NUMERO: 901

DATA: 12/03/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Moi

MATERIA: Analisi Matematica I

Prof. Camporesi

EQUAZIONI DIFFERENZIALI (Riassunto)

Un'equazione differenziale (ordinaria) di ordine n è una relazione che lega tra loro una funzione $y = y(x)$, le sue derivate $y', y'', \dots, y^{(n)}$ fino all'ordine n incluso e la variabile indipendente x. Nella forma più generale la scriviamo come:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \qquad \text{dove } F(t_1, t_2, \dots, t_{n+2}) \text{ è una funz. di } n+2 \text{ variabili}$$

L'eq. diff. si dice in forma normale se è possibile esplicitare la $y^{(n)}$ in funzione delle altre variabili:

$$y^{(n)} = G(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \qquad (1)$$

Una soluzione di (1) è per def. una funzione $y = y(x)$, $y: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile sull'intervallo I almeno n-volte e tale che valga

$$y^{(n)} = G(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \quad \forall x \in I$$

Per $n = 1$ si ha l'eq. diff. del 1° ordine in forma normale:

$$y' = G(x, y) \qquad (2)$$

Una soluzione è una $y: I \to \mathbb{R}$ tale che

$$y' = G(x, y(x)) \quad \forall x \in I$$

In generale la $y(x)$ è incognita.

Si chiama <u>integrale generale</u> o soluzione generale l'insieme di <u>tutte</u> le possibili soluzioni di una data eq. diff.

Una soluzione specifica si chiama <u>integrale particolare</u> o soluzione particolare.

Un'eq. diff. di ordine n ha come integrale generale una famiglia di funzioni $y = y(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ dipendente da n costanti arbitrarie (parametri) $c_1, c_2, \dots, c_n$ al variare delle quali si ottiene l'integrale generale.

Per selezionare una soluzione particolare si impongono delle <u>condizioni iniziali</u> con cui si specifica il valore di $y(x_0)$, e delle sue derivate in x_0 fino alla $n-1$esima.

Risolvere il <u>problema di Cauchy</u> in forma normale di ordine n:

$$y^{(n)} = G(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Questa mi da y in funzione di X; conoscendo l'inversa B^{-1} di B ottengo

$$y = B^{-1}(A(x) + c)$$

TEOREMA 1 (di Peano)

Se $a(x)$ è continua in un intorno di un pto. $x_0 \in \mathbb{R}$ e se $b(y)$ è continua in un intorno di un pto $y_0 \in \mathbb{R}$, allora il problema di Cauchy a variabili separabili

$$\begin{cases} y' = a(x)\, b(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ha almeno una soluzione definita in un intorno di x_0 (può non essere unica)

TEOREMA 2

Se $a(x)$ è continua in un intorno di x_0 e $b(y)$ è di classe C^1 in un intorno di y_0 allora il problema di Cauchy a variabili separabili

$$\begin{cases} y' = a(x)\, b(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ha una e una sola soluzione in un intorno di x_0

DEFINIZIONE (equazioni lineari differenziali di 1° ordine)

① $\boxed{y' = a(x)\, y + b(x)}$ dove $a(x), b(x)$ funzioni continue su un comune intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$; $a, b \in C^0(I)$

Si dicono lineari perché dipendono da y, y' in modo lineare, cioè riscritte nella forma seguente:

$$y' - a(x)\, y = b(x) \qquad \text{cioè} \qquad \frac{d}{dx} y - a(x)\, y = b(x)$$

ovvero riscritte in forma operatoriale $\left(\frac{d}{dx} - a(x)\right) y = b(x)$

dove $\frac{d}{dx} : y \longrightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}$ cioè $Ly = y' - a(x)\, y \Rightarrow Ly = b(x)$

dove $L = \frac{d}{dx} - a(x)$ è un operatore differenziale lineare cioè

$$L(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 L y_1 + c_2 L y_2 \qquad \forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{R},\ \forall \text{ coppia di funz. derivabili } y_1, y_2$$

Se $b(x) = 0 \quad \forall x \in I$, l'eq. diff. ② $\boxed{y' = a(x)\, y}$ si dice eq. omogenea associata

Se $b(x) \neq 0$, la ① si dice non omogenea e $b(x)$ si dice termine forzante

L'integrale generale dell'omogenea ($b(x) = 0$) $y'(x) = a(x)\, y$ è

$$y(x) = k\, e^{A(x)} \qquad (k \in \mathbb{R},\ A(x) = \text{primitiva } \forall \text{ di } a(x) \text{ su } I)$$

[attenzione: è anche l'omogenea una eq. diff. a variabili separabili]

TEOREMA

L'integrale generale dell'equazione omogenea $Ly = f(x)$ ① è la somma dell'integrale dell'eq. omogenea associata $Ly = 0$ e di una soluzione qualsiasi particolare y_p della ①, cioè:

$$y(x) = y_{om}(x) + y_p(x)$$

Inoltre se $y_1, y_2, \dots, y_k$ risolvono l'omogenea allora ogni loro combinazione lineare $c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_k y_k$ ($c_j \in \mathbb{R}$) risolve anch'essa l'omogenea

TEOREMA (eq. lineari a coefficienti costanti di secondo grado)

1) L'integrale generale reale dell'eq. diff. $y'' + ay' + by = 0$ ($a, b \in \mathbb{R}$) è

$$y_{om}(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \qquad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ e } x \in \mathbb{R} \ \forall$$

$\forall$ y_1, y_2 detti un sistema fondamentale di soluzioni sono

a) $\Delta > 0 \Rightarrow y_1 = e^{\lambda_1 x}$ $\quad y_2 = e^{\lambda_2 x}$ $\quad$ dove $\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\Delta} =$

$=$ radici reali di $p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$, il polinomio caratteristico

b) $\Delta = 0 \Rightarrow y_1 = e^{\lambda_1 x}$ $\quad y_2 = x e^{\lambda_1 x}$ $\quad$ dove $\lambda_1 = -\frac{a}{2}$ = radice doppia di $p(\lambda)$

c) $\Delta < 0 \Rightarrow y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ $\quad$ dove $\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm i\beta$ sono le radici

$y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$ $\quad$ complesse coniugate di $p(\lambda)$ con

$$\alpha = -\frac{a}{2} \ ; \ \beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$$

Nei casi a), c) l'integrale generale complesso è

$$y^{\mathbb{C}}_{om}(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \qquad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

) Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(x_0) = y_0 \ , \ y'(x_0) = y'_0 \end{cases} \qquad \text{con } x_0 \in \mathbb{R} \text{ e } y_0, y'_0 \in \mathbb{R} \text{ arbitrari}$$

ha soluzione unica definita su tutto $\mathbb{R}$ e di classe C^∞, ed è in particolare per

