NUMERO: 924

DATA: 31/03/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Fiorello

MATERIA: Idrologia

Prof. Claps

POLITECNICO DI TORINO

INGEGNERIA CIVILE

IDROLOGIA

TEORIA

Docente relatore del corso:
Prof. P. Claps

Esercitatore:
Prof. P. Allamano

a.a. 2013-2014

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 56

ANALISI STATISTICA

La prima fase dell'analisi idrologica individua le grandezze idrologiche di interesse e le stazioni di misura. Si procede quindi alla raccolta dati e alla loro analisi statistica e alla valutazione dei valori che le variabili indagate potranno assumere nel futuro.

La stima dei valori di una qualsiasi variabile idrologica consiste essenzialmente nella determinazione della sua funzione di probabilità cumulata.

Nell'analisi statistica si seguono generalmente le seguenti fasi:

- *Formulazione dell'ipotesi sulla composizione della popolazione della X, individuando quale fra le distribuzioni di probabilità meglio si adatta a descrivere la popolazione;*
- *Calcolo dei parametri, in funzione degli N valori osservati della X. In questo modo si trovano le migliori stime dei parametri che caratterizzano la distribuzione utilizzata traendo dal campione la massima informazione sulla popolazione da cui esso proviene;*
- *Verifica dell'ipotesi con test statistici atti a verificare che gli scarti che si riscontrano fra la composizione della popolazione e quella del campione siano o meno significativi.*

Le analisi statistiche dei fenomeni idrologici si basano essenzialmente sull'uso delle distribuzioni di probabilità, quindi si analizzeranno nel seguito le distribuzioni di probabilità più comunemente adoperate nello studio di tali grandezze.

DISTRIBUZIONI DI PROBABILITA'

- *NORMALE*

  Una variabile X si dice distribuita secondo la legge normale (o distribuita normalmente) se la sua funzione densità di probabilità (PDF) e la sua funzione distribuzione di probabilità cumulata (CDF) hanno rispettivamente la forma:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

$$P(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx$$

In cui le grandezze μ e σ sono i parametri della distribuzione e ne rappresentano rispettivamente la media e lo scarto quadratico medio. Cambiare il valore della media significa traslare il grafico orizzontalmente, cambiare lo scarto quadratico medio equivale a cambiarne la forma.

Sostituendo alla variabile X, la variabile ridotta o standardizzata u definita come:

$$u = \frac{x-\mu(x)}{\sigma(x)}$$

Se la distribuzione LOG NORMALE è a 3 parametri la variabile u diventa:

$$u = a \cdot \ln(x - x_0) + b$$

Con:

$$x_0 = \mu(x) - \frac{\sigma(x)}{t}$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{\ln\left[1 + \frac{\sigma^2(x)}{(\mu(x) - x_0)}\right]}}$$

$$b = \frac{1}{2a} - a \cdot \ln(\mu(x) - x_0)$$

- *ESPONENZIALE*

Una variabile X si dice distribuita secondo la legge esponenziale se la funzione densità di probabilità (PDF) e la funzione di probabilità (CDF) si possono esprimere come:

$$p(x) = \frac{1}{k} \cdot \exp\left[-\frac{x - x_0}{k}\right]$$

$$P(x) = 1 - \exp\left[-\frac{x - x_0}{k}\right]$$

Con

$$x_0 = \mu(x) - \sigma(x)$$

$$k = \sigma(x)$$

Dove K determina la forma del grafico che rappresenta la densità di probabilità. Al crescere di k, la moda diminuisce e tutto il grafico tende a spianarsi. X_0 invece determina la posizione, se aumenta, il grafico si sposta verso destra, se diminuisce, il grafico si sposta verso sinistra.
La distribuzione esponenziale è limitata inferiormente ed illimitata superiormente.
Se il limite inferiore x_0 è noto k si esprime come $k = \mu(x) - x_0$

DISTRIBUZIONI DEI VALORI ESTREMI

L'analisi statistica degli estremi idrologici si può condurre secondo due diversi approcci non alternativi. Il primo consiste nel considerare solo i massimi (o minimi) valori in un assegnato intervallo di tempo, generalmente un anno, utilizzando cioè la serie dei massimi (minimi) annuali e quindi un valore per ogni anno. Il secondo approccio, invece, tiene conto di tutti i valori che eccedono (o sono inferiori) una soglia arbitrariamente prefissata, in genere abbastanza elevata (bassa), e si basa quindi su un numero di eventi che può cambiare da anno in anno. In un caso si estrae dal campione di dati idrologici solo la serie dei massimi (minimi) annuali, nell'altro quello dei valori superiori (inferiori) ad una soglia.

$$F(x) = e^{-e^{-y}}$$

$$y = \begin{cases} -\vartheta_3^{-1} \log\left\{1 - \dfrac{\vartheta_3 \cdot (x - \vartheta_1)}{\vartheta_2}\right\} & \text{per } \vartheta_3 \neq 0 \\ \dfrac{(x - \vartheta_1)}{\vartheta_2} & \text{per } \vartheta_3 = 0 \end{cases}$$

STIMA DEI PARAMETRI

Il problema centrale delle applicazioni idrologiche della statistica è quello di risalire dal campione alla funzione di probabilità che definisce la distribuzione della variabile (PROBLEMA DI INFERENZA). La distribuzione di una variabile casuale risulta completamente definita quando sia assegnata la probabilità di non superamento di ogni valore.

Per definire un parametro ignoto θ della variabile X, ci si serve di uno STIMATORE, composto da un insieme di operazioni.

Usiamo due metodi differenti per calcolare i paramenti delle distribuzioni log-normale e Gumbel: quello dei momenti e quello degli L-momenti e della massima verosimiglianza.

Sia i momenti che gli L-momenti sono misure di posizione, scala e forma delle distribuzioni di probabilità. Gli L-momenti godono della proprietà di esistere alla sola condizione di esistenza della media della distribuzione, quindi in alcuni casi i momenti ordinari non esistono. I momenti danno invece maggiore peso alle code estreme delle distribuzioni.

- *Metodo dei momenti:*
  - *Log-normale:*

$$\vartheta_1 = \ln(\mu(x)) - \frac{\vartheta_2^2}{2}$$

$$\vartheta_2 = \sqrt{\ln\left(1 + \frac{\sigma^2(x)}{\mu^2(x)}\right)}$$

  - *Gumbel*

$$\vartheta_1 = \mu(x) - 0{,}5772 \cdot \vartheta_2$$

$$\vartheta_2 = \frac{\sqrt{6} \cdot \sigma(x)}{\pi}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 56

$$B_0 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$B_1 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(i-1)}{(N-1)} \cdot x_i$$

$$B_2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(i-1)\cdot(i-2)}{(N-1)\cdot(N-2)} \cdot x_i$$

$$\tau = \frac{L_3}{L_2}$$

$$\Gamma = EXP.(LN.GAMMA(1+\vartheta_3))$$

Dove x_i=x per la distribuzione di Gumbel e per la GEV, mentre è uguale a x_i=ln(x) per la distribuzione log-normale.

