NUMERO: 900

DATA: 12/03/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Marra

MATERIA: Fisica I

Prof. Scalerandi

APPUNTI DI FISICA I

prof. SCALERANDI

VELOCITÁ $\vec{v}$

1) $V_m = \dfrac{\text{spazio percorso}}{\text{tempo impiegato}} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ SCALARE

2) $\vec{V}_m = \dfrac{\text{spostamento}}{\text{tempo impiegato}} = \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ VETTORE

$\Rightarrow$ la velocità media perciò non è una grandezza fisica interessante (si può definire in due modi)

VELOCITÁ ISTANTANEA

$$t \to t + dt$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \Delta \vec{r} = \begin{cases} \text{in modulo } \Delta \vec{r} \to \Delta s \\ \text{in direzione: } \underline{\text{tangente}} \text{ alla traiettoria} \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}}$$ velocità istantanea

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \boxed{\text{DERIVATA DEL VETTORE POSIZIONE RISPETTO AL TEMPO}}$$

$\vec{V}$: grandezza fisica che descrive la posizione nel tempo

se $\vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{r} = \text{cost.}$

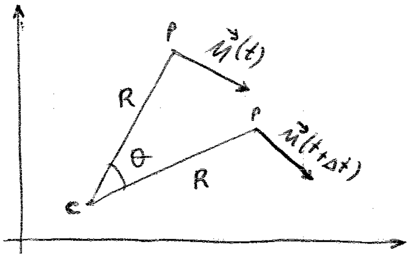
la direzione di $\vec{v}$ è tangente alla traiettoria

$$\vec{V} = V \cdot \vec{u}_T$$

versore tangente alla traiettoria

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(x\vec{u}_x + y\vec{u}_y)}{dt}$$ se S.R. è fissato

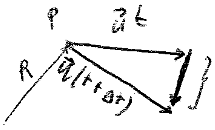
$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\vec{u}_y$$ VELOCITÁ IN COMPONENTI CARTESIANE



∀ traiettoria, se $\Delta t \to 0$, si può definire le circonferenza tangente alla traiettoria

R = raggio di curvatura

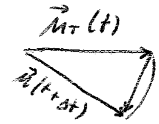
definiamo $\vec{u}(t+\Delta t) - \vec{u}(t)$



} $\vec{u}(t+\Delta t) - \vec{u}(t)$ verso verso il centro di curvatura

$\vec{u}(t+\Delta t) - \vec{u}(t)$ ha direzione parallela a R (ortogonale a $\vec{u}_T$)

$u_T \perp R$, $\left[\vec{u}(t+\Delta t) - \vec{u}(t)\right] \perp u_T$



se $\Delta t \to 0$ la corda ∼ all'arco

arco = raggio per angolo = $\boxed{R \cdot \Delta\theta}$ modulo

R = 1 perché $\vec{u}_T$ è versore di modulo 1

$$\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{u}_T(t+\Delta t) - \vec{u}_T(t)}{\Delta t} = \boxed{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{-\Delta\theta\,\vec{u}_N}{\Delta t}} \qquad \vec{u}_N \perp \vec{u}_T$$

il − è dovuto al verso di $\left[\vec{u}(t+\Delta t) - \vec{u}(t)\right]$, $\vec{u}_N$ è un versore ortogonale a $\vec{u}_T$

$\Delta\theta \cdot R = \underset{\text{(corda)}}{\Delta S}$ (spazio percorso) $\Rightarrow$ $\Delta\theta = \frac{\Delta S}{R}$

$$\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\left[-\overset{\Delta\theta}{\left(\frac{\Delta S}{R}\right)} \cdot \frac{\vec{u}_N}{\Delta t}\right] = -\frac{1}{R}\vec{u}_N \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}}_{v} = -\frac{1}{R} v \vec{u}_N$$

ACCELERAZIONE NORMALE

$$\vec{a}_N = v\,\frac{d\vec{u}_T}{dt} = v\left(-\frac{1}{R}\,v\,\vec{u}_N\right) = \boxed{-\frac{v^2}{R}\vec{u}_N}$$

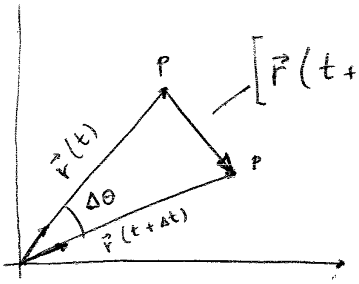
($\vec{a}$ in coord. intrinseche)

$$\boxed{\vec{a}} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \boxed{\frac{dv}{dt}\vec{u}_T - \frac{v^2}{R}\vec{u}_N}$$

le coordinate intrinseche sono $\vec{u}_T$ e $\vec{u}_N$ che costituiscono un S.R. non fisso

VELOCITÁ SU COORDINATE POLARI

$$\vec{V} \overset{def}{=} \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\vec{\mu}_r) = \frac{dr}{dt}\vec{\mu}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt}$$



$[\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)]$

$$\frac{d\vec{\mu}_r}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{\mu}_r(t+\Delta t) - \vec{\mu}_r(t)}{\Delta t}$$

MODULO di $[\vec{\mu}_r(t+\Delta t) - \vec{\mu}_r(t)]$ = CORDA; per $\Delta t \to 0$ = ARCO =

$= \underset{\substack{\shortparallel \\ 1}}{\text{RAGGIO}}\ \text{PER}\ \underset{\substack{\shortparallel \\ \Delta\theta}}{\text{ANGOLO}} = |\Delta\theta|$

(si parla di versori)

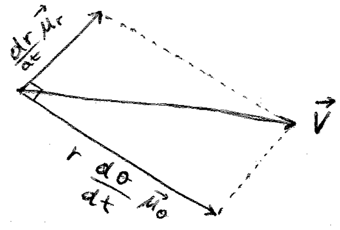
DIREZIONE: $\perp$ a $\vec{\mu}_r \implies$ si chiama $\vec{\mu}_\theta$ $\qquad \vec{\mu}_r \perp \vec{\mu}_\theta$

quindi $$\frac{d\vec{\mu}_r}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\vec{\mu}_\theta = \boxed{\frac{d\theta}{dt}\vec{\mu}_\theta}$$

CONCLUSIONE

$$\left[\vec{V} = \underbrace{\frac{dr}{dt}}_{\substack{\text{VELOCITÁ RADIALE} \\ \text{Variaz. di r in} \\ \text{modulo}}}\vec{\mu}_r + r\underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\substack{\text{VELOCITÁ ANGOLARE} \\ \text{Variaz. di} \\ \text{direz. di}}}\vec{\mu}_\theta\right]$$

quindi, usando il S.R. a coordinate polari la velocità ha due componenti



ACCELERAZIONE SU COORDINATE POLARI

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\vec{\mu}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{\mu}_\theta\right)$$

$$\vec{a} = \frac{d^2r}{dt^2}\vec{\mu}_r + \frac{dr}{dt}\cdot\underbrace{\frac{d\vec{\mu}_r}{dt}} + \frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt}\vec{\mu}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{\mu}_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\cdot\underbrace{\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}}$$

DERIVATE DI VETTORI
(da sviluppare)

CONCLUSIONI

esistono 3 sistemi di riferimento : CARTESIANO, INTRINSECO, POLARE

S.R. INTRINSECO descrive bene il vettore $\vec{a}$ $(\vec{u}_T$ e $\vec{u}_N)$

SR POLARE descrive bene il vettore $\vec{v}$ $(\vec{u}_R$ e $\vec{u}_\theta)$

- $\vec{r} = x(t)\,\vec{u}_x + y(t)\,\vec{u}_y \qquad \vec{r} = r\,\vec{u}_r$
- $\vec{V} = V_x\,\vec{u}_x + V_y\,\vec{u}_y$ COORD. CARTESIANE

  $\vec{v} = \frac{dr}{dt}\,\vec{u}_r + r\,\frac{d\theta}{dt}\,\vec{u}_\theta$ COORD. POLARI

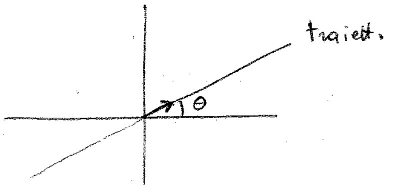
  $\vec{V} = V\,\vec{u}_T$ COORD. INTRINSECHE
- $\vec{a} = a_x\,\vec{u}_x + a_y\,\vec{u}_y$ COORD. CARTESIANE

  $\vec{a} = \left[\frac{d^2 r}{dt} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\vec{u}_r + \left[r\,\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\,\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt}\right]\vec{u}_\theta$

  COORD. ~~INTRINSECHE~~ POLARI

CASI PARTICOLARI

- MOTO RETTILINEO (la traiettoria è una retta)



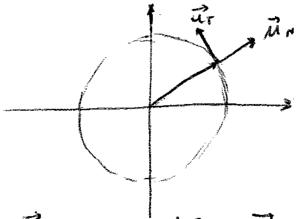
$\vec{u}_r = \text{cost.} \Rightarrow \theta = \text{cost.}$

$u_T = u_r$ in direz. e modulo

$\underset{\text{COORD POLARI}}{\vec{V}} = \frac{dr}{dt}\,\vec{u}_r \qquad \underset{\text{INTRINS.}}{\vec{V}} = V\cdot\vec{u}_r \qquad \Rightarrow \frac{dr}{dt} = V$

$\underset{\text{COORD POLARI}}{\vec{a}} = \frac{d^2 r}{dt}\,\vec{u}_r \qquad \underset{\text{INTRINS.}}{\vec{a}} = \frac{dv}{dt}\,\vec{u}_r \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2}$

- MOTO CIRCOLARE



$|\vec{r}| = r = R = \text{cost.} \qquad \theta = \theta(t)$

$\vec{u}_N = \vec{u}_r \qquad \vec{u}_T = \vec{u}_\theta$

$\underset{\text{COORD POLARI}}{\vec{v}} = r\,\frac{d\theta}{dt}\,\vec{u}_N \qquad \underset{\text{INTRINS}}{\vec{v}} = v\cdot\vec{u}_r \qquad v = r\frac{d\theta}{dt} \qquad \boxed{\frac{d\theta}{dt}} = \boxed{w} \quad V = rw$

$\underset{\text{C. POLARI}}{\vec{a}} = -\overset{a_N}{r\underset{w}{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}}\,\vec{u}_N + \overset{a_T}{r\underset{\gamma}{\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)}}\,\vec{u}_T \qquad \underset{\text{INTRINS}}{\vec{a}} = \frac{dv}{dt}\,\vec{u}_T - \frac{V^2}{R}\,\vec{u}_N$

$\begin{cases} V = wR \\ a_T = \gamma R \\ a_N = -Rw^2 \end{cases}$ solo nel moto circolare

COMBINAZIONE DI MOTI LUNGO DUE DIMENSIONI

$$\begin{cases} x = x(t) & \text{RETTA} \\ y = y(t) & \text{RETTA} \end{cases}$$

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{u}_x + y(t)\,\vec{u}_y$$

- la sovrapposizione di due moti rettilinei uniformi da come RISULTATO ⇒ MOTO RETTILINEO UNIFORME

