NUMERO: 918

DATA: 31/03/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Cartellà

MATERIA: Fisica I + Eserc.

Prof. Trigiante

FISICA 1

Che cosa è la fisica?
La fisica è lo studio dei fenomeni della natura.

La fisica si divide in diverse discipline o branche:
1) ACUSTICA → studio del suono e la sua propagazione
2) OTTICA → studio della luce e la sua propagazione
3) MECCANICA → studio del moto e delle sue cause
4) TERMODINAMICA → trasformazioni che coinvolgono scambi di calore
5) ELETTROMAGNETISMO → fenomeni legati alle interazioni elettriche ed elettromagnetiche.

In molti casi la distinzione netta tra le branche è convenzionale.

Nel XX secolo c'è stato un profondo progresso scientifico. In particolare si è compreso che tutte le proprietà della materia si possono spiegare riconducendosi a particelle fondamentali e le loro interazioni.
- Ma quando dobbiamo spiegare i fenomeni che avvengono nell'infinitamente piccolo dobbiamo ricondurci a una MECCANICA DIVERSA (meccanica quantistica)
- Quando invece dobbiamo spiegare i FENOMENI RELATIVISTICI (cioè di oggetti che vanno alla velocità della luce $3 \cdot 10^8$) non valgono le leggi della meccanica classica di Newton
- Le leggi della meccanica classica non valgono quando la forza di gravità è molto alta.

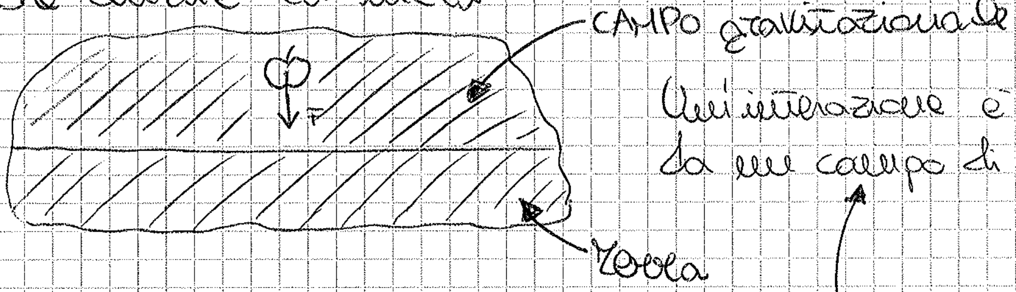
I mattoni costituenti della materia sono:

ELETTRONE	e^-	$m_e \simeq 10^{-3}$ Kg	carica → $-e$
PROTONE	p^+	$m_p \simeq 2000\, m_e$	carica → $+e$
NEUTRONE	n	$m_p \simeq m_n$	carica nulla

se noi osserviamo con un microscopio molto potente ci accorgiamo che quando due corpi vengono a contatto NON SONO A CONTATTO e lo spostamento dell'oggetto avviene grazie ad una repulsione tra i due corpi.

L'interazione come azione a distanza deve essere affinata introducendo il concetto di CAMPO; cioè un'interazione "MEDIATA" da un CAMPO
→ entità FISICA

Ad esempio la terra genera un CAMPO gravitazionale che attrae la mela



Un'interazione è mediata da un campo di interazione

Questo fenomeno rappresenta un'azione a contatto. Qui il "contatto" avviene tra il campo e la mela.

Ci sono 4 INTERAZIONI FONDAMENTALI:

- INTERAZIONI GRAVITAZIONALI: (FORZA ATTRATTIVA)
  forza gravitazionale esercitata o subita da un oggetto in quanto portatore di massa.

- INTERAZIONE ELETTRICA: (FORZA ATTRATTIVA e REPULSIVA)
  La capacità di esercitare una forza elettrica è detta CARICA ELETTRICA e non tutti i corpi la possiedono. Essa è molto importante in natura. Si deve ad essa la coesione elettrica.

- INTERAZIONE MAGNETICA:
  Si verifica tra due magneti.

ogni grandezza è descritta dalla sua misura rispetto ad un'unità di misura scelta.

LEGGE FISICA → relazione tra le grandezze fisiche
↳ relazione matematica tra le loro misure

$\boxed{F = m \cdot a}$ → è una legge fisica

Definizione operativa

GRANDEZZE FISICHE

FONDAMENTALI
↳ sono le grandezze misurate direttamente
esempio:
- LUNGHEZZA
- TEMPO

DERIVATE
↳ date dal confronto con le grandezze fondamentali
esempio:

$$\text{VELOCITÀ} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

lung. (Δx) — tempo (Δt)

↳ unità di misura $\left[\frac{m}{s}\right]$

Affinché un campione di grandezza sia una buona unità di misura deve essere (UNITÀ DI MISURA OTTIMALE)
1) determinabile con massima precisione
2) facilmente riproducibile
3) invariabile nel tempo

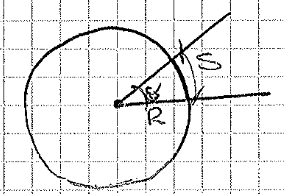
Nella meccanica ci sono 3 GRANDEZZE FONDAMENTALI:
1) LUNGHEZZA
2) TEMPO
3) MASSA
In TERMODINAMICA è necessario introdurre la TEMPERATURA.

Ci sono anche grandezze adimensionali:

$$[L^0 \, T^0 \, M^0 \, I^0]$$

NB: all'interno delle funzioni elementari ($\text{sen}\,x$, $\cos x$, e^x) x deve essere adimensionale

esempio: MISURA DI UN ANGOLO



$\theta = \frac{S}{R}$ rapporto tra lunghezze (adimensionale)

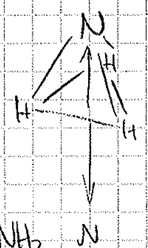
per inserire una variabile all'interno di forme trigonometriche la variabile deve essere adimensionale

DEFINIZIONE DI UNITÀ DI MISURA → le proprietà atomiche soddisfano la definizione di unità di misura ottimale.

$1m = 1650763{,}73\,\lambda$

↳ lunghezza d'onda caratteristica del cripton-86 (^{86}Kr)

$1sec = 2{,}38 \cdot 10^{10}\,P$ $\qquad NH_3$



← N oscilla con un periodo P

↳ si prende come riferimento l'oscillazione dell'atomo di azoto all'interno della molecola NH_3

$1kg = n\, m_{^{12}C}$ → si prende come riferimento la massa del ^{12}C

MISURAZIONE

- Definire il procedimento sperimentale che ci permette di dire se 2 quantità sono uguali
- Procedimento sperimentale per dividere una quantità in due o più parti uguali.

→ più piccola misura che effettua lo strumento

SENSIBILITA' DELLO STRUMENTO → ε

Se noi effettuiamo una sola misurazione (L) allora abbiamo un unico riferimento: ε quindi il risultato della misurazione è

$$L \pm \varepsilon/2$$

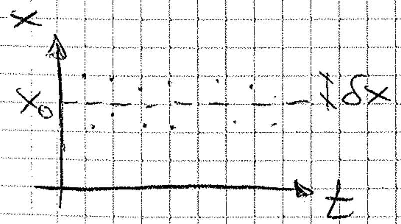
L'incertezza, come detto prima, non dipende solo dalla sensibilità ma anche dall'interazione del misuratore con lo strumento di misura o dall'interazione tra lo strumento e il sistema.

Ci sono vari tipi di errori:

1) CASUALE o ACCIDENTALE
2) errori di tipo SISTEMATICO
   → legati a un processo di misurazione (imperfezione di taratura dello strumento) esso è evitabile
3) SENSIBILITA' DELLO STRUMENTO.

→ 1) ERRORE CASUALE

1) poniamo con x la nostra misura effettuata.
2) supponiamo che x_0 è la misura effettiva e che l'errore sia solo ~~casu~~ casuale e non sistematico
3) Eseguiamo diverse misure $x_1, x_2, x_3 \dots x_m$ con $m \gg 1$



$$x_i \pm \delta x$$

$$\delta x = \max(\varepsilon, \text{errori casuali}, \text{errori sistematici})$$

miglior stima → valore medio → $\bar{x} = \frac{1}{N}(x_1+x_2+x_3+\dots+x_m) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} x_i$

$$x_i - x_0 = \text{scarto}$$

$\bar{x} \xrightarrow[m \to +\infty]{} x_0$ il valore medio è la migliore stima della reale lunghezza

In conclusione il risultato della misurazione è
$\boxed{\bar{x} \pm \delta x}$ dove δx è il massimo valore tra:
- la sensibilità dello strumento (ε)
- gli errori sistematici
- $\sigma_{\bar{x}}$ → SCARTO QUADRATICO MEDIO

Grandezze derivate

→ se abbiamo una grandezza F che è in funzione della grandezza x di conseguenza la grandezza F è soggetta all'incertezza di x.

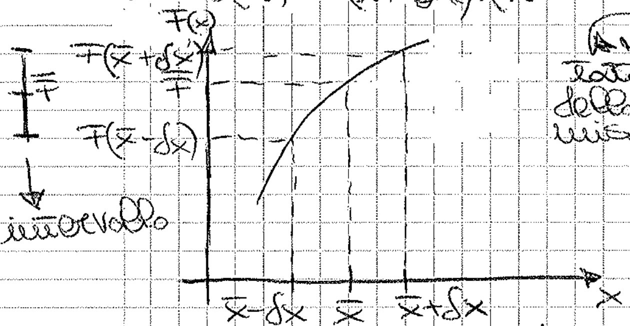
NB: la grandezza derivata ~~non si misura direttamente~~ ~~ma viene ricavata~~ dalla misurazione di x

$\boxed{F(x)}$ → la grandezza derivata (F) è in funzione della grandezza x

misura di x : $\bar{x} \pm \delta x$ con una probabilità che x_0 cada all'interno di questo intervallo.

→ grandezza FONDAMENTALE

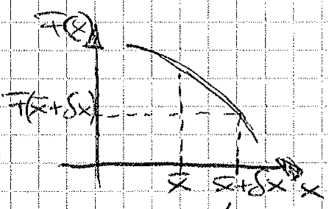
Ricavata una stima di x_0 $(\bar{x} \pm \delta x)$ ricaviamo la migliore stima di $F_0(x_0) = F(\bar{x} \pm \delta x)$ (l'errore della grandezza fondamentale PROPAGA nella grandezza derivata)



→ risultato della misura (INTERVALLO) $\left[\bar{F}(\bar{x}) \pm \delta \bar{F}\right]$ → incertezza

dove:
$$\delta \bar{F} = \left| \bar{F}(\bar{x}+\delta x) - \bar{F}(\bar{x}) \right|$$

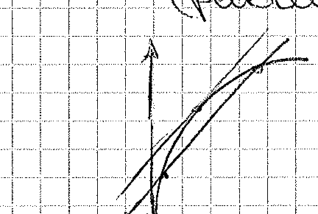
→ il modulo è necessario nel caso in cui la funzione è decrescente



→ $F(\bar{x}+\delta x) < F(\bar{x}-\delta x)$

$$\frac{\delta F}{\delta x} = \left| \overbrace{\frac{F(\bar{x}+\delta x) - F(\bar{x})}{\delta x}}^{tg\,\alpha} \right|$$

→ rapporto incrementale (pendenza di una secante)



→ angolo α

se facciamo tendere $|\delta x \to 0|$ abbiamo il coeff. angolare della retta tangente cioè la derivata:
$$\frac{dF}{dx}(\bar{x})$$

$$\boxed{\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta F}{\delta x} = \left| \frac{dF}{dx}(\bar{x}) \right|}$$ → pendenza della retta tangente nel punto $\bar{x}$

→ non riusciremo mai a ridurre δx a zero ma riusciremo a ridurre l'ERRORE RELATIVO a un numero molto minore di 1 prendo la x e la faccio variare di poco tra $\bar{x}$ e $\bar{x}+\delta x$

se $\left.\begin{array}{l} x: \bar{x} \longrightarrow \bar{x}+\delta x \\ y = \bar{y} \\ z = \bar{z} \\ \vdots \end{array}\right\}$ vario la variabile x e tengo fisse tutte le altre

$$\left[\frac{F(\bar{x}+\delta x, \bar{y}, \bar{z}, \dots) - F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots)}{\delta x}\right] \to \text{variazione di } F$$

Il limite per $\delta x \to 0$ del rapporto incrementale precedentemente scritto otteniamo un valore limite:

DERIVATA PARZIALE (dice quanto rapidamente varia F variando solo una variabile.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots)$$

→ definisce LA DERIVATA PARZIALE della funzione rispetto ad una variabile (x in questo caso) calcolata in $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \dots$

Ripetendo le cose, variando un'altra variabile, tenendo fisse tutte le altre e tendendola a zero:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \dots) \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial z}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \dots)$$

Possiamo quindi pensare che ci sia una sola variabile tenendo fisse tutte le altre ottenendo così la derivata parziale.

esempio: Calcolare la derivata di $x^2+y^2+2xy = F(x,y)$

$\frac{\partial F}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y})$? $\left[\begin{array}{l} a = y^2 \\ b = 2y \end{array}\right\}$ mantengo costante y quindi:

vario solo x

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) = 2x + b = 2x + 2y$$

ora vario y mantenendo costante x e ottengo:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) = 2y + 2x = 2(x+y)$$

quindi per determinare δF calcolo le derivate parziali:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial(x+y)}{\partial x} = 1$$

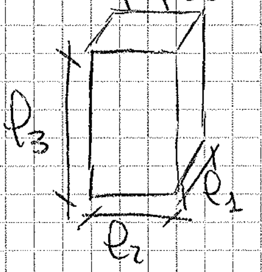
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial(x+y)}{\partial y} = \pm 1$$

ottengo allora:

$$\delta F = |1|\,\delta x + |\pm 1|\,\delta y = \delta x + \delta y$$

l'incertezza sulla somma o la differenza di due grandezze è sempre la somma delle due incertezze.

esempio: Voglio misurare il volume di un parallelepipedo:



$$V(\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3) = \bar{l}_1 \cdot \bar{l}_2 \cdot \bar{l}_3$$

le misure effettuate direttamente mi danno:

$$\bar{l}_1 \pm \delta l_1 \ ; \ \bar{l}_2 \pm \delta l_2 \ ; \ \bar{l}_3 \pm \delta l_3$$

$\boxed{V \pm \delta V ?} \rightarrow$ per farlo devo calcolare le derivate parziali di V rispetto alle lunghezze dei lati.

$$\frac{\partial V}{\partial l_1} = \bar{l}_2 \bar{l}_3 \ ; \ \frac{\partial V}{\partial l_2} = \bar{l}_1 \bar{l}_3 \ ; \ \frac{\partial V}{\partial l_3} = \bar{l}_1 \bar{l}_2$$