- *Metodo della massima verosimiglianza*

Un metodo molto importante di cercare uno stimatore "buono" è quello di usare il principio della massima verosimiglianza. Questo principio stabilisce di scegliere per un campione x dato, quel valore di θ per cui è massima la probabilità di estrarre proprio quell'x.

Si abbia un campione di misure $x_1, x_2,\dots,x_n$. Lo stimatore $\widetilde{\vartheta}$ è definito come il valore del parametro θ che massimizza la funzione di verosimiglianza per tutti i possibili valori di θ.

Costruisco la funzione di massima verosimiglianza:

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n, \vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_p) = f_X(x_1) \cdot f_X(x_2) \cdot \dots \cdot f_X(x_n)$$

Con $f_X(x_1)$ pari al valore della densità di probabilità della funzione calcolata in corrispondenza dei singoli valori.

Dovendo cercare i massimi, devo porre uguale a zero la derivata prima di V rispetto a θ. Dovrò scrivere tante equazioni quanti sono i parametri:

VERIFICA: TEST DI ADATTAMENTO

I test statistici forniscono una procedura che consente di misurare, sulla base delle osservazioni, la validità di un'ipotesi H_0 di fronte ad un'ipotesi alternativa H_1 (questa può, ma non necessariamente deve, coincidere con la negazione di H_0).

Per effettuare il test si eseguono i seguenti passi:

1. *Si divide lo spazio W in due regioni: regione di accettazione e regione di rigetto. L'ipotesi H_0 si accetta o si respinge a seconda che il campione usato per il test ricada nella prima o nella seconda regione.*
   Posso commettere due tipi di errore:
   - *ERRORE DEL 1° TIPO: rigetto di un'ipotesi vera H_0*
   - *ERRORE DEL 2° TIPO: accettazione di un'ipotesi falsa H_0*

   Si definiscono:

   α (livello di significatività): probabilità di rifiutare H_0 quando questa è vera (errore del 1° tipo)
   β (livello di rischio): probabilità di accettare H_0 quando questa è falsa (errore del 2° tipo)
   1-β (potenza del test): probabilità di rifiutare H_0 quando questa è vera

   Al diminuire di α diminuisce la potenza del test.

2. *Dopo aver effettuato la scelta dell'ipotesi H_0 devo scegliere l'INDICATORE detto "statistica test" (ST).*

3. *Devo quindi determinare la distribuzione della statistica test relativa ad N osservazioni. Quindi devo confrontare il valore vero con quello osservato. La statistica test osservata è l'unico valore noto della distribuzione.*

4. *Si deve scegliere una modalità di confronto tra il valore osservato e quello della statistica test vero. Scelgo un livello di significatività α che indica la probabilità di errore del primo tipo: α=5%*

5. *Combino i punti 3 e 4. Scelta la probabilità da rigettare e nota la distribuzione di probabilità della statistica, devo determinare l'intervallo di accettazione della statistica test:*

   $$ST_{\min} \leq ST \leq ST_{\max}$$

   Nei TEST a 1 CODA la statistica test è definita positiva ad il suo limite inferiore è uguale a zero, si ricerca quindi solo il limite superiore della regione di accettazione. I valori esclusi saranno quelli con un α troppo elevato.

Vediamo ora quali sono i principali test usati per la verifica dell'adattabilità della distribuzione a teorica a quella reale del campione in ananlisi.

TEST DI PEARSON O DEL χ^2

Il test di Pearson viene utilizzato per verificare l'ipotesi che la variabile di cui si possiede un campione sia distribuita secondo una legge di distribuzione di probabilità prefissata in modo indipendente dalla conoscenza dei dati costituenti il campione stesso. Vale a dire che, individuata una distribuzione di probabilità che potrebbe ben interpretare il comportamento della variabile in esame, attraverso questo test si misura il grado di adattamento di tale distribuzione al campione osservato, senza che venga formulata alcuna ipotesi sui valori di parametri della distribuzione prescelta basandosi sul campione stesso.

Il test richiede che si suddivida il campo di esistenza della variabile X in K intervalli equiprobabili che si escludono a vicenda dove lo si può calcolare come:

$$k = \mathrm{int}(2 \cdot n^{0,4})$$

Se l'intervallo i-esimo è definito dagli estremi $x_{i,inf}$ ed $x_{i,sup}$, si avrà che la probabilità che un'osservazione qualsiasi ricada nell'intervallo i-esimo, se l'ipotesi H_0 è vera, vale:

$$p_i = F_X\left(x_{i,\mathrm{sup}}\right) - F_X\left(x_{i,\mathrm{inf}}\right)$$

Il numero atteso di elementi nell'intervallo i-esimo, se H_0 è vera, vale np_i.

La probabilità dei singoli intervalli equiprobabili vale:

$$p_i = \frac{1}{k}$$

Il test di Pearson consiste nel confrontare il numero di osservazioni che teoricamente dovrebbero ricadere in una classe con quelli che effettivamente ricadono nell'intervallo n_i.

Se si vogliono confrontare tutti gli intervalli contemporaneamente, si può usare la grandezza statistica detta "statistica test":

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$$

Con:

n_i: numero di valori che cadono in una classe
np_i: numero di valori teorico che deve ricadere in una classe, è una costante
se $n_i - np_i = 0$ anche la sommatoria sarà uguale a zero e di conseguenza anche il chi quadro.

Al crescere di n, la statistica test del test di Pearson è asintoticamente distribuita come una distribuzione del chi-quadro con k-1 gradi di libertà.

Questo test è ad una sola coda perché la stat-test è definita positiva, quindi avrò come limite di accettazione un solo valore. Siccome il meglio che mi posso aspettare è che $X^2=0$, minore è X^2, migliore è il risultato.

TEST SULLE CARTE PROBABILISTICHE

Un'ulteriore categoria di test di adattamento si basa sulla valutazione dell'allineamento dei punti in carta probabilistica. Il test utilizza il coefficiente di correlazione r tra le serie ordinata delle osservazioni x_i ed i corrispondenti quantili ipotetici w_i definiti come:

$$w_i = F^{-1}x(p_i)$$

Dove p_i è la plotting position dell'i-esimo valore nella serie ordinata. Il coefficiente di correlazione è definito come:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)\cdot\left(w_i - \bar{w}\right)}{\left[\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2\cdot\left(w_i - \bar{w}\right)^2\right]^{0,5}}$$

Dove x segnato e w segnato soon i valori medi delle osservazioni e dei quantili. Più elevato è il coefficiente di correlazione, tanto migliore è l'allineamento dei punti in carta probabilistica. Il test è quindi basato sul confronto di r con opportuni valori tabellati in funzione di α e di n per la normale e la EV1.