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(x_0) = 0, \ y'(x_0) = 0 \end{cases} \Rightarrow y(x) = 0 \quad \forall x$$

EQUAZIONE NON OMOGENEA: Caso Generale

$Ly = y'' + ay' + by = f(x)$ dove $f(x)$ = funzione continua qualsiasi su I, $f \in C^0(I)$

Si chiama risposta impulsiva dell'eq. omogenea associata $Ly=0$ la soluzione $g(x)$ del problema:

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

vale allora il seguente

TEOREMA:

Sia $g(x)$ = risposta impulsiva e sia $x_0 \in I$ fissato. Allora la funzione

$$y_p(x) = \int_{x_0}^{x} g(x-t) f(t)\, dt$$

detto integrale di convoluzione

è la soluzione particolare della (1) tale che: $y_p(x_0) = 0 = y'_p(x_0)$

Inoltre date $y_0, y'_0 \in \mathbb{R}$ la soluzione di

$$\begin{cases} Ly = f(x) \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

è: $y(x) = y_{om}(x) + y_p(x)$

Dove y_p è come sopra e y_{om} risolve: $\begin{cases} Ly = 0 \\ y(x_0) = y_0;\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$

Sono formule esplicite per $g(x)$:

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \end{cases} \qquad p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \implies$$

$\implies y_{om}$ è una combinazione lineare di:

a) $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}$ se $\lambda_1 = \lambda_2$

b) $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}$ se $\lambda_1 \neq \lambda_2$

da cui

a) $g(x) = x e^{\lambda_1 x}$ $[\lambda_1 = \lambda_2]$

b) $g(x) = \dfrac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}}{\lambda_1 - \lambda_2}$ $[\lambda_1 \neq \lambda_2]$

Infine nel caso $\Delta \neq 0 \implies \lambda_1, \lambda_2 = \begin{cases} \alpha \pm i\beta & \Delta < 0 \\ \alpha \pm i\beta & \Delta > 0 \end{cases}$

dove $\alpha = -\dfrac{a}{2}$, $\beta = \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{-\Delta} & \Delta < 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{\Delta} & \Delta > 0 \end{cases}$

Da cui:

- $g(x) = \dfrac{e^{(\alpha + i\beta)x} - e^{(\alpha - i\beta)x}}{2i\beta} = \dfrac{1}{\beta} e^{\alpha x} \sin \beta x$ per $\Delta < 0$
- $g(x) = \dfrac{e^{(\alpha+\beta)x} - e^{(\alpha-\beta)x}}{\ } = \dfrac{1}{\beta} e^{\alpha x} \operatorname{Sh} \beta x$ per $\Delta > 0$

3) additività (rispetto l'intervallo di integrazione): Se f integrabile su $[a,b]$ e se c: $a<c<b$

$$(1)\quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Definiamo:

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

con queste la (1) vale $\forall a, b, c$

4) monotonia (rispetto la funz. integranda): f, g integrabili su $[a,b]$ con $a<b$, allora:

4a) se $f \geq 0$ su $[a,b]$ $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

4b) se $f \geq g$ $\forall x \in [a,b]$ $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

4c) $|f(x)|$ è integrabile in $[a,b]$ e vale $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

TEOREMA (media integrale)

Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua in $[a,b]$, allora $\exists\, c \in [a,b]$:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

oss. La tesi non vale in generale se f non è continua (ad es. continua a tratti)

DEFINIZIONE (Primitiva)

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione qualsiasi su intervallo I, si dice che una funzione $F: I \to \mathbb{R}$ è una primitiva di f se F è derivabile su I e vale $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$

OSS Se $\exists\, F$ di f essa non è unica, poiché $F+k$ è anche primitiva di f

$$\frac{d}{dx}\left(F(x)+k\right) = F'(x) + 0 = f(x)$$

Vale anche il viceversa, se F_1, F_2 primitive di f su I, esse differiscono per una costante.

TEOREMA (costante additiva)

Se F_1, F_2 primitive di f su I allora $\exists\, k \in \mathbb{R}$: $F_2(x) = F_1(x) + k$ $\forall x \in I$

Se f ammette una primitiva F, allora tutte le primitive sono della forma

$F(x) + k$ $\quad (k \in \mathbb{R})$

TEOREMA

$f: I \to \mathbb{R}$ continua a tratti su I. Sia $x_0 \in I$ e $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ allora:

F è una primitiva generalizzata di f su I e precisamente F è continua su I, è derivabile $\forall x \neq x_1, x_2, \dots, x_k$ dove x_j = punti di salto di f e vale

$F'(x) = f(x) \quad \forall x \neq x_1, x_2, \dots, x_k$

Inoltre: pti $x_1, x_2, \dots, x_k$ sono pti di salto di f e sono pti angolosi di F

Vale anche la formula $\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$ per f continua a tratti

dove G è una qualsiasi primitiva generalizzata di f, ovvero vale ancora il th della costante additiva per le primitive generalizzate.

CALCOLO DI PRIMITIVE: TECNICHE DI INTEGRAZIONE

Si definisce integrale indefinito di f l'insieme di tutte le primitive di f in un intervallo I

$\int f(x)\,dx = F(x) + k$ dove $F = \forall$ primitiva di f su I

Per definizione vale:

- $\frac{d}{dx} \int f(x)\,dx = f(x) \quad \forall f$ continua su I
- $\int \frac{df}{dx}\,dx = f(x) + k \quad (k \in \mathbb{R}) \quad \forall f \in C^1(I)$

INTEGRALI INDEFINITI FONDAMENTALI

- $\int k\,dx = kx + c \quad \forall k \in \mathbb{R}$
- $\int x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + k \quad \forall \alpha \neq -1$
- $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + k \quad \forall x \neq 0$
- $\int a^x\,dx = \frac{1}{\log a} a^x + k$
- $\int e^x\,dx = e^x + k$
- $\int \sin x\,dx = -\cos x + k$
- $\int \cos x\,dx = \sin x + k$
- $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + k$
- $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + k$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + k$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{cotg} x + k$
- $\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx = \operatorname{th} x + k$
- $\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\,dx = -\operatorname{cth} x + k$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + k$
- $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + k$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \operatorname{sett\,sh} x + k$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{sett\,ch} x + k$

TEOREMA (Integrazione per parti)

$f(x), g(x) \in C^1(I)$. Allora

$$\int f'(x)\, g(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f(x)\, g'(x)\, dx$$

Inoltre $\forall a, b \in I$: $\displaystyle\int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx = \left[f(x) g(x) \right]_a^b - \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx$

Tecnica consigliata per integrali come $\int x^n \sin x$, $\int x^n \cos x$, $\int e^x x$, $\int \log x$, etc...