- la sovrapposizione di un moto rettilineo uniforme con un moto uniformemente accelerato ⇒ MOTO PARABOLICO

$$a_x = 0 \qquad t = 0 \qquad \begin{matrix} x = x_0 \\ V = V_{0x} \end{matrix}$$

$$a_y = -g \qquad t = 0 \qquad \begin{matrix} y = y_0 \\ V = V_{0y} \end{matrix}$$

$$x = x_0 + V_{0x}(t - t_0)$$

$$y = y_0 + V_{0y}(t - t_0) + \frac{1}{2} a_y (t - t_0)^2$$

TRAIETTORIA $\vec{r}(t) = \left[x_0 + V_{0x}(t - t_0)\right]\vec{u}_x + \left[y_0 + V_{0y}(t - t_0) - \frac{1}{2} g (t - t_0)^2\right]\vec{u}_y$

$$t = \frac{x - x_0}{V_{0x}} \Rightarrow y = V_{0y}\left(\frac{x - x_0}{V_{0x}}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x - x_0}{V_{0x}}\right)^2$$

PARABOLA (con concavità verso il basso

- COMBINAZIONE DI UN MOTO ARMONICO LUNGO x E DI UN MOTO ARMONICO LUNGO y

$$a_x = -w^2 x \qquad t = 0 \qquad \left.\begin{matrix} x = A \\ V_x = 0 \end{matrix}\right\} CI$$

$$a_y = -w^2 y \qquad t = 0 \qquad \left.\begin{matrix} y = 0 \\ V_y = Aw \end{matrix}\right\} CI$$

$x = A\cos(wt + \varphi)$ CI: $\cos(wt + \varphi) = 1 \Rightarrow \varphi = 0$ CI $(x = A)$

$V_x = Aw \sin(wt + \varphi)$

$V_x = V_y$

$y = B\cos(wt + \varphi')$ $\Rightarrow$ CI $(y = 0) \Rightarrow \varphi' = \frac{\pi}{2}$

$V_y = -Bw\sin(wt + \varphi')$

$B = -A$

$x = A\cos(wt)$

$y = -A\cos(wt + \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow A\sin(wt)$ $\quad \vec{r} = A\cos(wt)\vec{u}_x + A\sin(wt)\vec{u}_y$

$x^2 + y^2 = A^2$ ⇒ COMBINAZIONE DI DUE MOTI ARMONICI CON STESSA FASE DA MOTO CIRCOLARE

MOTO ARMONICO (1-D)

DEF. $a = -w^2 x \iff \frac{d^2x}{dt} = -w^2 x$ $\quad \begin{cases} x = A\cos(wt + \varphi) \\ v = -Aw\sin(wt+\varphi) \end{cases}$ A e φ dipendono dalle CI

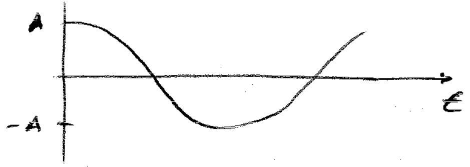
oppure
$$x = A_1 \cos(wt) + A_2 \sin(wt)$$
oppure
$$x = A \sin(wt + \varphi_2) \qquad \varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$$

A = ampiezza $\quad$ W = pulsazione $\quad$ φ = fase

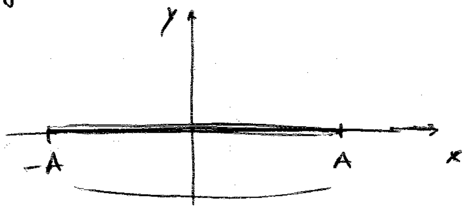
il moto armonico è un moto periodico

T = periodo = $\frac{2\pi}{w}$ $\quad$ ν = frequenza = $\frac{1}{T}$

il grafico x(t) non c'entra nulla con la traiettoria



in realtà la particella oscilla tra -A e A lungo la congiungente (sull'asse x)



COMPONENTI DEI VETTORI

$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$ $\qquad \Sigma \vec{F} = \Sigma F_x \vec{u}_x + \Sigma F_y \vec{u}_y = m \cdot \vec{a} = m a_x \vec{u}_x + m a_y \vec{u}_y$

$$\begin{cases} \Sigma F_x = m a_x \\ \Sigma F_y = m a_y \end{cases}$$

COORDINATE INTRINSECHE

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m (a_T \vec{u}_T + a_n \vec{u}_n) = m a_T \vec{u}_T + m a_n \vec{u}_n$$

COMPONENTE TANGENTE $\quad F_T = m a_T$ (Varia V in modulo)

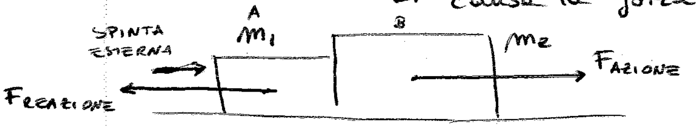
COMPONENTE CENTRIPETA $\quad F_n = m a_n$ (diretta verso il centro, varia V in direzione)

III PRINCIPIO - [AZIONE E REAZIONE]

Se un corpo A applica una forza su un corpo B, allora B applica una forza uguale e contraria su A

A: SORGENTE della forza
↳ causa la forza

B : SONDA
↳ sente la forza



m_1 : sorgente
m_2 : sonda

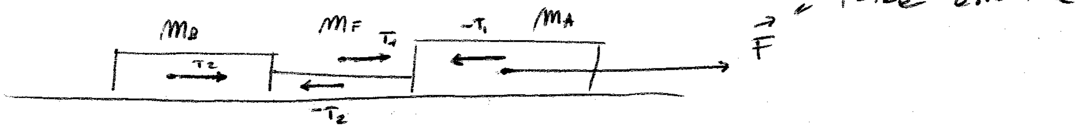
Nell'enunciato il "su" indica il punto di applicazione
I punti di applicazione delle due forze sono diversi

$\vec{F}_{Azione} = \vec{F}_{AB} = m_B \vec{a}_B \qquad \vec{F}_{Reazione} = \vec{F}_{BA} = m_A \vec{a}_A = -\vec{F}_{AB}$

$$m_B \vec{a}_B = - m_A \vec{a}_A \implies \vec{a}_B \neq \vec{a}_A$$

le forze sono uguali e contrarie, le accelerazioni dipendono dalle masse

TENSIONI



T_1: azione di m_A sulla fune $\qquad -T_1$: reazione della fune su A

T_2: azione della fune su m_B $\qquad -T_2$: reazione di m_B sulla fune

$$\begin{cases} \vec{F} - \vec{T}_1 = m_A \vec{a}_A \\ \vec{T}_1 - \vec{T}_2 = m_F \vec{a}_F \\ \vec{T}_2 = m_B \vec{a}_B \end{cases}$$

applicando il II principio

OSSERVAZIONI

- $\vec{J} = \int \vec{F}\,dt = \Delta\vec{q}$ $\qquad \vec{q} = m\vec{v}$

queste relazioni valgono anche per intervalli di tempo infinitesimi

$$d\vec{J} = \vec{F}\,dt = d\vec{q}$$ (il differenziale è l'opposto dell'integrazione)

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{q}}{dt}}$$ derivata della quantità di moto nel tempo: altro modo per definire $\vec{F}$

- se $m = cost.$ $\quad \vec{F} = \frac{d(m\cdot\vec{v})}{dt} = m\cdot\vec{a}$ (II legge Newton)
- se $m \neq cost.$ $\quad \vec{F} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$

  ↳ non equivale alla II legge di Newton

ES: funzionamento dei motori a reazione

- CASO PARTICOLARE

$$\text{se } \vec{F} = cost \qquad \vec{J} = \int \vec{F}\,dt = \vec{F}\int dt = \vec{F}\cdot\Delta t = \Delta\vec{q}$$

- FORZA MEDIA

$$\vec{F}_{media} = \frac{\int \vec{F}\cdot dt}{\Delta t} = \frac{\vec{J}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{q}}{\Delta t} = \vec{F}_{media}$$

in generale $\vec{F} \neq \frac{\Delta\vec{q}}{\Delta t}$ $\quad (\vec{F} \neq \vec{F}_{media})$

se $\vec{F} = cost.$ $\quad \vec{F} = \vec{F}_{media} = \frac{\Delta\vec{q}}{\Delta t}$

- TEOREMA DI CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

Hp: $\vec{F} = \frac{d\vec{q}}{dt}$ $\qquad$ se $\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{q} = cost \Rightarrow \vec{q}_{in} = \vec{q}_f$

OSSERVAZIONE

$$W \overset{def}{=} \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \Delta K \qquad K = \frac{1}{2} m v^2 \qquad (K \neq \Delta K)$$

- FORMA INFINITESIMA

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

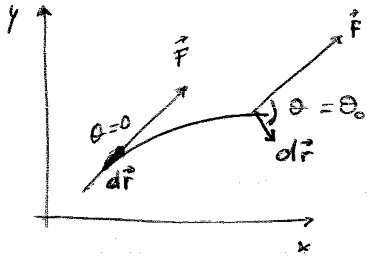
↳ prodotto scalare

$\left\{ \text{se } \vec{F} \perp d\vec{r} \right.$ $\quad dW = 0$

$W = 0 = \int_\gamma dW$

- se $\vec{F} = cost$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{modulo} \\ \text{direzione} \end{array} \right.$

$$W = \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int F \cdot dr \cdot \cos\theta = F \int dr \cos\theta(t)$$

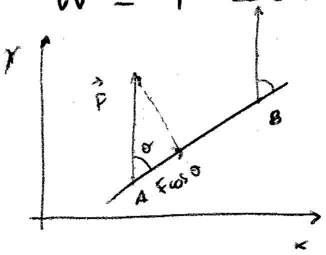


- se $\vec{F} = cost$ e la traiettoria è rettilinea, $d\vec{r}$ ha dir. cost.

$$\theta = \vec{F} \,\hat{}\, d\vec{r} = cost.$$

$$W = F \cdot \cos\theta \int_\gamma |d\vec{r}| = F \cdot \cos\theta \cdot \ell$$

$\ell =$ spazio percorso lunghezza traiettoria



$F\cos\theta$ è la proiezione di F sulla retta della traiettoria

$$W = F_{\parallel} \cdot \ell$$

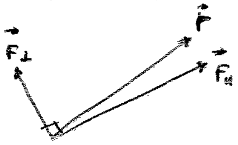
si può definire il lavoro come componente parallela di $\vec{F}$ alla traiettoria per lo spazio percorso

- ADDITIVITÀ DEI LAVORI

se $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots$

$$W = \int \vec{F} d\vec{r} = \int \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \int \vec{F}_2 d\vec{r} + \ldots$$

$$W = W_1 + W_2$$



esistono $\vec{F}_\perp$ e $\vec{F}_\parallel$ allo spostamento

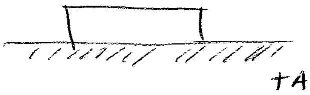
$$\vec{F} = \vec{F}_\parallel + \vec{F}_\perp \qquad W = W_\parallel + \underset{0}{\underset{\parallel}{W_\perp}} \qquad (\vec{F}_\perp \perp d\vec{r})$$