Se r è inferiore al valore limite indicato, l'allineamento è peggiore di quello che ci si aspetterebbe e l'ipotesi H_0 viene rigettata con significatività α. Le tabelle sono costruite per poter essere usate con le seguenti plotting positions:

$$p_i = \frac{i - 3/8}{n + 1/4} \qquad \text{distribuzione di Gauss normale}$$

$$p_i = \frac{i - 0{,}44}{n + 0{,}12} \qquad \text{distribuzione di Gumbel}$$

TEST DI ADATTAMENTO DI ANDERSON-DARLING

Con il test di Anderson-Darling vado a valutare la differenza tra due curve sul grafico (x;F(x)): funzione empirica e distribuzione a due o tre parametri.

La definizione teorica della statistica test è la seguente:

$$Q^2 = n\cdot\int\left(\Phi(x) - F(x)\right)^2\cdot f(x)dx$$

Attribuisco alla differenza tra le due curve (Φ(x): distribuzione campionaria, F(X): distribuzione teorica che dipende dalla distribuzione di probabilità scelta), un peso che è funzione della densità di probabilità della distribuzione che stiamo osservando.

La definizione operativa della statistica test è:

STIMA DELLA VARIABILE

In generale si prendono in considerazione tutte le distribuzioni che passano almeno un test statistico tra quelli a cui sono sottoposte.

Per il calcolo della stima di progetto si ricava prima di tutto la probabilità come :

$F = 1 - \frac{1}{T}$

Una volta ricavata F si ottiene la valutazione della variabile x come l'inversa della relativa distribuzione cumulata note le leggi di distribuzione :

Normale
$$\begin{cases} = INV.NORM(probabilità;\ media;\ dev\_standard) \\ x(F) = \theta_1 + \theta_2 \Phi^{-1}(F) \end{cases}$$

Log-normale
$$\begin{cases} = INV.LOGNORM(probabilità; media; dev\_standard) \\ x(F) = exp[\theta_1 + \theta_2 \Phi^{-1}(F)] \end{cases}$$

Gumbel
$$\{ \quad x(F) = \vartheta_1 - \vartheta_2 ln(-ln(F))$$

GEV
$$\begin{cases} x(F) = \vartheta_1 + \frac{\vartheta_2[1-(-ln(F))^{\theta_3}]}{\theta_3} & se\ \theta_3 \neq 0 \\ x(F) = \vartheta_1 - \vartheta_2\, ln(-ln(F)) & se\ \theta_3 = 0 \end{cases}$$

Se si vuole tener conto non solo del periodo di ritorno ma anche della vita utile , N , dell'eventuale opera che si vuole costruire si ricorre alla formula del rischio residuale:

$R_N = 1 - [1 - P_r(s)]^N$

Con $P_r(s) = 1 - F$ probabilità di superamento, legata al periodo di ritorno T dalla relazione :

$$T = \frac{1}{1-F}$$

Da cui :

$$R_{N,T} = 1 - \left(1 - \frac{1}{T}\right)^N$$

$$T = \frac{1}{1 - (1 - R_N)^{\frac{1}{N}}}$$

METODO INDICE

Le curve di probabilità pluviometrica rappresentano la relazione fra le altezze di precipitazione h e la loro durata t, per un assegnato valore del periodo di ritorno T. In pratica però non ci si limita solo ad una curva ma ad un fascio di curve, ciascuna delle quali corrispondente ad un valore diverso del periodo di ritorno. L'altezza di precipitazione presa in considerazione è quella massima annuale relativa alla durata in esame. Un vantaggio delle curve di possibilità pluviometrica è quindi quello di fornire i valori più elevati di pioggia anche per durate diverse da quelle disponibili negli annali.

Il metodo indice ci consente di scrivere le curve di probabilità pluviometrica come :

$\widehat{h_{d,T}} = \overline{h_d}\, K(T)$

dove

$\overline{h_d}$ *: è detta precipitazione indice ed è una funzione che descrive la variazione dell'altezza media di precipitazione in funzione della durata, d ;*
$K(T)$ *: fattore di crescita che dipende solo dal periodo di ritorno , T , e dal modello probabilistico scelto. Teoricamente anche K dovrebbe dipendere dalla durata, a causa del fatto che il coefficiente di variazione dovrebbe essere calcolato per ogni durata di riferimento. Tuttavia la sua variabilità risulta essere piuttosto limitata, per cui si può assumere che CV sia costante e di conseguenza che il fattore di crescita non dipenda dalla durata di precipitazione, ma solo dal periodo di ritorno.*
Ogni curva quindi è rappresentativa di un preciso periodo di ritorno T ed è funzione della durata della precipitazione, d.
Dalle osservazioni si è ricavato che il valore medio del massimo annuo della precipitazione in d ore può essere ricavato come :

$$\overline{h_d} = a \cdot d^n$$

Dove a ed n sono dei coefficienti che dipendono dal periodo di ritorno e sono da stimarsi tramite regressione lineare su logaritmi.

Le curve $h_{d,T}$ sono crescenti e con concavità verso il basso; infatti, considerando durate crescenti si hanno altezza di precipitazioni crescenti. Inoltre a tempi di ritorno crescenti corrispondono valori più elevati poiché a T maggiori corrispondono probabilità di non superamento maggiori e quindi eventi più rari ed intensi.

Può anche essere utile la definizione dell'intensità di pioggia:

$$i_d = \frac{\overline{h_d}}{d} = a \cdot d^{n-1}$$

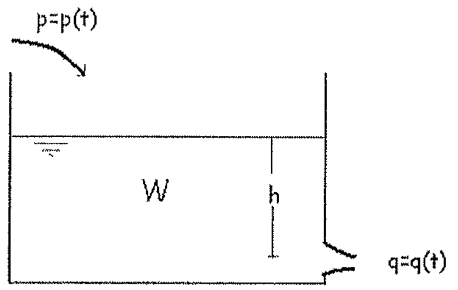
Le curve in questo caso sono decrescenti , perché a durate minori corrispondono intensità maggiori, mentre a durate più elevate, corrispondono intensità più basse.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 56

TRASFORMAZIONE AFFLUSSI-DEFLUSSI: METODO DELL'INVASO LINEARE, MODELLO LINEARE DI NASH E METODO CINEMATICO

METODO DELL'INVASO LINEARE

Il metodo dell'invaso assimila il comportamento del bacino a quello di un serbatoio nel quale entra una portata q_E e dal quale esce, attraverso una luce, la portata q_U.



La portata entrante q_E è di solito variabile nel tempo secondo una legge q_E=$q_E(t)$, mentre la portata uscente q_U rappresenta la portata che transita nella sezione di chiusura del bacino in seguito all'evento di pioggia. Il serbatoio è provvisto di una capacità w, che simula la capacità del bacino.

Scopo del metodo è quello di determinare la legge q_U=$q_U(t)$ ossia l'andamento delle portate nel tempo nella sezione di chiusura del bacino.

Quando piove all'interno del serbatoio deve essere rispettata la seguente equazione di continuità:

$$q_E - q_U = \frac{dw}{dt} \qquad [1]$$

Dove il secondo termine indica la variazione del volume di acqua invasato.

