NUMERO: 919

DATA: 31/03/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Sacchiero

MATERIA: Analisi Matematica II

Prof. Lancellotti

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 120

Osservazione:

Se $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$ è differenziabile in $x_0 \in \Omega \in \mathbb{R}^n$ allora $\exists\, df(x_0): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Definizione: MATRICE JACOBIANA

Rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ a $df(x_0)$ è associata una matrice $m \times n$ detta MATRICE JACOBIANA di f in x_0

$$J_f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

Se $v = (v_1, \dots, v_n) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ il differenziale $df(x_0)(v) = J\begin{pmatrix} v_1 \\ v_n \end{pmatrix}$

Caso speciale $m=1$, cioè $f: \Omega \to \mathbb{R}$

Consideriamo l'applicazione lineare da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ siffatta:

$dx_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$dx_1(e_1) = 1$, $dx_1(e_j) = 0 \quad \forall j \neq 1$

In modo analogo siano $dx_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineare tale che $dx_2(e_2) = 1$, $dx_j(e_j) = 0$
Abbiamo quindi n applicazioni lineari $dx_1, \dots, dx_n$ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tali che

$$dx_i(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i \neq j \\ 0 & \text{se } i = j \end{cases}$$

Se f è differenziabile in $x_0 \in \Omega$, allora $df(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)dx_n$

Infatti abbiamo visto che se $v = v_1e_1 + \dots + v_ne_n \in \mathbb{R}^n$ allora

$$df(x_0)(v) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)v_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)v_n$$

$v_1 = v_1 \cdot 1 = v_1 \quad dx_1(e_1) = dx_1(v_1 e_1) \Rightarrow v_1 = dx_1(v_1)$

Analogamente $v_i = dx_i(v) \quad \forall i = 1 \dots n$

Quindi

$$df(x_0)(v) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)dx_1(v) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)dx_n(v) =$$
$$= \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)dx_n\right](v)$$

Ne segue che $df(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)dx_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\, dx_i$

INTEGRALI MULTIPLI

Definizione: CLASSE

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto e $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$ una funzione.
- Diciamo che f è di classe C^0 se è continua in Ω
- Diciamo che f è di classe C^1 se ammette tutte le derivate parziali in Ω e queste derivate sono continue in Ω
- Diciamo che f è di classe C^2 se ammette tutte le derivate seconde e se queste sono continue in Ω
- Se $k \geq 2$, diciamo che f è di classe C^k su Ω se f ammette tutte le derivate k-appesime e queste sono continue
- Diciamo che f è di classe C^∞ su Ω se f è di classe C^k $\forall k \in \mathbb{N}$

Proprietà: LEMMA DI SCHWARZ

Siano $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto e $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$ una funzione di classe C^2. Allora $\forall i,j = 1, \dots, n$ e $\forall x \in \Omega$ si ha che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$$

Proprietà: TEOREMA DI WEIERSTRASS

Siano $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un compatto non vuoto e $f: \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f ammette massimo e minimo su Ω, cioè

$$\exists\, x_m, x_M \in \Omega \mid \forall x \in \Omega,\ f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$$

Notazione: MISURA

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ l'insieme limitato non vuoto. Diremo che Ω è misurabile se è possibile associare a Ω una misura che per $n=2$ è l'area di Ω inteso come piano, per $n=3$ è il volume di Ω inteso come sottospazio.

Si denota con $m_n(\Omega)$ e si chiama MISURA n-DIMENSIONALE DI Ω.
Si pone $m(\emptyset)=0$ e $m(\Omega) \in [0,+\infty)$!

Osservazioni:

1. Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ è misurabile, con $1 \leq k \leq n$, allora $m_n(\Omega)=0$

   es $n=1$ (retta) sia l'area che il volume sono nulli $m_2(\Omega)=0$, $m_3(\Omega)=0$
   $n=2$ (area) il volume è nullo

2. Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è il sostegno* di una curva parametrica regolare, allora $m_n(\Omega)=0$

   SOSTEGNO: l'immagine di γ
   CURVA PARAMETRICA: funzione continua, $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$, con I non vuoto

3. Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ è il grafico di una funzione continua in due variabili, $m_3(\Omega)=0$

4. Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è un aperto limitato, allora $\partial\Omega$ (la frontiera di Ω) ha $m_n(\Omega)=0$

5. Se $A, B \in \mathbb{R}^n$ sono misurabili, allora $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$

Proprietà: TEOREMA DI INTEGRAZIONE SU INSIEMI X-SEMPLICI o Y-SEMPLICI

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ l'insieme y-semplice, $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$ dove $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue, e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ continua

Allora si ha che $\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right] dx$

Se invece $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ è un insieme x-semplice, si ha che

$$\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx \right] dy$$

Definizione: TEOREMA DEL CAMBIAMENTO DI VARIABILI (integrali doppi)

Siano $\Omega, \Omega' \in \mathbb{R}^2$ aperti misurabili, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ continua e limitata e $\phi : \Omega' \to \mathbb{R}$ una funzione soddisfacente le seguenti proprietà

1) ϕ è biettiva
2) ϕ è di classe C^1 in Ω
3) $\det J_\phi(u,v) \neq 0 \quad \forall (u,v) \in \Omega'$

Allora: $\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\Omega'} f(\phi(u,v)) \, |\det J_\phi(u,v)| \, du\,dv$

Osservazione

Se ϕ non è iniettiva su $A' \subseteq \Omega'$ con $m(A') = 0$ oppure se $\det J_\phi = 0$ su $A' \subseteq \Omega'$ con $m(A') = 0$, allora la formula si applica lo stesso.

COORDINATE NOTEVOLI NEL PIANO

1) POLARI

Sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \quad \phi : [0,+\infty) \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$
$\phi(\rho, \theta) = (x_0 + \rho\cos\theta, \; y_0 + \rho\sin\theta)$

Se $(x_0, y_0) = (0,0)$, allora $\to \quad \phi = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ dove ρ è l'allungamento e θ è l'angolo

$$J_\phi(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$|\det J_\phi(\rho,\theta)| = |\rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta| = |\rho| = \rho$$

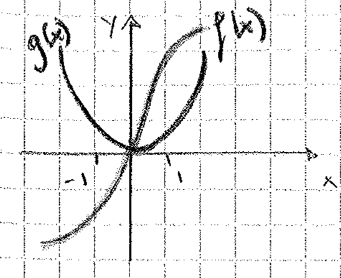
$$|\det J_\phi(\rho,\theta)| = \rho$$

Osservazione: per certi valori di ρ non valgono le ipotesi del cambiamento di variabile

es $\rho = 0$, allora $\det J_\phi = 0$
$\rho = 0$, allora non è iniettiva

Ma posto $A' = \{0\} \times [0, 2\pi]$, allora $m(A') = 0$, quindi posso usare comunque la formula perché A' è trascurabile

Osservazione:

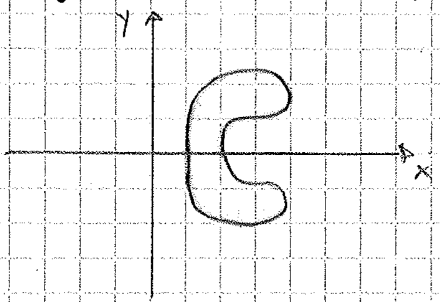


Se una funzione è dispari, come $f(x)$, $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$

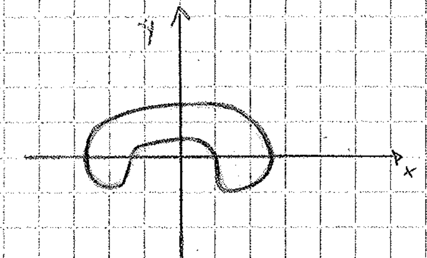
Se una funzione è pari, come $g(x)$, $\int_{-1}^{1} g(x)\,dx = 2\int_{0}^{1} g(x)\,dx$

Per una funzione in più variabili cambiano le definizioni

Ω è SIMMETRICO rispetto all'asse x se $\forall (x,y) \in \Omega$ anche $(-x,y) \in \Omega$



Ω è SIMMETRICO rispetto all'asse y se $\forall (x,y) \in \Omega$ anche $(x,-y) \in \Omega$



Si hanno quindi 4 casi:

1) Sia Ω simmetrico rispetto all'asse x e $f: \Omega \to \mathbb{R}$ sia tale che $f(x,-y) = f(x,y)$

$$\int_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = 2\int_{\Omega'} f(x,y)\,dx\,dy, \quad \text{dove } \Omega' = \{(x,y) \in \Omega \mid y \geq 0\}$$

2) Sia Ω simmetrico rispetto all'asse x e $f: \Omega \to \mathbb{R}$ sia tale che $f(x,-y) = -f(x,y)$

$$\int_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = 0$$

3) Sia Ω simmetrico rispetto all'asse y e $f: \Omega \to \mathbb{R}$ sia tale che $f(-x,y) = f(x,y)$

$$\int_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = 2\int_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy, \quad \text{dove } \Omega' = \{(x,y) \in \Omega \mid x \geq 0\}$$

4) Sia Ω simmetrico rispetto all'asse y e $f: \Omega \to \mathbb{R}$ sia tale che $f(-x,y) = -f(x,y)$

$$\int_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = 0$$

Esempio:

Calcolare $\int_{\Omega} (x^2+y^2)z \, dxdydz$, dove $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1, \, z \geq 0\}$

$0 \leq z \leq ?$

$z^2 \leq 1-x^2-y^2 \rightsquigarrow -\sqrt{1-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}$

$$\begin{cases} 0 \leq z \\ \cancel{-\sqrt{1-x^2-y^2}} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2} \\ 1-x^2-y^2 \geq 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2} \\ x^2+y^2 \leq 1 \end{cases}$$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$

$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \in D, \, 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}\}$

<u>Integriamo per fili // all'asse z</u>

$$\int_{\Omega} (x^2+y^2) z \, dxdydz = \int_D \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (x^2+y^2) z \, dz \right] dxdy = \int_D \frac{1}{2} (x^2+y^2)(1-x^2-y^2) \, dxdy$$

Siccome D è un cerchio ha simmetria sferica, possiamo usare le coor. polari

$$\phi = \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ |\det J_\phi(\rho,\theta)| = \rho \end{array}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\Omega'} \rho^2 (1-\rho^2) \rho \, d\rho d\theta$$

dove $\Omega' = \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \rho \leq 1, \, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$

$$= \frac{1}{2} \left(\int_0^1 \rho^3 (1-\rho^2) d\rho \right) \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4}\rho^4 - \frac{1}{6}\rho^6 \right]_0^1 2\pi = \frac{1}{12}\pi$$

<u>Integriamo per strati</u>

$(x,y) \in \Omega$

$$x^2+y^2+z^2 \leq 1 \rightarrow \begin{cases} x^2+y^2 \leq 1-z^2 \\ 1-z^2 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2+y^2 \leq 1-z^2 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

Poniamo

$\Omega_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1-z^2\}$

Allora $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1, \, (x,y) \in \Omega_z\}$

$$\int_{\Omega} (x^2+y^2) z \, dxdydz = \int_0^1 \left[\int_{\Omega_z} (x^2+y^2) z \, dxdy \right] dz$$

Svolgimento in coordinate polari $= \int_{\Omega_z'} \rho^2 \rho \, d\rho d\theta$