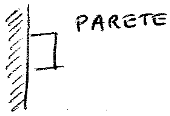
$$W = \int \vec{F}_\parallel \cdot d\vec{r}$$

ELENCO DI FORZE VARIE

REAZIONI VINCOLARI

la sorgente è un VINCOLO (oggetto che impedisce il moto in una particolare direzione)

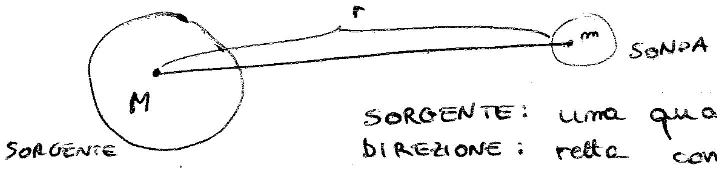




$\vec{N}$ (reazione vincolare) è un vettore con:

DIREZIONE: ortogonale alla superficie vincolante
MODULO: somma delle altre forze ⊥ alla superficie
VERSO: uscente dalla superficie (altrimenti modulo = 0)
PUNTO DI APPLICAZIONE: un qualsiasi punto della superficie di contatto

FORZA GRAVITAZIONALE



SORGENTE: una qualunque massa M
DIREZIONE: retta congiungente i centri di massa delle due masse
MODULO: $|F_G| = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$
direttamente proporzionale alle masse e inversamente prop. al quadrato della dist.
VERSO: attrattivo ⇒ verso M (m è attratto da M)

$$\vec{F}_G = (-)\, G \, \frac{m \cdot M}{r^2} \, \vec{u}_r$$

(−): indica che la forza è attrattiva

$\vec{u}_r$: versore // alla retta congiungente i due centri di massa

G: costante di gravitaz. universale

Vale sempre il principio di azione-reazione

CASO PARTICOLARE

M: terra
r: raggio terra

$$|\vec{F}_G| = \overbrace{G \cdot \frac{M_{TERRA}}{(r_{TERRA})^2}}^{\simeq 9.81 \frac{m}{s^2} \ (g)} \cdot m$$

$$\vec{F}_{PESO} = m \cdot \vec{g}$$

FORZA ELASTICA

Sorgente: una molla (ideale, $m = 0$ kg)

modulo: $F_{el} = k \cdot \Delta l$

costante elastica

allungamento $(l - l_0)$

lunghezza molla deformata

lunghezza molla a riposo

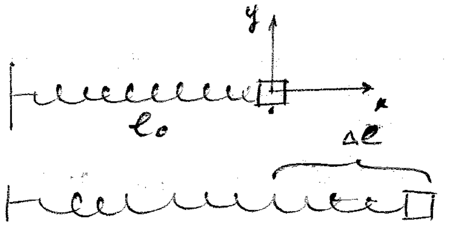
direzione: parallela all'asse della molla

verso: DI RICHIAMO (ossia verso la posizione di equilibrio)

F_{el}: unica forza ad avere modulo dipendente dalla posizione
($\Rightarrow$ dipendenza implicita dal tempo)

in presenza di $\vec{F}_{el}$ non ci sarà mai un moto unif. accel.

si sceglie un S.R. con origine nella posizione a riposo della molla



$\Delta l = x$ (posizione massa m rispetto all'origine)

$$\boxed{F_{el} = -kx}$$

il meno indica il fatto che è una forza di richiamo

$$F = -kx \quad \begin{cases} \text{se } x > 0 & \Delta l > 0 \rightarrow F < 0 \\ \text{se } x < 0 & \Delta l < 0 \rightarrow F > 0 \end{cases}$$

$$F_{el} = m \cdot a \qquad -kx = ma \qquad -kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\underbrace{\left(\frac{k}{m}\right)}_{\omega^2} x \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$\Rightarrow$ il moto di un oggetto sottoposto a una forza elastica è **ARMONICO**

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{PERIODO}$$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ periodo di una molla, dipende solo da m e k

ENERGIA POTENZIALE

il lavoro W dipende solo dalle posizioni iniziali e finali

si parla di FUNZIONE ENERGIA POTENZIALE: dipende solo dalla posizione dell'oggetto

$$E_p = E(\vec{r}) = E(x,y,z)$$

$$\Delta E_p \overset{def}{=} -W^{cons.} \qquad E_B - E_A \overset{def}{=} -W^{cons.}$$

- non è definita l'energia potenziale, ma la variazione di energia potenziale, ossia E è definita a meno di una costante additiva arbitraria

$$\left.\begin{array}{l} E = f(x,y,z) \\ E' = f(x,y,z) + k = E + k \end{array}\right\} \text{entrambe soddisfano la definizione}$$

$$\Delta E = -W \qquad E_B - E_A = -W$$

$$(E'_B + k) - (E'_A + k) = -W$$

$$E'_B - E'_A = -W$$

per eliminare la k fisso un S.R. fisso per le energie potenziali (ossia fissare una posizione $\vec{r} = \vec{r}_0$ dove $E=0$)

$$E(\vec{r}=\vec{r}_0) + k = 0 \qquad k = -E(\vec{r}=\vec{r}_0)$$

- $\Delta E = -W$ vale anche in forma differenziale

$$dE = -dW$$

$$dE \overset{def.}{=} \underbrace{\frac{\partial E}{\partial x}dx + \frac{\partial E}{\partial y}dy + \frac{\partial E}{\partial z}dz}_{\text{derivate parziali, simbolo } \partial} \qquad \text{se } E = E(x,y,z)$$

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = (F_x\vec{u}_x + F_y\vec{u}_y + F_z\vec{u}_z)\cdot(dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y + dz\,\vec{u}_z)$$

$$= F_x dx + F_y dy + F_z dz \qquad dE = -dW$$

$$\frac{\partial E}{\partial x}dx + \frac{\partial E}{\partial y}dy + \frac{\partial E}{\partial z}dz = -F_x dx - F_y dy - F_z dz$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -F_x \qquad \frac{\partial E}{\partial y} = -F_y \qquad \frac{\partial E}{\partial z} = -F_z \qquad \vec{F} = -\left(\frac{\partial E}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial E}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial E}{\partial z}\vec{u}_z\right)$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}E \qquad \vec{\nabla} = \text{gradiente}$$

TEOREMA DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

Hp: $W = \Delta k$ per qualsiasi forza

se sono applicate al sistema forze conservative e forze non conservative

$$W = W^{NC} + W^{CONS.}$$

$$W^{NC} + W^{CONS} = K_f - K_{in}$$

$$W^{NC} - \Delta E = K_f - K_{in}$$

$$W^{NC} + E_{in} - E_f = K_f - K_{in}$$

$$K_{in} + E_{in} + \underbrace{W^{NC}}_{\text{ENERGIA DISSIPATA}} = K_f + E_f$$

$$K + E = E^{MECCANICA}$$

↳ legata alla posizione

↳ legata a $\vec{v}$

$$W^{NC} = \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$$ se $\vec{F}$ ha stesso verso di $d\vec{r} \Rightarrow W^{NC} > 0$

$$E_{in}^{MECC} + W^{NC} = E_f^{MECC}$$

se $W^{NC} > 0$ $E_f^{MECC} < E_{in}^{MECC}$

se $W^{NC} < 0$ $E_f^{MECC} > E_{in}^{MECC}$

se $W^{NC} = 0$ $E_{in}^{MECC} = E_f^{MECC}$ ambito delle forze conservative

$\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$ con il Polo nell' origine

facciamo le rispettive derivate

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge m\vec{v} + \vec{r} \wedge \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \underbrace{\vec{V} \wedge m\vec{v}}_{\overset{\parallel}{0}\ (\vec{v} \parallel \vec{v})} + \vec{r} \wedge \underbrace{\frac{d\vec{q}}{dt}}_{\vec{F}}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \boxed{\vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{M}}$$ MOMENTO DELLA FORZA

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}}$$ se $\vec{M} = 0 \Longrightarrow \vec{L} =$ costante

$\vec{L}_{in} = \vec{L}_f$

CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE

$\vec{M} = \vec{b} \wedge \vec{F} = 0$ (per un polo qualsiasi)

se
$b = 0$ $\vec{F}$ applicata nel polo
$\vec{F} = 0$
$\vec{F} \parallel \vec{b}$
$\Big\}$ $\vec{M} = 0$

CONCLUSIONE

$\vec{F} = \frac{d\vec{q}}{dt}$ $\quad \vec{q} = m\vec{v}$ $\quad$ se $\vec{F} = 0$ $\quad \vec{q} = $ cost.

$\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$ $\quad \vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ $\quad$ se $\vec{M} = 0$ $\quad \vec{L} = $ cost.

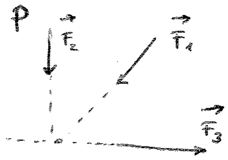
$\boxed{\text{ES}}$ braccio costante

$|\vec{F}| = R$ $\qquad \theta = \omega t$

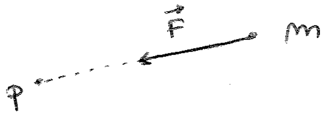
$$\vec{L} = m r^2 \underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\omega} \vec{u}_{\perp \text{piano}} = \underbrace{m r^2}_{I} \vec{\omega}$$ momento di inerzia

FORZE CENTRALI

def' le forze centrali sono quelle forze tali per cui le rette di azione delle forze si incontrano tutte in un punto P



Una massa m in un campo di forze centrali avrà $\vec F$ diretta lungo la congiungente m con P



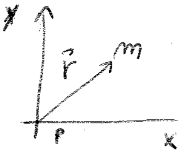
ES forza gravitaz. e forza elettrostatica sono forze centrali

PROPRIETÀ

- Sono forze conservative
- $\vec L$ = cost.

DIM.

$\vec L = \vec r \wedge m\vec v$
↳ BRACCIO (POLO ≡ O)



$\vec M = \vec r \wedge \vec F = \frac{d\vec L}{dt}$

nel caso delle forze centrali $\vec F \parallel \vec r$ (la direzione della forza è lungo la congiungente, ossia lungo $\vec r$)

$\vec F \parallel \vec r \Rightarrow \vec M = 0 \qquad \frac{d\vec L}{dt} = 0 \Rightarrow \vec L = cost.$

modulo

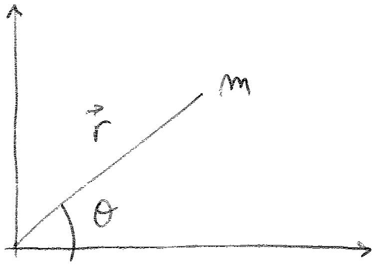
$\vec L = \vec r \wedge m\vec v \Rightarrow \vec L = \vec r \wedge m(v_r \vec\mu_r + v_\theta \vec\mu_\theta)$ COORD. POLARI

$\vec r \parallel \vec\mu_r \Rightarrow \vec L = \vec r \wedge m v_\theta \vec\mu_\theta = \vec r \wedge m r \frac{d\theta}{dt} \vec\mu_\theta$

$\vec r \perp \vec\mu_\theta$

$|\vec L| = r^2 \frac{d\theta}{dt} \cdot m$

DIREZIONE: ortogonale al piano di $\vec r$ e $\vec v$



$r = r(t)$
$\theta = \theta(t)$

$m r^2 \frac{d\theta}{dt} = cost.$

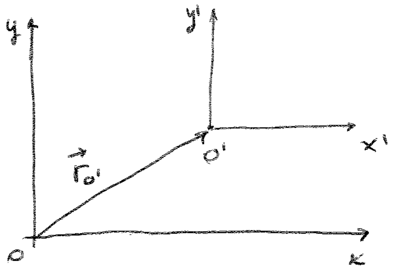
MOTI RELATIVI

ⓐ DEFINIZIONI: come cambiano le grandezze cinematiche se cambio S.R.