Dall'espressione della portata effluente da una luce si ha che:

$$q_U = \mu \cdot L \cdot h \cdot \sqrt{2gh} \qquad [2]$$

Dove L ed h sono le dimensioni geometriche della luce, mentre il termine sotto radice rappresenta la velocità torricelliana.

Definita : $c = \mu \cdot L \cdot \sqrt{2g}$

Si può riscrivere la relazione della portata uscente come:

$$q_U = c \cdot h^n \qquad [3]$$

Dove n=3/2 per uno stramazzo.

Posto il volume invasato pari a $w = s \cdot h$ *si cerca di riscrivere l'equazione di continuità e di ottenere l'equazione differenziale dell'invaso.*

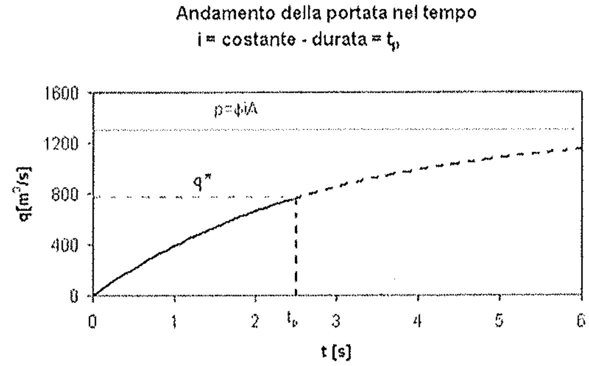
Ricavando dalla [3] l'espressione di h e sostituendola nell'equazione di w si ha che:

$$w = k \cdot q_U^{1/n}$$

Dove k è la costante di invaso che rappresenta la rapidità di decadimento della risposta idrologica, ed è:

Esaminiamo ora il funzionamento di un sistema con intensità di pioggia costante e portata iniziale nulla. Posto q_U uguale a:

$$q_U(t) = q_E \cdot \left(1 - \exp\left[-\frac{t}{k}\right]\right)$$

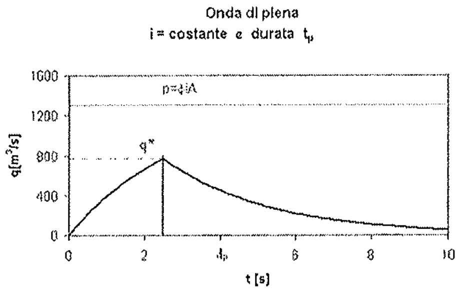


Se smette di piovere ad un t_P, ottengo una portata massima in uscita pari a :

$$q_U(t) = q_E \cdot \left(1 - \exp\left[-\frac{t_P}{k}\right]\right)$$

È come se da t_P in poi avessi un serbatoio soggetto a pioggia nulla.

Impongo quindi una nuova condizione iniziale supponendo di analizzare la situazione dal momento in cui ha smesso di piovere (t_0=t_P). L'equazione differenziale [6] diventa quindi:



$$q_U(t) = q_0 \cdot \exp\left[-\frac{t}{k}\right] + 0$$

Con $q_0 = q_E \cdot \left(1 - \exp\left[-\frac{t_P}{k}\right]\right)$

L'integrale a secondo membro si annulla perché come supposto prima, dal nuovo tempo t_0 ad un tempo t generico, non avendo pioggia, l'intensità sarà nulla. Dopo il tempo di pioggia quindi la portata uscente decrescerà in maniera esponenziale.

Dall'analisi appena condotta si è ottenuto che:

$$k = \frac{w}{q_u} = \frac{S \cdot h}{q_u}$$

Rcavando h si ha che essa vale:

$$h = \frac{K \cdot q_u}{S}$$

Da tale relazione si deduce che , a parità di S, se si vuole minimizzare h dobbiamo minimizzare il coefficiente di invaso. Poiché K=S/C , per minimizzare K bisogna aumentare C e quindi aumentare la larghezza di sfioro, L.

Riprendendo l'equazione [8] si ha che:

$$\ln(1-\varepsilon) = -t_P \cdot \frac{\varepsilon}{w^* \cdot t_P} = -\frac{\varepsilon}{w^*}$$

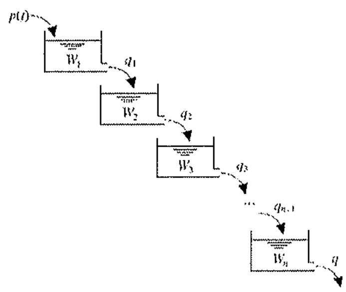
Da cui si ricava l'equazione costitutiva dell'invaso lineare utile per controllare l'effetto di laminazione:

$$w^* = \frac{-\varepsilon}{\ln(1-\varepsilon)}$$

Tracciando la curva (ε;w) posso, noto w_max, ricavare w* e quindi trovare il coefficiente di laminazione.*

MODELLO LINEARE DI NASH

Il modello di Nash assimila il comportamento del bacino idrografico a quello di n serbatoi collegati in serie, caratterizzati dal medesimo valore della costante di invaso.



Si consideri, per semplicità un sistema composto solo da due serbatoi in cui il secondo produce una portata q_2=q in funzione di una portata in ingresso q_1.

La portata q in uscita da tutto il sistema vale:

$$q = q_2 = \int_0^t q_1(\tau) \cdot h_2 \cdot (t-\tau) d\tau \qquad [1]$$

Posta l'intensità in ingresso $I_n=\delta(t)$, la portata in entrata q_1 vale:

$$q_1 = \int_0^t \delta(\tau) \cdot h_1 \cdot (t-\tau) \cdot d\tau = h_1 \qquad [2]$$

L'equazione [1] può essere riscritta come:

$$q = q_2 = \int_0^t h_1(\tau) \cdot h_2 \cdot (t-\tau) d\tau \qquad [3]$$

Poiché:

$$q = \int_0^t \delta(\tau) \cdot h \cdot (t-\tau) \cdot d\tau = h$$

$$q(t) = h(t) = \int_0^t h_1(\tau) \cdot h_2 \cdot (t-\tau) d\tau$$

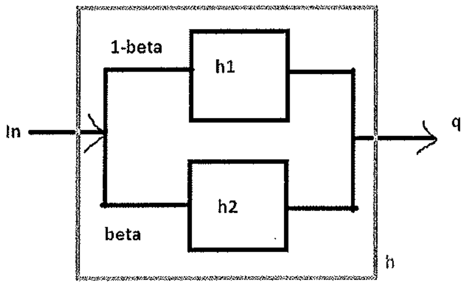
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 56

Il tempo di ritardo può anche essere calcolato con una formula empirica tarata sui dati:

$$t_R = 0.77 \cdot \left(\frac{LDP}{\sqrt{j}} \right)^{0,295}$$

SISTEMI IN PARALLELO

Il modello di Nash era un esempio di sistemi in serie. Combinando più sistemi lineari posso anche avere il caso di sistemi in parallelo in cui è il coefficiente di ripartizione β a determinare l'intensità di pioggia netta che entra in ciascuno dei due sistemi h1 ed h2.