$\Omega_z' = \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \rho \leq \sqrt{1-z^2}, \, 0 \leq \theta < 2\pi\}$

$$= \left(\int_0^{\sqrt{1-z^2}} \rho^3 d\rho \right) \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) = \frac{1}{2} (1-z^2)^2 \pi$$

$$= \frac{1}{12} \int_0^1 3(1-z^2)^2 z \, dz = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{6} \pi (1-z^2)^3 \right]_0^1 = \frac{1}{12}\pi$$

passiamo in coordinate sferiche centrate in (0,0,0) con colatitudine misurata dall'asse y (il contrario del solito)

$$\phi = \begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \\ y = \rho\cos\theta \\ z = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \end{cases}, \quad \rho \geq 0, \ 0 \leq \theta \leq 2\pi, \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \qquad |\det J\phi(\rho,\theta,\varphi)| = \rho^2 \operatorname{sen}\theta$$

$$\int_\Omega \frac{x^2}{x^2+z^2}\,dx\,dy\,dz = \int_{\Omega'} \frac{\rho^2 \operatorname{sen}^2\theta\cos^2\varphi}{\rho^2\operatorname{sen}^2\theta}\,\rho^2\operatorname{sen}\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi = \int_{\Omega'} \rho^2 \operatorname{sen}\theta\cos^2\varphi\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$$

$$(x,y,z)\in\Omega \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 2 \\ x^2+z^2 \leq y^2 \\ y \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 \leq \rho^2 \leq 2 \\ \rho^2\operatorname{sen}^2\theta \leq \rho^2\cos^2\theta \\ \rho\cos\theta \geq 0 \\ \rho \geq 0 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \leq \rho \leq \sqrt{2} \\ \operatorname{sen}^2\theta \leq \cos^2\theta \\ \cos\theta \geq 0 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq \rho \leq \sqrt{2} \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\Omega' = \left\{(\rho,\theta,\varphi)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, 1 \leq \rho \leq \sqrt{2},\ 0 \leq \theta \leq \pi/4,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\right\}$$

Ritorniamo all'integrale

$$\left(\int_1^{\sqrt{2}} \rho^2\, d\rho\right)\left(\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}\theta\, d\theta\right)\left(\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi\right) = \left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_1^{\sqrt{2}} \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi/4} \left[\frac{1}{2}(\varphi + \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi)\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\pi = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{2}-6\right)$$

Osservazione

Sia $\Omega \in \mathbb{R}^3$, diciamo che Ω è simmetrico rispetto al piano xy se $\forall (x,y,z)\in\Omega$ anche $(x,y,z)\in\Omega$

invece è simmetrico rispetto al piano xz se $\forall (x,y,z)\in\Omega$ anche $(x,-y,z)\in\Omega$
È simmetrico rispetto al piano yz se $\forall (x,y,z)\in\Omega$ anche $(-x,y,z)\in\Omega$

Si hanno 6 casi (due notevoli)

1) Se Ω è simmetrico rispetto al piano xy e $f:\Omega\to\mathbb{R}$ è tale che $\forall(x,y,z)\in\Omega$ $f(x,y,z) = f(x,y,z)$, allora
$$\int_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = 2\int_{\Omega'} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$
dove $\Omega' = \{(x,y,z)\in\Omega \mid z \geq 0\}$ (oppure $z \leq 0$)

2) Se Ω è simmetrico rispetto al piano xy e $f:\Omega\to\mathbb{R}$ è tale che $\forall(x,y,z)\in\Omega$ $f(x,y,-z) = -f(x,y,z)$, allora
$$\int_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = 0$$

Definizione: CURVA REGOLARE A TRATTI

Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva parametrica.
Diciamo che γ è regolare a tratti se valgono i seguenti fatti

1. γ è derivabile in $[a,b]$ con derivata continua, tranne che in un numero finito di punti;
2. dove γ è derivabile si ha che $\gamma' \neq 0$ tranne che in un numero finito di punti
3. dove γ non è derivabile esistono le derivate laterali

Definizione: CURVE PARAMETRICHE EQUIVALENTI

Siano $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli e $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ e $\eta : J \to \mathbb{R}^n$ due curve parametriche
Diciamo che γ e η sono equivalenti se $\exists\, \alpha : J \to I$ biettiva, di classe C_1 con $\alpha'(\tau) > 0$, $\forall \tau \in J$ tale che $\eta = \gamma \circ \alpha$

Esempio

$R > 0$
$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t)$

$\eta : [0,1] \to \mathbb{R}^2$
$\eta(\tau) = (R\cos(2\pi\tau), R\sin(2\pi\tau))$

$\eta(\tau) = \gamma(2\pi\tau)$ $\quad \alpha(\tau) = 2\pi\tau \Rightarrow \alpha'(\tau) = 2\pi > 0$

η e γ sono equivalenti

Proposizione

Siano $I, J \in \mathbb{R}$ intervalli, $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ e $\eta : J \to \mathbb{R}^n$ curve parametriche equivalenti e α come nella definizione precedente.
Allora si ha che:
1. γ e η hanno lo stesso sostegno
2. γ è semplice se e solo se η è semplice
3. γ è derivabile se e solo se η è derivabile e in tal caso si ha che
   $\forall \tau \in J : \eta'(\tau) = (\gamma \circ \alpha)'(\tau) = \gamma'(\alpha(\tau))\,\alpha'(\tau)$
   In particolare γ è regolare se e solo se η è regolare
4. γ e η inducono lo stesso orientamento sul loro comune sostegno

Proposizione

Sia $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli, $\gamma : I \to \mathbb{R}$ e $\eta : J \to \mathbb{R}^n$ curve parametriche e $\alpha : J \to I$ come nella definizione precedente tranne che per il segno di α' e supponiamo che $\alpha'(\tau) < 0$ $\forall \tau \in J$.
Allora valgono 1) 2) 3) della proposizione precedente.
Inoltre γ e η inducono nel loro comune sostegno orientamenti opposti

Consiglio
- × parametrizzare in verso antiorario
  $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x_0 + R\cos t, y_0 + R\sin t)$
- × parametrizzare in verso orario
  $\delta : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\delta(t) = (x_0 + R\cos t, y_0 - R\sin t)$

Proprietà: TEOREMA (dipendenza dell'integrale di linea dall'orientamento)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto, $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale continuo e $\gamma: [a,b] \to \Omega$ e $\eta: [c,d] \to \Omega$ due curve parametriche semplici e regolari.

Allora

① se γ e η sono equivalenti, allora $\int_\gamma F\,dP = \int_\eta F\,dP$,

② se esiste $\alpha: [c,d] \to [a,b]$ biettiva, di classe C^1 con $\alpha'(\tau) < 0 \ \forall \tau \in [c,d]$ tale che $\eta = \gamma \circ \alpha$, allora

$$\int_\gamma F\,dP = -\int_\eta F\,dP$$

Dimostrazione ②

$\eta = \gamma \circ \alpha \quad \to \quad \forall \tau \in [c,d]$

$\eta'(\tau) = (\gamma \circ \alpha)'(\tau) = \gamma'(\alpha(\tau))\,\alpha'(\tau)$

$$\int_\eta F\,dP = \int_c^d F(\eta(\tau)) \cdot \eta'(\tau)\,d\tau = \int_c^d F(\gamma(\alpha(\tau))) \cdot \gamma'(\alpha(\tau))\alpha'(\tau)\,d\tau$$

Per ipotesi α è biettiva $\to \alpha([c,d]) = [a,b]$

inoltre $\alpha'(\tau) < 0 \ \forall \tau \in [c,d] \to \alpha$ è strettamente decrescente

$\to \alpha(c) = b \ , \ \alpha(d) = a$

$$= \int_b^a F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt = -\int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt = -\int_\gamma F\,dP \qquad \text{cvd}$$

Definizione

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto, $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo continuo e $\gamma: [a,b] \to \Omega$ una curva parametrica semplice e regolare a tratti.

Definizione: SUPERFICI EQUIVALENTI

Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ aperti connessi per archi e $\sigma : A \to \mathbb{R}^3$ e $\tau : B \to \mathbb{R}^3$ due superfici parametriche regolari e semplici.
Diciamo che σ e τ sono equivalenti se $\exists\, \alpha : B \to A$ biettiva, di classe C^1, con $\det J_\alpha(x,y) > 0$, $\forall (x,y) \in B$, tale che $\tau = \sigma \circ \alpha$

Proprietà:

① Se σ e τ sono equivalenti allora σ e τ hanno lo stesso sostegno e inducono su di esso lo stesso verso di attraversamento

② Siano σ, τ, α come nella definizione precedente, tranne che per il segno di $\det J_\alpha(x,y)$ che supponiamo essere di segno negativo.
Allora σ e τ hanno lo stesso sostegno ma inducono su di esso verso di attraversamento opposto

Esempi:

① Siano $R > 0$ e $\sigma : \mathbb{R} \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ definita da

$\sigma(u,v) = (R\cos v, R \operatorname{sen} v, u)$, σ è di classe C^1

$$J_\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} 0 & -R\operatorname{sen} v \\ 0 & R\cos v \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il sostegno di σ è $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y,z) = \sigma(u,v),\ u \in \mathbb{R},\ v \in (0, 2\pi)\}$

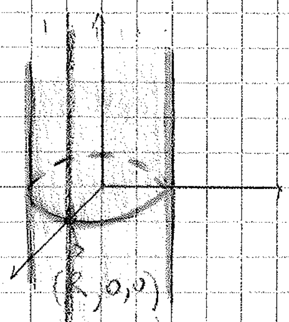
$(x,y,z) = \sigma(u,v) = (R\cos v, R\operatorname{sen} v, u)$

$$\begin{cases} x = R\cos v & u \in \mathbb{R} \\ y = R \operatorname{sen} v & v \in (0, 2\pi) \\ z = u \end{cases}$$

$x^2 + y^2 = R^2\cos^2 v + R^2 \operatorname{sen}^2 v = R^2$

$\to$ è un cilindro con asse coincidente con l'asse z.
Il fatto che $v \neq 0, 2\pi \to x \neq R$ quando $y \neq 0$

$\Rightarrow \Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = R^2\} \setminus \{(R, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$



INTEGRALI DI SUPERFICIE

Definizione

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto connesso per archi, $K \subseteq A$ un compatto tale che ∂K sia il sostegno di una curva parametrica chiusa, semplice e regolare a tratti, $\sigma: K \to \mathbb{R}^3$ una calotta regolare, $\Sigma = \sigma(K)$ il sostegno di σ e $f: \Sigma \to \mathbb{R}$ una funzione continua.

Si chiama integrale superficiale di f su σ il numero reale

$$\int_\sigma f = \int_K f(\sigma(u,v)) \|N(u,v)\| \, du dv,$$

$$\int_\sigma f \, d\sigma \quad \text{dove } N(u,v) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v)$$

$$\int_\Sigma f \quad \text{se } f = 1, \text{ allora } \int_\sigma 1 = A_\Sigma \text{ è l'area di } \Sigma$$

Osservazione

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto connesso per archi, $K \subseteq A$ un compatto tale che ∂K sia il sostegno di una curva parametrica chiusa, semplice e regolare a tratti e $g: A \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1.

Allora si ha che se $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in K, z = g(x,y)\}$, allora Σ è il grafico di g ristretto a K.

Una parametrizzazione di Σ è $\sigma: K \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(x,y) = (x, y, g(x,y))$.

In tal caso $N(x,y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x,y) = \sigma =$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \sigma_3}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial y}(x,y) & \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}(x,y) & \frac{\partial \sigma_3}{\partial y}(x,y) \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}, 1\right)$$

Osservazione

L'area di $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in K, z = g(x,y)\}$ è

$$A_\Sigma = \int_\Sigma 1 \, d\sigma = \int_K \|N(x,y)\| \, dx dy, \quad \text{dove } \Sigma = \sigma(K), \ \sigma: K \to \mathbb{R}^3$$

$\sigma(x,y) = (x, y, g(x,y))$ e

$$N(x,y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x,y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1\right)$$

$$\|N(x,y)\| = \sqrt{\left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(-\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right)^2 + 1}$$

Allora $$A_\Sigma = \int_K \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right)^2} \, dx dy$$

FLUSSO DEL CAMPO VETTORIALE

Definizione: FLUSSO

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto non vuoto, $F: \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale continuo, $K \subseteq \mathbb{R}^2$ un compatto la cui frontiera è il sostegno di una curva parametrica chiusa, semplice e regolare a tratti, $\sigma: K \to \Omega$ una calotta regolare e $\Sigma = \sigma(K)$ il sostegno di σ.