INTEGRAZIONE PER DECOMPOSIZIONE IN SOMMA

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx$$

utile per polinomi

FORMULE DI WERNER

Per calcolare $\int \sin(px) \sin(qx)\, dx$; $\int \cos(p(x)) \cos(qx)\, dx$; $\int \sin(px) \cos(qx)\, dx$

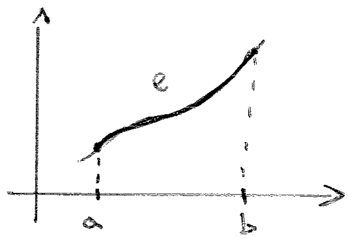
si usano :

- $\sin p \sin q = \frac{1}{2} \left[\cos(p-q) - \cos(p+q) \right]$
- $\sin p \cos q = \frac{1}{2} \left[\sin(p-q) + \sin(p+q) \right]$
- $\cos p \cos q = \frac{1}{2} \left[\cos(p-q) + \cos(p+q) \right]$

LUNGHEZZA DI UN GRAFICO

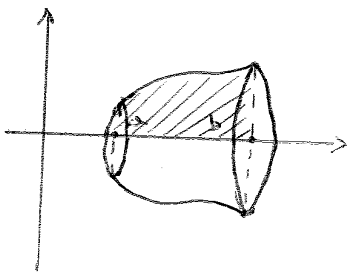
$f \in C^1([a,b])$

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$



VOLUME DI UN SOLIDO DI ROTAZIONE

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$



$b_3)$ $\Delta = b^2 - 4ac < 0$;

$$\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\,dx \qquad \Delta = p^2 - 4q < 0$$

1) completo il quadrato : $x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4} = (x+\alpha)^2+\beta^2$

$$\alpha = \frac{p}{2} \qquad \beta = q - \frac{p^2}{4} = \frac{1}{4}(4q-p^2) > 0$$

2) Raccolgo β^2 a denominatore $\displaystyle\int \frac{ax+b}{(x+\alpha)^2+\beta^2}\,dx = \frac{1}{\beta^2}\int \frac{ax+b}{1+\left(\frac{x+\alpha}{\beta}\right)^2}\,dx =$

pongo $\frac{\alpha+x}{\beta} = t$, $x = \beta t - \alpha$, $dx = \beta\,dt$

$$= \frac{1}{\beta^{\cancel{2}}}\cancel{\beta}\int \frac{a(\beta t-\alpha)+b}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{\beta}\left(\frac{a\beta}{2}\log(1+t^2)+(b-a\alpha)\,\mathrm{arctg}\,t\right)+k =$$

$$\ldots = \frac{a}{2}\log(x^2+px+q) + \frac{b-a\alpha}{\beta}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x+\alpha}{\beta}\right)+k$$

C) Grado $Q = m$ $\Rightarrow$ Grado $P \leq m-1$ con $m \in \mathbb{N}^+$

Dal th fondamentale dell'algebra si ottiene che $Q(x)$ di grado m ammette m radici in campo complesso. Si scompone $Q(x)$ in fattori irriducibili

$$Q(x) = d\,(x-a_1)^{r_1}\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_h)^{r_h}\,(x^2+2p_1x+q_1)^{s_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+2p_kx+q_k)^{s_k}$$

Dove $d, \alpha, p, q \in \mathbb{R}$, $r_i, s_j \in \mathbb{Z}$: $r_1+\ldots+r_h+2s_1+2s_k = m =$ Grado Q

I numeri α_i sono le radici reali di molteplicità r_i. I fattori $x^2+2p_j+q_j$ sono irriducibili in $\mathbb{R}$ poiché $p_j^2 - q_j < 0$ ad essi corrispondono 2 radici complesse (coniugate) $\beta_j \pm$ di molteplicità s_j

Si può scrivere dunque

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{1}{d}\left[F_1(x)+\ldots+F(h)+\overline{F}_1(x)+\ldots+\overline{F}_k(x)\right] \qquad \text{Dove}$$

$$F_i(x) = \frac{A_{i1}}{x-\alpha_i}+\frac{A_{i2}}{(x-\alpha_i)^2}+\ldots+\frac{A_{ir_i}}{(x-\alpha_i)^{r_i}} \quad \text{mentre}$$

$$\overline{F}_j(x) = \frac{B_{j1}x+C_{j1}}{x^2+2p_jx+q_j}+\frac{B_{j2}x+C_{j2}}{(x^2+2p_jx+q_j)^2}+\ldots+\frac{B_{js_j}x+C_{js_j}}{(x^2+2p_jx+q_j)^{s_j}}$$

il numero delle costanti A_i e $+ B_{jy}, C_{jy}$ è $= m =$ Grado $Q(x)$

F) $\int f\left(x^{\frac{m_1}{n_2}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, x^{\frac{m_k}{n_k}}\right) dx$ si razionalizza ponendo

$x = t^n$ dove n = minimo comune multiplo di $n_1, n_2, \dots, n_k$

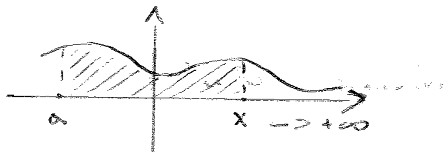
G) $\int \sqrt[p]{x-a}$ con $p \in \mathbb{Z}$ e $a \in \mathbb{R}$ si pone

$t = \sqrt[p]{x-a}$, $x = a + t^p$ $dx = pt^{p-1}$

INTEGRALI IMPROPRI

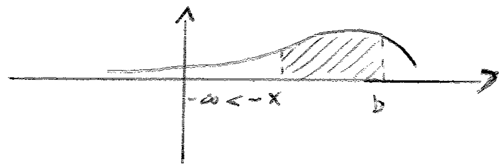
Si definisce integrale improprio di f su $[a, +\infty]$ il limite di F per $x \to +\infty$:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\,dt$$



analogamente definiamo

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{x \to -\infty} \int_x^b f(t)\,dt$$



Se il limite esiste finito $\in \mathbb{R}$ si dice che l'integrale improprio di f su $[a, +\infty)$ converge, se vale $\pm\infty$ si dice che diverge, se $\nexists$ si dice che è oscillante o indeterminato.

Se $f: (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$ è integrabile in qualsiasi $[a, b] \subset \mathbb{R}$ si definisce

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{x_1 \to -\infty} \int_{x_1}^{c} f + \lim_{x_2 \to +\infty} \int_c^{x_2} f$$ dove c è un pto qualsiasi.

Si dice che $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge se convergono $\int_{-\infty} f$ e $\int_c f$; diverge se divergono entrambi allo stesso segno o uno converge e l'altro diverge ; è indeterminato se divergono a segno opposto.