Il bacino è il sistema cinematico(h1) mentre la falda acquifera è l'invaso lineare (h2).

Data un'intensità di pioggia I, la pioggia netta che entrerà nei due sistemi sarà data da:

- *ψ*I : nel sistema cinematico*
- *(1-ψ)*I: nell'invaso lineare*

La portata in uscita q si scrive come:

$$q = \int_0^t I_n(\tau) \cdot h \cdot (t - \tau) \cdot d\tau$$

In questa equazione, l'intensità netta in ingresso è nota, così come la portata in uscita, l'unica incognita resta la funzione di risposta h che si può calcolare, applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, nel seguente modo:

$$h(t) = (1 - \beta) \cdot h_1 + \beta \cdot (h_2)$$

Sostituendo nell'equazione appena scritta le funzioni di risposta del sistema cinematico h1 e quella dell'invaso lineare h2 si ottiene:

$$h(t) = (1 - \beta) \cdot \frac{da(t)}{dt \cdot A} + \beta \cdot \frac{1}{k} \cdot \exp\left[-\frac{t}{k} \right]$$

$$q(t) = \frac{1}{A} \cdot \frac{da(t)}{dt} = h(t)$$

Tale funzione , h(t) , rappresenta la funzione di risposta IUH del bacino, nel tempo, ad un afflusso istantaneo di volume unitario. La funzione a(t) rappresenta invece la curva aree-tempi che ha in ascissa il tempo t ed in ordinata ed in ordinata l'area a(t) il cui tempo di corrivazione è minore o uguale a quello dell'intero bacino.

Generalizzando l'equazione della portata essa diventa :

$$q(t) = \int_0^t i(t-\tau) \cdot h(t) \cdot d\tau$$ *(integrale di convoluzione)*

E nel caso cinematico :

$$q(t) = \int_0^t i(t-\tau) \cdot \frac{1}{A} \cdot \frac{da(t)}{dt} \cdot d\tau$$

Operativamente l'integrale di convoluzione viene risolto attraverso la seguente formulazione :

$$q_k = \sum_{j=1}^{k} i_j \cdot U_{k-j+1}$$

In cui U rappresenta la funzione di risposta del bacino.

La determinazione dell'idrogramma di piena avviene poi attraverso l'utilizzo della formula razionale :

$$Q_k = \frac{A}{3.6} \cdot q_k . \Psi$$

Dove ψ serve per tenere conto del volume di pioggia infiltrato.

Dunque per poter applicare il metodo cinematico è necessario ricavarsi :

- *la curva aree-tempi , a(t)*
- *il tempo di corrivazione , t_c*

Per la determinazione della curva aree-tempi si assume che le linee isocorrive coincidano con le linee isoipse, cioè le linee di eguale quota. Essa si ricava a partire dalla curva ipsografica ottenuta tramite i quantili ipsografici disponibili nei vari Atlanti.

Per quanto riguarda il tempo di corrivazione, per un bacino rettangolare, esso si calcola nel seguente modo:

$$t_c = \frac{L}{V}$$

È l'area contribuente al tempo di pioggia.

Sostituendo la formulazione di i: $i = a \cdot d^{n-1}$ *nell'equazione della portata in uscita, si ottiene che:*

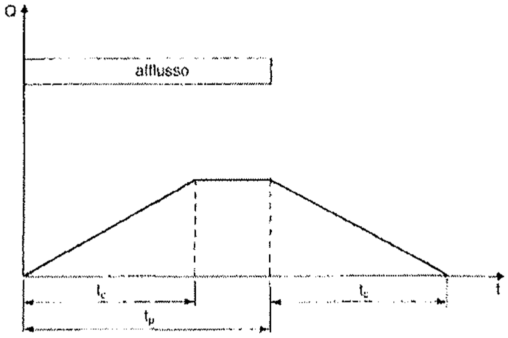
$$q_{u,\max} = \frac{A}{t_c} \cdot a \cdot (t_c - \Delta t)^n < \frac{A}{t_c} \cdot a \cdot t_c^n$$

- *Se la durata di pioggia è $t_p > t_c$*

  Tutto il bacino contribuirà contemporaneamente alla formazione del deflusso per un intervallo di tempo pari a t_p-t_c in cui la portata resterà costante e pari al massimo valore:

  $$q_{u,\max} = i(t_{p2}) \cdot A$$

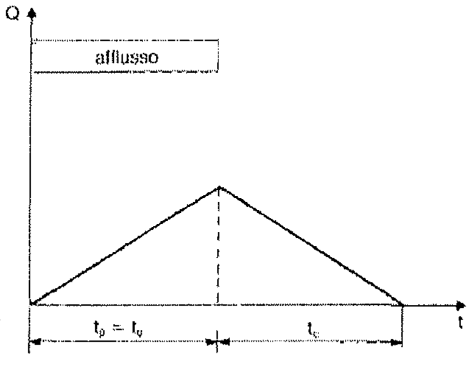
  L'andamento della portata può essere schematizzato come riportato nel disegno:

  La pioggia al crescere della durata diviene però sempre meno intensa e conseguentemente la massima portata di piena sarà tanto più contenuta quanto più grande è la durata della pioggia rispetto al tempo di corrivazione del bacino.

- *Se la durata della pioggia è $t_p = t_c$*

  Questa situazione rappresenta la situazione limite per cui tutto il bacino, sia pure per un solo istante, contribuisce al deflusso con la pioggia di minima durata, e perciò di maggior intensità.
  Questa risulta dunque la condizione critica per quel bacino agli effetti del valore della portata.
  Il diagramma delle portata può essere così rappresentato :

Nel modello cinematico, l'evento critico andrebbe ricercato come quel particolare tempo di pioggia cui corrisponde il massimo valore del prodotto tra l'intensità di pioggia i assunta costante nel tempo e l'area A. Per semplicità di solito si considera come critico l'evento di pioggia di durata pari al tempo di corrivazione T_c dell'area colante, che è il più piccolo dei tempi per i quali l'intera area del bacino contribuisce alla formazione della portata.

METODO CINEMATICO VARIAZIONALE

Nel metodo cinematico abbiamo supposto che la durata critica dell'evento di pioggia coincidesse con il tempo di corrivazione, questo però è valido nel caso di un bacino rettangolare. Il metodo variazionale consiste nel studiare diversi eventi di durata differente al fine di determinare quello che determina la durata di picco.

Il massimo valore di q che deriva da una pioggia costante può essere espresso come :

$$\max(q(t)) = i_N \cdot \max_d \left[\int_{t-d}^{t} h(z) \cdot dz \right]$$

il massimo dell'integrale si chiama FUNZIONE DI PICCO e rappresenta la fascia di ampiezza pari a "d" per la quale l'area sottesa dalla curva h(t) è massima. In generale se i non è costante :

$$\max(q(t)) = \max\left(i_N(d) \cdot f_P(d)\right)$$

La funzione di picco si ricava portando i massimi dell'integrale di IUH per le diverse durate d su di un grafico. Siccome la funzione di picco aumenta all'aumentare della durata, poiché aumenta l'area contribuente del bacino , mentre l'intensità di pioggia netta diminuisce, generalmente la durata critica dell'evento è sempre minore del tempo di corrivazione, $d^* < t_C$.