Si chiama FLUSSO DEL CAMPO VETTORIALE F ATTRAVERSO σ il numero reale

$$\int_\sigma F \cdot n = \int_K F(\sigma(u,v)) \cdot N(u,v)\, du\, dv$$

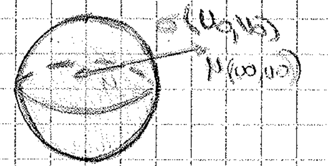
dove $N(u,v)$ è il vettore normale a Σ nel punto $\sigma(u,v)$ definito da

$$N(u,v) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v)$$

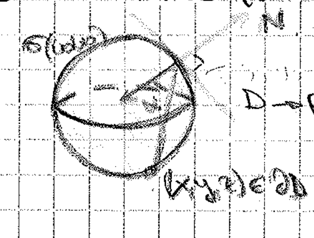
e $n = \frac{N}{\|N\|}$ è il versore normale a Σ avente stesso verso di N

Osservazione: il vettore normale $N(u,v) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v)$ è entrante o uscente?
Ci sono tre modi per determinarlo

1) GRAFICO
Si considera $(u_0, v_0) \in \text{int}(K)$
Calcoliamo $\sigma(u_0,v_0)$ e $N(u_0,v_0)$



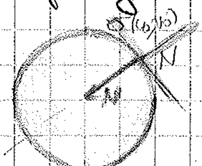
2) VETTORIALE (vale solo se è convesso)



$[(x,y,z) - \sigma(u_0,v_0)] \cdot N(u_0,v_0) < 0$
$\Downarrow$
$N(u_0,v_0)$ è uscente

$[(x,y,z) - \sigma(u_0,v_0)] \cdot N(u_0,v_0) > 0 \to N(u_0,v_0)$ è entrante

3) ANALITICO
Se per ogni $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo tale che
$\sigma(u_0,v_0) + \varepsilon N(u_0,v_0) \in D$, allora $N(u_0,v_0)$ è entrante
altrimenti $N(u_0,v_0)$ è uscente



(24) **TEOREMA** (dipendenza del flusso di un campo dall'orientamento indotto dalla parametrizzazione sul sostegno)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto non vuoto, $F: \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale continuo, $\sigma: K \to \Omega$ e $\tau: K' \to \Omega$ due calotte regolari.

Valgono i seguenti fatti:

① se σ e τ sono equivalenti, allora $\int_\sigma Fn = \int_\tau Fn$

② se esiste $\alpha: K' \to K$ biettiva e di classe C^1 con $\det J_\alpha(x,y) < 0$ per ogni $(x,y) \in K'$ tale che $\tau = \sigma \circ \alpha$, allora

$$\int_\sigma Fn = -\int_\tau Fn$$

OSSERVAZIONE

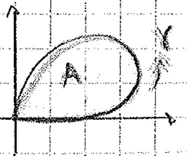
Se σ e τ sono equivalenti (hanno quindi lo stesso sostegno e inducono su di esso il medesimo orientamento), allora il flusso del campo attraverso le superfici non cambia

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 120

Esempio

Calcolare l'area della regione di piano delimitata dal sostegno di $\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^2$

$\gamma(t) = (\underset{x}{t^3 - 3t^2 + 2t}, \underset{y}{t - t^3})$ con $F(-y, 0)$



Per il corollario

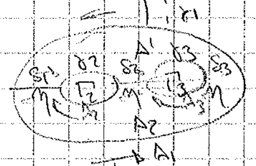
$$m(A) = \oint_{\partial A} F\, dP = \oint_\gamma F\, dP = \int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt =$$

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = F(t^3 - 3t^2 + 2t, t - t^3) \cdot (3t^2 - 6t + 2, 1 - 3t^2) =$$

$$= (t^3 - t, 0)(3t^2 - 6t + 2, 1 - 3t^2) = 3t^5 - 6t^4 - t^3 + 6t^2 - 2t$$

$$= \int_0^1 (3t^5 - 6t^4 - t^3 + 6t^2 - 2t)\, dt = \left[\frac{1}{2} t^6 - \frac{6}{5} t^5 - \frac{1}{4} t^3 + 2t^3 - t^2\right]_0^1 = \frac{1}{20}$$

Osservazione



$\partial A = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, $A = A_1 \cup A_2$

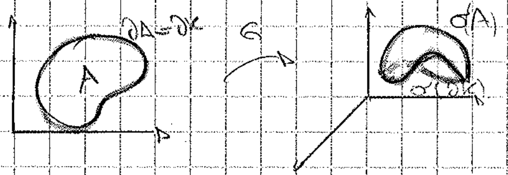
$$\iint_A = \iint_{A_1} + \iint_{A_2} \overset{Green}{=} \underbrace{\int_{\gamma_1} + \int_{\delta_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\delta_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\delta_3}}_{\iint_{A_1}} + \underbrace{\int_{\lambda_1} + \int_{\eta_1} + \int_{\lambda_2} + \int_{\eta_2} + \int_{\lambda_3} + \int_{\eta_3}}_{\iint_{A_2}}$$

$\int_{\gamma_1} + \int_{\lambda_1} = \int_{\Gamma_1}$; $\int_{\gamma_2} + \int_{\lambda_2} = \int_{\Gamma_2}$; $\int_{\gamma_3} + \int_{\lambda_3} = \int_{\Gamma_3}$ gli altri si elidono a vicenda

TEOREMA DI STOKES

Definizione

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto limitato connesso ad archi, tale che ∂A sia il sostegno di una curva parametrica chiusa, semplice e regolare a tratti, $K = \bar{A} = A \cup \partial A$ (cioè K è un compatto con $\partial K = \partial A$) e $\sigma: K \to \mathbb{R}^3$ una calotta regolare.
Si chiama bordo di σ la restrizione di σ a ∂K



(talvolta si parla di bordo di Σ, dove $\Sigma = \sigma(K)$)

Posto $\Sigma = \sigma(K)$ sia $N(u,v) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v)$.

Diciamo che il bordo di σ (denotato con $\partial\sigma$) è orientato positivamente se $\sigma(\partial K)$ è percorso in senso antiorario rispetto ad un osservatore posto come N, ovvero se percorrendo $\sigma(\partial K)$ appoggiati alla faccia di Σ da cui esce N, si vedono i punti di Σ alla propria sinistra

TEOREMA DI GAUSS

Definizione

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto limitato connesso per archi.
Diciamo che D è un aperto con bordo se ∂D è l'unione di un numero finito di sostegni di calotte regolari tutti orientati secondo il verso uscente da D e aventi a 2 a 2 al più un comune sostegno di curve parametriche regolari a tratti.

Teorema di Gauss (o della divergenza)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto non vuoto, $F: \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1, $F = (f_1, f_2, f_3)$, $D \in \Omega$ un aperto con bordo con $\partial D \subseteq \Omega$
Allora

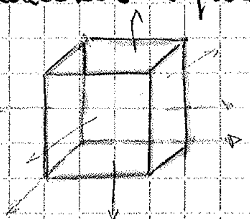
$$\int_{\partial D} F n \, d\sigma = \int_D \operatorname{div} F(x,y,z) \, dx\,dy\,dz$$

dove $\operatorname{div} F: \Omega \to \mathbb{R}$ è la divergenza di F, definita da:

$$\forall (x,y,z) \in \Omega, \ \operatorname{div} F(x,y,z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z)$$

Esempio

Calcolare il flusso uscente del campo $F(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$ dal bordo di $D = [0,1]^3$



Per il teorema di Gauss

$$\int_{\partial D} F n \, d\sigma = \int_D \operatorname{div} F(x,y,z) \, dx\,dy\,dz = \int_D 2(x+y+z) \, dx\,dy\,dz =$$

$$= 2 \int_{K = [0,1]\times[0,1]} \left[\int_0^1 (x+y+z) \, dz \right] dx\,dy = 2 \int_K \left[(x+y)z + \frac{1}{2} z^2 \right]_0^1 dx\,dy =$$

$$= 2 \int_K \left(x+y+\frac{1}{2} \right) dx\,dy = 2 \int_0^1 \left[\int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} + y \right) dy \right] dx = 3$$

Sia $\phi : (a,b) \to \mathbb{R}$ una primitiva di questa funzione su (a,b). Quindi

$$\forall t \in (a,b) : \phi'(t) = t\varphi(t)$$

Consideriamo la funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definita da

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega : f(x) = \phi(\|x\|) = \phi\left(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}\right)$$

La funzione f ammette tutte le derivate parziali in Ω con

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega : \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \phi'(\|x\|)\frac{x_i}{\|x\|} = \|x\|\varphi(\|x\|)\frac{x_i}{\|x\|} = x_i\varphi(\|x\|)$$

Poiché queste derivate parziali sono continue si ha che f è differenziabile in Ω con

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega : \nabla f(x) = (x_1\varphi(\|x\|), \dots, x_n\varphi(\|x\|)) = \varphi(\|x\|)x = F(x)$$

Quindi f è un potenziale di F su Ω e di conseguenza F è conservativo

Proposizione : Proprietà dei potenziali

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto connesso per archi, $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale conservativo e $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ due potenziali di F su Ω.
Allora esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $f - g$ è costante, cioè $f(x) - g(x) = c \quad \forall x \in \Omega$

Dimostrazione

Consideriamo $f - g : \Omega \to \mathbb{R}$.
Poiché f e g sono due potenziali, allora sono differenziabili in Ω con $\nabla f(x) = \nabla g(x) = F(x) \quad \forall x \in \Omega$.

Quindi $f - g$ è differenziabile in Ω con

$$\forall x \in \Omega : \nabla(f-g)(x) = \nabla f(x) - \nabla g(x) = F(x) - F(x) = 0$$

Poiché Ω è connesso ad archi, allora $f - g$ è costante su Ω.
Infatti, siano $x, y \in \Omega$ con $x \neq y$ e sia $\gamma : [a,b] \to \Omega$ una curva parametrica semplice e regolare a tratti tale che $\gamma(a) = x$ e $\gamma(b) = y$

Quindi esistono $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ tali che γ è derivabile in ogni intervallo (t_{k-1}, t_k) per ogni $k = 1, \dots, m$, con derivata non nulla e negli estremi di tali intervalli esistono le derivate laterali.

Consideriamo la funzione $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ definita da $\varphi(t) = (f-g)(\gamma(t))$.
Si ha che è derivabile in ogni $t \neq t_k$, per ogni $k = 0, \dots, m$ con

$$\varphi'(t) = \underbrace{\nabla(f-g)(\gamma(t))}_{0} \cdot \gamma'(t) = 0$$

Ne segue che φ è costante in ogni intervallo (t_{k-1}, t_k). Essendo anche continua su $[a,b]$, ne segue che φ è costante su tutto $[a,b]$.
In particolare si ha che $\varphi(a) = \varphi(b)$. Quindi

$$(f-g)(x) = (f-g)(\gamma(a)) = \varphi(a) = \varphi(b) = (f-g)(\gamma(b)) = (f-g)(y)$$

Per l'arbitrarietà di x e y ne segue che $f - g$ è costante

Proprietà: TEOREMA DI EQUIVALENZA

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto connesso per archi e $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale continuo.
Allora sono fatti equivalenti:
i) F è conservativo
ii) se $\gamma_1: [a,b] \to \Omega$ e $\gamma_2: [c,d] \to \Omega$ sono due curve parametriche semplici e regolari a tratti tali che $\gamma_1(a) = \gamma_2(c)$ e $\gamma_1(b) = \gamma_2(d)$, allora

$$\int_{\gamma_1} F\,dP = \int_{\gamma_2} F\,dP$$

iii) se $\gamma: [a,b] \to \Omega$ è una curva parametrica chiusa, semplice e regolare a tratti allora

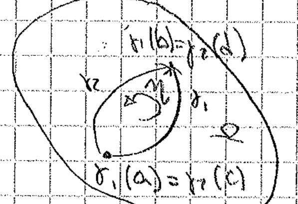
$$\oint_{\gamma} F\,dP = 0$$

Dimostrazione

i) $\to$ iii), iii) $\to$ ii), ii) $\to$ i

Quindi i) $\to$ iii)

① Proviamo che iii) $\to$ ii)



Sia $\eta: [a, b+d-c] \to \Omega$ definita da

$$\eta(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{se } a \le t \le b \\ \gamma_2(b+d-t) & \text{se } b < t \le b+d-c \end{cases}$$

Si ha che η è regolare a tratti, semplice e chiusa. Infatti $\eta(a) = \gamma_1(a)$ e $\eta(b+d-c) = \gamma_2(c) = \gamma_1(a)$