OSS: Se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$ oppure se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = k \neq 0$ si può subito concludere che $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge.

Se viceversa si sa che $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge, ed $\exists \lim_{x \to +\infty} f(x)$, allora sicuramente sarà $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Può capitare che $\int_a^{+\infty} f$ converga ma $\nexists \lim_{x \to +\infty} f(x)$

TEOREMA (criterio del confronto asintotico)

A) $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$; $f, g > 0$; $\exists \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$ con $k \geq 0$ (o $k = +\infty$

1) Se $k > 0$, $k \in \mathbb{R}$ ovvero $f(x) \sim [g(x)] k$ $(x \to +\infty)$ allora
$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ hanno stesso comportamento: entrambe convergono/divergono

2) Se $k = 0$, cioè $f(x) = o(g(x))_{x \to +\infty}$ allora se $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f$ converge

3) Se $k = +\infty$ allora se $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx = +\infty$ diverge $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$ diverge

B) $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ è analogo al pto A).

COROLLARIO: A) Se $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$:

- Se $\exists$ $\alpha > 1$: $f(x) \sim \frac{k}{x^\alpha}$ oppure $f(x) = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)_{x \to +\infty}$ $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge

- Se $f(x) \sim \frac{k}{x}$ oppure $\frac{f(x)}{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge

B) Sia $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$:

- Se $\exists$ $\alpha : 0 < \alpha < 1$: $f(x) \sim \frac{k}{(b-x)^\alpha}$ oppure $f(x) = o\left(\frac{1}{(b-x)^\alpha}\right)_{x \to b^-}$ $\Rightarrow \int_a^{b} f(x)\,dx$ converge

- Se $f(x) \sim \frac{k}{b-x}$ oppure $\frac{f(x)}{\frac{1}{b-x}} \xrightarrow[x \to b^-]{} +\infty$ $\Rightarrow \int_a^{b} f(x)\,dx$ diverge

TEOREMA (criterio di convergenza assoluta)

A) $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ di segno qualsiasi, se converge $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge

e vale $\left| \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$

B) $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, se $\int_a^{b} |f(t)|\,dx$ converge $\Rightarrow \int_a^{b} f(x)\,dx$ converge e vale

$\left| \int_a^{b} f(x)\,dx \right| \leq \int_a^{b} |f(x)|\,dx$ [il th non si può invertire: può capitare che $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converga mentre $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ diverga]

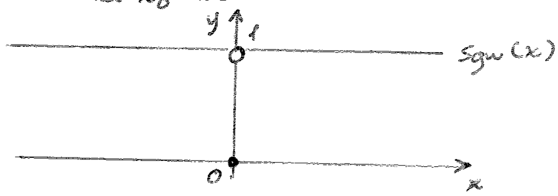
DEFINIZIONE: Se $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ converge si dice che $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ <u>converge assolutamente</u>

Se $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge ma $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx = +\infty$ si dice $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ <u>converge semplicemente</u>

DISCONTINUITÀ:

0) ELIMINABILE: f ha una discontinuità eliminabile in x_0 se

$$\exists\ l = \lim_{x \to x_0} f(x) \ , \quad l \in \mathbb{R} \ , \quad l \neq f(x_0)$$



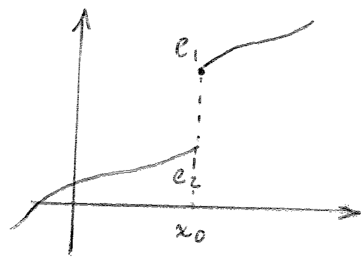
Ridefinendo $f(x)$ nel punto x_0 come l ottengo una funzione continua anche in x_0, vale anche se $f(x)$ non è inizialmente definita nel punto x_0 ma $\exists \lim_{x \to x_0} = l \in \mathbb{R}$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq x_0 \\ l & x = x_0 \end{cases}$$

La nuova funzione $\tilde{f}$ (f tilde) è automaticamente continua in x_0 e si chiama prolungamento continuo di f.

1) DI TIPO SALTO (o 1° specie): f ha una discontinuità di 1° specie o di tipo salto se:

$$\begin{cases} \exists\ l_1 = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \in \mathbb{R} \\ \exists\ l_2 = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{ma } l_1 \neq l_2$$



La discontinuità non si può eliminare comunque si ridefinisca f in x_0

2) DI 2° SPECIE: Si dicono di 2° specie tutti gli altri tipi di discontinuità

es.
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \neq f(x_0)$
- $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$
- $\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$ o $\nexists \lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x)$

MONOTONIA

$f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice monotona se è uno dei seguenti tipi:

- Strettamente crescente $\iff \forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$
- Strettamente decrescente $\iff \forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 > x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$
- Crescente $\iff \forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$
- Decrescente $\iff \forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 > x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$

Se f è strettamente monotona allora è 1-1 (iniettiva) le viceversa non vale

TEOREMA (1° confronto)

1) Se $f(x) > g(x)$ $(o \geq g(x))$ in un intorno V di x_0 (escluso al più x_0) e se $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l_1$, $g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l_2$ =

$\Rightarrow l_1 > l_2$ $(o \geq l_2)$

2) $f(x) \geq g(x)$ in un intorno V di x_0 (escluso al più x_0) e se $g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty \Rightarrow f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$

Se invece $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} -\infty \Rightarrow g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} -\infty$

TEOREMA (doppio confronto)

Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ in un intorno di x_0 (escluso al + x_0) e $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} g(x) = l$

COROLLARIO: Se $f(x)$ è limitata in un intorno di x_0, $g(x) \to 0$, allora

$f(x)\,g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$

TEOREMA (cambio variabile)

Sia definita $g \circ f(x) = g(f(x))$ in un intorno V di x_0 (escluso al più x_0):

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ con $f(x) \neq y_0$ $\forall x \in V \setminus \{x_0\}$

e se $\lim_{y \to y_0} g(y) = l$ allora vale $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to y_0} g(y) = l$

Può essere $x_0, x_0^\pm; l \in \mathbb{R}^*$

In particolare: Se f è continua in x_0 e g in $y_0 = f(x_0)$ allora $g \circ f$ è continua in x_0

GERARCHIA INFINITI: $n \to \infty$

$\log_a n \leq n^b \leq c^n \leq n! \leq n^n$ $\quad a, b, c \in \mathbb{R}$

Nota: Formula di Stirling

$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ $\quad \forall n \in \mathbb{R}^*$

GERARCHIA INFINITESIMI $n \to 0$

$n \to \infty$

$n^n \leq n! \leq c^n \leq n^b \leq \log_a n$ oppure $\frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{c^n} \leq \frac{1}{n^b} \leq \frac{1}{\log_a n}$