Un'ottima stima della durata critica è il tempo di ritardo. E' stato mostrato che, con buona approssimazione, vale:

$d^* = t_r$ e $f_p(d^*) \approx 0.8$

introducendo cosi' la formula razionale in senso geomorfoclimatico:

$$Q_d = \frac{\psi \cdot i_{tr} \cdot f_p(t_r) \cdot A}{3,6}$$

dove si puo' porre $f_p(t_r) \approx 0.8$.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 56

V: volume totale
F: volume di infiltrazione

b. *METODO ψ: COEFFICIENTE DI AFFLUSSO*

Questo metodo consiste nello stimare il coefficiente di afflusso ψ definito come il rapporto tra il volume defluito V_d ed il volume affluito V_a che ha provocato il deflusso:

$$\psi = \frac{V_d}{V_a}$$

$$I_N = \psi \cdot I$$

Esso rappresenta quindi la percentuale di afflusso che dà luogo al deflusso ed è sempre minore di 1 e dipende :

- *Dal tipo di vegetazione presente nel bacino e dalla estensione delle aree coperte da vegetazione*
- *Dalla morfologia del terreno che determina zone più o meno estese di depressioni superficiali*
- *Dalla permeabilità del terreno*

Esso però dipende anche dall'entità dell'evento che si sta considerando e dal tempo di ritorno di questo.

Dal punto di vista fisico, il coefficiente ψ ha il significato di frazione di area contribuente del bacino. Per comprenderlo, consideriamo un bacino contraddistinto da due aree aventi coefficienti di infiltrazione molto diversi tra loro $\Phi_1 >> \Phi_2$. L'area A_1 genererà un'intensità netta quasi nulla avendo Φ_1 molto alta, mentre l'area A_2 genererà un'intensità netta circa pari a quella effettiva. La pioggia netta del bacino può essere scritta come media pesata delle due intensità nette e viste le considerazioni fatte si trova :

$$I_N = \frac{A_1}{A} \cdot I_{N,1} + \frac{A_2}{A} \cdot I_{N,2} \cong \frac{A_2}{A} \cdot I$$

dunque

$$\Psi \cong \frac{A_2}{A}$$

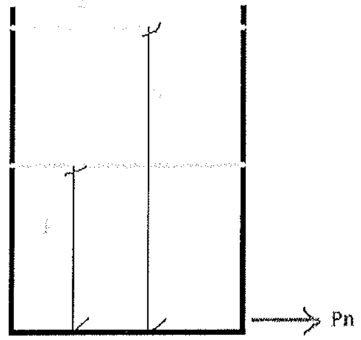
c. *METODO DEL SOIL CONSERVATION SERVICE: CN (CURVE NUMEBR)*

Il metodo SCS_CN considera la seguente equazione del moto:

$$\frac{P_n}{P - I_a} = \frac{F}{S}$$

Dove:

P: altezza di pioggia cumulata
P_n: precipitazione netta



Per quanto riguarda il primo fattore , SCS ha classificato i vari tipi di suolo in quattro gruppi (A,B,C,D) sulla base delle capacità di assorbimento :

Gruppo A : suoli aventi scarsa potenzialità di deflusso ;
Gruppo B : suoli aventi moderata potenzialità di deflusso ;
Gruppo C : suoli aventi moderatamente alta potenzialità di deflusso ;
Gruppo D : suoli aventi potenzialità di deflusso molto alta .

I valori di CN sono tabellati in base al tipo di suolo e al tipo di utilizzo. Tali valori però si riferiscono ad una condizione di umidità del suolo di tipo (II) . Per quanto riguarda l'influenza dello stato di umidità del suolo all'inizio dell'evento meteorico, l' SCS individua tre classi, AMC I, AMC II e AMC III, caratterizzate da differenti condizioni iniziali (AMC=Antecedent Moisture Condition) a seconda del valore assunto dall'altezza di pioggia caduta nei 5 giorni precedenti l'evento meteorico.
Il CN individuato ad una condizione media di umidità del terreno all'inizio della precipitazione (classe II) può essere adattato a diverse condizioni di umidità attraverso le seguenti formule di conversione:

$$CN(I) = \frac{4{,}2 \cdot CN(II)}{10 - 0{,}058 \cdot CN(II)} \qquad \text{per suolo secco}$$

$$CN(III) = \frac{23 \cdot CN(II)}{10 + 0{,}13 \cdot CN(II)} \qquad \text{per suolo umido}$$

METODI PER LA STIMA DEL FLUSSO METEORICO ALL'INTERNO DEL BACINO

Si analizzano nel seguito i differenti metodi usati per la determinazione della distribuzione dell'afflusso meteorico nel bacino di interesse:

- ✓ METODO DELLA MEDIA ARITMETICA

  E' un metodo semplice per la prima approssimazione . Si comincia tracciando il contorno dell'area di interesse e considerando solo le misure che ricadono all'interno. Si fa poi la media dei punti di misura:

$$\overline{P} = \frac{1}{N} \cdot \sum P_i$$

  Con questo metodo si ottengono solo gli ordini di grandezza delle misure, esso risulta più attendibile per i valori medi che per quelli estremi e se le stazioni sono distribuite uniformemente.

- ✓ *METODO DEI POLIGONI DI THIESSEN*

  Attraverso il metodo dei topoieti o poligoni di Thiessen è possibile suddividere un territorio nel quale sono presenti n stazioni pluviometriche assegnando a ciascuna stazione un'area di competenza.
  Il metodo consiste nell'unire con segmenti tutte le stazioni tra loro contigue, così da ottenere un reticolo a maglie triangolari, e nel tracciare quindi le perpendicolari ai segmenti nel punto medio.

EQUAZIONE DI RICHARD, METODO DI GREEN AMPT

EQUAZIONE DI RICHARD

Si definiscono:

- *Intensità di pioggia netta: w [mm/h]*
- *Volume di infiltrazione: F [mm]*

$$F(t) = \int_0^t f(t) \cdot dt$$

- *Tasso di infiltrazione f:*

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$$

- *Capacità di infiltrazione f_c, esso coincide con il massimo valore del tasso di infiltrazione f per date condizioni del suolo:*

$$f_c = g(\vartheta; \psi)$$

Con:
θ: contenuto d'acqua
ψ: potenziale di suzione

- *Tasso effettivo di infiltrazione f:*

$$f = \min[f_c; w]$$

Si definisce ora il tasso di infiltrazione in funzione del contenuto di acqua:

$$f = \frac{d\vartheta}{dt}$$

Si consideri un volumetto di terreno in condizioni insature in cui entra W se il volumetto è in superficie, o q se esso si trova in profondità.