$\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}$ in S.R. $\rightarrow$ $\vec{r}\,', \vec{v}\,', \vec{a}\,'$

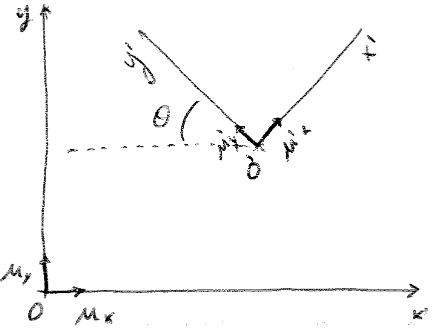
SR: sistema di riferimento fisso

i)



i) O' può non coincidere con O
ASSI ⇒ $x' \parallel x$
$y' \parallel y$

ii)



ii) O' non coincide con O

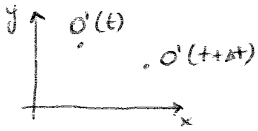
x' e y' non sono paralleli a x e y

OBIETTIVO: individuare il nuovo sistema di riferimento (S'R') rispetto a quello vecchio fisso (SR)

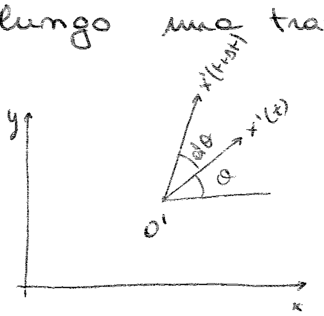
servono 2 informazioni: - $\vec{r}_{O'}$: descrive posizione O' rispetto a SR
- θ: angolo tra $\vec{u}\,'_y$ e $\vec{u}_x$

S'R' caratterizzato da $\left.\begin{array}{l}\vec{r}_{O'}(t)\\ \theta_{O'}(t)\end{array}\right\}$ S'R' non è fisso ma funzione del tempo

$\vec{r}_{O'}(t)$ indica che O' si muove lungo una traiettoria



$\theta_{O'}(t)$ indica che gli assi ruotano



TROVARE LA TRASFORMAZIONE DI $\vec{V}$ QUANDO CAMBIO SIST. RIFER.

$\vec{V}$: velocità definita in SR

$\vec{V}'$: velocità definita in S'R'

$$\vec{V} = \frac{dx}{dt}\vec{\mu}_x + \frac{dy}{dt}\vec{\mu}_y + \frac{dz}{dt}\vec{\mu}_z$$

$$\vec{V}' = \frac{dx'}{dt}\vec{\mu}'_x + \frac{dy'}{dt}\vec{\mu}'_y + \frac{dz'}{dt}\vec{\mu}'_z$$

DIM

$$\vec{r} = \vec{r}_{0'} + \vec{r}'$$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{0'}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{V}_{0'} + \frac{d}{dt}\left(x'\vec{\mu}'_x + y'\vec{\mu}'_y + z'\vec{\mu}'_z\right)$$

$x' = x'(t)$ $\qquad \vec{\mu}'_x = \vec{\mu}'_x(t)$

$$\vec{V} = \vec{V}_{0'} + \left(\frac{dx'}{dt}\vec{\mu}'_x + \frac{dy'}{dt}\vec{\mu}'_y + \frac{dz'}{dt}\vec{\mu}'_z\right) + \underbrace{x'\frac{d\vec{u}'_x}{dt} + y'\frac{d\vec{\mu}'_y}{dt} + z'\frac{d\vec{\mu}'_z}{dt}}_{\text{derivate di oggetti a modulo costante}}$$

ricordiamo che $\frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{a}$ con $a = \text{cost.}$

$$\vec{V} = \vec{V}_{0'} + \vec{V}' + x'\cdot\vec{\omega}\wedge\vec{\mu}'_x + y'\cdot\vec{\omega}\wedge\vec{\mu}'_y + z'\,\vec{\omega}\wedge\vec{\mu}'_z$$

$$\vec{V} = \vec{V}_{0'} + \vec{V}' + \vec{\omega}\wedge\underbrace{\left(x'\vec{\mu}'_x + y'\vec{\mu}'_y + z'\vec{\mu}'_z\right)}$$

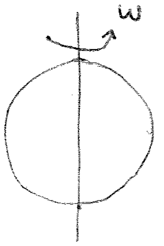
QUINDI: $\boxed{\vec{V} = \vec{V}_{0'} + \vec{V}' + \vec{\omega}\wedge\overset{\vec{r}'}{\vec{r}'}}$

$\vec{V}$: vel in SR
$\vec{V}_{0'}$: vel O' in SR
$\vec{V}'$: vel. in S'R'
$\vec{\omega}\wedge\vec{r}'$: termine convettivo
$\vec{\omega}$: vel. con cui ruotano gli assi di S'R'

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{V}' + \vec{\omega}\wedge\vec{r}'$$

$\vec{V}_{0'} + \vec{\omega}\wedge\vec{r}'$: VELOCITÀ DI TRASCINAMENTO
(si genera perché S'R' non è fermo)

Ⓒ ROTAZIONE DELLA TERRA



$O' \equiv O$ $\quad \vec{w} = \text{cost.} \quad \frac{dw}{dt} = 0$

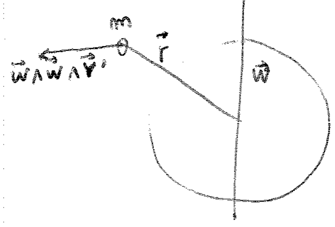
si devono studiare gli effetti su $\vec{g}$

* OSSERVATORE ESTERNO (lontano dalla terra) : $\vec{g}$ diretta verso il centro della terra

$|\vec{g}| = 9{,}81 \ m/s^2$

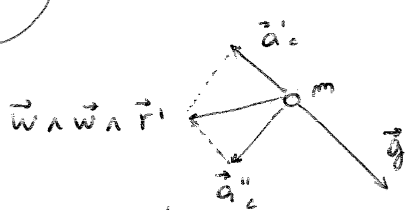
* OSSERVATORE SULLA TERRA : $\vec{g}' \neq \vec{g}$

$$\vec{g}' = \vec{g} - \vec{w} \wedge \vec{w} \wedge \vec{r}' - 2\vec{w} \wedge \vec{v}'$$



$\vec{w} \wedge \vec{r}$: vettore ortogonale

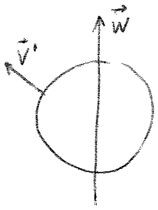
$\vec{w} \wedge \vec{w} \wedge \vec{r}'$ ha direzione leggermente diversa rispetto a $\vec{r}'$



$\vec{a}'_c$ opposto a g

$\Rightarrow |\vec{g}'| < |\vec{g}|$

$\vec{a}''_c$ fa sì che la traiettoria di un oggetto sia deviato verso il basso (ossia verso l'equatore)



$-2\vec{w} \wedge \vec{v}'$ ha direzione ortogonale al foglio, verso uscente

$\vec{a}_{\text{CORIOLIS}} \Rightarrow$ tangente alla terra lungo un parallelo e diretta verso est

CONCLUSIONE

stabilendo un SR fisso (sist. rifer. delle stelle fisse) posso definire le forze fisiche F

- con S'R' ≠ SR

i) $\vec{a} = \vec{a}'$ si ha un SR INERZIALE
O' ha moto rettilineo uniforme rispetto a O (assi fissi)

il S.R inerziale ha un moto per cui vede le stesse accelerazioni di SR

ii) $\vec{a}' \neq \vec{a}$ S'R' sist. rifer. non inerziale

$$\vec{F}' = \vec{F} + \underset{\uparrow \text{ introdotte arbitrariamente}}{\vec{F}_{APP}} = m\vec{a}'$$

$$\vec{F}_{APP} = m\vec{a}' - \underset{\uparrow \text{ forze fisiche}}{\vec{F}}$$

$$\vec{F}_{APP} = m\vec{a}' - m\vec{a} = m(\vec{a}' - \vec{a})$$

$$\boxed{\vec{F}_{APP} = -m\left(\vec{a}_{O'} + \vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\vec{r}' + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{r}' + 2\vec{\omega}\wedge\vec{v}\right)}$$

ASCENSORE $\Longrightarrow$ $\vec{\omega} = 0$ $\quad \vec{F}_{APP} = -m\vec{a}_{O'}$

GIOSTRA $\Longrightarrow$ $\vec{a}_{O'} = 0$ $\quad \omega = cost$ $\quad \vec{v}' = 0$

$$\vec{F}_{APP} = -m(\vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\vec{r}') = \text{FORZA CENTRIFUGA}$$

$$F_{centrifuga} = -m\omega^2 R$$

<u>ricapitolando</u>: in SR $F_{APP} = 0$

in S'R' non inerziale $\Longrightarrow$ uso le F_{APP}

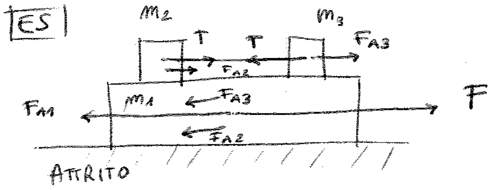
Ⓑ QUANTITÁ DI MOTO

$F_i = m_i \vec{a}_i \qquad F_i = \frac{d\vec{q}_i}{dt}$

FORZA F_i sulla particella i
- ↳ RISULTANTE DI TANTE FORZE
- ↳ DIVERSE SORGENTI

DUE CLASSI DI FORZE
- i) FORZE ESTERNE (la sorgente non appartiene al sistema)
- ii) FORZE INTERNE (la sorgente appartiene al sistema)

ES



sistema ⟹ $m_1 + m_2 + m_3$

$$\textcircled{m_1} \quad F_1 = \underbrace{F - F_{A1}}_{\text{esterne}} - \underbrace{F_{A2} - F_{A3}}_{\text{interne}}$$

$$\textcircled{m_2} \quad F_2 = \underbrace{F_{A2}}_{\text{interne}} + T$$

FORZA TOT. SUL SISTEMA: $\vec{F} \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$

↘ forza totale su m_i

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{est} + \vec{F}_i^{int} = \vec{F}_i^{est} + \underbrace{\sum_j \vec{F}_{ij}^{int}}$$

sommatoria delle forze interne su m_i dovute a m_j

$$\vec{F}_{TOT} = \sum_{i=1}^{n} F_i^{ext} + \sum_{i=1}^{n} F_i^{int} = \sum_{i=1}^{n} F_i^{ext} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{ij}^{int} =$$

$$= \underset{\text{RISULTANTE DELLE FORZE EST.}}{\vec{R}^{EST}} + [F_{12} + F_{13} + \ldots + F_{1N} + \ldots \quad F_{N1} + F_{N2} + \ldots + F_{N\,N-1}]$$