- $\sqrt{x} + x \sim \sqrt{x} \quad (x \to 0) \iff \sqrt{x} + x = \sqrt{x} + o(x) \quad (x \to 0)$
- $e^x - 1 \sim x \ (x \to 0) \iff e^x - 1 = x + o(x) \quad (x \to 0) \implies$

  $\implies e^x = 1 + x + o(x) \quad (x \to 0)$
- $(1+x)^\alpha - \cancel{1} \sim \alpha x \quad (x \to 0) \iff (1+x)^\alpha = \alpha x + 1 + o(x) \ (x \to 0)$
- $\mathrm{tg}\, x \sim x \quad (x \to 0) \iff \mathrm{tg}\, x = x + o(x) \quad (x \to 0)$
- $\log(1+x) \sim x \quad (x \to 0) \iff \log(1+x) = x + o(x) \quad (x \to 0)$

PARTE PRINCIPALE: Dati:

$u(x) \quad (x \to x_0) =$ infinito / infinitesimo campione

$f(x) \quad (x \to x_0) =$ infinito / infinitesimo

$\exists\ \alpha > 0,\ k \neq 0$ tali che: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(u(x))^\alpha} = k \iff f(x) \sim k(u(x))^\alpha \quad (x \to x_0) \iff$

$$\implies f(x) = k(u(x))^\alpha + o((u(x))^\alpha)$$

$f(x)$ è un infinito / infinitesimo di ordine α rispetto $u(x)$ per $x \to x_0$

$k(u(x))^\alpha$ è la parte principale di $f(x)$ rispetto a $u(x)$ per $x \to x_0$.

- Ordine e parte principale se $\exists$ sono unici.

TEOREMA (principio di eliminazione dei termini trascurabili)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + \underset{x \to x_0}{o(f(x))}}{g(x) + \underset{x \to x_0}{o(g(x))}} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

TEOREMA (Algebra o-piccolo): per $x \to x_0$

- $o f(x) \pm o f(x) = o f(x)$
- $o(kf) = o(f) = k \cdot o(f) \quad [k \in \mathbb{R}, k \neq 0]$
- $o(f) \cdot o(g) = o(fg) = f \cdot o(g) = g \cdot o(f)$
- $\frac{o(f)}{g} = o\left(\frac{f}{g}\right) \implies \cdot\ \frac{o(f)}{f} = o(1)$
- $o(f^\alpha) = (o(f))^\alpha$
- $o(o(f)) = o(f)$
- $o(f + o(f)) = o(f)$
- $(f + o(f))^\alpha = f^\alpha + o(f)^\alpha$

TEOREMI SULLA CONTINUITÀ (riassunto)

$f : \text{dom} f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice limitata (superiormente o inferiormente) se

l'immagine ($\text{im} f$) è un sottoinsieme limitato (sup.te, inf.te) di $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ limitata $\Rightarrow \exists M_1, M_2 \in \mathbb{R} : M_1 \leq f(x) \leq M_2 \quad \forall x \iff$

$\iff \exists M > 0 : |f(x)| \leq M \quad \forall x$

sup. f = estremo superiore f inf. f = estremo inferiore di f

$\max f = \max(\text{im} f) = M \leq \sup f \qquad \min f = \min(\text{im} f) = m \geq \inf f$

f lim. sup.te $\iff \sup f < +\infty \qquad f$ lim. inf.te $\iff \inf f > -\infty$

$\exists M \iff \exists x_0 \in \text{dom} f : f(x) \leq f(x_0) = M \quad \forall x$ = p.to di massimo (non unici

$\exists m \iff \exists x_1 \in \text{dom} f : f(x) \geq f(x_1) = m \quad \forall x$ = p.to di minimo in generale)

TEOREMA (Weierstrass)

Sia $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ funzione continua nell'intervallo $[a,b]$ (limitato e chiuso):

- f è limitata in $[a,b]$ ovvero $\exists$ maggiorante e minorante
- $\exists x_0, x_1 \in [a,b] : f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_0) \Rightarrow f(x_0) = \max f \in [a,b]$
  $f(x_1) = \min f \in [a,b]$

- Uno zero di funzione $f(x)$ è un pto $x_0 \in \text{dom} f : f(x_0) = 0$

TEOREMA ($\exists$ zeri)

Sia $f(x)$ continua in $[a,b]$ (limitato e chiuso) : $f(a) < 0, f(b) > 0$ o $f(a) > 0, f(b) < 0$

$\exists$ almeno un pto $x_0 \in [a,b] : f(x_0) = 0$

OSS. Se f è strettamente monotona su $[a,b] \Rightarrow$ lo zero sarà unico

TEOREMA (relazione tra iniettività, monotonia, continuità)

Sia f continua e iniettiva (1-1) su I, allora f è strett. monotona su I

Per funzioni continue su intervalli vale

f 1-1 $\Leftrightarrow$ f strett. monotona

Se f non è continua

f strett. monotona $\Rightarrow$ f è 1-1 ! non vale l'inversa

TEOREMA (continuità della funzione inversa)

Se f è continua e iniettiva su I, allora f^{-1} è continua nell'intervallo dell'immagine

$$f : I \xrightarrow[\text{su}]{1-1} J = f(I) \Rightarrow f^{-1} : J \to I$$

! È essenziale che f sia continua su I

FORMA ESPONENZIALE

$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$ => Formula di Eulero $\quad z^n = r^n e^{in\theta}$

$z = r e^{i\theta} \qquad \bar{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta) = r(\cos(-\theta) + \sin(-\theta)\, i) = (e^{-i\theta}) r$

Formula di de Moivre

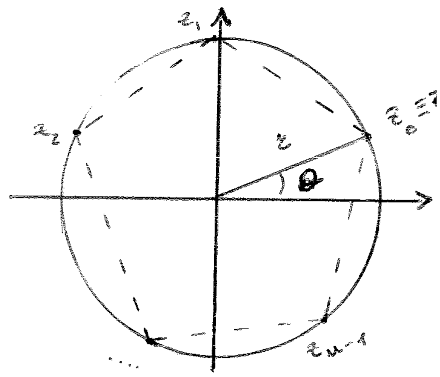
$(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$ se $r = 1$

da cui

$\begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \theta = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n} \end{cases}$ per un $\forall w \in \mathbb{C} : w = \rho e^{i\varphi} = z^n$ con $k \in \mathbb{Z}$

Per la periodicità di sin e cos risultano determinate n soluzioni:

$z_k = \sqrt[n]{\rho}\; e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}} \qquad k = 0, 1, \dots, n-1$