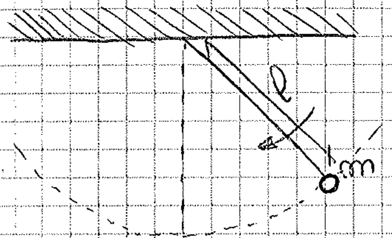
quindi:

$$\delta F = |\bar{l}_2 \bar{l}_3|\,\delta l_1 + |\bar{l}_1 \bar{l}_3|\,\delta l_2 + |\bar{l}_1 \bar{l}_2|\,\delta l_3$$

l'errore relativo sulla misura di V è

$$\frac{\delta V}{V} = \frac{1}{\bar{l}_1 \bar{l}_2 \bar{l}_3}\left(\bar{l}_2 \bar{l}_3 \delta l_1 + \bar{l}_1 \bar{l}_3 \delta l_2 + \bar{l}_1 \bar{l}_2 \delta l_3\right) =$$

Una delle esperienze fatte a laboratorio è l'esperienza del pendolo



T = periodo caratteristico
↳ tempo che impiega il pendolo a tornare in posizione iniziale

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{dove } g \simeq 9{,}8\ m/s^2$$

↳ sotto il punto di vista dimensionale è corretta:

$$\left[L^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{1}{2}}\right] = \left[L^{\frac{1}{2}}\left(LT^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] = \left[\cancel{L^{\frac{1}{2}}}\,\cancel{L^{-\frac{1}{2}}}\,T\right] = [T]$$

Quello che ci sarà chiesto è di trovare "g"

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2} \rightarrow \text{dove } g(l, T)$$

$$\frac{\partial g}{\partial l} = \frac{4\pi^2}{T^2} \quad ; \quad \frac{\partial g}{\partial T} = \frac{d}{dT}\left(\frac{a}{T^2}\right) = -\frac{2a}{T^3} = -\frac{8\pi^2 l}{T^3}$$

Le migliori stime delle misure saranno:

$$\underbrace{\bar{l} \pm \delta l \quad e \quad \bar{T} \pm \delta T}$$

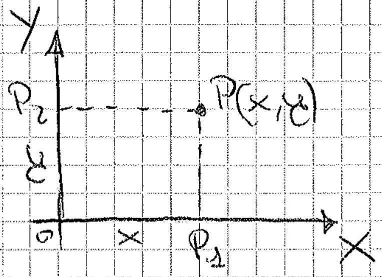
$\bar{g} \pm \delta g$ dove:

$$\delta g = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{T^2}\right)^2 \delta l^2 + \left(-\frac{8\pi^2 l}{T^3}\right)^2 \delta T^2}$$

e l'errore relativo sarà

$$\frac{\delta g}{g} = \sqrt{\left(\frac{\delta l}{l}\right)^2 + 4\left(\frac{\delta T}{T}\right)^2} \qquad g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2} = cost\; l\, T^{-2}$$

$$\frac{\delta g}{g} = \sqrt{\alpha^2\left(\frac{\delta l}{l}\right)^2 + \beta^2\left(\frac{\delta T}{T}\right)^2}$$

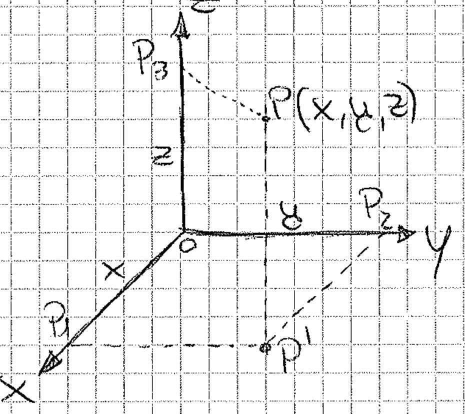


$\{X, Y, O, u\}$

↳ sistema di coordinate CARTESIANO ORTOGONALE

Possiamo generalizzare per la rappresentazione dello spazio, utilizzando 3 assi mutuamente perpendicolari

↳ x, y, z sono perpendicolari tra loro



$\{Z, O, u\}$ Ho associato a P un sistema a 3 coordinate

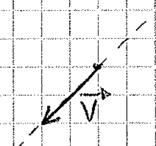
$\{X, O, u\}$

$\{Y, O, u\}$

$\{X, Y, Z, O, u\}$ → è detto SISTEMA di COORDINATE CARTESIANE ORTOGONALE.

Ci sono grandezze che hanno bisogno di un numero per essere descritte, altre invece hanno bisogno di altri dati. Ad esempio, il vento ha bisogno anche della direzione (vettore):

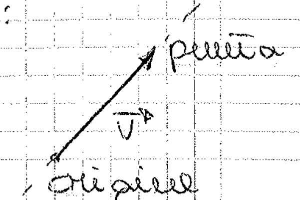
• vento soffia da Nord-Est a 50 Km/h



dove $|\vec{V}| = 50$ Km/h } direzione e verso sono indicate dalla freccia

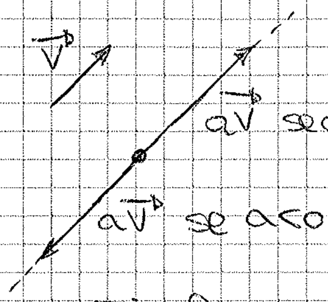
Un vettore è quindi definito geometricamente da una freccia, compresa tra un'origine e una punta, nello spazio e in sé sintetizza 3 informazioni:

1) MODULO $|\vec{V}|$ → la sua lunghezza
2) DIREZIONE, indicata dalla retta su cui giace
3) VERSO, indicato dall'origine alla punta



MOLTIPLICAZIONE

Preso $\vec{v}, a \in \mathbb{R}$ $\quad a\vec{v} \rightarrow$ esso ha:



- stessa direzione di $\vec{v}$
- $|a\vec{v}| = |a|\,|\vec{v}|$
- verso concorde se $a>0$
  verso discorde se $a<0$

NB se prendo $a=-1$ inverto il verso: $-\vec{v} = (-1)\vec{v}$

In particolare possiamo associare in modo univoco, ad un vettore, un versore:

$$\vec{v} \rightarrow \vec{u} = \left(\frac{1}{|\vec{v}|}\right)\vec{v} \quad \text{dove} \quad |\vec{u}| = \frac{1}{|\vec{v}|}\cdot|\vec{v}| = 1$$

→ qualsiasi valore assuma $|\vec{v}|$

↳ adimensionale e descrive: DIREZIONE e VERSO di un qualsiasi vettore.

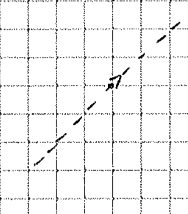
quindi un vettore è:

$$\boxed{\vec{v} = |\vec{v}|\,\vec{u}}$$

$|\vec{v}|$ → MODULO DEL VETTORE

$\vec{u}$ → direzione e verso del vettore

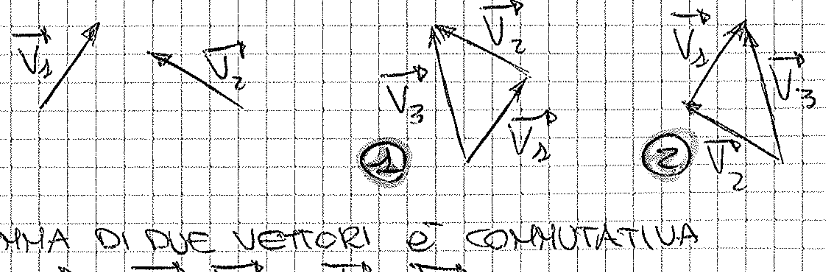
Se l'origine è lo stesso punto della punta si ha il vettore nullo ($\vec{0}$) esso si può ottenere moltiplicando ad un qualsiasi vettore uno zero ("0")



$$0\vec{v} = \vec{0} \text{ (vettore nullo)}$$

SOMMA DI VETTORI

Se ho $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, $\quad \vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$



→ sposto con movimento rigido (senza variare le caratteristiche) in modo che punta e origine di v_1 e v_2 coincidano

La SOMMA DI DUE VETTORI è COMMUTATIVA

$$\vec{v}_3 = \underbrace{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}_{1} = \underbrace{\vec{v}_2 + \vec{v}_1}_{2}$$

Da questi due esempi si ricava la regola del PARALLELOGRAMMA di pitagora.

$|AC| = \sqrt{|AD|^2 + |DC|^2}$

$|BD| = |BC| \cos\vartheta \; ; \quad |DC| = |BC| \operatorname{sen}\vartheta \; ; |AD| = |AB| + |BD| =$

$= |\vec{v}| + |\vec{w}| \cos\vartheta = |AD|$

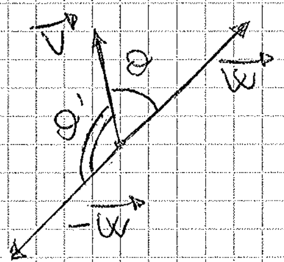
$|AC| = |\vec{v} + \vec{w}| = \sqrt{(|\vec{v}| + |\vec{w}| \cos\vartheta)^2 + |\vec{w}|^2 \operatorname{sen}^2\vartheta} =$

$= \sqrt{|\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 \cos^2\vartheta + 2|\vec{v}||\vec{w}| \cos\vartheta + |\vec{w}|^2 \operatorname{sen}^2\vartheta} =$

$= \sqrt{|\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 (\underbrace{\cos^2\vartheta + \operatorname{sen}^2\vartheta}_{1}) + 2|\vec{v}||\vec{w}| \cos\vartheta} =$

$= \sqrt{|\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 + 2|\vec{v}||\vec{w}| \cos\vartheta}$

$\cos^2\vartheta + \operatorname{sen}^2\vartheta = 1$



se fosse invece $|\vec{v} - \vec{w}|$ userò ϑ'

$\vartheta' = 180° - \vartheta = \pi - \vartheta$

SOMMA DI VETTORI

Prendendo 3 vettori nello spazio:

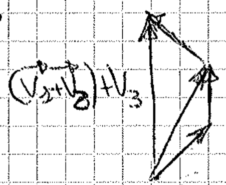
$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$

Facciamo una prima somma

$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_{1,2}$

e successivamente una seconda somma

$\vec{v}_{1,2} + \vec{v}_3$



NB non cambia l'ordine della somma dei vettori

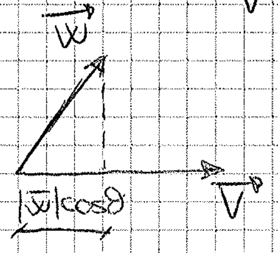
$(v_1+v_2)+v_3 = (v_1+v_3)+v_2 = (v_2+v_3)+v_1$

PRODOTTO SCALARE

Il prodotto scalare di due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ è un numero ed è definito come

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = |\vec{v}||\vec{w}|\cos\vartheta$$

→ LA COMPONENTE RISPETTO del vettore $\vec{w}$



Il prodotto scalare è simmetrico (commutativo)

NB

$\vec{v}\cdot\vec{w} = |\vec{v}||\vec{w}|\cos\vartheta > 0 \iff \vartheta < \frac{\pi}{2}$

$\vec{v}\cdot\vec{w} = |\vec{v}||\vec{w}|\cos\vartheta < 0 \iff \vartheta > \frac{\pi}{2}$

$\vec{v}\cdot\vec{w} = |\vec{v}||\vec{w}|\cos\vartheta = 0 \iff \vartheta = \frac{\pi}{2}$

$\vec{v}\cdot\vec{v} = |\vec{v}||\vec{v}|\cos\vartheta = |\vec{v}||\vec{v}| = |\vec{v}|^2$

(abbiamo $\vartheta = 0 = \cos(0) = 1$

→ da cui

$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$

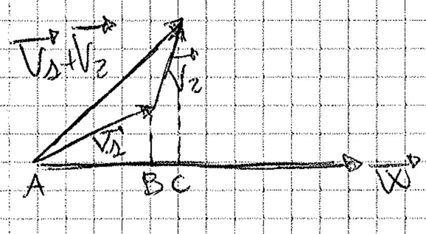
Si può dire che il prodotto scalare di due vettori è pari al prodotto del modulo di un vettore per la componente dell'altro vettore!

PROPRIETÀ:

① $(\vec{v}_1+\vec{v}_2)\cdot\vec{w} = \vec{v}_1\cdot\vec{w} + \vec{v}_2\cdot\vec{w}$

② $a \in \mathbb{R}$ (SCALARE) $a(\vec{v}\cdot\vec{w}) = (a\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{v}(a\vec{w})$

- si dimostra ①



→ LA COMPONENTE DI $\vec{v}_1+\vec{v}_2$ RISPETTO $\vec{w}$

$(\vec{v}_1+\vec{v}_2)\cdot\vec{w} = |\vec{w}||AC| = |\vec{w}|(|AB|+|BC|) =$

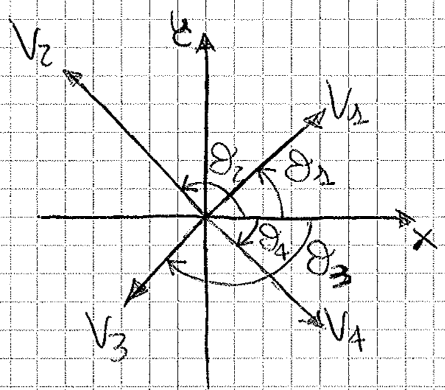
$= |\vec{w}||AB| + |\vec{w}||BC| = \vec{v}_1\cdot\vec{w} + \vec{v}_2\cdot\vec{w}$

→ COMPONENTE di $\vec{v}_1$ → COMPONENTE di $\vec{v}_2$

Prendiamo due vettori $\vec{v}$, $\vec{w}$: calcolare $\boxed{|\vec{v}+\vec{w}|}$

Utilizzando il teorema di pitagora

$$\vec{V}_x = |\vec{V}| \cos\vartheta$$
$$\vec{V}_y = |\vec{V}| \sin\vartheta$$



per V_1: $V_x > 0$ e $V_y > 0$ — per V_3: $V_x < 0$ e $V_y < 0$

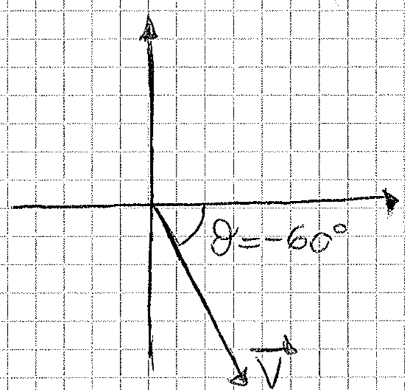
per V_2: $V_x < 0$ e $V_y > 0$ — per V_4: $V_x > 0$ e $V_y < 0$