N.B. all'interno della sommatoria avrò $\underbrace{F_{13} \text{ e } F_{31}}_{\text{sono forze di azione e reazione}}$ per esempio

$\Rightarrow F_{13} + F_{31} = 0$

in generale $F_{ke} + F_{ek} = 0$

$\Longrightarrow \sum_i \sum_j F_{ij}^{int} = 0$ NON c'é contributo legato alle forze interne

$$i) \quad \boxed{\vec{F}_{TOT} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{EXT} = \vec{R}^{EXT}} \quad \text{RISULTANTE DELLE FORZE ESTERNE}$$

$$ii) \quad \boxed{\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i = \frac{M}{M} \sum m_i \vec{a}_i = M \cdot \vec{a}_{CM} = \vec{F}_{TOT}}$$

I EQUAZIONE CARDINALE

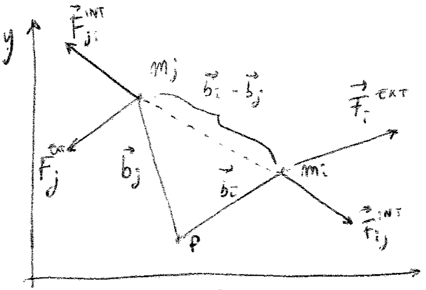
$(\vec{F} = \vec{R}^{est} = M \cdot \vec{a}_{CM})$

il moto del centro di massa dipende solo dalle forze esterne

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \sum_{i=1} \frac{d\vec{q}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \vec{q}_i\right) = \frac{d}{dt}\vec{q}_{CM}$$

$$\vec{F} = \vec{R}^{EXT} = \frac{d\vec{q}_{CM}}{dt}$$

iii) MOMENTI DELLE FORZE



$$\vec{M}_i = \vec{b}_i \wedge \vec{F}_i = \vec{b}_i \wedge \left(\vec{F}_i^{est} + \vec{F}_{ij}^{int}\right)$$

$$\vec{M}_j = \vec{b}_j \wedge \vec{F}_j = \vec{b}_j \wedge \left(\vec{F}_j^{est} + \vec{F}_{ji}^{int}\right)$$

$$\left(F_{ij} = - F_{ji}\right)$$

$$\vec{M}_i + \vec{M}_j = \underline{\vec{b}_i \wedge \vec{F}_i^{ext} + \vec{b}_j \wedge \vec{F}_j^{est}} + \vec{b}_i \wedge \vec{F}_{ij}^{int} + \vec{b}_j \wedge \vec{F}_{ji}^{int} + \text{ALTRE FORZE}$$

$$\vec{M}_i + \vec{M}_j = \vec{M}^{ext} + \left(\vec{b}_i - \vec{b}_j\right) \wedge \vec{F}_{ij}^{int}$$

ma $\vec{F}_{ij} \parallel (\vec{b}_i - \vec{b}_j) \Rightarrow$ prodotto vettoriale nullo

QUINDI ⇒ le forze interne non danno nessun contributo sul momento delle forza

$$\vec{M} = \sum \vec{M}_i = \sum \vec{b}_i \wedge \vec{F}_i^{EXT} = \vec{M}^{EXT}$$

RIEPILOGO

⇒ $\vec{F}_i = F_i^{EXT} + F_i^{INT}$ rispetto un punto materiale m_i

⇒ $\vec{F}_i = \sum \vec{F}_i = \vec{R}^{EXT}$ sistema

⇒ $\vec{M} = \sum \vec{M}_i = \vec{M}^{EXT}$

⇒ $\vec{W} = \sum W_i = \underbrace{W^{EXT}}_{\text{legato al spost. assoluti}} + \underbrace{W^{INT}}_{\text{legato a spostamenti relativi delle particella}}$

Ⓓ MOMENTO ANGOLARE (indipendente da $\vec{q}$)

i) PUNTO ⇒ $\vec{L}_i = \vec{b}_i \wedge m_i \vec{v}_i$

SISTEMA ⇒ $\vec{L} = \sum \vec{L}_i$

CM ⇒ $\vec{L}_{CM} = \vec{b}_{CM} \wedge M \cdot \vec{V}_{CM}$

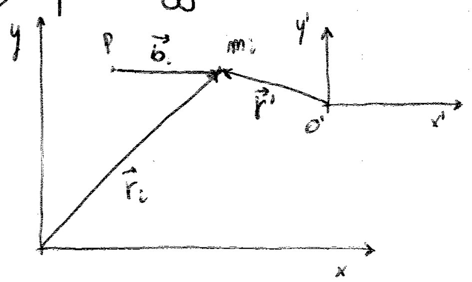
$\Big\}\ \vec{L} \neq \vec{L}_{CM}$

STUDIO DI MOMENTO ANGOLARE E MOMENTO DELLE FORZE

in particolare

- Ⓐ DIPENDENZA DA S.R.
- Ⓑ DIPENDENZA DAL POLO
- Ⓒ ESISTONO POLO/SR OTTIMALI?
- Ⓓ LEGAMI TRA $\vec{L}$ e $\vec{L}_{CM}$
- Ⓔ ESEMPI
- Ⓕ APPLICAZIONI : URTI

Ⓐ passaggio da SR a S'R'



$\vec{L} = \sum \vec{L}_i = \sum \vec{b}_i \wedge m_i\vec{v}_i$

in assenza di rotazioni il braccio non cambia cambiando SR

$\vec{r} \to \vec{r}'$ $\vec{v} \to \vec{v}'$

$$\boxed{\vec{L}' = \sum \vec{b}_i \wedge m_i\vec{v}_i' \neq \vec{L}}$$

$\vec{M} = \sum \vec{b}_i \wedge \vec{F}_i$

se S'R' è inerziale $(\vec{a}' = \vec{a})$ $\vec{F}_i = \vec{F}_i'$

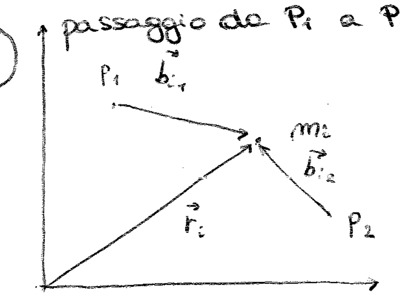
$\Longrightarrow \vec{M}' = \sum \vec{b}_i \wedge \vec{F}_i' = \vec{M}$ $\vec{M}' = \vec{M}$

se S'R' non è inerziale $\vec{F}_i' = \vec{F}_i + \vec{F}_{APP}$

$\Longrightarrow \vec{F}_i \neq \vec{F}_i'$

$\Longrightarrow \vec{M} \neq \vec{M}_i$ in genere

Ⓑ passaggio da P_1 a P_2 ↳ cambio il polo



non cambiando S.R. $\vec{v}_i$ non cambia

$\Longrightarrow \vec{v}_i$ independente dal polo

però il braccio dipende dal polo

$\vec{L}_1 = \sum \vec{b}_{i1} \wedge m_i\vec{v}_i$ $\vec{L}_2 = \sum \vec{b}_{i2} \wedge m_i\vec{v}_i$ $\boxed{\vec{L}_1 \neq \vec{L}_2}$

il momento angolare dipende dalla scelta del polo

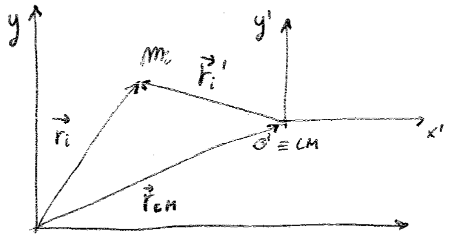
considero $\vec{M}$

$\vec{F}_i$ non dipendono dal polo

$\vec{M}_1 = \sum \vec{b}_{i1} \wedge \vec{F}_i$ $\vec{M}_2 = \sum \vec{b}_{i2} \wedge \vec{F}_i$ in genere $\vec{M}_1 \neq \vec{M}_2$

Ⓒ ESISTONO SR / POLO PRIVILEGIATI?

definiamo S'R': sistema di riferimento del centro di massa
$O' \equiv CM$ x' e y' sono ∥ a x e y e <u>non</u> ruotano



CM ≡ O' in movimento

$$\begin{cases} \vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{r}_{CM} \\ \vec{V}_i = \vec{V}_i' + \vec{V}_{CM} \\ \vec{a}_i = \vec{a}_i' + \vec{a}_{CM} \end{cases} \quad (\vec{W} = 0)$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum m_i}$$

$$\underset{\text{posizione di CM rispetto a } S'R'}{\vec{r}_{CM}'} = \frac{\sum m_i \cdot \vec{r}_i'}{\sum m_i} = \overset{[CM \equiv O']}{0}$$

PROPRIETÁ 1

$$\boxed{\sum m_i \cdot \vec{r}_i' = 0}$$

derivando si ottiene $\sum m_i \cdot \vec{V}_i' = 0$

QUANTITÀ DI MOTO

$\vec{Q} = M \cdot \vec{V}_{CM}$ in SR $\neq 0$

$\vec{Q}' = M \cdot \vec{V}_{CM}' = 0$ (CM ≡ O') sta fermo (S'R')

$$\vec{R}^{EXT} = \frac{dQ}{dt} \neq 0 \text{ in SR}$$

$$\vec{R}'^{EXT} = \frac{dQ'}{dt} = 0 \text{ in S'R'}$$

$\} \ \vec{R}^{EXT} \neq \vec{R}'^{EXT} \Rightarrow$ S'R' è un sistema di riferimento non inerziale

$\Rightarrow$ ci sono forze apparenti

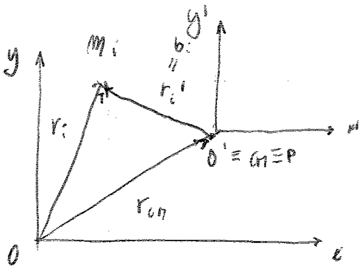
$$\vec{R}' = \vec{R} + \underbrace{\vec{F}_{APP}}_{\text{massa} \cdot \text{acceleraz. trascinamento}}$$

PROPRIETÁ 2

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{R}'^{EXT} &= \vec{R}^{EXT} + M \cdot \vec{a}_{CM} \\ \vec{F}_i' &= \vec{F}_i + m_i \vec{a}_{CM} \end{aligned}}$$

MOMENTO ANGOLARE

Scegliamo POLO ≡ CM ≡ O'