Scrivo l'equazione di continuità facendo un'equivalenza "alla Darcy", considerando cioè tutta l'area s senza preoccuparmi dei vuoti:

$$\frac{d\vartheta}{dt} \cdot v = \frac{d\vartheta}{dt} \cdot dz \cdot s = -dq \cdot s$$

Il secondo ed il terzo membro dell'equazione sono due flussi posti uguali tra loro da cui ricavo che:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{dq}{dz} \qquad [1]$$

Si riscrive quindi l'equazione della diffusività come:

$$\frac{d\psi}{dz} = \frac{D}{k(\vartheta)} \cdot \frac{d\vartheta}{dz}$$

L'equazione di Richard diventa quindi:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \cdot \left(k(\vartheta) \cdot \left(1 + \frac{D}{k(\vartheta)} \cdot \frac{d\vartheta}{dz} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial z} \cdot \left(k(\vartheta) \cdot + D \cdot \frac{d\vartheta}{dz} \right)$$

Formalmente in questa equazione sparisce ψ avendo inserito la diffusività D definita come la combinazione di K e di ψ. Per risolvere l'equazione di Richard ci servono $K(\theta)$ e $\psi(\theta)$ che si possono ricavare dalle curve di ritenzione o attraverso la formulazione analitica di Clapp-Hornberger.

METODO DI GRREN-AMPT

Il metodo di Green-Ampt per la valutazione del tasso di infiltrazione f, consente una descrizione più aderente, ma pur sempre semplificata, del processo di infiltrazione.

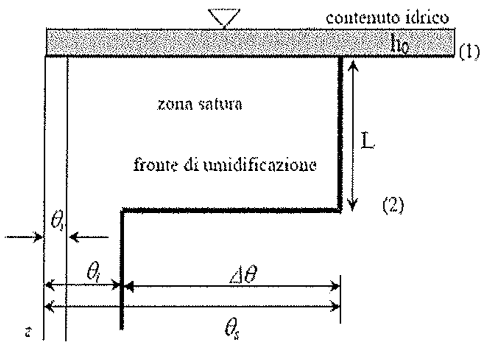
Si ipotizza che esistano solo due diversi tipi di strati:

- *Terreni saturi in cui il contenuto di acqua θ è uguale al contenuto di acqua inziale θ_0 ($\psi=\psi_f$)*
- *Terreni in cui il contenuto d'acqua θ è uguale al contenuto d'acqua a saturazione θ_s ($\psi=0$)*

Sia $\Delta\theta=\theta_s-\theta_0$

Si applica l'equazione di continuità ad una colonna cilindrica di suolo compresa fra la superficie ed il fronte di umidità che ha raggiunto la condizione di saturazione. Si indica con L(t) l'altezza raggiunta dal fronte al tempo t. L'infiltrazione cumulata F(t)[mm] al tempo t risulta:

$$F(t) = L(t) \cdot \Delta\vartheta \qquad [1]$$



$$f_c = \left(1 + \frac{|\psi_F| \cdot \Delta\vartheta}{F}\right) \cdot k_{SAT}$$

Ponendo:

$$P = |\psi_F| \cdot \Delta\vartheta$$

Il tasso di infiltrazione in superficie è quindi uguale a:

$$f_c(t) = \left(1 + \frac{P}{F(t)}\right) \cdot k_{SAT}$$

Come si può notare dall'equazione [3]all'aumentare di L, il gradiente idraulico(che è il termine tra parentesi) tese ad 1 è l'infiltrabilità tende al valore K_{sat}..

Quando ψ=0 sono giunta a saturazione.

Data un'intensità di pioggia pari a w, finché $\theta<\theta_s$, il tasso di infiltrazione effettivo è f=w, mentre per l'infiltrabilità f_c(limite superiore del tasso di infiltrazione) vale f_c>w.

Il ponding, ovvero la formazione di pozzanghere si ha quando w=f_c.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 56

Se in un generico intervallo di tempo Δt, l'intensità media di precipitazione $i_m(t)$ è maggiore della velocità di infiltrazione $f_c(t)$, la quantità [$f_c(t) * \Delta t$] si infiltra e la differenza [$(i_m(t) - f_c(t)) * \Delta t$] defluisce.

Se viceversa l'intensità media di precipitazione $i_m(t)$ è minore della velocità di infiltrazione $f_c(t)$, la quantità che si infiltrerà nel terreno sarà pari a [$i_m(t) * \Delta t$].

Bisogna infatti considerare che la velocità di infiltrazione del terreno non varia perché trascorre il tempo ma bensì perché nel tempo il terreno và imbibendosi sempre di più. Ciò equivale a dire che se durante l'evento, l'intensità di pioggia è sempre superiore alla velocità di infiltrazione allora la velocità di infiltrazione nel tempo sarà correttamente espressa dalla legge di Horton mentre se l'intensità di precipitazione è talvolta minore della velocità di infiltrazione, il terreno non potrà imbibirsi tanto quanto sarebbero le proprie potenzialità e la legge di Horton non è più valida.

L'equazione di Horton fornisce quella che potremmo chiamare l'infiltrazione potenziale, infatti in un sitante generico l'infiltrazione effettiva f(t) è il minimo valore tra $i_m(t)$ e $f_c(t)$ dato che non si può infiltrare nel terreno più di quanto piova i(t) né più di quanto il terreno sia in grado di accogliere $f_c(t)$.

Il <u>volume totale di acqua che si è infiltrato</u> nel terreno è pari all'area sottesa dalla curva del grafico (fc;t):

$$F_c = \int_0^t f_c(\tau) \cdot d\tau = f_1 \cdot t + (f_0 - f_1) \cdot \frac{1}{k} \cdot \left(1 - e^{-t \cdot k}\right) \qquad [2]$$

Per mettere in relazione F ed f, occorre eliminare la variabile tempo dall' equazione [2] esplicitandola in [1]:

$$e^{-kt} = \frac{f_c - f_1}{(f_0 - f_1)} \quad \rightarrow \quad t = -\frac{1}{k} \cdot \ln\left(\frac{f_c - f_1}{(f_0 - f_1)}\right)$$

Sostituisco il tempo appena ricavato nella [2]:

$$F_c(t) = -f_1 \cdot \frac{1}{k} \cdot \ln\left[\frac{f_c - f_1}{(f_0 - f_1)}\right] + \frac{f_0 - f_1}{k} \cdot \left[1 - \frac{f_c - f_1}{(f_0 - f_1)}\right]$$

Ed ottengo cosi la <u>relazione che lega la capacità di infiltrazione f_c al volume infiltrato F_c</u>:

$$F_c(t) = -f_1 \cdot \frac{1}{k} \cdot \ln\left[\frac{f_c - f_1}{(f_0 - f_1)}\right] + \frac{f_0 - fc}{k} \qquad [3]$$