$\vartheta_1 > 0$, $\vartheta_2 > 0$, $\vartheta_3 < 0$, $\vartheta_4 < 0$

siccome $\cos(-\vartheta) = -\cos\vartheta$
e $\cos\vartheta = \cos\vartheta$

esempio

- Dato un vettore $\vec{V}$ con $|\vec{V}| = 5u$



$$\vec{V} = |\vec{V}| \cos(-60°)\,\vec{u}_x + |\vec{V}| \sin(-60°)\,\vec{u}_y =$$
$$= |\vec{V}| \cos(60°)\,\vec{u}_x - |\vec{V}| \sin(60°)\,\vec{u}_y =$$
$$= \left(\frac{5}{2}u\right)\vec{u}_x - \left(5\frac{\sqrt{3}}{2}u\right)\vec{u}_y$$

NOTA: u è l'unità di misura

$$\vec{V} = \vec{W} \rightarrow \begin{cases} \vec{V} = V_x\vec{u}_x + V_y\vec{u}_y \\ \vec{W} = W_x\vec{u}_x + W_y\vec{u}_y \end{cases}$$

accade solo se le componenti sono uguali

$$\vec{V} + \vec{W} \Longleftrightarrow \begin{cases} W_x = V_x \\ W_y = V_y \end{cases}$$ (doppia implicazione)

Il vettore somma è un vettore che ha come componenti la somma dei componenti:

$$\longrightarrow (V_x + W_x)u_x + (V_y + W_y)\vec{u}_y$$

Il prodotto di uno scalare per un vettore ha come componenti

$$a\vec{V} = a(V_x\vec{u}_x + V_y\vec{u}_y) =$$
$$= (aV_x)\vec{u}_x + (aV_y)\vec{u}_y$$

$$(V_x, W_y) + (W_x, W_y) = \underbrace{(V_x + W_x, V_y + W_y)}_{\text{SOMMA MATRICIALE } 1\times 2} = \vec{V} + \vec{W}$$

$$a(V_x, V_y) = (aV_x, aV_y) = a\vec{V}$$

- Tornando all'esercizio precedente:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{V} = \vec{U_x} + 3\vec{U_y} = (1,3) \\ \vec{W} = 2\vec{U_x} - \vec{U_y} = (2,-1)\end{array}\right\} \vec{V} + \vec{W} = (1,3) + (2,-1)$$

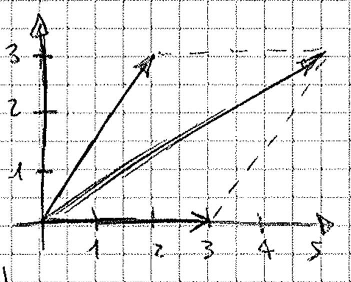
PRODOTTO SCALARE DI DUE MATRICI

$$\vec{V} \cdot \vec{W} = V_x W_x + V_y W_y = (V_x, V_y) \cdot \begin{pmatrix} W_x \\ W_y \end{pmatrix}$$

(V_x, V_y) → vettore RIGA; $\begin{pmatrix} W_x \\ W_y \end{pmatrix}$ → vettore COLONNA

ESERCIZIO

$\vec{V} = 3\vec{u_x} = (3,0)$ $\quad \vec{W} = 2\vec{u_x} + 3u_y = (2,3)$



$$\vec{V} + \vec{W} = (3,0) + (2,3) = (5,3)$$

$$|\vec{V}| = 3$$

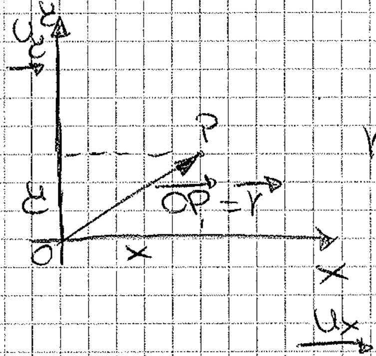
$$|\vec{W}| = \sqrt{13}$$

L'angolo tra i due vettori è

$$\cos\vartheta = \frac{\vec{V} \cdot \vec{W}}{|\vec{V}||\vec{W}|} = \frac{6}{3\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

dove $\vartheta = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) = 56°$

Fissato un sistema di coordinate $\{O, X, Y, u\}$ possiamo associare un punto P definito da un vettore



$$r = \vec{OP} = x\vec{u_x} + y\vec{u_y}$$

r è il vettore posizione P rispetto ad O

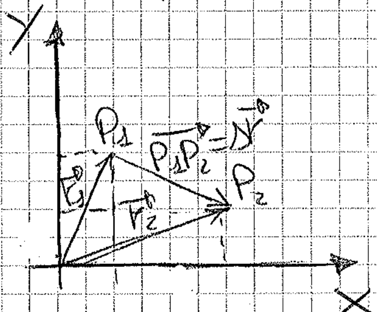
$$r \equiv (x, y)$$

↳ la lunghezza di questo vettore è

$$r = |\vec{r}| = |\vec{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

↳ distanza dall'origine di P

Si può così vedere quanto è distante un punto P_1 da un punto P_2.



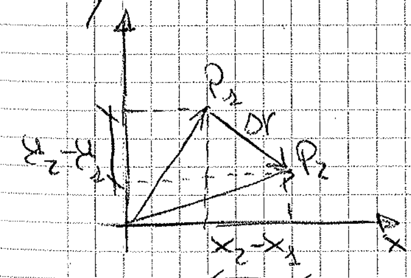
$$r_1 = x_1\vec{u_x} + y_1\vec{u_y} = (x_1, y_1)$$
$$r_2 = x_2\vec{u_x} + y_2\vec{u_y} = (x_2, y_2)$$

vettore posizione relativa di P_2 rispetto P_1

$$\vec{\Delta r} = \vec{r_2} - \vec{r_1} = (x_2 - x_1)\vec{u_x} + (y_2 - y_1)\vec{u_y}$$

La distanza di P_1 rispetto P_2 o viceversa è quindi pari al modulo di $\vec{\Delta r}$

$$|\vec{\Delta r}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2}$$

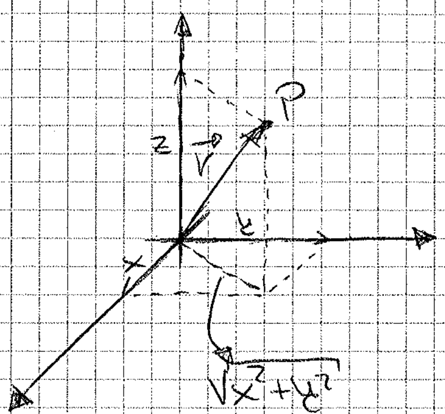


si può vedere anche con il teorema di pitagora.

$$|\vec{v}| = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$$

$$|P_1P_2| = 0 \iff \vec{\Delta r} = \vec{0} \iff \vec{r_1} - \vec{r_2} = \vec{0} \iff r_1 = r_2 \iff P_1 = P_2$$

Fissiamo un sistema di coordinate



$$\vec{r} = \vec{OP} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z = (x, y, z)$$

→ vettore posizione di P

$$r = |OP| = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Il che si può ricavare con il teorema di pitagora (applicandolo due volte)

$\vec{r}_1 = x_1\vec{u}_x + y_1\vec{u}_y + z_1\vec{u}_z$ → vettore posizione di P_1

$\vec{r}_2 = x_2\vec{u}_x + y_2\vec{u}_y + z_2\vec{u}_z$ → " " " P_2

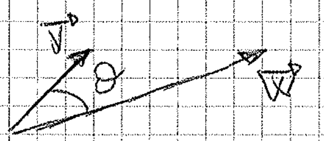
$$\vec{\Delta r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) =$$

$$= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$|P_1P_2| = |\vec{\Delta r}| = \sqrt{(x_2-x_1) + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

PRODOTTO VETTORIALE

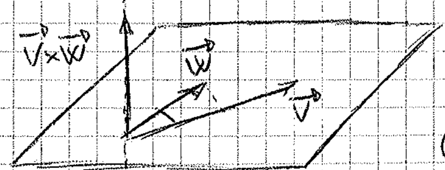
Siano due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Il prodotto vettoriale è IL VETTORE $\vec{v}\times\vec{w}$



$$\boxed{|\vec{v}\times\vec{w}| = |\vec{v}||\vec{w}|\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

ogni coppia di vettore con un angolo $\theta \neq 0$ definisce un piano

è l'altezza del parallelogramma e di conseguenza $|\vec{v}\times\vec{w}|$ è l'area del parallelogramma



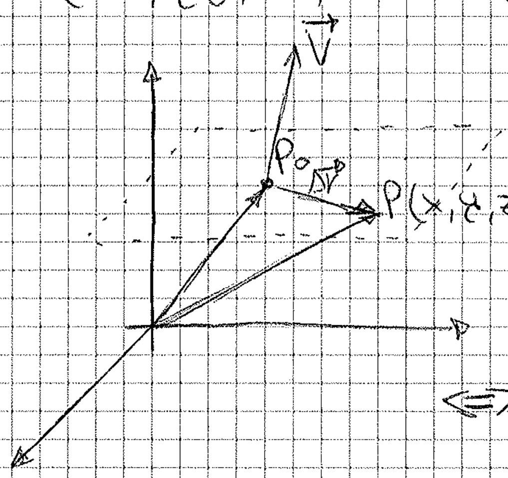
REGOLE DELLA MANO DESTRA ($\vec{v} \to \vec{w}$)
→ dobbiamo fare ruotare le dita da $\vec{v}$ a $\vec{w}$ e il verso del vettore $\vec{v}\times\vec{w}$ è dove indica il pollice

NB: cambiando l'ordine di $\vec{v}$ e $\vec{w}$ cambia di segno

NB2: $|\vec{w}\times\vec{v}|$ o $|\vec{v}\times\vec{w}|$ è uguale a $\emptyset$ quando sen $\theta = 0$ cioè quando sono PARALLELI

Determinare l'equazione del piano passante per P_0 e perpendicolare a $\vec{v}$

$P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ $\quad \vec{v}\,(A, B, C)$



$P \in$ piano $\iff \vec{\Delta r} \perp \vec{v}$

$\vec{\Delta r} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$

$\vec{\Delta r} \cdot \vec{v} = 0 \iff$

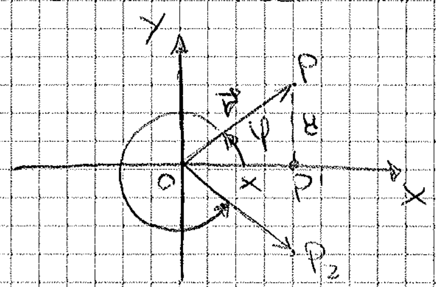
$\iff A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

Sistemi di coordinate

Vengono introdotti per scegliere la descrizione migliore. La descrizione tiene conto della:

1. SIMMETRIA

COORDINATE POLARI PIANE



$r = |\vec{r}| \geq 0$

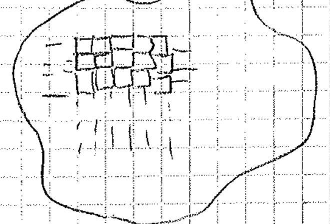
$0 \leq \varphi < 2\pi$

$(r, \varphi) \iff P$

dove $\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg(\varphi) = \dfrac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{cases}$

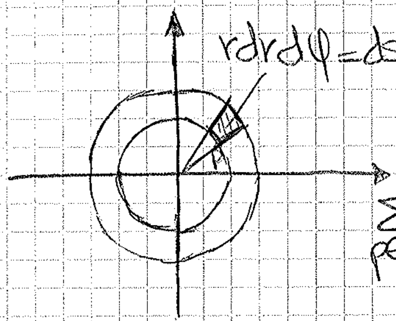
si può passare da un sistema cartesiano a uno polare o viceversa

Capiterà nel nostro corso di dover calcolare



$$\sum_{P\in S} \varphi(P)\, dS(P) = \int_S \varphi(P)\, dS$$

↳ integrale di superficie



AREA:

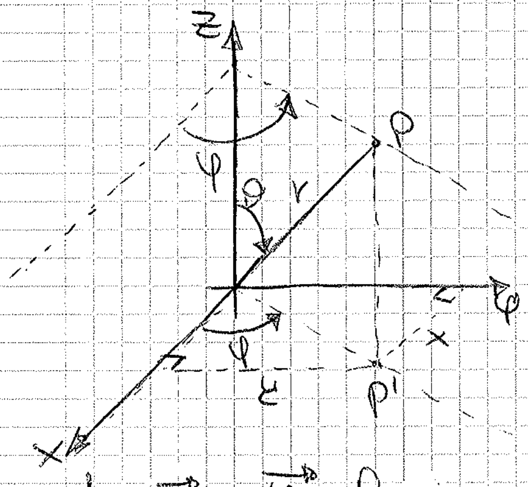
↳ $dS(P) = dl_r\, dl_\varphi = \underbrace{r\,dr\,d\varphi}_{\text{area dei quadratini}}$

$$\sum_{P\in S} \varphi(r,\varphi)\, dS(P) = \int_S \varphi(r,\varphi)\, r\,dr\,d\varphi$$

integrale a due variabili (doppio)

COORDINATE POLARI SFERICHE

↳ sono utili per studiare sistemi di simmetria sferica



$r = |OP| = |\vec{r}^P|$

devo anche definire direzione e verso; essi sono definiti da due angoli:

① θ che va da $\vec{u}_z$ e $\vec{r}$

② φ che va dal semipiano da $\vec{u}_z$ e $\vec{u}_x$ al semipiano formato da $\vec{u}_z$ e $\vec{r}^P$

↳ angolo diedro (tra due semipiani)

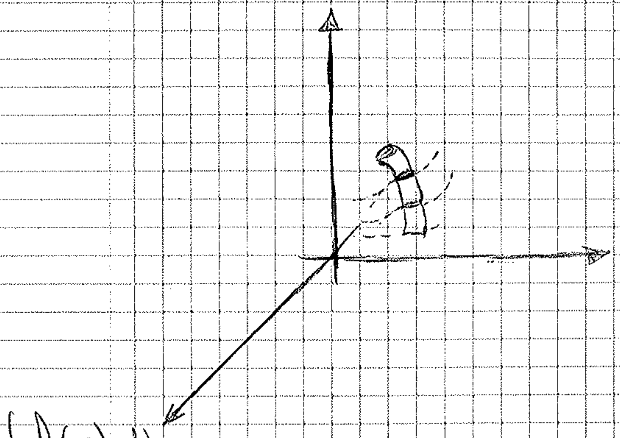
NB: Per $\theta = 0$ sono sull'asse z

$0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le \theta < \pi$, $r \ge 0$ sono le coordinate polari sferiche