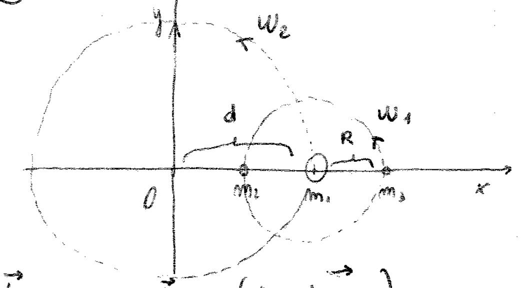
Ⓢⓡ $\Rightarrow b_i \equiv \vec{r}_i' \qquad \vec{L} = \sum \vec{L}_i = \sum \vec{r}_i' \wedge m_i \vec{V}_i$ in SR

$$\vec{V}_i = \vec{V}_{CM} + \vec{V}_i'$$

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum \vec{r}_i' \wedge m_i (\vec{V}_{CM} + \vec{V}_i') = \sum \vec{r}_i' \wedge (m_i \vec{V}_{CM}) + \sum \vec{r}_i' \wedge (m_i \vec{V}_i') = \\ &= \sum \vec{r}_i' \wedge (m_i \vec{V}_{CM}) + \sum \vec{r}_i' \wedge (m_i \vec{V}_i') = \\ &= \underset{\substack{\| \\ 0 \text{ per proprietà 1}}}{\left(\sum m_i \vec{r}_i'\right)} \wedge \vec{V}_{CM} + \sum \underset{\substack{\uparrow \\ \text{braccio}}}{\vec{r}_i'} \wedge \underset{\text{QDM in S'R'}}{(m_i \vec{V}_i')} = L'_{CM} \quad (\forall m_i) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ il momento angolare è indipendente dal sistema di riferimento

Ⓔ ESEMPI



$m_2 = m_3$ girano attorno a m_1

m_1 gira attorno ad O

TEO. KONIG

$\vec{L} = \vec{L}' + \vec{L}_{cm}$

$O' \equiv CM$ su m_1

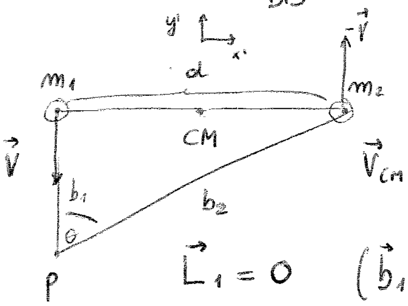
$\vec{L}_{cm} = \vec{d} \wedge (M \underbrace{d\vec{\omega}_2}_{\vec{V}_{cm}})$

$\vec{L}'$ in S'R' rispetto a $CM \equiv O'$

$L' = \sum \vec{b}_i' \wedge m_i \vec{v}_i'$

$= 2 \cdot \vec{R} \wedge m_2 (R \wedge \vec{\omega}_1)$ → $\left(\sum L_i'\right)$

ESEMPI - BIS



$m_1 = m_2$ $\quad \vec{q}_1 = m_1\vec{v}$ $\quad \vec{q}_2 = -m_2\vec{v}$

$\vec{V}_{cm} = 0 \Rightarrow \vec{q}_{cm} = 0$

$\vec{Q} = \vec{q}_{cm} = \vec{q}_1 + \vec{q}_2 = 0$

$\vec{L}_1 = 0 \quad (\vec{b}_1 \parallel \vec{v})$ $\quad \vec{L}_2 = b_2 \wedge (-m\vec{v}) = \underline{d \wedge (-mv)}$

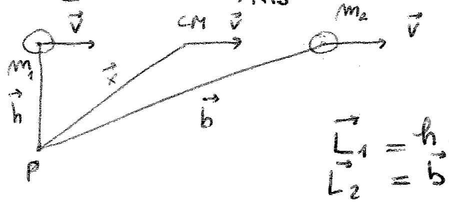
$\vec{L}_{cm} = 0$ $\quad \vec{V}_{cm} = 0$

$$\left.\begin{aligned} \vec{L}_1' &= -\frac{\vec{d}}{2} \wedge (m_1\vec{v}) \\ \vec{L}_2' &= \frac{\vec{d}}{2} \wedge (-m_2\vec{v}) \end{aligned}\right\}$$

rispetto al CM $\vec{L}' = \sum \vec{L}_i' = \vec{L}_1' + \vec{L}_2' = \underline{-\vec{d} \wedge m\vec{v}}$

in questo caso $\vec{L} = \vec{L}'$

ESEMPI - TRIS



$\overline{m_1 m_2} = d$ $\quad \vec{q}_1 = \vec{q}_2 = m\vec{v}$

$\vec{Q} = \vec{q}_{cm} = 2m\vec{v}$ $\quad \vec{V}_{cm} = \vec{v}$

$\vec{L}_1 = \vec{h} \wedge m\vec{v}$

$\vec{L}_2 = \vec{b} \wedge m\vec{v}$

$\vec{L}_{cm} =$

S'R' ⇒ $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}_{cm} = 0$

$\vec{L}_1' = \vec{L}_2' = 0$

$K_1 = K_2 = \frac{1}{2} m v^2$ $\quad \vec{K}_1' = \vec{K}_2' = 0$

CONCLUSIONE 1

Se $F_{ext} \simeq 0$ $\vec{q}_{in} = \vec{q}_f$ Si considera $\vec{q}$ del sistema rimane costante $\vec{q}$ complessiva, non $\vec{q}$ delle singole particelle

$q_{1in} \neq q_{2f}$ $\underset{\text{su } m_1}{\vec{F}_{media}} = \frac{\Delta \vec{q}_1}{\Delta t}$

$\Rightarrow$ se $F_x^{ext} \not\simeq 0 \Rightarrow \vec{q}_{xin} = \vec{q}_{xf}$; $\vec{q}_{yin} = \vec{q}_{yf}$

CONCLUSIONE 2

$\vec{v}$ iniziali note, voglio trovare $\vec{v}_f$

2 particelle $(n=2) \Rightarrow$ 4 incognite 2-D $2\vec{v}_f$ con 4 componenti

$\vec{q}_{in} = \vec{q}_f \Rightarrow$ 2 sole eq. problema mal posto, servono altri dati (v di una particella dopo l'urto)

CASI PARTICOLARI

a) URTO ELASTICO (oltre a conservarsi la qdm si conserva anche l'energia cinetica totale)

$K_{in} = K_f$

b) URTO COMPLETAMENTE ANELASTICO: dopo l'urto le due masse hanno la stessa velocità

RIEPILOGO

i) a meno di esistenza di vincoli $\sum \vec{F}^{ext} \cdot \Delta t \simeq 0$
$\Rightarrow \vec{q}_{in} = \vec{q}_f$

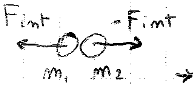
$\vec{q} = \sum \vec{q}_i$

in presenza di vincolo $V \neq 0$ $V \to \infty$ $\vec{V} \cdot \Delta t$ non trascurabile

$\sum \vec{F}^{EXT}$ NON TRASCURABILE

$\Rightarrow \vec{q}_{in} \neq \vec{q}_f$

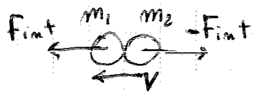
ii) si suppongono vincoli nulli:



su $m_1 \Rightarrow \Delta \vec{q}_1 = \int F_{int} \cdot dt = F^{int}_{media} \cdot \Delta t = \vec{J}^{med}$

$\frac{\vec{q}_{1f} - \vec{q}_{1in}}{\Delta t} = \vec{F}^{int}_{media}$

si suppone presenza di vincoli



su $m_1 \Rightarrow \vec{F}^{int}_{media} = \frac{\Delta \vec{q}_1}{\Delta t}$

su sistema $\Rightarrow \vec{F}^{ext}_{media} = \frac{\Delta \vec{q}}{\Delta t}$

- $F_{COULOMB}$ $\quad K = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon}$ $\quad \varepsilon$ relativament piccolo $\Rightarrow$ K relativamente grande

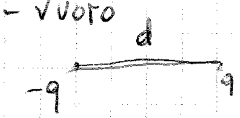
$\vec{F}_c$ in genere mai trascurabile

ε: COSTANTE DIELETTRICA → dipende dalla sostanza che riempie lo spazio

$$\underbrace{\varepsilon_{}}_{} = \underbrace{\varepsilon_0}_{\text{cost dielettrica nel vuoto}} \cdot \varepsilon_r$$

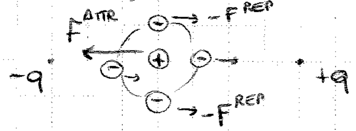
↖ cost. dielettrico nel mezzo

- VUOTO



$$F_c = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{d}\right)^2$$

- SUPPONIAMO DI AVERE MATERIA FRA LE DUE CARICHE (1 ATOMO)



forze repulsive sugli elettroni
forze attrattive sul nucleo

l'atomo si distorce portando la carica positiva da una parte mentre gli elettroni si dispongono in maniera simmetrica

$$\vec{F}_{c(q)} = -\vec{F}_{c(-q)} + \vec{F}_{(ATOMO)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{q}{d}\right)^2 + \vec{F}_{ATOMO} =$$

↷ contributo elettrostatico dell'atomo POLARIZZAZIONE

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{q^2}{d^2}\cdot\vec{\mu}_r$$ $\Rightarrow$ la costante dielettrica dipende dal materiale

D) DEFINIZIONI IMPORTANTI

- **CAMPO**: modo di descrivere il sistema indipendentemente dalla sonda. (ossia dipendente solo dalla sorgente)

se b: sonda $\qquad \vec{C} = \dfrac{\vec{F}}{b}$

$$\vec{E}_{GRAVITAZ.} = -\gamma\frac{M}{r^2}\cdot\vec{\mu}_r \qquad \vec{E}_{COULOMB} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r^2}\vec{\mu}_r$$

↳ generato da M $\qquad$ ↳ generato da q

$\vec{E}$: vettore ∥ a $\vec{F}$ $\Rightarrow$ le direzioni di $\vec{E}$ sono fasci di rette con centro in M (o q)

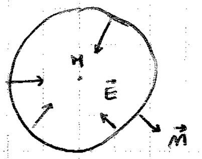
su m $\Rightarrow$ $\vec{F}_G = m\,\vec{E}_G$ $\qquad$ su Q $\Rightarrow$ $\vec{F}_c = Q\cdot\vec{E}_c$

TEOREMA DI GAUSS

definisce il flusso attraverso una superficie chiusa

DIM

M al centro della sfera



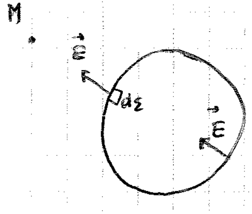
$\vec{E}_G \parallel \vec{n}$ $\Phi = \int_{SFERA} \vec{E}\cdot\vec{n}\cdot d\Sigma = \int \gamma \frac{M}{R^2} d\Sigma =$

$= \gamma\frac{M}{R^2}\int_{sfera} d\Sigma = \gamma\frac{M}{R^2}(4\pi R^2)$

$\Phi = 4\pi\gamma M$ se M situato al centro di Σ_{sfera}

NB - se M è ∀ punto interno $\Phi = 4\pi\gamma M$

- se M esterna alla sup. sferica $\Phi = 0$
per ogni $d\Sigma$ dalla parte opposta della sfera c'è un $d\Sigma'$ x cui $\vec{E}$ ha verso opposto alla superficie