Per l'ipotesi iii) si ha che $\int_\eta F\,d = 0$. Quindi

$$0 = \int_\eta F\,dP = \int_a^b F(\eta(t)) \cdot \eta'(t)\,dt + \int_b^{b+d-c} F(\eta(t))(\eta'(t))\,dt = \int_a^b F(\eta(t))\gamma_1'(t)\,dt +$$

$$+ \int_b^{b+d-c} F(\gamma_2(b+d-t))(-\gamma_2'(b+d-t))\,dt$$

cambiamento di variabile $\tau = b+d-t$, $d\tau = -dt$. Si ottiene:

$$\int_{\gamma_1} F\,dP + \int_d^c F(\gamma_2(\tau))\,\gamma_2'(\tau)\,d\tau = \int_{\gamma_1} F\,dP - \int_c^d F(\gamma_2(\tau))\,\gamma_2'(\tau)\,d\tau = \int_{\gamma_1} F\,dp - \int_{\gamma_2} F\,dP$$

Quindi $\int_{\gamma_1} F\,dp = \int_{\gamma_2} F\,dp$

② Proviamo che ii) $\to$ i)

Si deve dimostrare che F è conservativo, cioè che esiste $f: \Omega \to \mathbb{R}$ tale che $\nabla f = F$.
$F(f_1, \dots, f_n)$ $\forall j = 1, \dots, n$ si ha $\frac{\partial f}{\partial x_j} = f_j$

Proposizione: CONDIZIONE NECESSARIA PER I CAMPI CONSERVATIVI C^1

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto e $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale di classe C^1, $F = (f_1, \dots, f_n)$

Se F è conservativo, allora $\forall x \in \Omega$ e $\forall i,j = 1, \dots, n$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$$

Dimostrazione

F conservativo $\to \exists f: \Omega \to \mathbb{R}$ differenziabile tale che $\forall x \in \Omega$
$\nabla f(x) = F(x)$, cioè $\forall i = 1, \dots, n$ e $\forall x \in \Omega$ $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = f_i(x)$

F di classe C^1 $\to f_i$ è di classe C^1 $\forall i = 1, \dots, n \to \frac{\partial f}{\partial x_i}$ è di classe C^1 $\forall i = 1 \dots n$
$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ è continua $\forall i,j = 1, \dots n \to f$ è di classe C^2 in Ω

Per il lemma di Schwarz si ha che $\forall i,j = 1, \dots, n$ e $\forall x \in \Omega$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$$

Si ha che $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$

Osservazione

F conservativo $\to \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$ ma non il contrario

$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \neq \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \to F$ non è conservativo

Condizione necessaria ma non sufficiente!

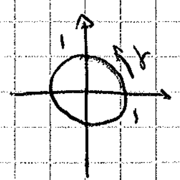
Esempio (dimost. che la C.N non è sufficiente)

$$F(x,y) = \Big(\overset{f_1}{-\frac{2y}{x^2+y^2}}, \overset{f_2}{\frac{2x}{x^2+y^2}}\Big)$$

F verifica CN infatti $\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = -\frac{2x^2+2y^2-4y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = \frac{2x^2+2y^2-4x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}$ $\shortparallel \to$ verificato

Sia $\gamma: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$
$\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$
γ è chiusa



$\operatorname{Im}(\gamma) \subset \operatorname{dom}(F) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 120

Definizione: CONDIZIONE SUFFICIENTE PER I CAMPI CONSERVATIVI DI CLASSE C^1

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto e $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale di classe C^1, $F = (f_1, \dots, f_n)$
Se Ω è semplicemente connesso e $\forall x \in \Omega$ e $\forall i, j = 1 \dots n$
$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$, allora F è conservativo

Dimostrazione

Sia $\gamma: [a,b] \to \Omega$ una curva parametrica chiusa, semplice e regolare a tratti
Proviamo che $\oint_\gamma F\,dP = 0$

$\boxed{\text{CASO } n=2}$ $\to \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)$

Ω è semplicemente connesso $\to$ $\left.\begin{array}{l} A \subseteq \Omega \\ \partial A = \operatorname{Im}(\gamma) \subseteq \Omega \end{array}\right\}$ $\bar{A} = A \cup \partial A \subseteq \Omega$

$$\oint_\gamma F\,dP = \oint_{\partial A} F\,dP \overset{*}{=} \int_A \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\right) dx\,dy = 0$$

Se ∂A è orientato positivamente, allora per il teorema di Green *

Se invece non è orientato positivamente allora (x prop. integrali di linea)

$$\oint_\gamma F\,dP = \oint_{\partial A} F\,dP = -\int_A \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\right) dx\,dy = 0$$

$\boxed{\text{CASO } n=3}$ $\operatorname{rot} F = 0$

Ω è semplicemente connesso $\to \exists \sigma: K \to \Omega \mid \sigma(\partial K) = \operatorname{Im}(\gamma)$

$$\oint_\gamma F\,dP = \oint_{\partial\sigma} F\,dP \overset{*}{=} \int_\sigma \operatorname{rot} F \, n\,d\sigma = 0$$

* se $\partial\sigma$ è orientato positivamente, allora per il teorema di Stokes

Se invece non è orientato positivamente

$$\oint_\gamma F\,dP = \oint_{\partial\sigma} F\,dP = -\int_\sigma \operatorname{rot} F \, n\,d\sigma = 0$$

Per il teorema di equivalenza F è conservativo

Osservazione: è necessario che Ω sia semplicemente connesso?

No, esistono campi che sono conservativi senza essere s.c.

$$G(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{2y}{x^2+y^2}\right)$$

ha $\operatorname{dom}(G) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ che non è semplicemente connesso ma è conservativo, infatti un potenziale di G su $\operatorname{dom}(G)$ è

$$g(x,y) = \log(x^2+y^2)$$

RICHIAMI SULLE SUCCESSIONI NUMERICHE

Definizione

Siano a_n una successione reale e $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
Diciamo che ℓ è il limite per n che tende a $+\infty$ di a_n se per ogni intorno I_ℓ di ℓ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq n_0$ si ha che $a_n \in I_\ell$.

In tal caso scriviamo $\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell$ oppure $\lim_{n} a_n = \ell$

Se $\ell \in \mathbb{R}$, $\lim_n a_n = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |a_n - \ell| < \varepsilon$

$I_\ell = (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$

Se $\ell = +\infty$ $(-\infty)$ $\to I_\ell = (b, +\infty)$ $(-\infty, b)$, $\lim_n a_n = +\infty \iff \forall b \in \mathbb{R} \; \exists n_0 \in \mathbb{N} . \forall n \geq n_0$

Se $\lim_n a_n = \ell \in \mathbb{R}$ diciamo che a_n converge a ℓ

Se $\lim_n a_n = +\infty$ diciamo che diverge positivamente

Se $\nexists \lim_n a_n$ diciamo che (a_n) è indeterminata (oscilla)

Valgono i teoremi:

1) UNICITÀ DEL LIMITE
2) PERMANENZA DEL SEGNO
3) LIMITATEZZA LOCALE
4) ALGEBRA DEI LIMITI
5) STESSE FORME INDETERMINATE $\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; +\infty-\infty, 0\cdot\infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$
6) SUCCESSIONI MONOTONE
7) LIMITI NOTEVOLI

Limiti notevoli

1) $\lim_n \sqrt[n]{n^k} = 1 \quad \forall k \in \mathbb{R}$

2) $\lim_n \sqrt[n]{a^k} = 1 \quad \forall a > 0, \forall k \in \mathbb{R}$

3) $\lim_n \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

4) $\lim_n \sqrt[n]{n!} = +\infty$

5) $\lim_n \frac{\log_a n}{n^k} = 0 \quad \forall a > 0, a \neq 1, \forall k > 0$

6) $\lim_n \frac{n^k}{a^n} = 0 \quad \forall a > 1, \forall k \in \mathbb{R}$

7) $\lim_n n^k a^n = 0 \quad \forall 0 < a < 1, \forall k \in \mathbb{R}$

8) $\lim_n \frac{a^n}{n!} = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$

9) $\lim_n \frac{n!}{n^n} = 0$

Esempio

$\lim_n (-1)^n \nexists \rightarrow a_n = (-1)^n$
$b_n = a_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \rightarrow \lim_n b_n = 1$
$c_n = a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1 \rightarrow \lim_n c_n = -1$

$\Rightarrow \nexists \lim_n a_n$

Definizione: TEOREMA DI BOLZANO - WEIERSTRASS

Sia (a_n) una successione reale limitata (cioè $\exists M>0 : |a_n| < M, \forall n$)
Allora (a_n) ammette almeno una sottosuccessione convergente

Definizione: CRITERIO DI RAPPORTO (x successioni)

Sia (a_n) una successione tale che $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
supponiamo che esista

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in [0,+\infty) \cup \{+\infty\}$$

Valgono i seguenti fatti:

1) se $\ell < 1$, allora $\lim_n a_n = 0$
2) se $\ell > 1$, allora $\lim_n a_n = +\infty$

Osservazione:

se $\ell = 1$, allora NSPCN

Definizione: CRITERIO DELLE RADICI

Sia (a_n) una successione tale che $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
supponiamo che esista

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \ell \in [0,+\infty) \cup \{+\infty\}$$

Valgono i seguenti fatti:

1) se $\ell < 1$, allora $\lim_n a_n = 0$
2) se $\ell > 1$, allora $\lim_n a_n = +\infty$

Osservazione

Sia $a_n \geq 0 \ \forall n$. Se $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in [0,+\infty) \cup \{+\infty\}$ allora $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \ell$

$\boxed{\text{MA}}$ non è vero il viceversa.
Attenzione al caso in cui il limite è 1

Esempio: serie di Mengoli

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - 0 = 1$$

4) Variante serie telescopiche (sia $p \in \mathbb{N}, p \geq 1$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+p} - a_n)$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (a_{k+p} - a_k) = (a_{n+1} + \dots + a_{n+p}) - (a_0 + \dots + a_{p-1})$$

CRITERI DI CONVERGENZA

PER TUTTE LE SERIE

Proposizione

Il carattere di una serie non cambia se si aggiunge, se si toglie o se si modifica un numero finito di termini della serie

Osservazione

Se $\sum a_n$ converge e aggiungiamo o togliamo o modifichiamo un numero finito di termini, allora la somma della serie può cambiare rispetto a quella di $\sum a_n$

Esempio

$$\sum_{n=3}^{\infty} 2^{-n} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left[\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = 2 - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}$$

Proposizione (Algebra delle serie)

Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ due serie reali e $\lambda \in \mathbb{R}$

Allora si ha che

1) se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ convergono, e allora convergono anche $\sum (a_n + b_n)$ e $\sum (\lambda a_n)$ e si ha che
$$\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$$
$$\sum (\lambda a_n) = \lambda \sum a_n$$

2) se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ divergono entrambe positivamente allora $\sum (a_n + b_n)$ diverge positivamente.