$P(r, \theta, \varphi) \longrightarrow P'(r+dr, \theta+d\theta, \varphi+d\varphi)$

$\vec{dl} = \vec{PP'} = \vec{dl_r} + \vec{dl_\theta} + dl_\varphi = dr\, u_r + r\, d\theta\, \vec{u_\theta} + r \sin\theta\, d\varphi\, \vec{u_\varphi}$

↳ coordinate di uno spostamento infinitesimo



$\sum_{P \in S} f(P)\, ds = \int_S f(P)\, ds$

$ds(P) = dl_\theta\, dl_\varphi = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$

$\int f(r, \theta, \varphi)\, r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$

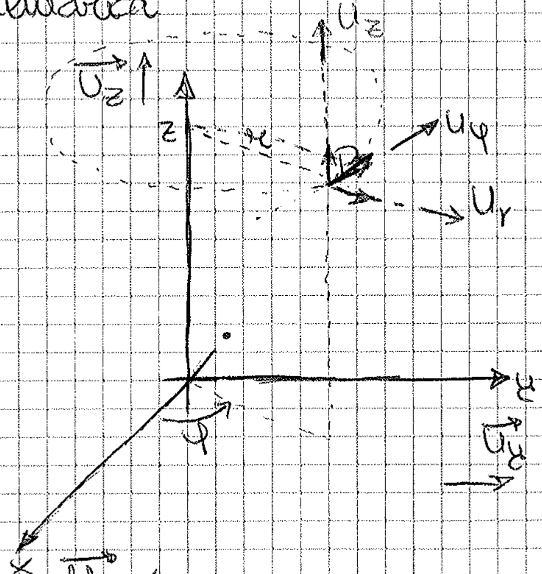
↳ calcolo della superficie sferica con 2 variabili (θ, φ)

$\int_V f(P)\, dV =$

$= \int_V f(r, \theta, \varphi) \cdot r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$

SISTEMA DI COORDINATE CILINDRICHE

Sono sistemi di riferimento che hanno una simmetria cilindrica



Ogni punto viene descritto con

(z, r, φ)

- φ è l'angolo diedro che va dal piano formato da x e z al piano formato da z e P
- $r \geq 0$
- $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

MECCANICA

Lo studio del moto dei corpi

A seconda del tipo di approccio la meccanica si divide

1) CINEMATICA → studio puramente descrittivo,

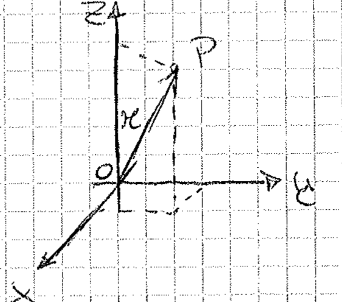
2) DINAMICA → studio del moto in relazione alle cause che lo determinano le caratteristiche

MOTO → un oggetto è in moto quando la sua posizione cambia nel tempo

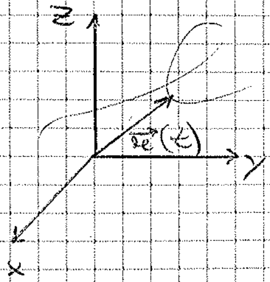
La descrizione del moto non è assoluta ma è relativa. Può essere visto in modo differente a seconda della persona che lo osserva.
Quindi il moto è un concetto relativo.
Deve esistere una relazione tra le posizioni, le velocità, e le accelerazioni che legano i diversi modi di guardare un oggetto muoversi. Queste leggi si chiamano LEGGI DI TRASFORMAZIONE.
Se noi, per adesso, ci basiamo sulla visione di una sola persona abbiamo bisogno

1) DI UN SISTEMA DI COORDINATE 2) STRUMENTI DI MISURAZIONE

1 + 2 definisce un SISTEMA DI RIFERIMENTO (SR)



Fissato un SR sappiamo descrivere ogni punto con le coordinate del sistema (vettore posizione $\vec{r}$)

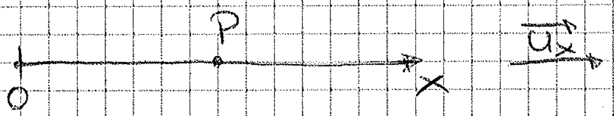


Un moto è completamente descritto se e solo se è definito in ogni istante di tempo il vettore posizione.

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

MOTO UNIDIMENSIONALE DI UN PUNTO MATERIALE o PARTICELLA

Conviene scegliere un asse x (SR unidimensionale)



Il moto di una particella è descritto da una sola funzione cioè la posizione di x con il passare del tempo

$$\boxed{x(t)}$$

→ descrizione del moto istante per istante

→ LEGGE ORARIA

La legge oraria è utile rappresentarla in un piano BIDIMENSIONALE

questa curva non è da confondere con il moto effettivo della particella.

Fissiamo un istante iniziale t_0 e prendiamo un istante successivo t_1

t_0, $t_1 > t_0$ $\Delta t = t_1 - t_0 > 0$

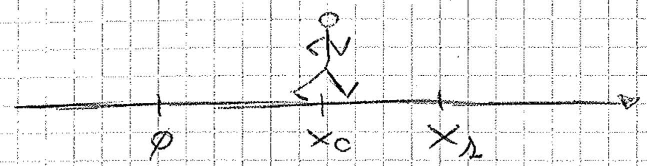
La particella si sposta da $x_0 = x(t_0)$ ad $x_1 = x(t_1)$ si può così definire la velocità media relativa all'intervallo di tempo Δt a partire da t_0

$$V_{media} = \bar{V} \triangleq \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}$$

→ ci dice con che rapidità il punto si sposta da x_0 a x_1

esempio 1

$t = t_0 = 1 \, sec$ $\qquad t_1 = 3 \, sec$



$x_0 = 5 \, cm$

$x_1 = 8 \, cm$

$$V_{media} = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} = \frac{3 \, cm}{2 \, sec} = 1,5 \frac{cm}{sec}$$

esempio 2

$\Delta x = 3 \, cm \pm 1 \, cm$

$\Delta t = 2 \, sec \pm 0,2 \, sec$

} con degli strumenti di misura misuriamo con questa precisione

$V_{media} = V_{media} \pm \delta V_{media}$ quanto vale δV?

$$\delta V = \left| \frac{\partial v}{\partial (\Delta x)} \right|_{\substack{\Delta x = 3m \\ \Delta t = 2sec}} \delta(\Delta x) + \left| \frac{\partial v}{\partial (\Delta t)} \right|_{\substack{\Delta x = 3m \\ \Delta t = 2sec}} \delta(\Delta t)$$

$$\frac{\partial v}{\partial (\Delta x)} = \frac{\partial}{\partial (\Delta x)} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right) = \frac{1}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial v}{\partial (\Delta t)} = \frac{\partial}{\partial (\Delta t)} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right) = - \frac{\Delta x}{\Delta t^2}$$

$$\delta V_{media} = \left. \frac{\delta(\Delta x)}{\Delta t} \right|_{\Delta t = 2sec} + \left| \left(\frac{\Delta x}{\Delta t^2} \right) \right|_{\substack{\Delta x = 3m \\ \Delta t = 2sec}} \delta(\Delta t) = 0,15 \, cm/sec$$

$$\frac{\delta V_{media}}{V_{media}} = 0,1 \simeq 10\% \rightarrow \text{precisione del } 10\%$$

esempio

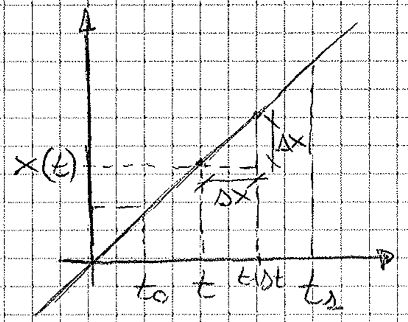
Prendiamo una legge oraria di questo tipo

$$x(t) = At + B$$

lo spostamento ha una dipendenza lineare nel tempo (RETTA)

Dimensionalmente; $x(t)$ è una lunghezza $[B] = [L]$ quindi di conseguenza:

$[A] = [L \cdot T^{-1}] \Rightarrow [At] = [L]$ poiché $[t] = [T]$



$$v(t) = \frac{dx}{dt}(t) = A =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \right) =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{A(t+\Delta t) + \cancel{B} - (At + \cancel{B})}{\Delta t} \right) =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\cancel{\Delta t} \cdot A}{\cancel{\Delta t}} \right) = A$$

Se ci fosse una dipendenza lineare di $x(t)$ sul tempo si parla di MOTO UNIFORME dove:

$$\left[\begin{array}{l} V_{media} = V_{istantanea} = A \\ \overline{V} = V(t) = A \end{array} \right]$$

Conoscendo la velocità istantanea è possibile ricavare la legge oraria del moto?

$\rightarrow V(t) \rightarrow x(t)$?

Data la velocità ricavare il moto:
Per farlo dobbiamo conoscere, oltre la velocità, la posizione iniziale.

e otteniamo infine

$$\boxed{x(t)=x(t_0)+\int_{t_0}^{t} v(t')\,dt'} \Longrightarrow$$

osservazione: per ricavare la POSIZIONE ISTANTANEA abbiamo bisogno della posizione iniziale $(x(t_0))$

Possiamo ancora notare che se $v(t)=\text{costante}=v$ la posizione non dipende più dal tempo quindi otteniamo

$$\int_{t_0}^{t} v(t')\,dt' = \sum_{n=1}^{N} v(t_n)\,dt_n = \sum_{n=1}^{N} v\,dt_n =$$

$$= v\left(\sum_{n=1}^{N} dt_n\right) = v\cdot \Delta t$$

quindi

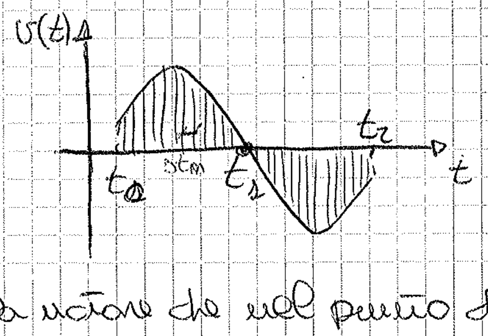
$$x(t)=x(t_0)+\int_{t_0}^{t} v\,dt' =$$

$$= x(t_0)+v\int_{t_0}^{t} dt' = \boxed{x(t_0)+v(t-t_0)}$$

RETTA LA CUI PENDENZA È v

$$\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0} = v = v_{medio}$$

se invece abbiamo un moto di questo genere



Posso dividere l'intervallo $[t_0,t_2]$ in $[t_0,t_1]+[t_1,t_2]$

dove $t_0\le t\le t_1$ ho $\Delta x>0$

dove $t_1\le t\le t_2$ ho $\Delta x<0$

Da notare che nel punto di t_1 si ferma (la particella)

2) Consideriamo il secondo intervallo che va da
$t_1 = 10sec \longrightarrow t_2 = 16sec$

$v(t) = v_2$ per $t_1 \leq t \leq t_2$

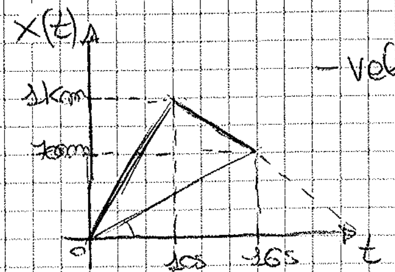
$x(t) = x(t_1) + v_2 (t - t_1)$

$x_2 = x(t_2) = x_1 + v_2 (t_2 - t_1)$ da cui $v_2 = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} =$

$= \frac{700m - 1000m}{16sec - 10sec} = -\frac{300m}{6sec} = (-)50 \frac{m}{sec}$
↳ è negativo perché $\Delta x < 0$

otteniamo così la legge oraria tra t_1 e t_2

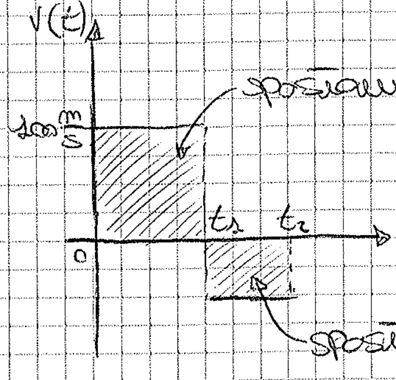
$x(t) = (1000m) - (50m/s)(t - 10s)$



- velocità media

La velocità media tra t_0 e t_2 è

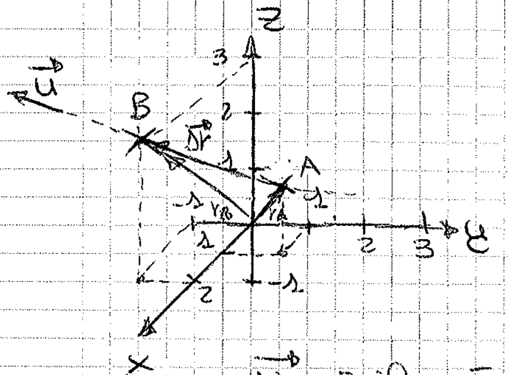
$\boxed{V_{media}} = \frac{\Delta x}{\Delta v} = \frac{(700-0)m}{(16-0)s} = \frac{700}{16} \frac{m}{s} > 0$



spostamento (area) → $\Delta x_1 = (t_1 - t_0) v_1 > 0$
$= 1000m \, v_1$

spostamento (area) → $\Delta x_2 = (t_2 - t_1) v_2 < 0$

$\Delta x_2 = (6sec)(-50 m/s) =$
$= -300m$



$\vec r_A = \vec u_x + \vec u_y + \vec u_z = (1,1,1)(m)$

$\vec r_B = 2\vec u_x - \vec u_y + 3\vec u_z = (2,-1,3)(m)$

$\vec{\Delta r} = \vec{AB} = \vec r_B - \vec r_A = (2-1, -1-1, 3-1) =$

$= (1,-2,2)(m)$

$\vec{\Delta r}$ è il vettore posizione relativa di B rispetto ad A.