L'equazione [3] <u>vale per la prima volta al verificarsi delle condizioni di ponding</u> cioè quando:

$$\begin{cases} f_c(t_p) = w \\ F_c = w \cdot t_p \end{cases}$$

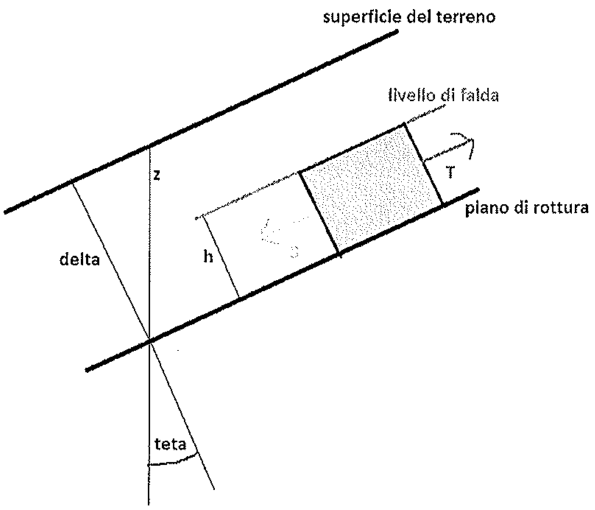
Sostituendo le condizioni appena imposte nell'equazione [3]:

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 56

MODELLO DI MONTGOMERY-DIETRICH

Questo modello permette di individuare le aree suscettibili di innesco dei fenomeni franosi superficiali.

Il modello combina due schemi concettuali: l'uno di stabilità del pendio e l'altro di saturazione idrologica del terreno. Il primo descrive le caratteristiche geomeccaniche e geometriche del pendio in base all'ipotesi di pendio indefinito; il secondo rappresenta le grandezze che caratterizzano la risposta idrologica di versante secondo il meccanismo di produzione del deflusso per saturazione della coltre del suolo.



*Consideriamo un pendio di superficie piana, spessore z , e illimitato ossia tale che lo spessore della coltre di terreno sia molto minore della lunghezza del versante. Lo spessore effettivo del suolo è δ=z*cosθ , dove θ è l'inclinazione del terreno , e lo spessore del suolo saturo è detto h.*

Ipotizziamo che la superficie piezometrica sia parallela al piano del versante. Questo implica una cadente piezometrica Δh/Δz pari alla pendenza del versante, tanθ. Un generico elemento del terreno sarà soggetto ad una spinta S, dovuta all'azione di gravità , ed ad una forza resistente T , data dall'attrito. In condizioni di equilibrio si avrà T=S . Definiamo queste due forze.

La resistenza al taglio del terreno, per la legge di Mohr-Coulomb , è data da :

$$\tau = c + (\sigma + u) \cdot \tan\phi$$

Dove σ indica lo sforzo normale , u la pressione nei pori dovuta alla presenza dell'acqua e ϕ l'angolo di attrito interno del terreno. Generalmente l'ordine di grandezza di C può essere trascurato rispetto al secondo termine dell'equazione , che quindi può essere scritta come :

$$\tau = (\sigma + u) \cdot \tan\phi$$

Questa approssimazione è comunque conservativa poiché trascurando il termine additivo "c" la valutazione di stabilità risulta a favore di sicurezza.

In termini di forze tale equazione può scriversi come :

$$T = (\rho_S \cdot g \cdot z \cdot \cos^2\theta - \rho_W \cdot g \cdot h \cdot \cos^2\theta) \cdot \tan\phi$$

Dove ρ_S è la densità del suolo secco e ρ_W è la densità dell'acqua.

La componente della forza peso in direzione dello scorrimento è :

$$S = \rho_S \cdot g \cdot z \cdot \cos\theta \cdot \sin\vartheta$$

Ponendo T=S si ottiene :

La prima osservazione che si può fare è che avendo un flusso entrante ed uno uscente sono in condizioni di stazionarietà per cui vale

$$\frac{dh}{dt} = 0$$

Scrivo l'equilibrio di versante in condizioni idrologiche stazionarie:

$$f \cdot a - q = \frac{dh}{dt} \cdot a$$

Dove:

- *f: è la precipitazione efficace, ovvero la precipitazione meteorica depurata di eventuali perdite per evapotraspirazione e percolazione nel substrato*
- *a: area contribuente drenata della sezione delimitata dalla generica isoipsa*
- *q: portata uscente dallo spessore di suolo*
- *h:. spessore del suolo saturo*
- *dh/dt=0 se siamo in condizioni stazionarie*

Il moto di filtrazione attraverso la coltre detritica è governata dalla legge di Darcy e, nell'ipotesi di superficie piezometrica parallela al fondo, la portata trasmessa attraverso la sezione delimitata dalla generica isoipsa di lunghezza b è quindi data da:

$$q = (h \cdot \cos\vartheta) \cdot b \cdot K_s \cdot tg\vartheta$$

Dove:

- *h*cosθ*b: sezione idrica*
- *Ks: coefficiente di permeabilità a saturazione*
- *Tgθ: cadente piezometrica*

Il moto di filtrazione può quindi essere riscritto come:

$$q = b \cdot h \cdot K_s \cdot sen\vartheta \qquad [1]$$

Sto considerando la filtrazione parallela agli strati di terreno. Ci sono strati con permeabilità diverse che vengono attraversati in base al loro spessore.

Definisco la trasmissività:

$$T = \int_0^z k(z) \cdot dz = \overline{k_s} \cdot z \qquad [2]$$

Dove Ks segnato è la permeabilità satura media.

$$f_{crit} = \frac{b}{a} \cdot T \cdot sen\vartheta \cdot \frac{\rho_s}{\rho_w} \cdot \left(1 - \frac{tg\vartheta}{tg\phi}\right)$$

Se sono in condizioni NON stazionarie, la precipitazione critica varia con il tempo e vale:

$$f_{crit}(t) = \frac{f_{crit\_staz}}{1 - e^{-m \cdot t}}$$

Con

$$m = \frac{b}{a} \cdot \frac{T}{z} \cdot sen\vartheta$$

Ricavo il tempo di saturazione:

$$t_p = \frac{1}{m} \cdot \log\left(\frac{1 - b \cdot T \cdot sen\vartheta}{a \cdot f}\right)$$

La condizione stazionaria più semplice è quella in cui :

*a*f>q (ciò che entra > ciò che esce)*

$$R_i = S_{i-1} + (P_i - ETp_i) - \varphi$$

va a scaricarsi nel serbatoio 2 e si somma all'acqua del mese precedente, W_{i-1}; il livello del serbatoio 2 diventa:

$$W_i = W_{i-1} + R_i$$

Nel modello si assume che il deflusso nel mese "i" derivi dal volume immagazzinato Wi. In particolare una frazione λWi dell'acqua immagazzinata rimane nel sottosuolo, mentre la parte (1-λ)Wi diventa deflusso. Il deflusso relativo al mese "i" è quindi:

$$D_i = (1-\lambda)\cdot W_i = (1-\lambda)\cdot(W_{i-1} + \Delta W_i)$$

e la riserva idrica alla fine del mese risulta essere:

$$W_i = \lambda \cdot (W_{i-1} + \Delta W_i)$$

La frazione λ varia con la profondità e la composizione del sottosuolo, oltre che con la dimensione e la geografia del bacino.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 56