3) se $\sum a_n$ converge e $\sum b_n$ diverge positivamente, allora $\sum (a_n + b_n)$ diverge positivamente

Teorema: del confronto asintotico

Siano (a_n) e (b_n) due successioni tali che $a_n \geq 0$ e $b_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Supponiamo che esista $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \ell \in [0, +\infty)$

Allora si ha che
1) se $\ell > 0$, allora Σa_n converge se e solo se Σb_n converge
2) se $\ell = 0$, allora se Σb_n converge anche Σa_n converge
3) se $\ell = 0$ e Σa_n diverge, allora anche Σb_n diverge

Casi scoperti:
4) $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$, $a_n = o(b_n)$, $n \to +\infty$, Σb_n diverge $\Rightarrow$ Σa_n NSPCN
5) $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$, $a_n = o(b_n)$, $n \to +\infty$, Σa_n converge $\Rightarrow$ Σb_n NSPCN

Osservazione

$$\frac{1}{n^2 - n + 1} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

$\Sigma \frac{1}{n^2}$ converge $\to$ per il crit. del con. as. $\Sigma \frac{1}{n^2 - n + 1}$ converge

Esempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n+3} \geq 0$$

$\forall n \geq 1$ $\quad 5n+3 \geq 5n \geq n \Rightarrow \forall n \geq 1$ $\frac{1}{5n+3} \leq \frac{1}{5n} \leq \frac{1}{n}$ $\to$ non si può applicare il criterio del confronto

Però

$$\frac{1}{5n+3} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{5n} = \frac{1}{5} \frac{1}{n}$$

$\Sigma \frac{1}{n}$ diverge $\to$ per l'algebra delle serie

$\Sigma \frac{1}{5} \frac{1}{n}$ diverge $\to$ per il criterio del confronto asintotico la serie $\sum_{n=1} \frac{1}{5n+3}$ diverge

Teorema: criterio della radice

Sia (a_n) una successione tale che $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$
Supponiamo che esista

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \ell \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

Valgono i seguenti fatti:

1) se $\ell < 1$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

2) se $\ell > 1$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge

se $\ell = 1$ NSPCN

Teorema : criterio di MacLaurin

Sia $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione non negativa e decrescente e sia a_n

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 120

Osservazione

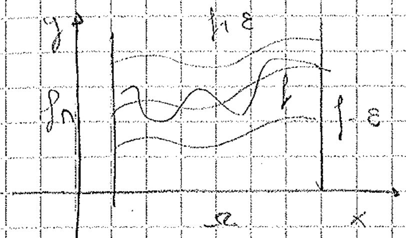
$f_n \to f$ uniforme in Ω $\to \lim_n \|f_n - f\|_\infty = 0 \to \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$

$\|f_n - f\| < \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$ e $\forall x \in \Omega \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

cioè $\quad -\varepsilon < f_n(x) - f(x) < \varepsilon$

quindi

$$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$$



Esempio

$f_n(x) = x^n, \ \forall x \in [0,1]$

Limite puntuale? $\forall x \in [0,1] : \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases} \to \underbrace{\begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}}_{f(x)}$

$f_n \to f$ uniformemente in Ω?

cioè $\lim_n \|f_n - f\|_\infty = 0$, dove $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)|$?

$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} x^n & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| =$

$0 \leq x^n = \sup_{x \in [0,1)} x^n = 1$

quindi

$\lim_n \|f_n - f\|_\infty = \lim_n 1 = 1 \neq 0 \to (f_n)$ non converge unif a f

Proposizione

Siano $\Omega \in \mathbb{R}^m$ non vuoto, (f_n) una successione di funzioni limitata da Ω in $\mathbb{R}$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione.
Se (f_n) converge uniformemente a f_n in Ω, allora (f_n) converge puntualmente a f in Ω.

Dimostrazione

$\forall x \in \Omega$

$0 \leq |f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty$
$\qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow n \to +\infty$
$f_n \to f$ unif in $\Omega \Rightarrow \lim_n \|f_n - f\|_\infty = 0$ (Teorema 2(c))

Quindi $\forall x \in \Omega \ \lim_n |f_n(x) - f(x)| = 0 \Rightarrow f_n \to f$ puntualmente in Ω

SERIE DI FUNZIONI

Definizione

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ non vuoto e f_n una successione di funzioni da Ω in $\mathbb{R}$.
Si chiama serie di f_n la scrittura formale

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

$\forall x \in \Omega$ poniamo $S_0(x) = f_0(x)$
$\forall n \geq 1 : S_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$

S_n è detta somma parziale n-esima della serie di f_n.
Diciamo che $\sum_{n=0} f_n(x)$ converge puntualmente ad una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ se la successione delle somme parziali (S_n) converge puntualmente a f in Ω, cioè $\forall x \in \Omega$: $\lim_n S_n(x) = f(x)$
In tal caso f è detta somma della serie di f_n e si pone

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \lim_n S_n(x) = f(x), \ \forall x \in \Omega$$

Diciamo che $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge assolutamente in Ω se $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$ converge punt. in Ω

Osservazione

Per il criterio della convergenza assoluta $\sum f_n(x)$ conv. ass. $\Rightarrow$ $\sum f(x)$ conv. punt.

Definizione

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ non vuoto, (f_n) una successione di funzioni limitate da Ω in $\mathbb{R}$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione.
Diciamo che $\sum f_n(x)$ converge uniformemente a f in Ω se la successione (S_n) delle somme parziali della serie di f_n converge uniformemente a f in Ω, cioè

$$\lim_n \|S_n - f\|_\infty = 0 \quad , \text{dove } \|S_n - f\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |S_n(x) - f(x)|$$

Diciamo che $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge totalmente (o normalmente) se $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty$ converge (in $\mathbb{R}$) dove $\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |f_n(x)|$

Osservazione

$\sum f_n(x)$ converge uniformemente $\Rightarrow$ $\sum f_n(x)$ converge puntualmente.

Osservazione

Se $f_n(x) = a_n \ \forall x \in \Omega$, cioè se $\sum f_n(x)$ è la serie numerica $\sum a_n$, allora
conv uniforme è la conv. puntuale
" totale è la " assoluta

Infatti $\forall x \in \Omega$
$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k = S_n$

$\lim_n S_n(x) = \lim_n S_n = f \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \Omega$

$\|S_n - f\|_\infty = \sup |S_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in \Omega} |S_n - f| = |S_n - f|$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 120

SERIE DI POTENZE

Definizione

Siano (a_n) una successione reale e $x_0 \in \mathbb{R}$.
Si chiama serie di potenze centrata in x_0 la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

con la convenzione che $0^0 = 1$
Gli a_n sono detti coefficienti della serie.
Si chiama raggio di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ è entità

$$R = \sup \{ t \in \mathbb{R} \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \text{ è convergente} \}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ converge in $x = x_0$

In generale $R \in [0, +\infty] = [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$

Teorema: sull'insieme di convergenza

Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze e $R \in [0, +\infty]$ il suo raggio di convergenza.
Allora valgono i seguenti fatti

1) se $R = 0$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge solo in $x = 0$,
2) se $0 < R < +\infty$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge assolutamente in $(-R, R)$ e converge uniformemente in $[-k, k]$ $\forall\, 0 < k < R$
3) se $R = +\infty$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge assolutamente in $\mathbb{R}$ e converge uniformemente in $[-k, k]$ $\forall\, k > 0$.

Teorema di Abel

Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze e $R \in (0, +\infty)$ il suo raggio di convergenza

Se la serie converge in $x = R$, allora la serie converge uniformemente in $[-k, R]$, $\forall\, 0 < k < R$.
In particolare se converge in $x = \pm R$, allora converge uniformemente in $[-R, R]$

Esempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)}_{a_n} x^n$$

Studiamo $\sum \left| \frac{1}{n} x^n \right| = \sum \frac{|x^n|}{n} = \sum \frac{|x|^n}{n}$, $\forall n \geq 1$: $\frac{|x|^n}{n} \leq |x|^n$

$\sum |x|^n$ converge se e solo se $|x| < 1$
se $|x|$ converge, per il criterio del confronto $\frac{|x|^n}{n}$ converge, quindi

$x=\frac{1}{3} \rightarrow \sum \frac{2^n+3^n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum \frac{2^n+3^n}{3^n n} = \sum \left(\frac{2^n}{n\,3^n}+\frac{3^n}{n\,3^n}\right) =$

$= \sum \left(\frac{2^n}{n\,3^n}+\frac{1}{n}\right)$

- $\sum \frac{2^n}{n\,3^n}$ → non mi interessa
- $\sum \frac{1}{n}$ → diverge

} la serie diverge (x l'algebra delle serie)

$x=-\frac{1}{3} \rightarrow \sum \frac{2^n+3^n}{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \sum \left(\frac{(-1)^n 2^n}{n\,3^n}+\frac{(-1)^n}{n}\right)$

- $\sum (-1)^n \frac{2^n}{n\,3^n}$ converge assolutamente
- $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge

} la serie converge

La serie di potenze conv. ass. in $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

" " puntualmente $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

Per il teorema di Abel " unifor. $\left[-\frac{1}{3},k\right]$

Osservazione

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ una serie di potenze centrata in $x_0\in\mathbb{R}$ e sia $R\in[0,+\infty]$ il suo raggio di convergenza.

Allora valgono i seguenti fatti:

1) se $R=0$, la serie converge solo in $x=x_0$
2) se $0<R<+\infty$, " " assolutamente in (x_0-R,x_0+R) e uniformemente in $[a,b]$, $\forall\, x_0-R<a<b<x_0+R$
3) se $R=+\infty$, la serie converge assolutamente in $\mathbb{R}$ e uniformemente in $[a,b]$, $\forall a<b$

Se $0<R<+\infty$ la serie converge in $x=x_0+R$, allora converge uniformemente in $[a,x_0+R]$, $\forall x_0-R<a<x_0+R$

In particolare se la serie converge in $x=x_0\pm R$ allora converge uniformemente in $[x_0-R,x_0+R]$

Teorema: somma di serie di potenze

Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ due serie di potenze con raggi di convergenza rispettivamente R_1 e R_2.

Allora la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ ha raggio di convergenza $R\geq \min\{R_1,R_2\}$.

Se $R_1\neq R_2$, allora $R=\min\{R_1,R_2\}$

Inoltre, $\forall x\in\mathbb{R}$ con $|x|<\min\{R_1,R_2\}$.

si ha che $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$.

SERIE DI TAYLOR

Definizione

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto, $x_0 \in I$ e $f: I \to \mathbb{R}$ una funz. di classe C^∞.
Si chiama: SERIE DI TAYLOR di f centrata in x_0 la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

Dove $f^{(n)} = D^n f$
Se $x_0 = 0$ è anche detta serie di MacLaurin di f

$n \to +\infty$

Se $|x-x_0|^n < 1$ e $n \to +\infty$ si ha che (se converge la serie di Taylor)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^n(x_0)(x-x_0)^n \quad ??? \quad \text{è vero ???} \quad \boxed{\text{NO!}}$$

Esempio

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Si dimostra che f è C^∞ su $\mathbb{R}$

$\forall x \neq 0 \quad f'(x) = e^{-1/x^2} \frac{2x}{x^4} = e^{-1/x^2} \frac{2}{x^3}$

$\lim_{x \to 0} f'(x) = 0 \to f'(0) = 0$

Tutte le derivate sono nulle in 0
$\forall n \in \mathbb{N} \quad f^{(n)}(0) = 0$, quindi la serie di f in 0 è $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n = 0 \quad \forall x$

Definizione

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto, $x_0 \in I$ e $f: I \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ su I.
Diciamo che f è SVILUPPABILE in serie di Taylor in x_0 (o f è ANALITICA) se esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n.$$

Diciamo che f è analitica in I se f è analitica in ogni punto di I.

La funzione $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

NON è analitica in 0

La funzione $f(x) = \frac{1}{1-x}$ è C^∞ su $(-\infty, 1)$, C^∞ su $(1, +\infty)$ è analitica

Dim

$f(0) = 1$

$f'(x) = -\frac{-1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \forall x$

$f'(0) = 1 = 1!$

$f''(x) = -\frac{1}{(1-x)^4} \cdot -2(1-x) = \frac{2}{(1-x)^3} \to f''(0) = 2 = 2!$

SVILUPPI DI SERIE NOTEVOLI DI MACLAURIN

1) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ $\qquad \frac{1}{1-t} = \sum t^n \qquad |t|<1$

2) $\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

3) $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ $\qquad \Rightarrow R = +\infty$

4) $\operatorname{senh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

5) $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$

6) $\forall x \in (-1,1]: \log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$

7) $\operatorname{arctg}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$

8) $\alpha \in \mathbb{R} \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, dove $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ se $n \neq 0$

$\binom{\alpha}{0} = \alpha$

$$\begin{cases} \forall x \in (-1,1) & \text{se } \alpha \leq -1 \\ \forall x \in (-1,1] & \text{se } -1 < x < 0 \\ \forall x \in [-1,1] & \text{se } x \geq 0,\ \alpha \notin \mathbb{N} \\ \mathbb{R} & \text{se } x \geq 0,\ \alpha \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$\log(1+t) = \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^n$ con $t \in [-1, 1]$

INTEGRALI CURVILINEI

INTEGRAZIONE
- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto
- $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale continuo
- $\gamma: [a,b] \to \Omega$ una curva parametrica semplice e regolare
- $\int_\gamma F\,dp = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$