$e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

Ogni polinomio $P(z)$ di grado $n \geq 1$ ha almeno una radice in $\mathbb{C}$

COROLLARIO: Fattorizzazione di polinomi in campo complesso

$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$ con $a_j \in \mathbb{C}$ $\forall$ $a_n \neq 0$

Si fattorizza come

$P(z) = a_n (z - z_1)^{m_1} (z - z_2)^{m_2} \dots (z - z_k)^{m_k}$

* $\alpha_j + i\beta_j$ / $\alpha_j - i\beta_j$ di molteplicità $n_j \geq 0$ e vale
$m_1 + m_2 + \dots + m_k + 2n_1 + \dots + 2n_r$

Dove $z_1, z_2, \dots, z_k$ sono le radici distinte di $P(z)$ con $1 \leq k \leq n$; $m_1, m_2, \dots, m_k$ sono le rispettive molteplicità con $m_j \geq 1$ tali che $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$

COROLLARIO: Fattorizzazione di polinomi in campo reale

$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ con $a_j \in \mathbb{R}$ $\forall$ $a_n \neq 0$ $(\forall j)$ si fattorizza come:

$= a_n (x - x_1)^{m_1} \cdot (x - x_2)^{m_2} \cdot \dots \cdot (x - x_k)^{m_k} \cdot (x^2 + p_1 x + q_1) \cdot \dots \cdot (x^2 + p_r x + q_r)^{n_r}$

$x_1 \dots x_k$ radici reali di molteplicità $m_1 \dots m_k$ ... trinomio $x^2 + p_j x + q_j$ ha $\Delta < 0$ e corrisponde a una

TEOREMA: (Regola di derivazione)/(algebra delle derivate)

$f, g: I \to \mathbb{R}$ derivabili su I

1) $(f+g)' = f' + g'$

2) $(fg)' = f'g + fg'$

3) $(\kappa f)' = \kappa f' = 0 \cdot f + \kappa \cdot f'$

4) $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$

5) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ derivabile in $x \in I : g \neq 0$ in particolare: $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{1}{g^2} \cdot g'$

L'operatore $\frac{d}{dx}$ di derivazione $\frac{d}{dx} : f \to f'$ è lineare cioè $\frac{d}{dx}(\alpha f + \beta g) = \alpha \frac{d}{dx} f + \beta \frac{d}{dx}$

TEOREMA:

Se f è derivabile in $x_0 \in I \Rightarrow f$ è continua in x_0

OSS. il th non è invertibile, inoltre se f è continua in x_0 può non essere derivabile

Se f non è continua, sicuramente non può essere derivabile in x_0

I limiti $\lim_{x \to x_0^{\pm}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ si chiamano derivata destra e sinistra di f in x_0

f derivabile in $x_0 \iff f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$

- Se $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$ (ma esistono finiti) si ha che f è continua,

mentre x_0 è pto angoloso per f [oppure uno è finito e l'altro infinito]

Se $\exists\, f'_{\pm}(x_0)$, f si dice derivabile agli estremi di x_0, ed è continua in

x_0 da destra e/o sinistra.

TEOREMA (derivata funzione inversa)

$f: I \to J = f(I)$ continua e invertibile (biunivoca) tra sia I che J

Se f derivabile in $x \in I$ e se $f'(x) \neq 0$ allora $f^{-1}: J \to I$ derivabile in $y = f(x)$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

oppure notazione di Leibniz $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ $\left(\begin{matrix} y = f(x) \\ x = f^{-1}(y) \end{matrix} \right)$

Se $f'(x_0) = 0 \Rightarrow f^{-1}$ non derivabile in $y_0 = f(x_0)$ [tg verticale]

OSS. A volte è possibile calcolare $(f^{-1})'(y_0)$ anche se $f^{-1}(y)$ non è nota esplicitamente, basta trovare il valore x_0 tale che $f(x_0) = y_0$ e calcolare $\frac{1}{f'(x_0)}$

TEOREMA (limite di f')

$f: I \to \mathbb{R}$ sia continua su I, sia $x_0 \in I$, supponiamo f derivabile in $x \neq x_0$, allora:

1) Se $\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = \ell_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow f'_+(x_0) = \ell_1$

2) Se $\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = \ell_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow f'_-(x_0) = \ell_2$

3) Se $\exists \lim_{x \to x_0} f'(x) = \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x_0) = \ell$

4) Se $\lim_{x \to x_0^\pm} f'(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x \to x_0^\pm} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$ [non derivabile per tg verticale]

5) Se $\nexists \lim_{x \to x_0^\pm} f'(x)$ nulla si può dire sull'esistenza di $f'_\pm(x_0)$

OSS: è sempre necessario verificare che f sia continua in x_0

CONDIZIONI DI TANGENZA

f, g abbiano i grafici tangenti in 1 pto x $\Rightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$

Dove sono incognite:

- ascisse del pto di tangenza
- coeff. angolare della retta tangente

5) Se $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua su $[a,b]$ per il th di Weierstrass

$\exists M = \max_{[a,b]} f$, $\exists m = \min_{[a,b]} f$; Se interessa solo calcolare M, m è sufficiente calcolare e confrontare valori di $f(x_0)$ per i casi:

1) $x_0 = a, b$

2) x_0 pto critico interno, ovvero $f'(x_0) = 0$

3) i pto x_0 interno $[a,b]$: $\nexists f'(x_0)$

Confrontando i valori di x_0, M è il più grande, m è il più piccolo

<u>DERIVATE DI ORDINE SUPERIORE</u>

$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile, f' derivabile, f'' si chiama la derivata seconda di f

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

Se questo processo si può continuare fino a un certo ordine n otteniamo la derivata n-esima $f^{(n)}$.

Valgono alcune formule chiuse:

- $f(x) = e^x$, $f^{(n)}(x) = e^x \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$
- $f(x) = \sin x$; $f'(x) = \cos x$; $f''(x) = -\sin x$; $f'''(x) = -\cos x$; $f^{IV}(x) = \sin x$

  derivata uguale per $T = 4k$
- $f(x) = x^n$; $f'(x) = n x^{n-1}$; $f''(x) = n(n-1) x^{n-2}$; ... ; $f^{(n-1)} = n!\, x$; $f^{(n)} = n!$
- $(fg)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$ $\qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad n, k \in \mathbb{N}^+$

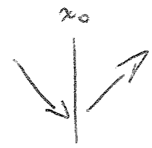
- f continua su I si dice di classe C^0 su I, $f \in C^0(I)$
- Se f è derivabile su I, f' continua si scrive $f \in C^1(I)$ e si dice di classe C^1 su I
- $f \in C^n(I) \iff \exists f', f'', \dots, f^{(n)}$ con $f^{(n)}$ continua su I
- $f \in C^\infty(I)$ se $\exists f^{(n)}(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I$

