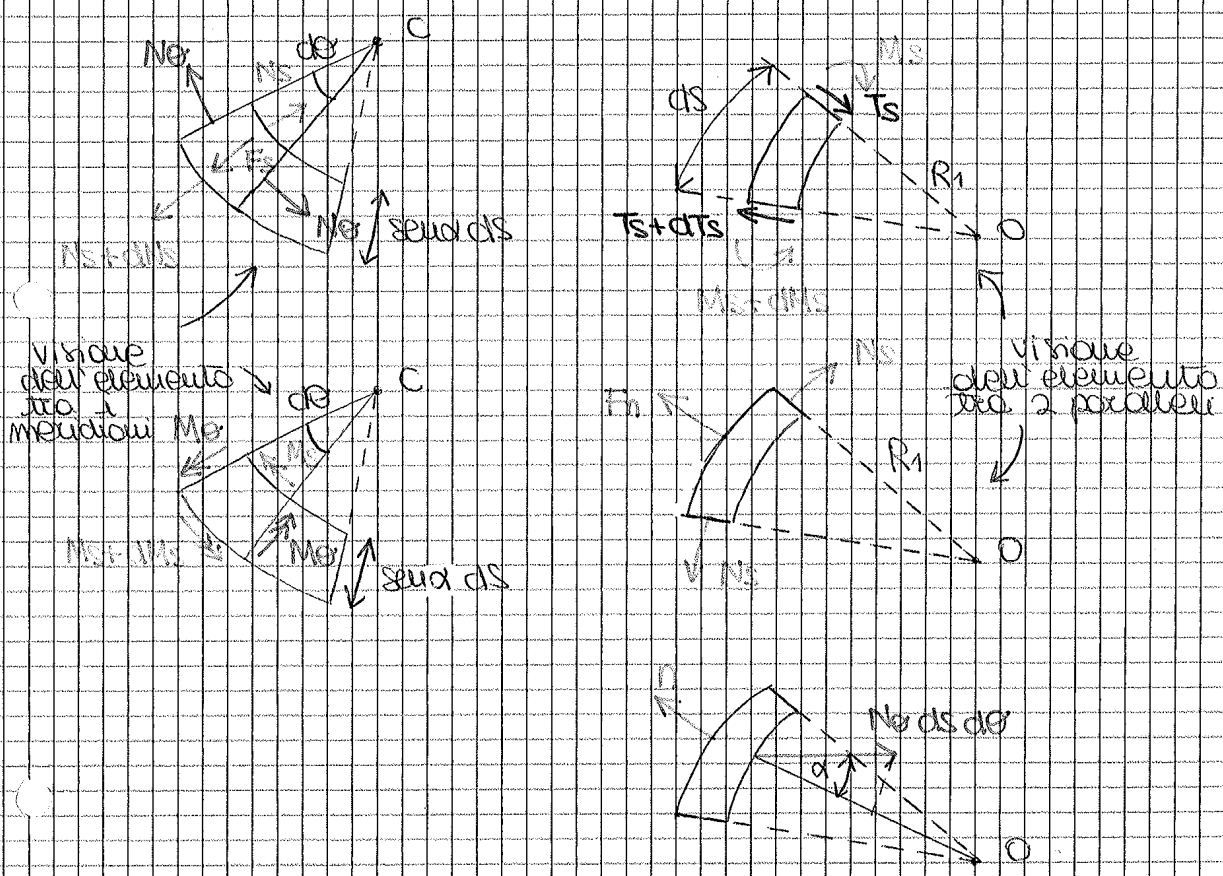
EQ. STATICHE:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{d}{ds} + \frac{sewa}{F} \right) & -\frac{sewa}{F} & \frac{1}{R_1} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_2} & \left(\frac{d}{ds} + \frac{sewa}{F} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \left(\frac{d}{ds} + \frac{sewa}{F} \right) & -\frac{sewa}{F} \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} N_s \\ N_e \\ T_s \\ M_s \\ M_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_s \\ F_n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Per ragioni di simmetria sono identicamente soddisfatte, e quindi non compaiono nelle equazioni statiche, le condizioni di equilibrio alla rotazione lungo i paralleli e alla rotazione attorno ai meridiani.

Si verificano due le equazioni statiche, imponendo le 3 condizioni di equilibrio ad un elemento infinitesimo della losca, delimitato da 2 meridiani posti a distanza infinitesima $ds_2 \ll r d\theta$ e da 2 paralleli posti a distanza infinitesima $ds_1 \equiv ds$



NB. Il comportamento membranale è accoppiato a quello flessionale nelle losche a doppia curvatura.