PARAMETRIZZAZIONE CURVE PARAMETRICHE
- CIRCONFERENZA
  - orario $\gamma(t) = (x_0 + R\cos t, y_0 - R\operatorname{sen} t)$
  - antiorario $\gamma(t) = (x_0 + R\cos t, y_0 + R\operatorname{sen} t)$
- ELLISSE
  - orario $\gamma(t) = (x_0 + a\cos t, y_0 - b\operatorname{sen} t)$
  - antiorario $\gamma(t) = (x_0 + a\cos t, y_0 + b\operatorname{sen} t)$
- SEGMENTI NEL PIANO $\to \gamma(t) = (x_A + t(x_B - x_A), y_A + t(y_B - y_A))$

retta x $\overline{AB}$ $\quad \dfrac{y - y_A}{y_B - y_A} = \dfrac{x - x_A}{x_B - x_A}$

CURVE PARAMETRICHE
- funzione continua γ
- SOSTEGNO: immagine di γ
- SEMPLICE $\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \iff t_1 = t_2$ oppure t_1 e t_2 estremi
- CHIUSA $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n \to \gamma(a) = \gamma(b)$
- REGOLARE γ' è continua e $\neq 0$
- REGOLARE A TRATTI
  - γ derivabile tranne che in un numero finito di punti
  - $\gamma' \neq 0$ tranne che...
  - dove γ non è derivabile esistono le derivate laterali

FLUSSO

CALCOLO
- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto non vuoto
- $F: \Omega \to \mathbb{R}^3$ campo vettoriale continuo
- $K \subset \mathbb{R}^2$ compatto la cui frontiera è sostegno di una c.p.c.
- $\sigma: K \to \Omega$ calotta regolare
- $\Sigma = \sigma(K)$ il sostegno di σ
- $\int_\Sigma F \cdot n = \int_K F(\sigma(u,v)) \cdot N(u,v)\, du\, dv$

  $N(u,v) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v)$
- ENTRANTE o USCENTE
  - METODO GRAFICO → si disegna grafico e vettore
  - METODO VETTORIALE → $[(x,y,z) - \sigma(u_0,v_0)] \cdot N(u_0,v_0) \leq 0$ USCENTE; ≥ 0 ENTRANTE
  - METODO ANALITICO → $\sigma(u_0,v_0) + \varepsilon N(u_0,v_0) \in D$ → ENTRANTE

NB il flusso dipende dal verso d'orientazione indotto dalla parametrizzazione del sostegno

TEOREMI DI GREEN, STOKES E GAUSS

GREEN → consente di calcolare l'integrale di linea di una curva parametrizzata (campo vettoriale)
- ORIENTAZIONE
  - $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto limitato
  - ∂A sostegno curva p. → chiusa, semplice, regolare a t. $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}$
  - ∂A è orien. POSITIVAMENTE se γ induce un verso di percorrenza ANTIORARIO
- TEOREMA
  - $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto non vuoto
  - $F: \Omega \to \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale di classe C^1
  - $A \subseteq \Omega$ aperto limitato
  - ∂A sostegno c.p → chiusa, semplice, regolare a t. $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}$
  - ∂A o.p.
  - $\oint_{\partial A} F\, dP = \int_A \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \right) dx\, dy$
  - se $\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = 1$ → $\oint_{\partial A} F\, dP = m(F)$

CAMPI CONSERVATIVI

POTENZIALE

- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto
- $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale
- F è CONSERVATIVO se esiste un potenziale
- POTENZIALE $f: \Omega \to \mathbb{R}$ tale che $\nabla f(x) = F(x)$
  - → funzione!
- NB se f è un potenziale anche $f+c$ lo è

CAMPO RADIALE

- $0 \leq a \leq b < +\infty$
- $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a < \|x\| < b\}$
- $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale
- F è radiale se è della forma $F(x) = \varphi(\|x\|)x$
- se è radiale è conservativo

PROPRIETÀ

- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto connesso x archi
- $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ campo vettoriale conservativo
- $f(x)$ e $g(x)$: $\Omega \to \mathbb{R}$ due potenziali
- $f(x) - g(x) = c \quad \forall x \in \Omega$

INTEGRALE DI LINEA

- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto
- $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale continuo e conservativo
- $f: \Omega \to \mathbb{R}$ un potenziale
- $\gamma: [a,b] \to \Omega$ curva parametrica → semplice, → regolare a t.
- $\int_\gamma F\,dP = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$
- se γ è chiusa $\oint_\gamma F\,dP = 0$

TEOREMA DI EQUIVALENZA

- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto connesso x archi
- $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ campo vettoriale continuo

$$\left.\begin{array}{l} F \text{ è conservativo} \\ \int_{\gamma_1} F\,dp = \int_{\gamma_2} F\,dp \\ \oint_\gamma F\,dp = 0 \end{array}\right\} \text{EQUIVALENTI}$$

CONDIZIONE NECESSARIA

- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto
- $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ campo vettoriale di classe C^1
- se F è conservativo $\Rightarrow \dfrac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f_j(x)}{\partial x_i}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 120

SERIE NUMERICHE

DEFINIZIONE → sia (a_n) una successione reale
- → $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ oppure $\sum a_n$ → a_n = termine generale
  - → n = indice della s.

CONVERGENZA
- → CONVERGE se $\lim_n S_n = S \in \mathbb{R}$
- → DIVERGE se $\lim_n S_n = +\infty$
- → INDETERMINATA se $\nexists \lim_n S_n$

SERIE NOTEVOLI
- → GEOMETRICA → $\sum a^n$
  - → CONV. a $\frac{1}{1-a}$ se $|a|<1$
  - → D.P. se $a \geq 1$
  - → se $a \leq 1$
- → ARMONICA → $\sum \frac{1}{n^p}$
  - → CONV se $p>1$
  - → D.P. se $p \leq 1$
- → TELESCOPICA → $\sum (a_{n+1} - a_n)$
  - → $S_n = -a_0 + a_{n+1}$

CRITERI CONVERGENZA
- → CONFRONTO ASINTOTICO

  $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = l$
  - → $l>0$ a CONV se b CONV
  - → $l=0$ a CONV se b CONV
  - → $l=0$ b DIV se a DIV
- → CRITERIO DELLA RADICE

  $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = l$
  - → $l<1$ converge
  - → $l>1$ diverge
- → CRITERIO DEL RAPPORTO

  $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$
  - → $l<1$ converge
  - → $l>1$ diverge
- → CRITERIO DI MAC LAURIN

  $\sum a_n$ converge se $\int_1^{+\infty} a_n$ converge
- → CRITERIO DI LEIBNIZ

  $\sum (-1)^n b_n$ → b_n decrescente
  - → $\lim_n b_n = 0$ ⇒ CONVERGE

  si usa quando ho una funzione $a_n = (-1)^n b_n$

  conseguenze $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$

  $|S_n - S| \leq b_{n+1}$

SUCCESSIONI DI FUNZIONI

CONVERGENZA

- → PUNTUALE
  - → $\Omega \in \mathbb{R}^n$ non vuoto
  - → $f(n)$ successione di funzioni da Ω in $\mathbb{R}$
  - → $f: \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione
  - → $f(n)$ c.p. se $\forall x \in \Omega \ \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$
- → UNIFORME
  - → $\Omega \in \mathbb{R}^m$ non vuoto
  - → $f(n)$ successione di funzioni limitate
  - → $f: \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione
  - → $f(n)$ c.u. se $\lim_n \|f_n - f\|_\infty = 0$ (→ lim. puntuale)
  - $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|$
- → se converge uniformemente allora converge puntualmente, ma il contrario non è vero

→ la succ. è continua, anche il l.p. lo è

CONTINUITÀ DEL LIMITE

- → $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ non vuoto
- → f_n una successione di funzioni continue e limitate da Ω in $\mathbb{R}$
- → $f: \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione
- → se f_n converge uniformemente a f in Ω, allora anche f è cont.
- → NB
  - f_n continua in Ω
  - $f_n \to f$ puntualm.
  - f è discontinua

  } $f_n \not\to f$ uniformemente

PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO INTEGRALE

- → f_n successione di funzioni continue da $[a,b]$ in $\mathbb{R}$
- → $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione
- → f_n conv. unif. a f su $[a,b]$
- → $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b (\lim_n f_n(x))dx = \lim_n \left[\int_a^b f_n(x)dx\right]$

PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO DERIVATA

- → $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto
- → f_n successione di funzioni di classe C^1 da I in $\mathbb{R}$
- → f_n converge puntualmente in f
- → f_n' " uniformemente a g
- → f è di classe C^1 su I
- → $\forall x \in I : f'(x) = g(x)$
- → $\forall x \in I : D\left[\lim_n f_n(x)\right] = \lim_n \left[D f_n(x)\right]$

CONV. UNIFORME → CON. PUNTUALE

CONV. UNIFORME $\not\leftarrow$ CON. PUNTUALE

SERIE DI FOURIER

PERIODICA
- f è periodica di periodo T se
  - $x + T \in A$
  - $f(x+T) = f(x)$
- se è periodica
  - se periodo è T, è periodica anche per nT e $\frac{T}{n}$
  - le funzioni costanti sono periodiche di un periodo qualunque
  - insieme di periodicità → estremo inferiore
    - nullo se f è costante
    - PERIODO MINIMO
  - $\int_0^T f(x)dx = \int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x+a)dx$

SERIE DI FOURIER
- sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione periodica di periodo 2π e integrabile in $[-\pi, \pi]$
- def: $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$
  - $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$
  - $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$
  - $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx$

osservazione: se f è pari $\Rightarrow b_n = 0$
se f è dispari $\to a_n = 0$

SERIE DI FOURIER GENERALI
- f periodica di periodo $T > 0$ e integrabile in $[0, T]$
- $a_0 + \sum \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T} x\right)\right)$
- con
  - $a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(x)dx$
  - $a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) dx$
  - $b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) dx$

SERIE DI POTENZE

DEFINIZIONE
- a_n successione reale
- $x_0 \in \mathbb{R}$
- serie di potenze centrata in x_0 → $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$
- RAGGIO DI CONVERGENZA → $R = \sup\{t \in \mathbb{R} \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ è convergente$\}$
  - $R \in [0,+\infty) \cup \{+\infty\}$

INSIEME DI CONVERGENZA
- $\sum a_n x^n$ serie di potenze
- $R \in [0,+\infty]$ il suo raggio di convergenza
- se $R=0$ ⇒ $\sum a_n x^n$ converge solo in $x=0$
- se $0<R<+\infty$ → $\sum a_n x^n$ c. A. in $(-R,R)$
  - c.U. in $(-k,k)$ $\forall\, 0<k<R$
- se $R=+\infty$ ⇒ $\sum a_n x^n$ c. A. in $\mathbb{R}$
  - c.U. in $[-k,k]$ $\forall\, k>0$

→ verificare che gli estremi siano compresi nel raggio di convergenza

TEOREMA DI ABEL
- $\sum a_n x^n$ una serie di potenze
- $R \in (0,+\infty)$ il suo raggio di convergenza
- se conv. in $x=R$ → $\sum a_n x^n$ conv. U. in $[-k,R]$ $\forall\, 0<k<R$
- " " $x=\pm R$ → " conv. U. in $[-R,R]$

uniforme

TEOREMA DI CAUCHY-HADAMARD
- $\sum a_n x^n$ serie di potenze
- $\exists \lim_n \sqrt[n]{a_n} = \ell \in [0,+\infty]$
- $R = \begin{cases} +\infty & \text{se } \ell=0 \\ 1/\ell & \text{se } 0<\ell<+\infty \\ 0 & \text{se } \ell=+\infty \end{cases}$

$R = \frac{1}{\ell}$

TEOREMA DI D'ALAMBERT → $\exists \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell \in [0,+\infty]$ allora vedi sopra

TIPI CONVERG. (serie centrate in x_0)
- $R=0$ c. in $x=x_0$
- $0<R<+\infty$ → c. A. in (x_0-R, x_0+R)
  - c.U. in $[a,b]$ $\forall\, x_0-R<a<b<x_0+R$
- $R=+\infty$ → c.A. in $\mathbb{R}$
  - c.U. in $[a,b]$ $\forall\, a<b$

$x-x_0=R$ → tran R

TEOREMA DELLA SOMMA
- $\sum a_n x^n$ e $\sum b_n x^n$ serie di pot. con r. $R_1 R_2$
- $\sum (a_n+b_n)x^n$ ha $R \geq \min\{R_1,R_2\}$
  - se $R_1=R_2=+\infty$ → $R=+\infty$
  - se $R_1 \neq R_2$ → $R = R_1 \neq R_2$