Il versore è $\vec u = \dfrac{\vec{\Delta r}}{|\vec{\Delta r}|}$

Il $|\vec{\Delta r}|$ è la distanza di B da A

$|\vec{\Delta r}| = \sqrt{1^2+(-2)^2+2^2} = 3\,m$

da cui $\vec u = \frac{1}{3}(1,-2,2) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ (è adimensionale)

2 Siano dati due vettori $\vec v_1\left(\frac{1}{\sqrt2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ $\vec w\left(-\sqrt2, 2, 0\right)$

1) $\vec v + \vec w = \left(\frac{1-}{\sqrt2}, -\frac{1}{2}+2, 0+0\right) = \left(-\frac{\sqrt2}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$

2) $\vec v \cdot \vec w = \left(\frac{1}{\sqrt2}, -\frac{1}{2}, 0\right)\begin{pmatrix}-\sqrt2\\ 2\\ 0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt2}(-\sqrt2) + \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 2 + 0\cdot 0 = -2$

2) $\vec v \times \vec w = \det\begin{pmatrix}\vec u_x & \vec u_y & \vec u_z\\ \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{2} & 0\\ -\sqrt2 & 2 & 0\end{pmatrix}$

Le due componenti z sono uguali a zero quindi i due vettori giacciono nel piano x, y e quindi il prodotto vettoriale dà un vettore parallelo a z

$$= \vec u_x \underbrace{\begin{vmatrix}-\frac{1}{2} & 0\\ 2 & 0\end{vmatrix}}_{\to 0} - \vec u_y \underbrace{\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt2} & 0\\ -\sqrt2 & 0\end{vmatrix}}_{\to 0} + \vec u_z \begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{2}\\ -\sqrt2 & 2\end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt2}\vec u_z$$

Sia $\vec{W} = \vec{V_1} \times \vec{V_2} = (V_{1y}V_{2z} - V_{1z}V_{2y})\vec{u_x} + (V_{1z}V_{2x} - V_{1x}V_{2z})\vec{u_y} +$
$+ (V_{1x}V_{2y} - V_{1y}V_{2x})\vec{u_z}$

$\vec{W} \times \vec{V_3} = (W_y V_{3z} - \cancel{W_z V_{3y}})\vec{u_x} +$
$+ (\cancel{W_z V_{3x}} - W_x V_{3z})\vec{u_y} + (\cancel{W_x V_{3y}} - \cancel{W_y V_{3x}})\vec{u_z} =$
$= W_y V_{3z}\vec{u_x} - W_x V_{3z}\vec{u_y} =$
$= (V_{1z}V_{2x} - V_{1x}V_{2z})V_{3z}\vec{u_x} - (V_{1y}V_{2z} - V_{1z}V_{2y})V_{3z}\vec{u_y} =$
$= V_{1z}V_{3z}(V_{2x}\vec{u_x} + V_{2y}\vec{u_y}) - (V_{2z}V_{3z})(V_{1x}\vec{u_x} + V_{1y}\vec{u_y})$

sommo e sottraggo
$+V_{1z}V_{2z}V_{3z}\vec{u_z} \quad - V_{1z}V_{2z}V_{3z}\vec{u_z}$

$= \underbrace{(V_{1z}V_{3z})}_{\vec{V_1}\cdot\vec{V_3}}\vec{V_2} - \underbrace{(V_{2z}V_{3z})}_{\vec{V_2}\cdot\vec{V_3}}\vec{V_1}$

Per esca.
siano $V_1, V_2, V_3 \in V$ calcolare $(\vec{V_1} \times \vec{V_2}) \times \vec{V_3}$

$\vec{V_1} = (4, 2, 7)$ $\quad (\vec{V_1}\cdot\vec{V_3})\vec{V_2} - (\vec{V_2}\cdot\vec{V_3})\vec{V_1}$

$\vec{V_2} = (3, -3, 1)$ $\quad$ Dimostrare che sono uguali

$\vec{V_3} = (2, -1, 1)$ $\quad$ [Ris. $(-43, -17, 69)$]

Quando la derivata seconda ($a(t)$) è positiva $\Rightarrow$ MIN
" " " " " è negativa $\Rightarrow$ MAX

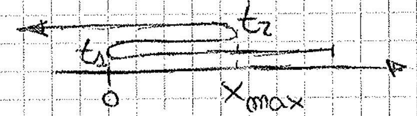
$a(t_1) = 2A > 0$ MINIMO RELATIVO

$a(t_2) = -2A < 0$ MASSIMO RELATIVO

$$x(t_2) = A\frac{4A^2}{9B^2} - B\frac{8A^3}{27B^3} = \frac{A^3}{B^2}\left(\frac{4}{9} - \frac{8}{27}\right) = \frac{4}{27}\frac{A^3}{B^2}$$

$$x_{max} = x(t_2) = \frac{4A^3}{27B^2} > 0$$

t_1 e t_2 sono i punti in cui il moto si inverte



PROBLEMA INVERSO DELLA CINEMATICA: (Dedurre il moto)

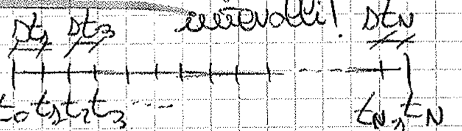
Poniamoci il seguente problema:
Supponiamo che ci sia data l'accelerazione istantanea in ogni istante. Possiamo ricavare $x(t)$ in ogni istante?
Questo problema si chiama: PROBLEMA INVERSO DELLA CINEMATICA!

prendiamo questo intervallo di tempo e lo dividiamo in tanti intervalli!

Prendiamo $t > t_0$ | $t_0 \longrightarrow t = t_0 + \Delta t$

NB: servono anche le condizioni iniziali! (posizione e velocità iniziale)...

$\Delta t = t - t_0 > 0$



$t_{n-1} \longrightarrow t_{n-1} + \Delta t_n = t_n$

$$\bar{a}_n = \frac{v(t_n) - v(t_{n-1})}{\Delta t_n} = \frac{\Delta v}{\Delta t_n} \Rightarrow \Delta v_n = \bar{a}_n \Delta t_n$$ l'altro è $a(t)$

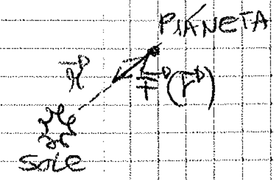
↳ variazione media della velocità in un intervallo n-esimo

$$\Delta t = t - t_0 = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \dots + \Delta t_N = \sum_{n=1}^{N} \Delta t_n$$

$$\Delta v = v(t) - v(t_0) = \Delta v_1 + \Delta v_2 + \dots + \Delta v_N = \sum_{n=1}^{N} \Delta v_n = \sum_{n=1}^{N} \bar{a}_n \Delta t_n$$

NB! Non sempre si conosce la forza in relazione al tempo, può anche essere in relazione alla posizione

esempio: $F = G\frac{m \cdot M}{r^2}$ ma $\vec{F}(\vec{r}) = m\,\vec{a}(\vec{r})$



↳ legge di gravitazione universale di Newton

m e M sono due masse di due pianeti!

se $a(t) \equiv a = \text{costante}$ (non dipende dal tempo)

allora ↳ $\Delta v = \int_{t_0}^{t} a(t')\,dt' = \sum_{n=1}^{N} a(t_n)\,dt_n = \sum_{n=1}^{N} a\,dt_n = a \underbrace{\sum_{n=1}^{N} dt_n}_{\Delta t} =$

$= a\,\Delta t = a(t - t_0)$

quindi: $\boxed{v(t) = v(t_0) + a(t - t_0)}$ → rappresentabile attraverso una retta

↳ da cui $\frac{dv}{dt} = a = \text{cost}$

↳ ottenendo così la posizione istantanea:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(t')\,dt'$$

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} [v(t_0) + a(t' - t_0)]\,dt' =$$

$$= x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(t_0)\,dt + \int_{t_0}^{t} a\,(t' - t_0)\,dt' =$$

$$= x(t_0) + v(t_0)(t - t_0) + \frac{a}{2}(t - t_0)^2 =$$

$$\int_{t_0}^{t} (t' - t_0)\,dt' = \int_{0}^{t-t_0} y'\,dy' = \frac{y'^2}{2}\Big|_{0}^{t-t_0} = \frac{1}{2}(t - t_0)^2$$

$y' = t' - t_0$

$dt' = dy'$ (perché dt' varia di poco)

$y'(t_0) = t_0 - t_0 = 0$

$y'(t) = t - t_0$

esistono vari tipi di moti:
- MOTO ACCELLERATO $\Rightarrow |v|\uparrow$ nel tempo
- MOTO DECELERATO $\Rightarrow |v|\downarrow$ nel tempo (rallenta)

PROPRIETÀ → moto accellerato se a e v hanno lo stesso segno (modulo di v cresce)

$$t \to t+dt \to |v|\uparrow$$

$$\boxed{av>0} \Leftarrow \boxed{\text{se } v>0} \to dv = d|v|>0 \Rightarrow a = \frac{dv}{dt}>0$$

PROPRIETÀ 2 → moto decelerato se a e v hanno segno opposto (modulo di v decresce)

$$\boxed{v<0}\ dv = -d|v|<0 \Rightarrow a = \frac{dv}{dt}<0$$

$$\boxed{av>0}$$

$$\boxed{v>0}\ dv = d|v|<0 \Rightarrow a = \frac{dv}{dt}<0$$

$$\boxed{av<0}$$

$$\boxed{v<0}\ dv = -d|v|>0 \Rightarrow a = \frac{dv}{dt}>0$$

$$\boxed{av<0}$$

Per conoscere la velocità in funzione della posizione:
- consideriamo, per prima, un moto uniformemente accellerato dove a = cost

sappiamo che
$$\begin{cases} v(t) = v_0 + a(t-t_0) \\ x(t) = x_0 + v_0(t-t_0) + \frac{a}{2}(t-t_0)^2 \end{cases}$$

$$\boxed{v(x)?} \Rightarrow (t-t_0) = \frac{\Delta v}{a} = \frac{v(t)-v_0}{a} \quad \text{ottengo così:}$$

$$x = x_0 + v_0\left[\frac{(v-v_0)}{a}\right] + \frac{a}{2}\frac{1}{a^2}(v-v_0)^2 =$$

$V = a \cdot t = (-g) t_1$

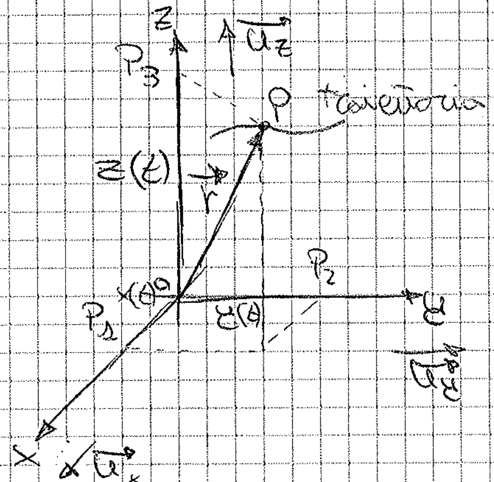
$V = -g\sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2hg} < 0$ $\quad \sqrt{\frac{2hg^{\cancel{2}}}{\cancel{g}}}$

conoscendo quindi
$h = 4m$
$g \simeq 9{,}8 \frac{m}{s^2}$

ottenendo così $t_1 = 0{,}9 sec$ e

$V(t_1) = -8{,}85 \frac{m}{s}$

MOTO IN 3D

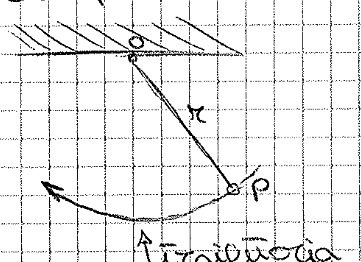


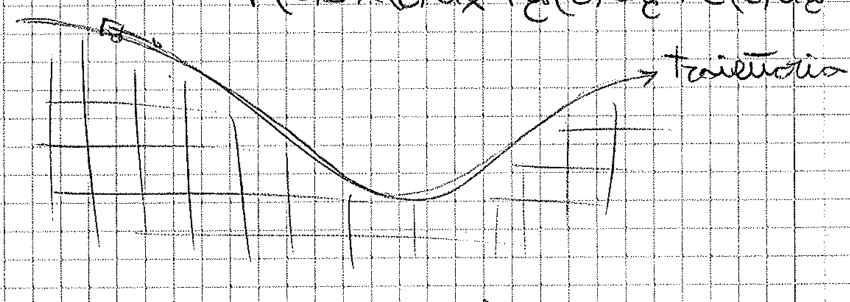
Il moto di una particella nello spazio si riduce alla descrizione di 3 moti unidimensionali! Il moto si scompone...

lungo x: $x(t)\,[P_1]$ — lungo y: $y(t)\,[P_2]$ — lungo z: $z(t)\,[P_3]$

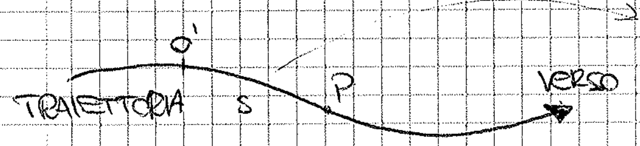
$\vec{r}(t) = x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y + z(t)\vec{u}_z$

esempi:





conoscendo la traiettoria possiamo definire il moto con una sola variabile: si fissa un verso di percorrenza e l'origine → s misura la lunghezza dell'arco di traiettoria da O' a P



$s > 0$ se P si sposta in senso della traiettoria mentre $s < 0$ se P si sposta dal verso opposto!

conoscendo $s(t)$ posso determinare in modo biunivoco il moto di P, una volta fissata la traiettoria ⟶ MOTO DI P $\Leftrightarrow$ $s(t)$

Per comprendere meglio scriviamo il vettore in componenti

$$\underline{|\vec{v}(t_0)|} = \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_0+\Delta t)+x(t_0)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t_0+\Delta t)+y(t_0)}{\Delta y}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t_0+\Delta t)+z(t_0)}{\Delta t} \right) = \left| \left(\frac{dx}{dt}(t_0), \frac{dy}{dt}(t_0), \frac{dz}{dt}(t_0) \right) \right|$$

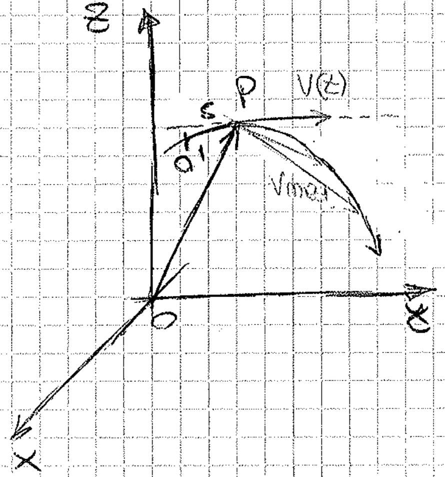
↳ velocità istantanea...