5) TEOREMA (Ricerca massimi e minimi relativi)

$f: I \to \mathbb{R}$ derivabile su I, sia x_0 interno a I : $f'(x_0) = 0$

Se $\exists\, \delta > 0$:

1) $\begin{cases} f'(x) \geq 0 & \text{per } x_0 - \delta < x < x_0 \\ f'(x) \leq 0 & \text{per } x_0 < x < x_0 + \delta \end{cases}$ $\Rightarrow$ x_0 è pto di massimo relativo (forte se vale "$>0, <0$")



2) $\begin{cases} f'(x) \leq 0 & x_0 - \delta < x < x_0 \\ f'(x) \geq 0 & x_0 < x < x_0 + \delta \end{cases}$ $\Rightarrow$ x_0 è pto di minimo relativo (forte se valgono le disuguaglianze strette)

OSS: le th si generalizza al caso di f continua su I e derivabile solo agli estremi di x_0

- Se f' cambia segno in x_0 (a patto che f sia continua) allora x_0 è pto di estremo relativo (max o min)

- Se x_0 è pto critico ($f'(x_0) = 0$) e $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ oppure $f'(x) \leq 0$ // // // //

x_0 si chiama pto di <u>flesso a tangente orizzontale</u>, il grafico di f attraversa la retta tg in x_0

TEOREMA (de l'Hopital)

Siano f, g funzioni definite in un intorno V di $x_0 \in \mathbb{R}^*$ escluso al più x_0 tali che:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ oppure $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$

Se f, g derivabili in V (escluso al più x_0) con $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in V \setminus \{0\}$ e se

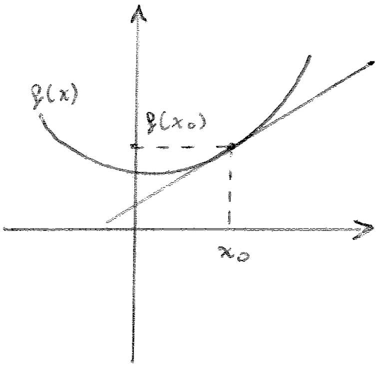
$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}^*$ allora anche $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \overset{H}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

- le th vale anche per $x \to x_0^{\pm}$
- È importante poiché da forme indeterminate $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$
- le th non è invertibile: se $\exists \lim \frac{f'}{g'} \Rightarrow \exists \lim \frac{f}{g} = \lim \frac{f'}{g'}$

DEFINIZIONE (convessità per tangenti)

$f: I \to \mathbb{R}$, derivabile su I, $f(x)$ si dice convessa per tangenti su I se $\forall x_0, x \in I$ vale $\quad f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Analogamente si dice strett. convessa, concava o strett. concava modificando ad hoc la definizione ($>$, $\leq$, $<$ rispettivamente)



TEOREMA:

$f: I \to \mathbb{R}$ sia derivabile almeno 1 volta su I, allora le seguenti definizioni sono equivalenti:

1) f convessa (concava) per corde su I

2) f convessa (concava) per tangenti su I

3) f' crescente (decrescente) su I

Inoltre se f è derivabile 2 volte su $I \Rightarrow$ 1), 2), 3) sono equivalenti a:

4) $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I \qquad (o \ f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in I)$

Da cui se $\exists f''(x)$ allora:

- f è convessa se $\exists f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$
- f è concava se $\exists f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$

OSS.₁ Una f convessa deve "stare sotto" le sue corde ma "sopra" le sue tangenti

OSS.₂ $f''(x) > 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow$ 1), 2), 3) ma non viceversa!

Il verso della concavità può cambiare, un pto in cui accade è un pto di flesso.

DEFINIZIONE (flesso)

Sia f derivabile su I, $x_0 \in I$ si dice pto di flesso se f in un intorno di x_0 vale:

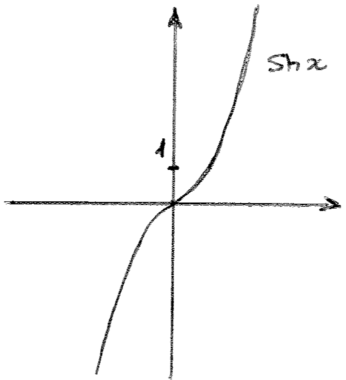
- $\begin{cases} f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) & \text{per } x < x_0 \\ f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) & \text{per } x > x_0 \end{cases}$ flesso ascendente

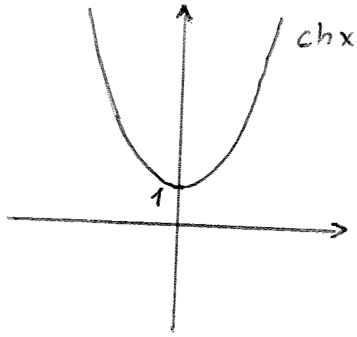
- $\begin{cases} f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) & \text{per } x < x_0 \\ f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) & \text{per } x > x_0 \end{cases}$ flesso discendente

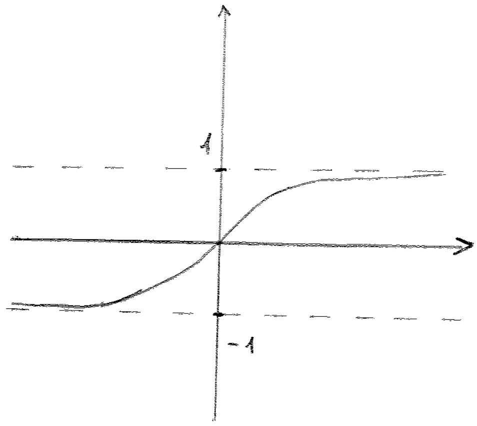
FUNZIONI IPERBOLICHE (Riassunto)

Seno iperbolico di x: $\quad \operatorname{sh} x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$

Coseno iperbolico di x: $\quad \operatorname{ch} x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$







tangente iperbolica di x: $\quad \operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$

cotangente iperbolica di x: $\quad \operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$

Settore seno iperbolico di x: $\quad \operatorname{sett\,sh} x = (\operatorname{sh} x)^{-1} = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

Settore coseno iperbolico di x: $\quad \operatorname{sett\,ch} x = (\operatorname{ch})^{-1} = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$