$\forall\, d\Sigma$ $\vec{E}$ concorde con $\vec{n}$

$\exists\, d\Sigma' > d\Sigma$ $\vec{E}'$ discorde $\vec{n}$

$\vec{E}' < \vec{E}$ distanza da M maggiore

$d\Phi_1 = \vec{E}\cdot\vec{n}\cdot d\Sigma$

$d\Phi_2 = \vec{E}'\cdot\vec{n}\, d\Sigma'$ $d\Phi = d\Phi_1 + d\Phi_2 = 0$

$\Longrightarrow \Phi = 0$

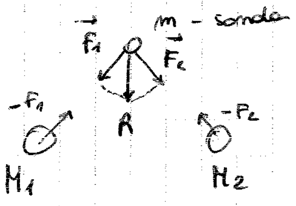
passando all'elettrostatica $M \to Q$ $\gamma \to \frac{1}{4\pi\varepsilon}$

$$\Phi = \frac{Q}{\varepsilon}$$

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

situazione con più masse è più cariche

il campo generato da più masse è la somma dei campi generati dalle singole masse

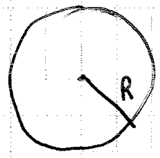


$\vec{E} = \frac{\vec{R}}{m} = \frac{\vec{F}_1}{m} + \frac{\vec{F}_2}{m} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$

$M = M_1 + M_2$ $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$

ESEMPI

A) CAMPO GRAVITAZIONALE DI UNA MASSA SFERICA DI RAGGIO R



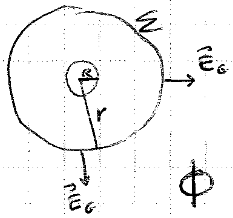
ρ = densità = derivata della massa rispetto al volume

$\rho = \frac{dM}{dV}$ [rapporto tra massa infinitesima e volume infinitesimo che la massa occupa]

se $\rho = cost \Rightarrow dM = \rho V \qquad M = \int \rho \, dV \qquad \boxed{M = \rho \cdot V}$

supponiamo $\rho = cost \quad \frac{M}{V} = \frac{M}{4/3 \pi R^3}$

si scelgono Σ simmetriche



$r_\Sigma > R \qquad \vec{E}_G \parallel \vec{m}$

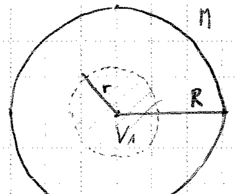
↳ è lo stesso in modulo su Σ

$$\Phi = \int_\Sigma \vec{E}_G \cdot d\Sigma \cdot \vec{m} = E_G \int_\Sigma d\Sigma = \boxed{E_G \, 4\pi r^2}$$

$$\Phi \overset{GAUSS}{=} 4\pi \gamma M^{INT} = \boxed{4\pi \gamma M}$$

$$\boxed{E_G = \gamma \frac{M}{r^2}}$$

Scegliamo Σ sferica con raggio $r < R$

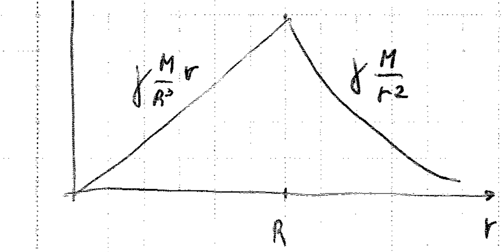


$\vec{E}_G \parallel \vec{m}$

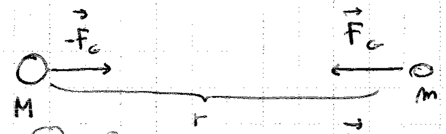
$$\Phi = \int_\Sigma \vec{E}_G \cdot \vec{m} \cdot d\Sigma = E_G \int_\Sigma d\Sigma = E_G \cdot 4\pi r^2$$

$$\Phi \overset{GAUSS}{=} \gamma \, 4\pi \underbrace{\rho \cdot V_1}_{M} = 4\pi \gamma \cdot \frac{M}{\frac{4\pi}{3} R^3} \cdot 4/3 \pi r^3$$

$$E_G \cdot 4\pi r^2 = 4\pi \gamma M \frac{r^3}{R^3} \qquad \boxed{E_G = \gamma \frac{r}{R^3} M}$$



CAMPO GRAVITAZIONALE



(descrive la forza di attrazione tra due corpi)

$$\vec{F}_G = \textcircled{m} \cdot a_m \qquad \vec{F}_G = -\gamma \frac{M\textcircled{m}}{r^2} \mu_r = m\vec{a}_m$$

massa inerziale

massa gravitazionale

$$m_{GRAVITAZ} \overset{?}{=} m_{INERZ}$$

fisicamente sono grandezze diverse, ma numericamente (⟹ misure sperimentali) sono identiche

$$-\gamma \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{\mu}_r = m\vec{a}_m$$

SR INERZIALE ⟹ anche M si muove $\quad -\vec{F}_G = M\vec{a}_M$

$\vec{r}$ legato al moto relativo di m rispetto a M

scelgo un S'R' con M fissa ⟹ S'R' non inerziale

↳ $\vec{F}_{APP} \neq 0$

STUDIO DEL MOTO RELATIVO DI m RISPETTO a M

$$\vec{a}_{rel} = \vec{a}_m - \vec{a}_M = \frac{\vec{F}_G}{m} + \frac{\vec{F}_G}{M} \qquad \vec{a}_M = -\frac{F_G}{M}$$

$$\vec{a}_{rel} = F_G \underbrace{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)}_{\frac{1}{\mu}} \qquad \boxed{\mu \cdot \vec{a}_{rel} = \vec{F}_G}$$

μ = massa ridotta (tiene conto delle forze apparenti, ha lo stesso ruolo)

$$\mu = \frac{mM}{m+M}$$

SR ⟹ $\vec{F}_G = m\vec{a}_m$

S'R' ⟹ $\vec{F}_G + \vec{F}_{APP} = m\vec{a}'_m \Rightarrow \mu \vec{a}'_m = \mu\,\vec{a}_{rel} = \vec{F}_G$

$\mu = \dfrac{mM}{m+M}$
- se $m << M$ $\quad \mu \sim m$
- se $m = M$ $\quad \mu = \dfrac{m}{2}$
- se $m >> M$ $\quad \mu \sim M$

ENERGIA CONSERVATIVA ⟹ $E_{mec} = cost.$

$$K + \mathcal{U} = E_{TOT}$$

$$K = \frac{1}{2} \mu v^2 \qquad \mathcal{U} = -\gamma \frac{Mm}{r}$$

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 \qquad \vec{V} = V_r \vec{\mu}_r + V_\theta \vec{\mu}_\theta \qquad \vec{V} = \frac{dr}{dt}\vec{\mu}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{\mu}_\theta$$

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

TRAIETTORIA

$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_\theta$ $\quad \vec{a}_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ COORD POLARI

$\frac{d\theta}{dt} = \boxed{\frac{L}{\mu r^2}}$ $\quad \frac{d}{dt} = \frac{d}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}$ (cambiamento di variabili)

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\cdot\boxed{\frac{L}{\mu r^2}} = \frac{L}{\mu}\cdot\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}$$

$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}$ $\quad \frac{dr}{dt} = -\frac{L}{\mu}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left[-\frac{L}{\mu}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right] = -\frac{L}{\mu}\frac{d}{d\theta}\left[\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{L}{\mu}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\frac{L}{\mu r^2} = -\frac{L^2}{\mu^2 r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{a_r} = -\frac{L^2}{\mu^2 r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) - \cancel{r}\,\frac{L^2}{\mu^2 r^{\cancel{4}\,3}}$$

TRAIETTORIA $\vec{r} = \vec{r}(t) < \begin{matrix} r = r(t) \\ \theta = \theta(t) \end{matrix}$ $\quad r = f(\theta)$

$\vec{F}_G = \mu\cdot\vec{a}_{rel}$ $\quad CI \Rightarrow t = 0 \quad r = r_0 \quad \theta = \theta_0$

$-\gamma\frac{Mm}{r^2}\vec{u}_r = \mu_r a_r \vec{u}_r + \mu a_\theta \vec{u}_\theta$ $\quad \vec{F}_\theta = 0 \Longrightarrow \vec{a}_\theta = 0$

lungo $\vec{u}_r$ $\quad -\gamma\frac{Mm}{r^2} = \mu\cdot\left[-\frac{L^2}{\mu^2 r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{L^2}{\mu^2 r^3}\right]$

$-\gamma Mm = -\frac{L^2}{\mu}\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right]$ $\quad \left(\frac{1}{r} = y\right) \Rightarrow$ EQ. DIFF.

$\boxed{\frac{d^2 y}{d\theta^2} + y = \gamma\frac{Mm}{L^2}\mu}$ $\quad$ soluz. particolare $\quad y =$ termine noto

$y = \gamma\mu\frac{M\cdot m}{L^2}$

OMOGENA ASSOCIATA

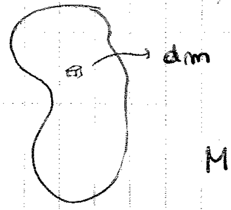
$\frac{d^2 y}{d\theta^2} + y = 0$ $\quad y = A\cos\theta$

$$\frac{1}{r} = A\cos\theta + \gamma\frac{Mm}{L^2}\mu$$

DINAMICA DEL CORPO RIGIDO

CORPO RIGIDO: insieme continuo di punti che mantengono una distanza fissa fra loro

(infiniti punti le cui distanze fra loro → 0)



$M = \int dm$ $\qquad \sum_{i=1}^{n} \rightarrow \int_V$ INTEGRALE DI VOLUME

Valgono tutte le equazioni valide per la dinamica nei sistemi di punti

$\vec{R}^{EXT} = M \cdot \vec{a}_{CM}$ $\qquad \vec{R}^{EXT} = \frac{d\vec{Q}}{dt}$ $\qquad \vec{Q} = M\vec{V}_{CM}$

$\vec{Q} = \Sigma q_i$

$\vec{M}^{EXT} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ $\qquad \vec{L} \neq \vec{L}_{CM}$

$\vec{L} = \vec{L}_{CM} + \vec{L}_i$

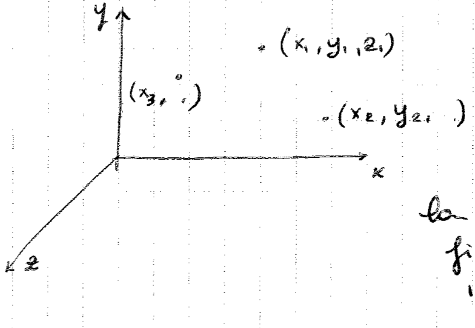
DISTANZA FISSA $\Rightarrow \vec{Q}, \vec{L}$ sono proprietà anche delle singole masse (in un sistema di punti indicavamo solo le caratteristiche globali)

$\vec{V}_{CM}, \vec{L}$ NOTI $\Rightarrow$ TROVO $\vec{V}_{dm}$

si può dare una formula a $\vec{L}$ $(\vec{L} = I \cdot \vec{\omega})$

GRADI DI LIBERTÁ: incognite necessarie per rappresentare posizione delle particelle = numero coord. spaziali particelle

- punto materiale $P(x,y,z)$ DF = 3 (degrees of freedom)
- sistema con N particelle $P_i(x_i, y_i, z_i) \Rightarrow 3N = DF$
- corpo rigido



d_{12} nota e fissa =

$$= \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2}$$

$P_2 \Rightarrow$ 3 coordinate + 1 condizione

la particella 2 deve stare a distanza fissa da 1 $\Rightarrow$ sta su una sfera centrata in 1 con $r = d_{12}$