↳ derivate delle componenti nell'istante t_0

$$\vec{v}(t_0) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t_0) = \vec{u}_x v_x + \vec{u}_y v_y + \vec{u}_z v_z$$

Decomposizione dei 3 moti unidimensionali simultanei:

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt}(t_0) \; ; \; v_y(t) = \frac{dy}{dt}(t_0) \; ; \; v_z(t) = \frac{dz}{dt}(t_0)$$

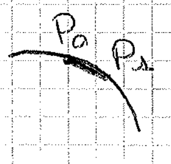


quindi:

$$\vec{v}(t_0) = \frac{dx}{dt}(t_0)\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}(t_0)\vec{u}_y + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z$$

QUINDI:

Fissiamo, prima ancora di studiare il moto, un verso di percorrenza e un'origine con l'ascissa curvilinea associata ($s(t)$). Quindi, come abbiamo visto, la posizione di P lungo la traiettoria è definita in modo univoco dall'ascissa curvilinea nel tempo ($s(t)$). Se noi prendiamo lungo alla traiettoria due punti vicini, diminuendo Δt.



Per Δt molto piccoli la lunghezza della corda che collega P_0 a P_1 si approssima alla distanza di P_0 da P_1; quindi:

$\Delta t \to 0$

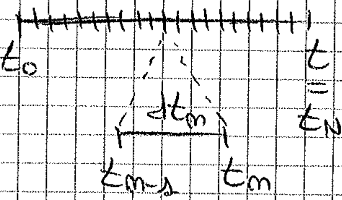
$$|\Delta \vec{r}| \simeq |\Delta s| \quad \text{da cui} \quad |\vec{v}(t)| = \lim_{\Delta t \to 0} \lim \left| \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \to 0} \left| \frac{\Delta s}{\Delta t} \right|$$

- Nota $\vec{v}(t)$ in un intervallo di tempo che va da t a t_0 possiamo ricavare il moto? (Problema inverso della cinematica)

$\vec{v}(t)$? $\Rightarrow$ MOTO

NOTO — DA DETERMINARE

e conosciamo: $\vec{v}(t)$ e $t > t_0$



dividiamo l'intervallo $[t, t_0]$ in infinite parti di Δt infinitesime in modo tale che $\vec{v}(t)$ risulti circa costante

tra t_{n-1} e t_n $\quad \vec{v}(t) \cong \vec{v}(t_n) = \vec{v}_n$

costante nell'intervallino...

$$\Delta t = t - t_0 = \sum_{n=1}^{N} dt_n = \int_{t_0}^{t} dt$$

durante ciascun intervallo possiamo definire lo spostamento come:

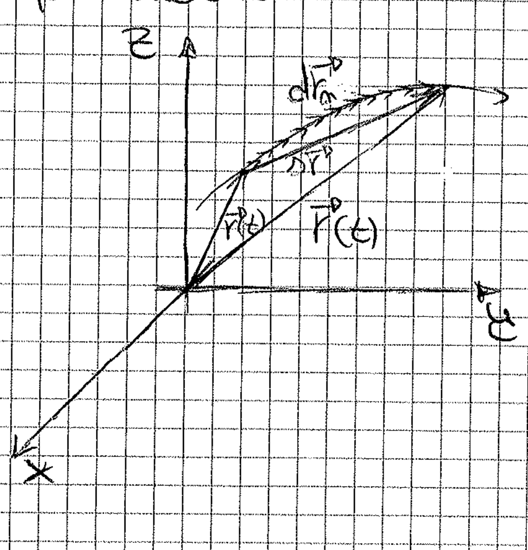
$$\boxed{d\vec{r}_n = \vec{v}_n \, dt}$$

SPOSTAMENTO ELEMENTARE

perché:

$$\Delta\vec{r} = \vec{v}_{media} \, \Delta t \quad \xrightarrow{\Delta t \to 0} \quad d\vec{r} = \vec{v}(t) \, dt$$

graficamente:



Il vettore posizione relativa ($\Delta\vec{r}$) non è altro che la somma vettoriale di tutti gli spostamenti elementari ($d\vec{r}_n$)

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) =$$
$$= d\vec{r}_1 + d\vec{r}_2 + \dots + d\vec{r}_n =$$
$$= \sum_{n=1}^{N} d\vec{r}_n = \sum_{n=1}^{N} \vec{v}(t_n) \, dt_n =$$

MOTO RETTILINEO UNIFORME

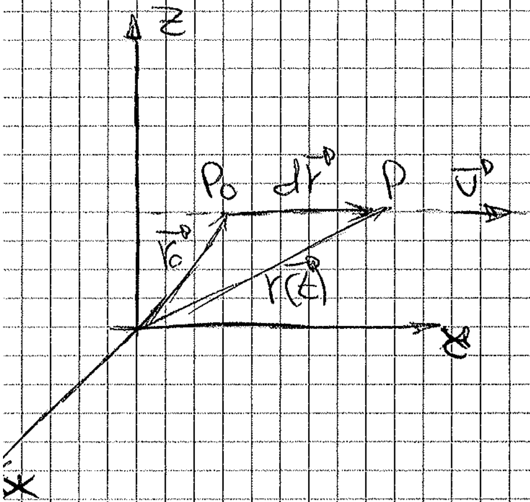
In un moto rettilineo uniforme $\vec{v}(t) = \vec{v}$ (è costante)
perciò le componenti $v_x(t)$, $v_y(t)$ e $v_z(t)$ sono costanti
non variano nel tempo → v_x, v_y, v_z

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = x(t_0) + v_x(t-t_0) \\ y(t) = y(t_0) + v_y(t-t_0) \\ z(t) = z(t_0) + v_z(t-t_0) \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{v}(t-t_0)$$

↳ moto 3D

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \vec{v}(t-t_0)$$

→ $\vec{v}$ è sempre parallelo alla direzione e alla congiungente P e P_0



$|\vec{v}|$ cost

Analogamente al moto 2D si può definire l'accelerazione media. Prendendo $t_1 > t_0$

$$\vec{a}_{media} = \frac{\vec{v}(t_1) - \vec{v}(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{\vec{v}(t_0+\Delta t) - \vec{v}(t_0)}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} =$$

$$= \left(\frac{\Delta v_x}{\Delta t}, \frac{\Delta v_y}{\Delta t}, \frac{\Delta v_z}{\Delta t}\right)$$

→ rapporti incrementali $v_x(t)$, $v_y(t)$, $v_z(t)$

Per $\Delta t \to 0$

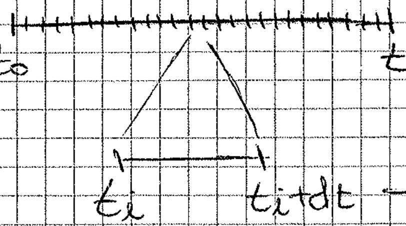
$$\vec{a}(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_{medio} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t_0+\Delta t) - v(t_0)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

↳ velocità istantanea con componenti:

$$\boxed{a(t_0) = \left(\frac{dv_x}{dt}(t_0), \frac{dv_y}{dt}(t_0), \frac{dv_z}{dt}(t_0)\right)}$$

supponiamo che sia noto il vettore accelerazione in ogni istante con i due tempi t e t_0 dove:

$t > t_0$



→ in questo intervallo infinitesimo $a(t)$ è costante

$\vec{a}(t) = \vec{a}(t_i) = \vec{a}_i$ per $N \to \infty$

(come detto prima)

$$\Delta t = \sum_{i=1}^{N} dt_i = \int_{t_0}^{t} dt'$$

conosciamo l'accelerazione, quindi:

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}(t) - \vec{v}(t_0) = \sum_{i=1}^{N} d\vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{a}(t_i)\, dt_i = \boxed{\int_{t_0}^{t} \vec{a}(t')\, dt'}$$

questo implica che $\boxed{\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t')\, dt'}$

ora proviamo a scrivere l'integrale sotto forma di componenti

$$\int_{t_0}^{t} \vec{a}(t')\, dt' = \sum_{i=1}^{N} \vec{a}(t_i)\, dt_i =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{N} a_x(t_i)\, dt_i\right) \vec{u_x} + \left(\sum_{i=1}^{N} a_y(t_i)\, dt\right) \vec{u_y} +$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^{N} a_z(t_i)\, dt_i\right) \vec{u_z} =$$

$$= \left(\int_{t_0}^{t} a_x(t')\, dt'\right) \vec{u_x} + \left(\int_{t_0}^{t} a_y(t')\, dt'\right) \vec{u_y} + \left(\int_{t_0}^{t} a_z(t')\, dt'\right) \vec{u_z}$$

Possiamo così scomporre in:

$$\begin{cases} v_x(t) = v_x(t_0) + \int_{t_0}^{t} a_x(t')\, dt' \\ v_y(t) = v_y(t_0) + \int_{t_0}^{t} a_y(t')\, dt' \\ v_z(t) = v_z(t_0) + \int_{t_0}^{t} a_z(t')\, dt' \end{cases}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 422

$$v_z(t)=v_z(t_0)+\int_{t_0}^{t} a_z(t')\,dt' \quad \text{se} \quad \begin{bmatrix} a_z(t)=0 & \forall t \\ v_z(t)=0 & \forall t \end{bmatrix}$$

quali sono le condizioni per i quali una particella abbia un moto all'interno di un piano non parallelo a XY

1) la particella deve appartenere al piano $\forall t$

$\Updownarrow$

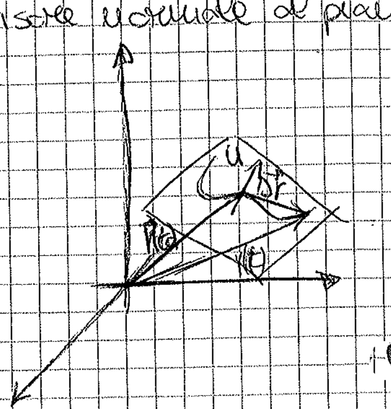
u = versore normale al piano

NB: il moto non ha componenti lungo la direz. u, il versore deve essere perpendicolare a $\Delta\vec{r}$ cioè al piano

$$\Delta\vec{r}(t)\perp u \quad \forall t$$

$\Updownarrow$

$$\Delta\vec{r}(t)\cdot\vec{u}=0$$



$$\Delta\vec{r}(t)=\int_{t_0}^{t}\vec{v}(t')\,dt'$$

$$0=\Delta\vec{r}(t)\cdot\vec{u}=\left(\int_{t_0}^{t}\vec{v}(t')\,dt'\right)\cdot\vec{u}=\int_{t_0}^{t'}\vec{v}(t')\cdot\vec{u}\,dt' \Longleftrightarrow$$

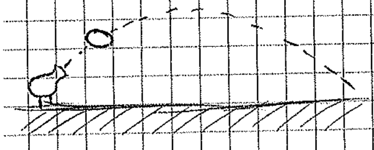
$$\Longleftrightarrow \vec{v}(t)\cdot\vec{u}=0 \quad \forall t$$

$$\vec{v}(t)=\vec{v}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\vec{a}(t')\,dt' \Longrightarrow \vec{v}(t_0)\cdot\vec{u}+\int_{t_0}^{t_1}\vec{a}(t')\cdot\vec{u}\,dt'=0$$

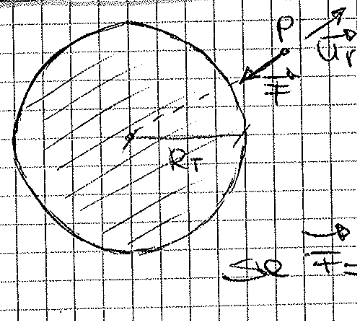
$\Updownarrow$

condizioni necessarie sufficienti affinché un moto avvenga lungo un piano $\rightarrow$ $\boxed{\vec{v}(t_0)\cdot\vec{u}=0\ ;\ \vec{a}(t)\cdot\vec{u}=0}$

esempio: (STUDIO DI UN MOTO BALISTICO)



- supponiamo che l'attrito dell'aria sia trascurabile
- la quota deve essere trascurabile rispetto al raggio della terra



$$\vec{F}=-\frac{GM_T m}{r^2}\vec{u}_r=-\frac{GM_T m\vec{r}}{r^3}$$

$$|\vec{F}|=\frac{GM_T m}{r^2}$$

$$\text{se } \vec{F}=m\vec{a}\rightarrow\vec{a}=-\frac{GM_T}{r}\vec{u}_r=\vec{a}(\vec{r})$$

da cui

$x(t) = x(0) + V_{0x} t = V_{0x} t$

$z(t) = z(0) + V_{0z} t - \frac{g t^2}{2} = V_{0z} t - \frac{g t^2}{2}$ } equazione parametrica di una parabola

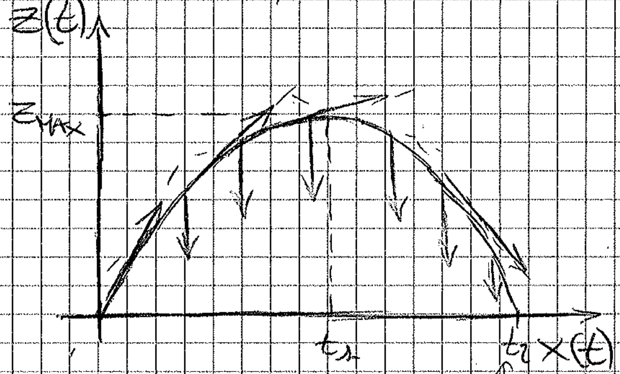
$t = \frac{x}{V_{0x}}$ $\quad z(x) = V_{0z} \frac{x}{V_{0x}} - \frac{g}{2} \frac{x^2}{(V_{0x})^2}$

quale è l'angolo α in cui ho la gittata più lunga?

gittata → lunghezza percorsa su $x(t)$

$z(x) = \tan(\alpha) x - \frac{g}{2 V_0^2 \cos^2 \alpha}$

posso scrivere la posizione $z(x)$ in funzione dell'inclinazione (α)



In ogni istante la velocità è tangente alla curva e in ogni istante l'accelerazione va verso il basso

$v(t) = (V_x(t), V_z(t))$

$V_x(t) = V_x(0) = V_{0x}$

$V_z(t) = V_{0z} - g t$

l'altezza massima a t_1 è:

$V_z(t) = V_{0z} - g t_1 = 0$

$t_1 = \frac{V_{0z}}{g} = \frac{V_0 \sin\alpha}{g}$

$z_{MAX} = z(t_1) = \frac{V_{0z}^2}{g} - \frac{g V_{0z}^2}{2g^2} = \frac{V_{0z}^2}{2g^2} = \frac{V_0^2 \sin^2\alpha}{2g^2}$

la gittata è:

$d = x(t_2) - x(0) = x(t_2)$ → istante in cui tocca a terra

per $z(t_2) = 0 \Leftrightarrow V_{0z} t_2 - \frac{g t_2^2}{2} = 0 \rightarrow t_2 \left(V_{0z} - \frac{t_2 g}{2} \right)$

le soluzioni dell'equazione sono:

$t_2 = 0 \rightarrow$ che non ci interessano

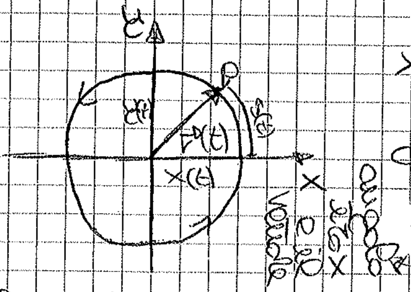
MOTO CIRCOLARE UNIFORME

$x(t) = R\cos(\omega t)$ dove ω è la velocità angolare (cost)

$y(t) = R\,\text{sen}(\omega t)$ Determinare $\vec{a}$ e $\vec{v}$ e le loro proprietà

1) Il moto è periodico di periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ s

2) La traiettoria è circolare:



$x^2(t) + y^2(t) = |\vec{r}(t)|^2$ → raggio del cerchio $R^2 = \text{cost}$

con $s(t)$ → ascissa curvilinea

$s(t) = \varphi(t) R$ → conviene utilizzare un sistema di coordinate polari $(\varphi(t), R)$

dalla relazione generale deduciamo che:

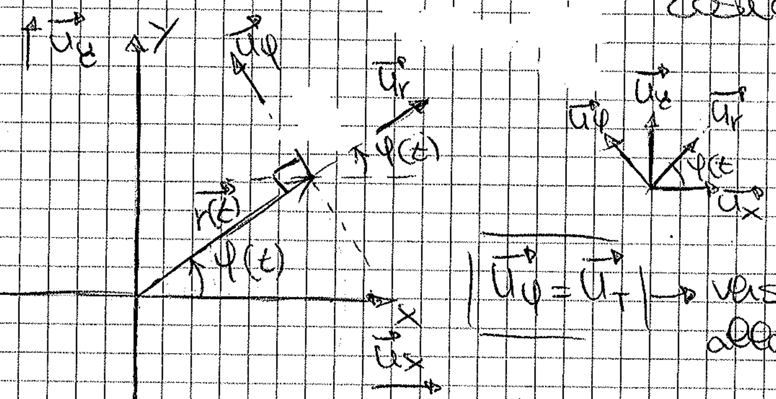
coordinate cartesiane

$$\begin{cases} x(t) = r(t)\cos(\varphi(t)) \\ y(t) = r(t)\,\text{sen}(\varphi(t)) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r(t) = R \\ \varphi(t) = \omega t \end{cases}$$

1 solo parametro: posizione angolare

PIÙ SEMPLICI → coordinate polari

3) La derivata rispetto al tempo della posizione angolare definisce la velocità angolare (che in questo caso è costante)



$$\vec{v}(t) = \frac{d\varphi}{dt} = \text{cost.}$$

circolare uniforme

$\vec{u}_\varphi = \vec{u}_T$ → versore con tangente alla traiettoria

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \cos(\varphi(t))\,\vec{u}_x + \text{sen}(\varphi(t))\,\vec{u}_y \\ \vec{u}_\varphi = -\text{sen}(\varphi(t))\,\vec{u}_x + \cos(\varphi(t))\,\vec{u}_y \end{cases}$$

$\vec{r}(t) = R\cos(\omega t)\,\vec{u}_x + R\,\text{sen}(\omega t)\,\vec{u}_y$ → vettore posizione

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(R\cos(\omega t)\,\vec{u}_x) + \frac{d}{dt}(R\,\text{sen}(\omega t)\,\vec{u}_y) =$$

versore costante u_x e u_y

$$= \frac{d}{dt}(R\cos(\omega t))\,\vec{u}_x + \frac{d}{dt}(R\,\text{sen}(\omega t))\,\vec{u}_y =$$

calcolo $\vec{v}(t)$

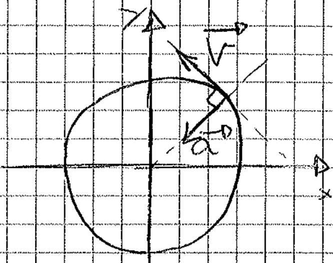
$$= -\omega R\,\text{sen}(\omega t)\,\vec{u}_x + \omega R\cos(\omega t)\,\vec{u}_y = \omega R\,\vec{u}_\varphi = \omega R\,\vec{u}_T$$

Teniamo così:

$$\vec{v} = R\omega\vec{u}_\varphi$$

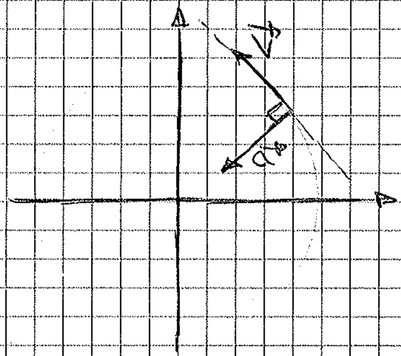
$$\vec{a} = -R\omega^2\vec{u}_r$$

$$\vec{r}(t) = R\vec{u}_r$$



$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = \sqrt{R^2\omega^2\vec{u}_\varphi\cdot\vec{u}_\varphi} = \sqrt{R^2\omega^2} = R|\omega| = \text{costante}$$

→ da cui deduciamo che la velocità non varia in modulo (→ UNIFORME) ma l'accelerazione non è nulla poiché la velocità varia in direzione. Si dimostra così che l'accelerazione è perpendicolare alla velocità:



$$\vec{v}(t) \quad |\vec{v}(t)| = \text{costante}$$

$$\vec{v}(t)\cdot\vec{v}(t) = |\vec{v}|^2 = \text{costante} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\vec{v}(t)\cdot\vec{v}(t)\right) = 0 =$$

$$= \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)\cdot\vec{v} \iff \frac{d\vec{v}}{dt} \perp \vec{v} \quad \forall t$$

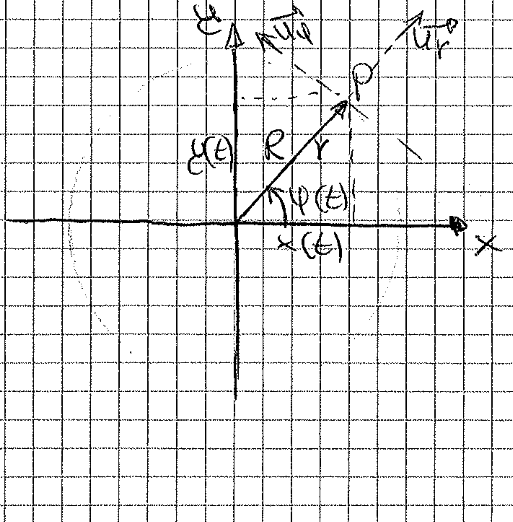
(→ perché è "0")

la derivata di un prodotto tra vettori è la derivata di prodotti scalari applicando la regola del prodotto.

quindi:

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \perp \vec{r}} \quad e \quad \boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \perp \vec{v}}$$

generalizzando ad un MOTO CIRCOLARE GENERICO



In coordinate polari:

$$\begin{cases} r(t) = R \\ \varphi(t) \end{cases}$$ → dipende dal tempo in modo arbitrario

In coordinate cartesiane

$$\begin{cases} x(t) = R\cos(\varphi(t)) \\ y(t) = R\sin(\varphi(t)) \end{cases}$$

RIASSUMENDO:

$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_C$

$\vec{a}_T = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T = R\frac{d\omega}{dt}\vec{u}_\varphi = R\alpha\vec{u}_\varphi$ accelerazione tangenziale dovuta dalla variazione in modulo di $\vec{v}$

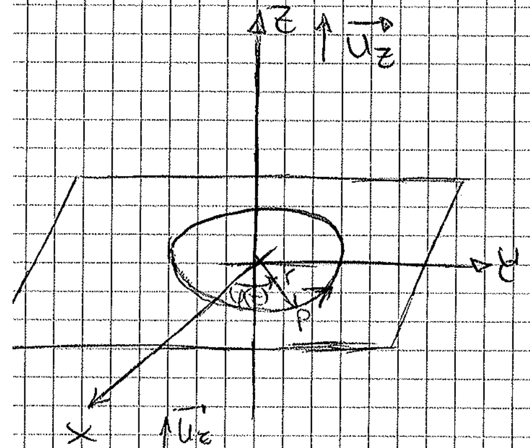
$\vec{a}_C = -R\omega^2\vec{u}_r$ accelerazione centripeta dovuta alla variazione in direzione di $\vec{v}$

NB se $v(t) = \text{cost} \Rightarrow \frac{d\omega}{dt} = \text{cost}$

$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\omega}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{a}_T = 0$

definiamo ora un vettore molto utile: il VETTORE VELOCITÀ ANGOLARE! DIREZIONE PERPENDICOLARE al piano

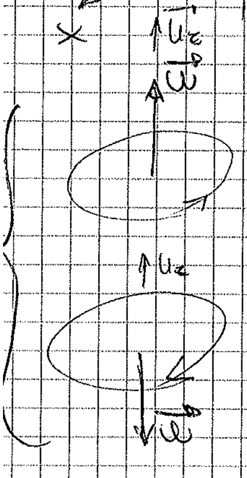
considerando che il moto circolare avviene su un piano



$\boxed{\vec{\omega} = \omega\vec{u}_z}$ VETTORE VELOCITÀ ANGOLARE

se il senso è antiorario ($\omega > 0$) ~~[illegible]~~ $\vec{\omega}$ ha verso concorde a u_z

se il senso è orario ($\omega < 0$) $\vec{\omega}$ ha senso discorde a $\vec{u}_z$



$\omega > 0 \quad \vec{\omega} = \omega\vec{u}_z$

$\omega < 0 \quad \vec{\omega} = \omega\vec{u}_z$

In coordinate cartesiane il vettore

$\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$

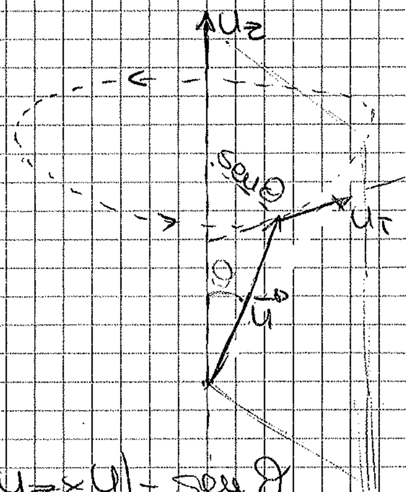
Nelle tre dimensioni:

$\vec{r} = (R\cos(\varphi(t)), R\,\text{sen}(\varphi(t)), 0)$; $\omega(0, 0, \omega)$

facendo il prodotto vettoriale di $\vec{\omega} \times \vec{r}$

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \det \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ 0 & 0 & \omega \\ R\cos\varphi & R\,\text{sen}\varphi & 0 \end{vmatrix} = \vec{u}_x \begin{vmatrix} 0 & \omega \\ R\,\text{sen}\varphi & 0 \end{vmatrix} - u_y \begin{vmatrix} 0 & \omega \\ R\cos(\varphi(t)) & 0 \end{vmatrix} +$$

$$\boxed{\frac{du}{dt} = \omega \operatorname{sen}\theta \; \vec{u_T}}$$

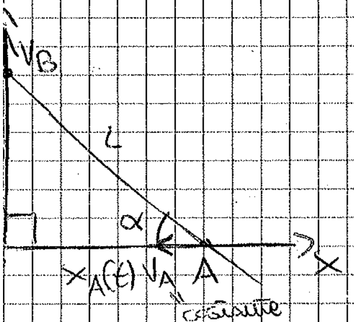


$u_z \times \vec{u} = \operatorname{sen}\theta \; \vec{u_T}$ $\qquad |u_z \times u| = \operatorname{sen}\theta$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \omega(\vec{u_z} \times \vec{u}) = (\omega \vec{u_z}) \times \vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{u}$$

↳ quindi ritroviamo $\vec{v}$

ESERCIZIO:



A e B sono due punti vincolati ad una guida e i due punti sono collegati da un asta rigida. Trovare la velocità di B.

La prima cosa da fare è definire un sistema di coordinate; il miglior sistema è quello con meno variabili!

relazione di vincolo per l'asta $\quad \alpha = 60°$

$L^2 = x_A(t)^2 + y_B(t)^2 \quad \forall t \qquad V_A = \frac{dx_A}{dt} = \text{costante}$

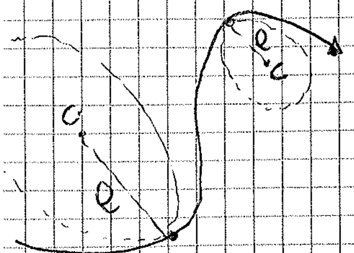
$0 = 2V_A x_A + 2 V_B y_B \qquad V_B = \frac{dy_B}{dt} = \text{costante}$

$$V_B = -\frac{x_A}{y_B} V_A = -\frac{1}{\tan(\alpha)} V_A = -\frac{1}{\tan(60°)} V_A = -\frac{1}{\sqrt{3}} V_A \quad V_A > 0$$

Determiniamo ora l'accelerazione di B, Dato $x_A(t_0)$:

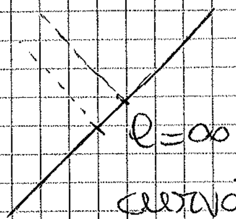
$a_B = \frac{dV_B}{dt} \qquad y_B = \sqrt{L^2 - x_A(t)^2}$

$x_A(t) = x_A(t_0) + V_A(t - t_0)$

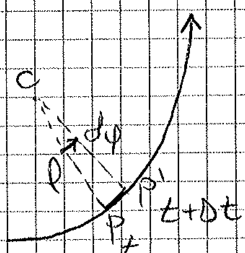


curvatura $\sim \frac{1}{\rho}$ dove ρ è il raggio!

per una traiettoria diritta (su una retta) ha zero curvatura



curvatura $= \frac{1}{\infty} = 0$



$$\boxed{ds = \rho\, d\varphi}$$

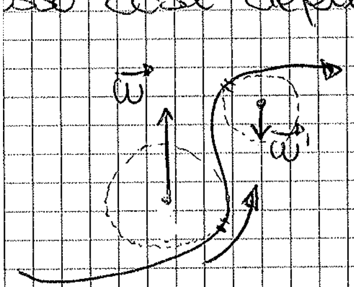
$d\varphi$ è positivo se mi muovo nel verso positivo

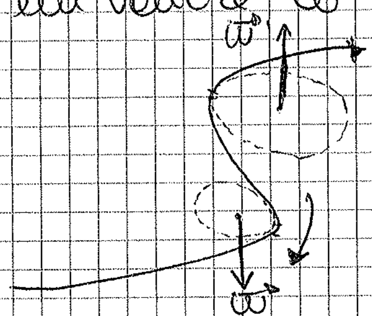
$d\varphi$ è negativo se mi muovo nel verso negativo

$$|v(t)| = \frac{ds}{dt} = \left|\rho \frac{d\varphi}{dt} = \rho\omega\right|$$

dove $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$

(Po)sso così definire un vettore $\vec{\omega}$





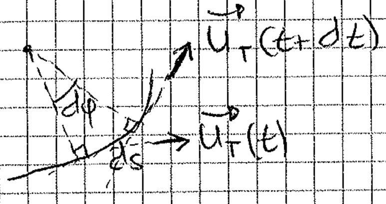
$\omega < 0$ → perché si muove nel verso opposto