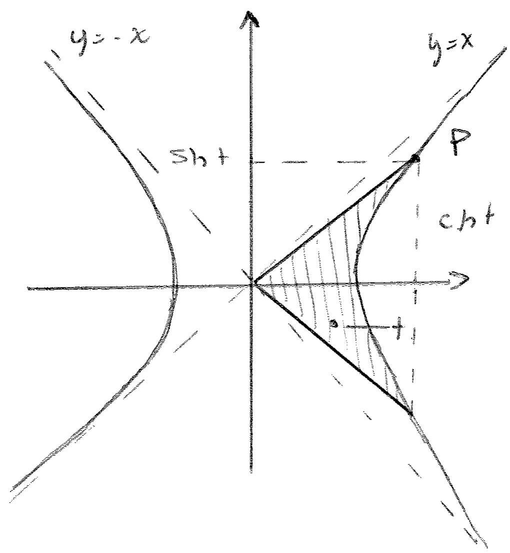
Settore tangente iperbolica di x: $\quad \operatorname{sett\,th} x = (\operatorname{th} x)^{-1} = \dfrac{1}{2} \log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

Settore cotangente iperbolica di x: $\quad \operatorname{sett\,cth} x = (\operatorname{cth} x)^{-1} = \dfrac{1}{2} \log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

IDENTITÀ IPERBOLICA FONDAMENTALE: $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$

$x^2 - y^2 = 1$ descrive un'iperbole con assi $y = \pm x$

$$\begin{cases} x = \operatorname{ch} t \\ y = \operatorname{sh} t \end{cases} \qquad P(\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$$



Analoga a $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ dove descrive una circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ ponendo

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \qquad P(\cos t, \sin t)$$

SVILUPPI DI TAYLOR (Riassunto)

Sia f derivabile in un pto x_0 (continua in x_0) $\Leftrightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$

Vale la prima formula dell'incremento finito $\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0))}{x - x_0} = 0$

$\Rightarrow$ La retta $y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ approssima $f(x)$ a meno di infinitesimi di grado > 1

$P_{f,x_0,1}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ = Polinomio di Taylor di ordine 1 di f centrato in x_0

Poiché $f(x) - P_{f,x_0,1}(x) = o(x-x_0)$ consideriamo [e supponiamo $f(x)$ derivabile in x_0]

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_{f,x_0,1}(x)}{(x-x_0)^2} = \frac{0}{0} \overset{H}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{2(x-x_0)} = \frac{1}{2} f''(x_0)$$

Dove $(x-x_0)^2$ rappresenta l'errore $o(x-x_0)^2$ a cui è possibile approssimare f per $x \to x_0$

Quindi $f(x) - P_{f,x_0,1}(x) = \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2)$ poiché vale

$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x)}{G(x)} = K \Leftrightarrow F(x) = K G(x) + \underset{x \to x_0}{o(G(x))}$ Da cui si ottiene

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2) = P_{f,x_0,2}(x) + o((x-x_0)^2)$$

Dove $P_{f,x_0,2}(x)$ = Polinomio di Taylor di f centrato in x_0 di ordine 2 mentre

$o(x-x_0)$ oppure $o((x-x_0)^2)$ è il resto di ordine 1 o 2 nella forma di Peano.

Reiterando il processo di approssimazione all'ordine 2 n volte si ottiene

TEOREMA (formula di Taylor di ordine n col resto di Peano)

Se f è derivabile n volte in x_0 allora vale

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \underset{x \to x_0}{o((x-x_0)^n)}$$

$= P_{f,x_0,n}(x) + o((x-x_0)^n)$ per cui $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_{f,x_0,n}(x)}{(x-x_0)^n} = 0$

$P_{f,x_0,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ si chiama polinomio di Taylor di f di ordine n centrato in x_0

NB: $0! = 1$ per def.

- $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n) \qquad x \to 0$$

- $$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n) \qquad x \to 0$$

- $$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

$$+ o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n) \qquad x \to 0$$

casi particolari:

- $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$

- $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \mid + o(x^4)$

appr. $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$

- $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)$

- $\sqrt[3]{x+1} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + o(x^2)$

TEOREMA (Formula di Taylor di ordine n con resto di Lagrange)

Sia f derivabile $n+1$ volte in un intervallo I; dati 2 punti a piacere $x_0, x \in I$ $\exists$ un pto c : $x_0 < c < x$ o $x < c < x_0$ tale che

$$f(x) - P_{f,x_0,n}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \qquad =: \text{Resto di Lagrange}$$

OPERAZIONI CON SVILUPPI DI TAYLOR

A) Il polinomio di Taylor della somma di due funzioni è la somma dei polinomi di Taylor.

B) Il polinomio di Taylor del prodotto di due funzioni è il prodotto dei polinomi di Taylor.

C) Per trovare lo sviluppo di McLaurin di un rapporto $\frac{f(x)}{g(x)}$ con $g(x) \neq 0$ scriviamo $f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$ e ci riconduciamo allo sviluppo del prodotto, riducendo $\frac{1}{g(x)}$ alla forma $\frac{1}{g(0)} \frac{1}{1+t}$ e applicando $\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots$

LIMITI E PARTE PRINCIPALE CON TAYLOR

Sia $f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$

lo sviluppo di Taylor di ordine n di f in x_0, supposto un $m \in \mathbb{N}$: $1 \leq m \leq n$ tale che

$a_0 = a_1 = \dots = a_{m-1} = 0$ ma $a_m \neq 0$ Dunque

$f(x) = a_m(x-x_0)^m + o((x-x_0)^m)$ si comporterà f come la funzione

$p(x) = a_m(x-x_0)^m$ che ne costituisce la parte principale

Rispetto all'infinitesimo campione $y = x - x_0$ sarà di ordine m.

È sufficiente quindi imporre il limite per tale parte principale.

STUDIO LOCALE DI UNA FUNZIONE DA SVILUPPI DI TAYLOR

Supponiamo lo sviluppo di Taylor centrato in x_0 di una $f \in C^2(\mathbb{R})$

$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2) \Rightarrow a_0 = f(x_0)$ $a_1 = f'(x_0)$ $a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}$

Poiché $f \in C^2(\mathbb{R})$, f, f', f'' son continue su $\mathbb{R}$ => per il th della permanenza del segno f, f', f'' avranno in un intorno di x_0 lo stesso segno di a_0, a_1, a_2 rispettivamente se questi sono $\neq 0$.

Possiamo così stabilire il segno di f, la sua monotonia, la sua convessità in un intorno di x_0

Il metodo non funziona per la monotonia se il coefficiente a_1 di $(x-x_0)$ si annulla sia $a_1 = f'(x_0) = 0$ x_0 pto critico.

Per vedere se x_0 pto di max, min o flesso possiamo applicare il metodo delle derivate successive dato dal teorema:

TEOREMA

$f: I \to \mathbb{R}$, x_0 interno a I, $f'(x_0) = 0$; Allora:

A) Se $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ pto di minimo relativo forte

Se $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ pto di massimo relativo forte

Se $f''(x_0) = 0 \Rightarrow x_0$ è pto di flesso