PRODOTTO DI CAUCHY → $\sum a_n x^n \cdot \sum b_n x^n = \sum c_n x^n$ dove $c_n = \sum a_k b_{n-k}$
- raggio di convergenza $R \geq \min\{R_1 R_2\}$

DERIVATE E INTEGRALI: hanno lo stesso raggio di convergenza

ANALISI

- $\int k\,dx = kx$
- $\int x^{\alpha}dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
- $\int \frac{1}{x}dx = \log|x|$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a}$
- $\int e^x dx = e^x$
- $\int sen\,x\,dx = -\cos x$
- $\int \cos x\,dx = sen\,x$
- $\int senh\,x\,dx = \cosh x$
- $\int \cosh x\,dx = senh\,x$
- $\int \frac{1}{1+x^2}dx = arctg\,x$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = arcsen\,x$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = 1+tg^2x$
- $\int sen^2x\,dx = \frac{1}{2}(x - sen\,x\cos x)$
- $\int senh^2x\,dx = \frac{1}{2}(senh\,x\cosh x - x)$

godono della linearità $\int(\alpha f(x)+\beta g(x))dx = \int \alpha f(x)dx + \int \beta g(x)dx$

INTEGRAZIONE PER PARTI $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$

FUNZIONI FRATTE

① N derivata di D $\rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)|$

② $\int \frac{1}{P(x)}dx$ con $P(x)$ polinomio di grado $n \rightarrow$ si divide in n radici

③ $\int \frac{Q(x)}{P(x)}dx$ con $P(x)$ di grado maggiore rispetto a $Q(x)$
Si cerca di ricondurre alla formula ①

es. $\int \frac{4x-5}{x^2-2x+10}dx = \int \frac{2}{2}\,\frac{4x-5}{x^2-2x+10}dx = 2\int \frac{2x-2}{x^2-2x+10}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2+9}dx$

$= 2\log(x^2-2x+10) + \frac{1}{3}arctg\,\frac{x-1}{3}$

④ $\int \frac{Q(x)}{P(x)}dx$ con $P(x)$ di grado maggiore: si scompone il polinomio $P(x)$

$= \int \left[\frac{A}{(x-x_1)} + \frac{B}{(x-x_2)} \dots \frac{N}{(x-x_n)}\right]dx$ se radici distinte

$\int \left[\frac{A}{(x-x_1)} + \frac{B}{(x-x_1)^2}\right]dx$ se radici coincidenti ecc...

⑤ $\int \frac{Q(x)}{P(x)}dx$ con $Q(x) > P(x)$

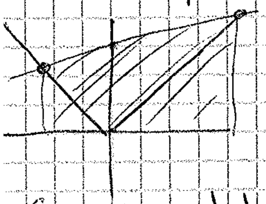
Si esegue la divisione e si integra $\int Quoz(x)dx + \int \frac{R(x)}{P(x)}dx$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 120

1) Calcolare

$$\int_{\Omega} xy \, dx dy \quad , \text{ dove } \Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| \leq y \leq \frac{1}{2}x + 3 \right\}$$

Devo verificare quando $|x| \leq \frac{1}{2}x+3$ è soddisfatta



$$\cdot \; -x = \frac{1}{2}x + 3 \rightarrow x = -2$$

$$x = \frac{1}{2}x + 3 \rightarrow x = 6$$

Siccome $|x|$ ~~[illegible]~~ è $-x$ quando <0 e $+x$ quando è >0 si può dividere l'intervallo di integrazione

$$\Omega_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -2 \leq x \leq 0 \; , \; -x \leq y \leq \frac{1}{2}x+3 \right\}$$

$$\Omega_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq x \leq 6 \; , \; x \leq y \leq \frac{1}{2}x+3 \right\}$$

$$\int_{\Omega_1} xy \, dx dy + \int_{\Omega_2} xy \, dx dy = \int_{-2}^{0} \left[\int \right.$$

$$\int_{\Omega} x\,y\,dxdy = \int_{\Omega'} \rho^3 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \, d\rho d\theta = \int_{\Omega_1'} \rho^3 \operatorname{sen}\theta\cos\theta\, d\rho d\theta + \int_{\Omega_2'} \rho^3 \operatorname{sen}\theta\cos\theta\, d\rho d\theta =$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega_1'} \rho^3 \operatorname{sen}\theta\cos\theta\, d\rho d\theta = \left(\int_0^1 \rho^3 d\rho\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{sen}\theta\cos\theta\, d\theta\right) = \left[\frac{1}{4}\right]_0^1 \left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \underline{\frac{3}{32}}$$

$\Omega_1' \to$ rettangolo

$$\Rightarrow \int_{\Omega_2'} \rho^3 \operatorname{sen}\theta\cos\theta\, d\rho d\theta = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^{2\cos\theta} \rho^3 \operatorname{sen}\theta\cos\theta\, d\rho\right] d\theta = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\theta\cos\theta \left[\int_0^{2\cos\theta}\rho^3 d\rho\right] d\theta =$$

$$= 4\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\theta \cos^5\theta\, d\theta = 4\left[-\frac{1}{6}\cos^6\theta\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\frac{1}{96}}$$

Quindi $\displaystyle\int_{\Omega'} \rho^3 \cos\theta \operatorname{sen}\theta\, d\rho d\theta = \frac{3}{32} + \frac{1}{96} = \frac{10}{96} = \frac{5}{48}$

$$\int_{\Omega} (4 + 4x - 3x^2 + 4y^2)\,dxdy \qquad \text{dove} \quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2\sqrt{x^2+y^2} \le x+2\}$$

Dobbiamo andare a ricercare gli intervalli di Ω

$$2\sqrt{x^2+y^2} \le x+2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^2+y^2 \ge 0 & \forall \\ x+2 \ge 0 \\ 4x^2+4y^2 \le x^2+4+4x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge -2 \\ 3x^2 - 4x + 4y^2 - 4 \le 0 \; * \end{cases} \to \text{è un ellisse!}$$

Facciamo un cambiamento di coordinate

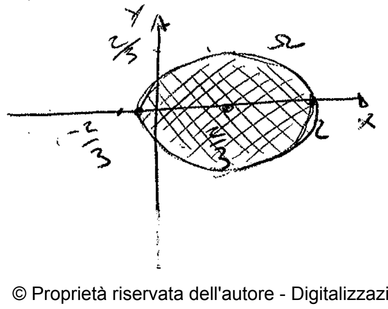
$$* \quad 3x^2 - 4x + 4y^2 - 4 \le 0 \quad \leadsto \quad \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$$

Metodo del completamento dei quadrati

$$\left(\sqrt{3}x - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + 4y^2 - \frac{4}{3} - 4 \le 0$$

$$3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + 4y^2 - \frac{16}{3} \le 0$$

$$\frac{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{1}{3}} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} \le \frac{16}{3} \quad \leadsto \quad \frac{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{16}{9}} + \frac{y^2}{\frac{4}{3}} \le 1 \quad \to \text{è un ellisse}$$



$$3(\ldots) + 4y^2 \le \frac{16}{3}$$

ESERCIZI: INTEGRALI TRIPLI

- $\int_\Omega xy^2z^3\,dx\,dy\,dz$, dove $\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le x\le 1,\ 1\le y\le 2,\ 2\le z\le 3\}$

già definito, parallelepipedo con lati coordinati agli assi

$$\int_\Omega xy^2z^3\,dx\,dy\,dz = \left(\int_0^1 x\,dx\right)\left(\int_1^2 y^2\,dy\right)\left(\int_2^3 z^3\,dz\right) = \left[\frac12 x^2\right]_0^1 \left[\frac13 y^3\right]_1^2 \left[\frac14 z^4\right]_2^3 =$$

$$= \frac12\,\frac13\,7\cdot\frac14\,(81-16) = \frac{455}{24}$$

- Calcolare il volume di $\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le z\le 2x,\ 1\le x+y\le 2,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$

$m(\Omega) = \int_\Omega 1\,dx\,dy\,dz$

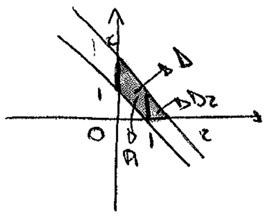
Per integrare per fili una variabile deve essere compresa tra due funzioni e le altre due da due valori

Per integrare per strati una variabile deve essere compresa tra due valore e le altre due tra due funzioni

In questo caso integriamo per fili

$$\int_D \left[\int_0^{2x} 1\,dz\right] dx\,dy = \int_D 2x\,dx\,dy \quad , \quad D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\le x+y\le 2,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$$

se lo vediamo come y-semplice (è anche x-semplice)



$\int_D = \int_{D_1} + \int_{D_2}$ Dove $D_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1,\ 1-x\le y\le 2-x\}$

$D_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\le x\le 2,\ 0\le y\le 2-x\}$

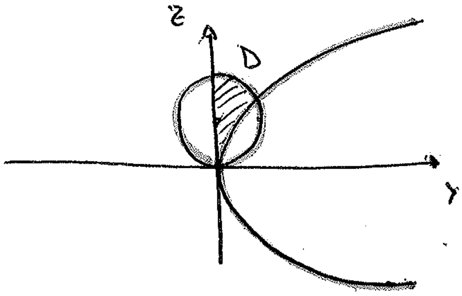
Calcolare $\int_\Omega x\,dx\,dy\,dz$, dove $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0<y<z^2,\ z^2-2z+y^2<0,\ 0<x<\sqrt{yz}\}$

$D=\{(y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0<y<z^2,\ (z-1)^2+y^2<1,\ yz>0\}$

$\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (y,z)\in D,\ 0<x<\sqrt{yz}\}$

integriamo per fili paralleli a x

$$\rightarrow \int_\Omega x\,dx\,dy\,dz=\int_D\left[\int_0^{\sqrt{yz}} x\,dx\right]dy\,dz=\int_D\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{yz}}dy\,dz=\frac{1}{2}\int_D yz\,dy\,dz$$



$y=z^2$

$\rightsquigarrow$ z semplice

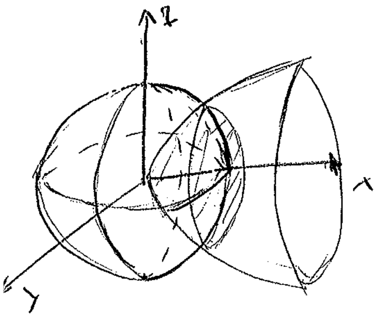
- $0\le y\le 1$
- z compresa tra due funzioni

$z=1+\sqrt{1-y^2}$
$z=\sqrt{y}$

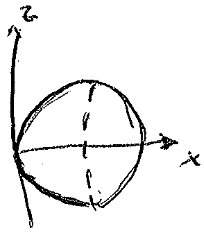
$D=\{(y,z)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<y<1,\ \sqrt{y}<z<1+\sqrt{1-y^2}\}$ $\rightsquigarrow$ z semplice

$$\rightarrow \frac{1}{2}\int_0^1\left[\int_{\sqrt{y}}^{1+\sqrt{1-y^2}} yz\,dz\right]dy=\frac{1}{2}\int_0^1 y\left(1+1-y^2+2\sqrt{1-y^2}-y\right)dy=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)=\frac{13}{48}$$

Calcolare $\int_\Omega (x^2+z^2)y\,dx\,dy\,dz$, dove $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\le z,\ x^2+z^2\le y\}$



$\rightsquigarrow$ in proiezione



Passiamo in coordinate cilindriche con asse // a asse y

$$\phi:\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=y\\ z=\rho\sin\theta\end{cases}\qquad \rho\ge 0,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ y\in\mathbb{R}\qquad |\det J_\phi(\rho,\theta,y)|=\rho$$

$$\rightarrow \int_{\Omega'}\rho^2 y\,\rho\,d\rho\,d\theta\,dy=\int_{\Omega'}\rho^3 y\,d\rho\,d\theta\,dy$$

ESERCIZI: INTEGRALI DI LINEA

PARAMETRIZZAZIONI

1) CRF IN SENSO ANTIORARIO centrata in $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, $R>0$
$\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x_0 + R\cos t, y_0 + R\operatorname{sen} t)$