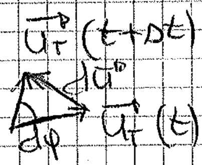
$\omega = \frac{d\varphi}{dt} > 0$ → poiché si muove nel verso fissato sulla traiettoria

(D)eterminiamo ora l'accelerazione: se $\vec{v} = v(t)\,\vec{u}_T(t)$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{dv}{dt}\right)\vec{u}_T(t) + v(t)\frac{d\vec{u}_T}{dt}$$

(in questo caso si deriva pure il versore perché varia anche lui nel tempo)

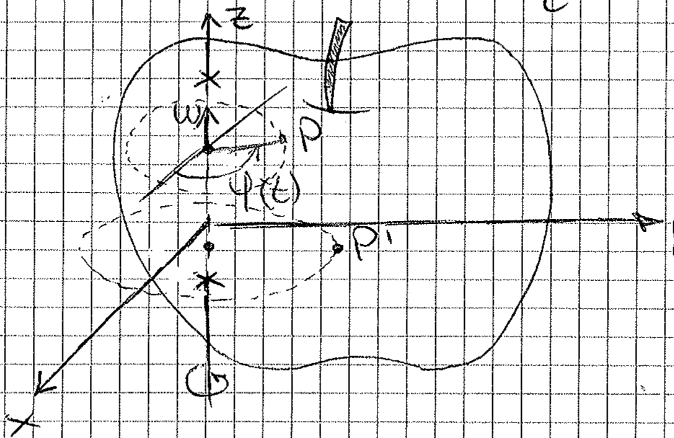




SISTEMA RIGIDO

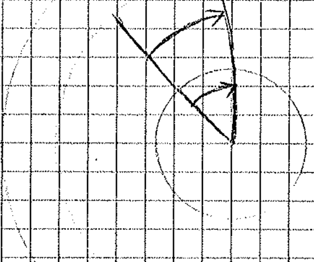
→ sistema di punti che si muovono nello spazio mantenendo una stessa distanza fra loro

[pr]endiamo come sistema rigido una mela e [fi]ssiamo un sistema di assi ortogonale



$\vec{\omega}$ = vettore velocità angolare (unico, poiché la velocità è uguale in tutti i punti.

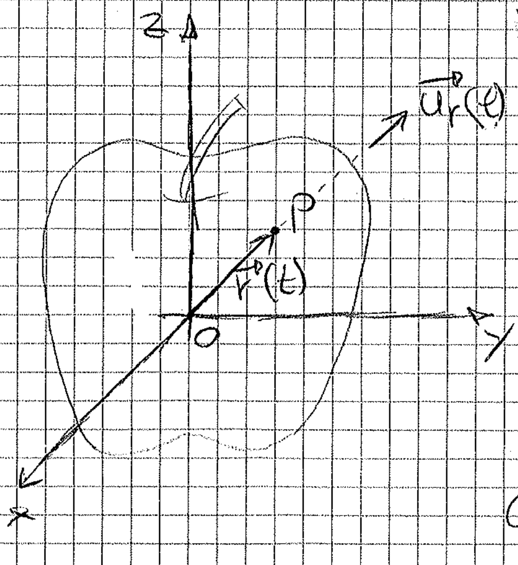
[Se] un punto P ruota allora tutti gli altri punti [de]vono ruotare di un angolo uguale $(\varphi(t))$. Mantenendo la distanza reciproca uguale.



La posizione di un sistema rigido $\forall t$ è definita da una posizione angolare $\varphi(t)$ in ogni suo punto

Fissata la posizione angolare di un punto ho fissato la posizione degli altri punti.

[Ve]diamo ora di calcolare la velocità di un punto



$$\boxed{\vec{r}(t) = r\,\vec{u}_r(t)}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\,\vec{u}_r) =$$

$$= r\left(\frac{d}{dt}\vec{u}_r\right) = r(\vec{\omega} \times \vec{u}_r) = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

vale per ogni punto

$(t) = r'(t) + \vec{oo'}(t)$

$(t) = x(t)\vec{u_x} + y(t)\vec{u_y} + z(t)\vec{u_z}$

$(t) = x'(t)\vec{u_x} + y'(t)\vec{u_y} + z'(t)\vec{u_z}$

$= t'$ → il tempo è ASSOLUTO

$\frac{d}{dt}\vec{oo'}(t) = \vec{V}(t)$ → velocità del punto O' rispetto ad O

$$\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{dx'}{dt}\vec{u_x} + \frac{dy'}{dt}\vec{u_y} + \frac{dz'}{dt}\vec{u_z} \quad \boxed{\text{in } S'}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{u_x} + \frac{dy}{dt}\vec{u_y} + \frac{dz}{dt}\vec{u_z} \quad \boxed{\text{in } S}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}' + \vec{V} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \frac{d}{dt}\vec{oo'}$$ LEGGE DI ADDIZIONE DELLE VELOCITÀ

elocità misurata in S' — velocità del punto O'

in S' $\quad \vec{a}' = \frac{d\vec{v}'}{dt'} = \frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{dv'_x}{dt}\vec{u_x} + \frac{dv'_y}{dt}\vec{u_y} + \frac{dv'_z}{dt}\vec{u_z}$

TEMPO ASSOLUTO

in S $\quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{u_x} + \frac{dv_y}{dt}\vec{u_y} + \frac{dv_z}{dt}\vec{u_z}$

TEMPO ASSOLUTO

$$\vec{a}_{o'} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2}{dt^2}\vec{oo'}$$ (accelerazione di O' rispetto ad O)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv'}{dt} + \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{a}' + \vec{a}_{o'}$$

In conclusione si ha:

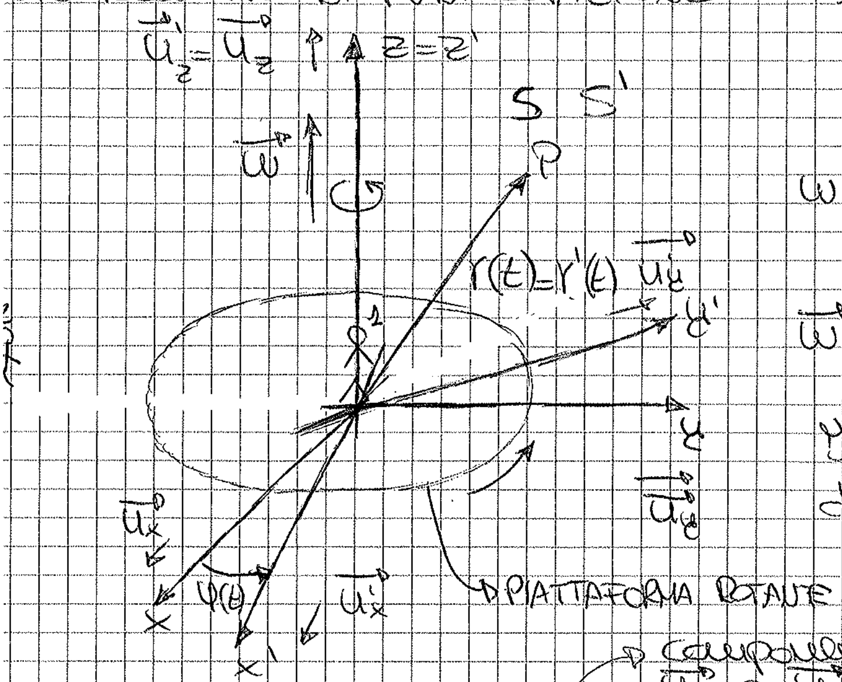
$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$$
$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{o'}$$

dove $\vec{V}$ è la VELOCITÀ DI TRASCINAMENTO
e dove $\vec{a}_{o'}$ è la ACCELERAZIONE DI TRASCINAMENTO

(M)OTO RELATIVO DI PURA ROTAZIONE

1 → osservatore sulla piattaforma

2 → osservatore nel laboratorio



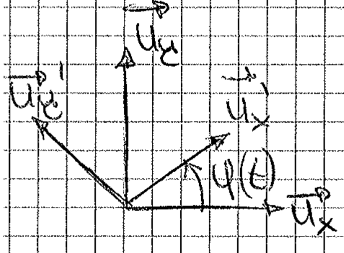
$\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$ $\quad \vec{\omega}$ = vettore velocità angolare

$\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$

Il moto di rotazione è definito da $\varphi(t)$

γ

componenti di $\vec{u}_x'$ e $\vec{u}_y'$ rispetto $\vec{u}_y$ e $\vec{u}_x$



$$\begin{cases} \vec{u}_x' = \cos(\varphi(t))\,\vec{u}_x + \operatorname{sen}(\varphi(t))\,\vec{u}_y \\ \vec{u}_y' = -\operatorname{sen}(\varphi(t))\,\vec{u}_x + \cos(\varphi(t))\,\vec{u}_y \end{cases}$$

$\vec{u}_z = \vec{u}_z'$

(e) faccio la derivata:

$$\frac{d\vec{u}_x'}{dt} = -\omega \operatorname{sen}(\varphi(t))\,\vec{u}_x + \omega\cos(\varphi(t))\,\vec{u}_y$$

$\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$

$$\vec{\omega} \times \vec{u}_x = (\omega \vec{u}_z) \times (\cos(\varphi(t))\,\vec{u}_x + \operatorname{sen}(\varphi(t))\,\vec{u}_y) =$$

$$= \omega\cos(\varphi(t))\,\vec{u}_z \times \vec{u}_x + \omega \operatorname{sen}(\varphi(t))\,\vec{u}_z \times \vec{u}_y =$$

$$= \omega\cos(\varphi(t))\,\vec{u}_y - \omega\operatorname{sen}(\varphi(t))\,\vec{u}_x$$

(da) cui

$$\boxed{\frac{d u_x}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{u}_x}$$

$$\frac{d\vec{u}_y'}{dt} = -\omega\cos(\varphi(t))\,\vec{u}_x - \omega\operatorname{sen}(\varphi(t))\,\vec{u}_y = \vec{\omega} \times \vec{u}_y'$$

$$\vec{\omega} \times \vec{u}_y' = -\omega\operatorname{sen}(\varphi(t))\,\vec{u}_z \times \vec{u}_x + \omega\cos(\varphi(t))\,\vec{u}_z \times \vec{u}_y$$

$\dfrac{d\vec{u}_z'}{dt} = \vec{0} = \vec{\omega} \times \vec{u}_z$ → direzione dell'asse invariato

...riviamo:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{a} = \left(\frac{d\vec{v}'}{dt}\right) + \frac{d}{dt}(\omega \times \vec{r}) =$$

$$= \left(\vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}'\right) + \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt}}_{\vec{\alpha}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} =$$

$$= \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\alpha} \times \vec{r} + \omega \times (\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}) =$$

$$= \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{a}' + \vec{a}_{co} + \vec{a}_T$$

→ $\vec{a}_{co} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$ → ACCELERAZIONE DI CORIOLI

→ $\vec{a}_T = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \omega \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ → ACCELERAZIONE DI TRASCINAMENTO

$$\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$$

$$\alpha = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\vec{u}_z = \alpha \vec{u}_z$$

...accelerazione di TRASCINAMENTO dipende solo dalla posizione occupata ...lla particella ($\vec{r}$) e dal moto di S' rispetto ad S.
...uindi l'accelerazione di TRASCINAMENTO e' quell'accelerazione ... ha qualsiasi punto solidale ad S' rispetto ad S.

...accelerazione di CORIOLI dipende sia dal moto relativo ... S' rispetto a noi ma anche dalla velocita' della particella ...spetto ad S'.

...e' l'accelerazione misurata dall'osservatore sulla piattaforma

$$=\vec{r}'+\vec{OO'} \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \frac{d\vec{OO'}}{dt} = \vec{v}' + \vec{\omega}\times\vec{r}' + \vec{V}$$

$\frac{d\vec{OO'}}{dt} \to$ velocità di $O' \to \vec{V}$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega}\times\vec{r}' + \vec{V} = \vec{v}' + \vec{v}_T$$

$$\vec{v}_T = \vec{\omega}\times\vec{r}' + \vec{V}$$

$\vec{v}_T \to$ velocità che ha qualsiasi punto fisso rispetto ad S' vista da S

$\vec{V}$: traslatorio assieme ad O'

$\vec{\omega}\times\vec{r}'$: componente di istantanea rotazione assieme ad un asse per O'

versori costanti

$$\vec{a}' = \left(\frac{d\vec{v}'}{dt}\right)_{S'} = \frac{dv_x'}{dt}\vec{u}_x + \frac{dv_y'}{dt}\vec{u}_y + \frac{dv_z'}{dt}\vec{u}_z$$

faccio le derivate delle componenti della velocità corrispondente ma non dei versori

$$\vec{a} = \left(\frac{d\vec{v}'}{dt}\right)_S = \frac{d}{dt}\left(v_x'\vec{u}_x' + v_y'\vec{u}_y' + v_z'\vec{u}_z'\right) =$$

$$= \left[\left(\frac{d}{dt}v_x\right)\vec{u}_x' + \left(\frac{d}{dt}v_y\right)\vec{u}_y' + \left(\frac{d}{dt}v_z\right)\vec{u}_z'\right] +$$

$$+ v_x\,\vec{\omega}\times\vec{u}_x' + v_y'\,\vec{\omega}\times\vec{u}_y' + v_z\,\vec{\omega}\times\vec{u}_z' =$$

$$= \vec{a}' + \vec{\omega}\times\vec{v}'$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \left(\vec{\omega}\times\vec{r}'\right) + \vec{V}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{d\vec{v}'}{dt}\right)_{S'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}' + \omega\times\left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right) + \left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)$$

$\frac{d\vec{V}}{dt} \to \vec{a}_{O'}$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{\omega}\times\vec{v}' + \vec{\alpha}\times\vec{r}' + \vec{\omega}\times\left(\vec{v}' + \vec{\omega}\times\vec{r}'\right) + \vec{a}_{O'} =$$

$$= \vec{a}' + \vec{a}_{co} + \vec{a}_T \quad \text{dove } \vec{a}_{co} = 2\vec{\omega}\times\vec{v}'$$

$$\text{e} \quad \vec{a}_T = \vec{a}_{O'} + \left(\vec{\alpha}\times\vec{r}' + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}'\right)\right)$$