Nelle losche piane, il comportamento membranale va per lo suo strada.

MEMBRANE E GUSCI SOTTILI

Si dicono MEMBRANE gli elementi strutturali bidimensionali privi di rigidità flessionale. Tali elementi possono sostenere unicamente sforzi di trazione contenuti nel piano tangente. Nel caso avvolto un guscio è formato dalle VOLTE SOTTILI che sono coste a doppia curvatura di spessore costante scritte ad presentare una rigidità flessionale del tutto trascurabile. Tali elementi possono sostenere solo SFORZI DI COMPRESSIONE contenuti nel piano tangente.

Nel caso delle membrane, pertanto, si suppone una rigidità a compressione nulla, mentre nel caso delle volte sottili si suppone una rigidità a trazione nulla. Entrambe le ipotesi implicano una rigidità flessionale nulla.

Nella membrana N_s ed N_θ sono per definizione uguali o uguali a zero.

Nel guscio compresso invece N_s ed N_θ sono di compressione quindi minori o uguali a zero.

Le linee degli spessori è guidato dall'instabilità soprattutto negli archi dove gli spessori variabili sono massimi.

I sezioni sono delle strutture membranoidi tese.

Per le membrane e le volte sottili di rivoluzione, le equazioni cinematiche e statiche si semplificano notevolmente.

Analizziamo solo gli sforzi lungo i meridiani e i paralleli, N_s e N_θ .

Forzo lavorare la struttura solo con meridiani e paralleli che sono direzioni principali e trascurare tutto quello che è flessionale.

NB Alla base del serbatoio ho un incastro, non è quindi vero che ho un comportamento puramente membranale, in prossimità del vincolo ho un incastro.

EQ. STATICHE

↳ LASTRA DI RINFORZO GENERICA

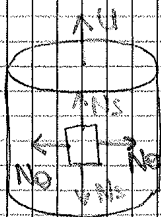
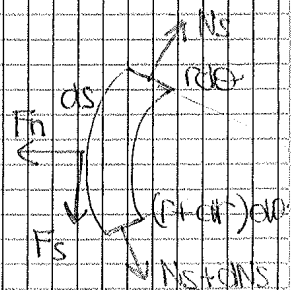
$$\begin{bmatrix} \left(\frac{d}{ds} + \frac{sew}{r}\right) & -\frac{sew}{r} & \frac{1}{R_1} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_2} & \left(\frac{d}{ds} + \frac{sew}{r}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \left(\frac{d}{ds} + \frac{sew}{r}\right) & -\frac{sew}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_s \\ N_\theta \\ T_s \\ M_s \\ M_\theta \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} F_s \\ F_n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

F_s ed F_n sono i termini noti

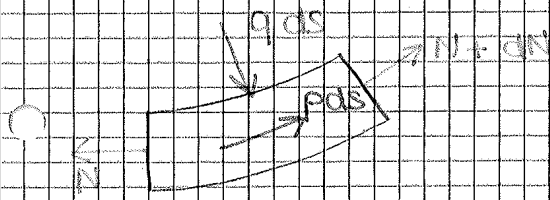
↳ LASTRA SOTTILE

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{ds} + \frac{sew}{r} & -\frac{sew}{r} \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_s \\ N_\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_s \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Nelle lastre sottili taglio T_s e momenti M_s ed M_θ sono nulli.



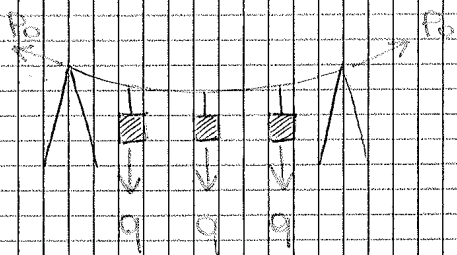


da cui si ottengono due equazioni ma l'unica incognita N :

$$\left. \begin{aligned} \frac{N}{r} &= q \\ \frac{dN}{ds} &= -P \end{aligned} \right\} \text{eq della fune.}$$

La fune, a differenza delle membrane, non può assumere qualsiasi forma, ma è costretta a seguire la sua curva delle pressioni.

L'unica incognita è N , ho 2 termini noti (p e q) ma devo usare due equazioni perché quando varia q , varia p e di conseguenza anche r . La pinta della fune cambia, quindi cambia anche r e devo risolvere l'equilibrio in condizione deformata.



P_0 è il tiro della fune in condizione di riposo. P_0 aumenta quando aumenta il carico q . Aumentando q cambia la configurazione della fune che segue quella della cap.

NB la soluzione assunta dall'equilibrio dipende dalla pinta della fune nella configurazione deformata.