2) CRF IN SENSO ORARIO $\gamma: [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x_0 + R\cos t, y_0 - R\operatorname{sen} t)$

3) ELLISSE $a,b>0$
ANTIORARIO $\to$ $\gamma: [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x_0 + a\cos t, y_0 + b\operatorname{sen} t)$
ORARIO $\to$ $\gamma: [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x_0 + a\cos t, y_0 - b\operatorname{sen} t)$

4) SEGMENTI NEL PIANO $A(x_A,y_A)$ $B(x_B,y_B)$
$\overline{AB}$: $\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\underbrace{x_A + t(x_B - x_A)}_{x}, \underbrace{y_A + t(y_B - y_A)}_{y})$

$$\frac{y-y_A}{y_B-y_A} = \frac{x-x_A}{x_B-x_A} \to \text{RETTA PER } AB$$

5) SEGMENTI NELLO SPAZIO AB: $\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (x_A + t(x_B - x_A), y_A + t(y_B - y_A), z_A + t(z_B - z_A))$

6) GRAFICI DI UNA FUNZIONE A UNA VARIABILE $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, f(t))$

$\int_\gamma F\,dp$, dove $F(x,y) = (xy, x-y)$, $\gamma(t) = (t,t^2)$, $\gamma: [0,1]$

$$\int_\gamma F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt = \int_0^1 (t^3, t-t^2)(1,2t)\,dt = \int_0^1 (t^3 + 2t^2 - 2t^3)\,dt = \int_0^1 (-t^3 + 2t^2)\,dt = \frac{5}{12}$$

$\int_\gamma F(x,y)\,dp$, dove $F(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$

Faccio un cambio di coordinate, circonferenza in verso antiorario con $R=1$ e centrata in $(0,0) \to \gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$

$$\int_0^{2\pi} \left(-\frac{\operatorname{sen} t}{1}, \frac{\cos t}{1}\right)(-\operatorname{sen} t, \cos t)\,dt = \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)\,dt = [t]_0^{2\pi} = 2\pi$$

$\int_\gamma F(x,y,z)\,dp$, dove $F(x,y,z) = (y, xz, xy)$ $\gamma: [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$
$\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t)$

$$\int_\gamma F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt = \int_\gamma (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t\cos t, \operatorname{sen} t\cos t)\cdot(-\operatorname{sen} t, \cos t, \cos t)\,dt =$$

$$= \int_\gamma (-\operatorname{sen}^2 t + \operatorname{sen} t\cos^2 t + \operatorname{sen} t\cos^2 t)\,dt = \int_\gamma (-\operatorname{sen}^2 t + 2\operatorname{sen} t\cos^2 t)\,dt =$$

$$= -\int_\gamma \operatorname{sen}^2 t\,dt + 2\int_\gamma \operatorname{sen} t\cos^2 t\,dt = -\pi$$

ESERCIZI: INTEGRALI DI SUPERFICIE

- Calcolare $\int_\Sigma (x^2+y^2)\,d\sigma$, dove $\Sigma = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=4\}$

$\sigma: [0,\pi]\times[0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$

$\boxed{\sigma(\theta,\varphi) = (2\,\text{sen}\theta\cos\varphi,\ 2\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\varphi,\ 2\cos\theta)}$

$\Sigma = \sigma(K)$; $K = [0,\pi]\times[0,2\pi]$

$$N(\theta,\varphi) = \frac{\partial\sigma}{\partial\theta}(\theta,\varphi)\wedge\frac{\partial\sigma}{\partial\varphi}(\theta,\varphi) =$$

$$= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & k \\ 2\,\text{sen}\theta\cos\varphi & 2\cos\theta\,\text{sen}\varphi & -2\,\text{sen}\theta \\ -2\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\varphi & 2\,\text{sen}\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (4\,\text{sen}^2\theta\cos\varphi,\ 4\,\text{sen}^2\theta\,\text{sen}\varphi,\ 4\cos\theta\,\text{sen}\theta\cos^2\varphi + 4\cos\theta\,\text{sen}\theta\,\text{sen}^2\varphi) =$$

$$= (4\,\text{sen}^2\theta\cos\varphi,\ 4\,\text{sen}^2\theta\,\text{sen}\varphi,\ 4\cos\theta\,\text{sen}\theta).$$

$$\|N(\theta,\varphi)\| = \sqrt{16\,\text{sen}^4\theta\cos^2\varphi + 16\,\text{sen}^4\theta\,\text{sen}^2\varphi + 16\cos^2\theta\,\text{sen}^2\theta} = 4\,\text{sen}\theta$$

$$\Rightarrow \int_\Sigma (x^2+y^2)\,d\sigma = \int_K f(\sigma(u,v))\,\|N(u,v)\|\,du\,dv = \int_K f(\sigma(\theta,\varphi))\,\|N(\theta,\varphi)\|\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= \int_K (4\,\text{sen}^2\theta\cos^2\varphi + 4\,\text{sen}^2\theta\,\text{sen}^2\varphi)\,4\,\text{sen}\theta\,d\theta\,d\varphi = 16\int_K \text{sen}^3\theta\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= 16\left(\int_0^\pi \text{sen}^3\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right) = 16\left(\int_0^\pi \text{sen}^3\theta\,d\theta\right)2\pi =$$

$$= 32\pi\int_0^\pi \text{sen}\theta(1-\cos^2\theta)\,d\theta = 32\pi\left[\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^\pi = \frac{128}{3}\pi$$

- Calcolare $\int_K \frac{1}{z^4}\,d\sigma$, dove $\Sigma = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 1\le z\le 2\right\}$

Dalle limitazioni di z trovo le limitazioni di x e y

Σ è il grafico di $g(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

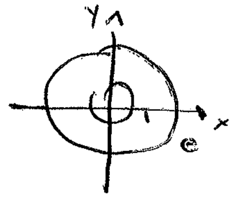
$\Sigma = \sigma(K)$, $\sigma: K \to \mathbb{R}^3$

$\sigma(x,y) = (x,y,g(x,y)) = \left(x,y,\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

$1\le z\le 2 \to 1 \le \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \le 2$

$$\int_\Sigma \frac{z}{\sqrt{4+x^2+y^2}}\, d\sigma = \int_K f(\sigma(x,y))\|N(x,y)\|\,dx\,dy = \int_K f(x,y,\log(x^2+y^2))\frac{\sqrt{4+x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$$

$$\int_K \frac{\log(x^2+y^2)}{\cancel{\sqrt{4+x^2+y^2}}}\cdot\frac{\cancel{\sqrt{4+x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \int_K \frac{\log(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$$



$\rightarrow$ $\boxed{\text{PASSAGGIO IN COORDINATE POLARI}}$

$$\int_{K'} \frac{\log \rho^2}{\rho}\rho\, d\rho\, d\theta = 2\pi\int_{K'} \frac{2\log\rho}{\cancel{\rho}}\cancel{\rho} = 4\pi\int \log\rho\, d\rho$$

Dove $K' = [1, e] \times [0, 2\pi]$

$$= 4\pi\left(\left[\rho\log\rho\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{\rho}\rho\, d\rho\right) = 4\pi\left(\left[\rho\log\rho\right]_1^e - \left[\rho\right]_1^e\right) = 4\pi$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 120

$$\int_{\Sigma_1} F n \, d\sigma = \int_{K_1} F(\sigma_1(\theta, z)) \cdot N_1(\theta, z) \, d\theta \, dz \quad *$$

$$F(\sigma_1(\theta,z)) \cdot N_1(\theta,z) = F(3\cos\theta, 3\,\text{sen}\,\theta, z) \cdot (3\cos\theta, 3\,\text{sen}\,\theta, 0) = 9\cos^2\theta$$

$$* \int_{K_1} 9\cos^2\theta \, d\theta \, dz = 9 \cdot 2 \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta = 18\pi$$

$K_1 = [0, 2\pi] \times [-1, 1]$

$N_{f_2}(x,y) = (0, 0, 1)$ → uscente da D $N_2 = N_f$

$$\int_{\Sigma_2} F n \, d\sigma = \int_{K_2} F(\sigma_2(x,y)) \cdot N(x,y) \, dx \, dy = \int_{K_2} F(x,y,1) \cdot (0,0,1) \, dx \, dy = \int_{K_2} (x,9,1)(0,0,1) \, dx \, dy = 9\pi$$

$\sigma_3(x,y) = (x, y, -1)$

$K_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$

$N_f(x,y) = (0,0,1)$ è entrante in D

$\Rightarrow N_3(x,y) = -N_f(x,y) = (0, 0, -1)$

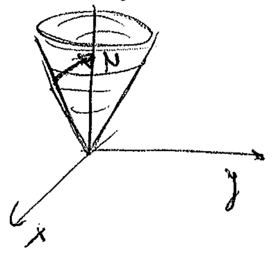
$$\int_{\Sigma_3} F \cdot n \, d\sigma = \int_{K_3} F(\sigma_3(x,y)) \cdot N_3(x,y) \, dx \, dy = -9\pi$$

$$\int_{\partial D} F n \, d\sigma = \int_{\Sigma_1} F n \, d\sigma + \int_{\Sigma_2} F n \, d\sigma + \int_{\Sigma_3} F n \, d\sigma = 18\pi$$

Calcolare il flusso di $F(x,y,z) = (x^2, y^2, z)$ attraverso

$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z\sqrt{x^2+y^2},\ x^2 + y^2 \leq 4\}$

orientata in modo che il versore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z



$\Sigma \to \sigma \to N$

$D \subseteq \mathbb{R}^3 \mid \partial D = \Sigma \cup S$

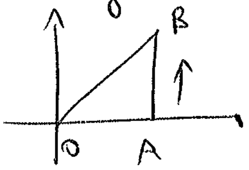
N

$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2\}$

$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4,\ z = 2\}$

TEOREMI DI GREEN, STOKES e GAUSS

Calcolare l'integrale di linea di $F(x,y) = (x^2y, xy^3)$ lungo il bordo del triangolo OAB $O(0,0)$ $A(1,0)$ $B(1,1)$ percorso in senso antiorario



TEOREMA DI GREEN

$$\oint_{\partial A} F\,dP = \int_A \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \right) dx\,dy =$$

$$= \int_A (y^3 - x^2)\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\int_0^x (y^3 - x^2)\,dy \right] dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{4}y^4 - x^2 y \right]_0^x dx$$

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$

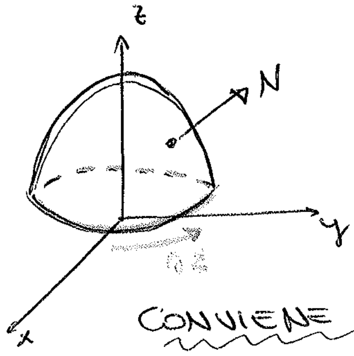
$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{4}x^4 - x^3 \right) dx = -\frac{1}{5}$$

Calcolare il flusso del rotore del campo $F(x,y,z) = (z^2+y, z, y)$ attraverso

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1-x^2-y^2,\ x^2+y^2 \leq 1\}$$

orientato in modo che il versore normale a Σ formi un angolo acuto col versore $\vec{k} = (0,0,1)$

$\downarrow$ 3ª componente positiva!

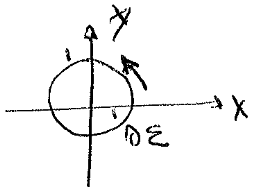


- con la definizione: calcolare il rotore, $\Sigma \to \sigma \to N$

CONVIENE UTILIZZARE STOKES

$$\oint \text{rot} F\, n\, d\sigma = \oint_{\partial\Sigma} F\, dP$$

$$\partial\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 1,\ z = 0\}$$



$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$

$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$

$$\int_\Sigma \text{rot} F\, n\, d\sigma = \int_\gamma F\, dP = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = F(\cos t, \sin t, 0)(-\sin t, \cos t, 0)$$
$$= (\sin t, 0, \sin t)(-\sin t, \cos t, 0) = -\sin^2 t$$

$$\int_0^{2\pi} -\sin^2 t\, dt = \left[-\frac{1}{2}(t - \sin t \cos t)\right]_0^{2\pi} = -\pi$$