$P_3 \Rightarrow$ 3 coord. + 2 condizioni $\quad d_{13} = d_{23}$

P_3 sta sull'intersezione di due sfere $\Rightarrow$ su una circonferenza

dalla particella 4 in poi non ci sono più gradi di libertà

$\Rightarrow$ le coordinate si ricavano fissando le distanze

$\Rightarrow$ per il corpo rigido $\boxed{DF = 6}$

CASO PARTICOLARE

$CM \in \gamma \Rightarrow \vec{V}_{CM} = 0 \Rightarrow$ coord. CM fisse

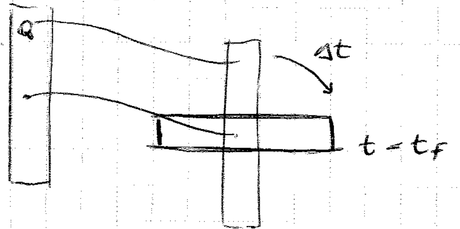
Il moto di rotazione si riduce a una rotazione degli assi

γ può rimanere costante nel tempo (→ ASSE FISSO)

oppure $\gamma = \gamma(t)$ (→ ASSE VARIABILE)

③ moto di roto-traslazione

combinazione di pura rotazione + pura traslazione



la traiettoria è la combinazione di una traslazione (curva) e di una rotazione (circonferenza)

$\gamma \perp$ al foglio nel CM

$$\vec{V}_Q = \vec{V}_{TR} + \underbrace{\vec{V}_T}_{\text{dovuto alla rotazione}} = \vec{V}_{TR} + \vec{\omega} \wedge \vec{R}_Q$$

considero CM

- se $CM \notin \gamma \Rightarrow V_{CM} = \vec{V}_{TR} + \vec{\omega} \wedge \vec{R}_{CM}$
  $\Rightarrow$ in genere $\vec{V}_{CM} \neq \vec{V}_{TR}$
- se $CM \in \gamma \Rightarrow \vec{V}_{CM} = \vec{V}_{TR}$ $(\vec{R}_{CM} = 0)$
  ↳ situazione vantaggiosa
- se $\vec{\omega} = 0$ si ha pura traslazione
- se Q generico $\in \gamma$ $\vec{V}_Q = \vec{V}_{TR}$

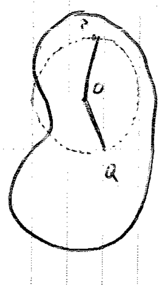
$$\vec{R}^{EXT} = \frac{dQ}{dt} \qquad \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

V_{CM} ↗ ω ↗

④ ASSE DI ROTAZIONE $\gamma = ?$ se passo $\gamma \to \gamma'$ che succede a $\vec{\omega}$?

$\gamma \to \gamma'$ $\vec{\omega} \to \vec{\omega}'$ $\vec{V}_{TR} \to \vec{V}_{TR}'$

$O \in \gamma$



$\vec{V}_P = \vec{V}_{TR} + \vec{\omega} \wedge \vec{OP}$ $V_Q = \vec{V}_{TR} + \vec{\omega} \wedge \vec{OQ}$

$\vec{V}_O = \vec{V}_{TR}$ $\vec{V}_P - \vec{V}_Q = \vec{\omega}(\vec{OP} - \vec{OQ}) = \vec{\omega} \wedge \vec{QP}$

1. $\Rightarrow d\vec{L}_\gamma \parallel \gamma$ $\qquad dL_\gamma = |dL|\cos\theta$

↳ $b\,dm\,V_{dm}$

$dL_\gamma = b\,dm\,V_{dm}\cos\theta$

NB $\quad b\cos\theta = R$, $\quad V_{dm} = \omega\cdot R$ $\Big\}$ $dL_\gamma = \omega R^2 dm$

↳ ha sempre lo stesso segno di $\vec{\omega}$

$$L_\gamma = \int_V dL_\gamma = \omega\int_V R^2 dm = \omega\underbrace{\int_V R^2\rho\,dV}_{\text{momento d'inerzia } I}$$

$L_\gamma = I\cdot\omega$

2. $\Rightarrow dL_\perp \perp$ a γ

$$dL_\perp = |dL|\cdot\sin\theta = b\,dm\,\omega R\sin\theta$$

$b\cdot\sin\theta$ è la distanza tra dm e γ

se vario dm ⇒ varia θ ⇒ varia segno

$L_\perp = \int_V \omega R\sin\theta\,dm$ ⇒ può essere 0 (caso fortunato)

→ somma di termini positivi e negativi

i) se $L_\perp = 0$ → MOTO SENZA PRECESSIONE

ii) se $L_\perp \neq 0$ → MOTO CON PRECESSIONE

CONCLUSIONI

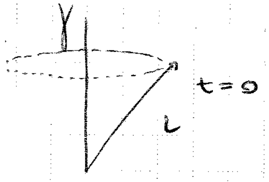
i) $\vec{L} = I\cdot\omega\vec{\mu}_\gamma + L_\perp\vec{\mu}_\perp$ $\qquad \vec{L} = I\cdot\vec{\omega} + L_\perp\vec{\mu}_\perp$

ii) CASO SENZA PRECESSIONE $\boxed{\vec{L} = I\cdot\vec{\omega}}$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I\cdot\frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

con precessione $\vec{L} \nparallel \vec{\omega}$ $\qquad \vec{\omega} \parallel \gamma \Rightarrow L \nparallel \gamma$

$\vec{L}$ è vettore che ruota intorno a γ



$\vec{L}$ descrive una circonferenza rispetto a γ

$\vec{L}, \vec{\omega}$ possono essere funzioni del tempo $\vec{L}(t), \vec{\omega}(t)$

$$K = \frac{1}{2} V_{TR}^2 \underbrace{\int_V dm}_{M_{TOT}} + \frac{1}{2} \omega^2 \underbrace{\int_V dm R^2}_{I}$$

$$K = \underbrace{\frac{1}{2} M V_{TR}^2}_{K_{TRASL}} + \underbrace{\frac{1}{2} I \omega^2}_{K_{ROT}}$$

* LAVORO

$$\Delta k = W$$

$$dk = dW$$

TEOREMA ENERGIA LAVORO

$$dW = dK_{TRASL} + dK_{ROT}$$

$$dW = \frac{1}{2} M\, 2 V_{TR}\, dV_{TR} + \frac{1}{2} I\, 2\omega\, d\omega$$

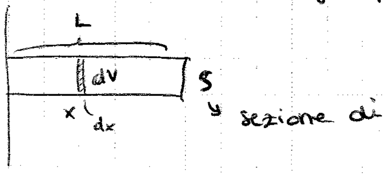
$$dW = \frac{1}{2} M\, 2 V_{TR} \frac{dV_{TR}}{dt} dt + \frac{1}{2} I\, 2\omega \frac{d\omega}{dt} dt =$$

$$= M \cdot a_{TR} \cdot V_{TR} \cdot dt + I \gamma\, \omega\, dt =$$

$$= \vec{R}^{EXT} \cdot d\vec{r} + I \gamma\, d\theta$$

$$dW = \underbrace{\vec{R}^{EXT} \cdot d\vec{r}}_{\text{lavoro dovuto a risultante forze esterne}} + \underbrace{\vec{M}\, d\theta}_{\text{lavoro dovuto ai momenti}}$$

a) ASTA SOTTILE con γ passante per un estremo

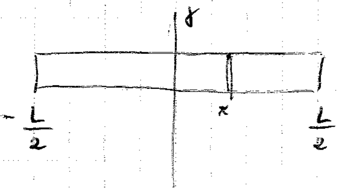


$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{S \cdot L}$$

$$dV = S\,dx \qquad I = \int_0^L \rho x^2 S\,dx \qquad I = \rho S \frac{x^3}{3}\Big|_0^L$$

$$I = \frac{m}{S \cdot L} \cdot S \frac{L^3}{3} = \frac{1}{3} m L^2$$

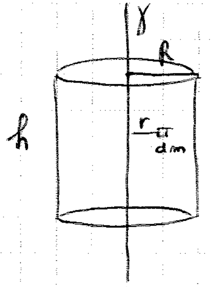
b) ASTA SOTTILE CON γ PASSANTE PER CM



$$I = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \rho S x^2 dx = \rho S \frac{x^3}{3}\Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}$$

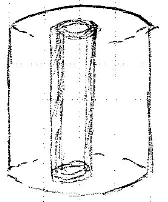
$$I = \rho S \frac{L^3}{12} = \frac{1}{12} m L^2$$

c) CILINDRO PIENO



$\gamma \equiv$ ASSE CILINDRO

Scelgo un dV racchiuso tra due circonferenze in modo che tutte le masse abbiano la stessa distanza r dall'asse γ



$$\begin{aligned} dV &= V_{est} - V_{int} \\ &= \pi (r+dr)^2 h - \pi r^2 h \\ &= \pi r^2 h + \pi dr^2 h + 2rdrh\pi - \pi r^2 h \\ &= 2\pi r\,dr\,h \end{aligned}$$

$$I = \int \rho r^2 dV = \int_0^R \rho r^2 2\pi r\,dr h = 2\pi \rho h \int_0^R r^3 dr =$$

$$= 2\pi \rho h \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} M R^2$$

$$\rho = \frac{M}{V} = \boxed{\frac{M}{\pi R^2 h}}$$

MOMENTO INERZIA

⇒ per CM

$$I_{\gamma'\equiv CM} = \int_V \rho r'^2 dV$$

$$I_\gamma = \int_V \rho r^2 dV = \int_V \rho r'^2 dV + \int_V \rho d^2 dV + \underbrace{2a\int_V \rho \overset{0}{x'} dV}_{\Sigma x' dm} + 2b\int_V \rho \overset{0}{y'} dV$$

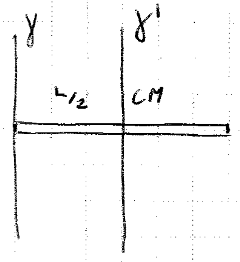
media pesata posizione dm del corpo ⇒ $x'_{CM} = 0$

$$\boxed{I_\gamma = I_{\gamma'} + m d^2}$$

d: distanza fra i due assi

CONSIDERAZIONI

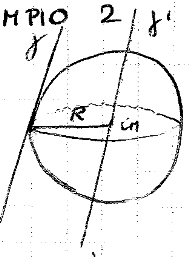
i) ESEMPIO 1



$$I_\gamma = I_{CM} + m d^2$$

$$I_\gamma = \frac{1}{12} m L^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} m L^2$$

ESEMPIO 2



$$I_\gamma = I_{CM} + m d^2$$

$$I_\gamma = \frac{2}{5} m R^2 + m R^2 = \frac{7}{5} m R^2$$

Se gli assi non sono // non si può applicare il teorema

ii) Valore di I minimo

$$I_\gamma = I_{CM} + \underset{>0}{m} \cdot \underset{>0}{d^2} \implies I_\gamma \text{ sempre } > I_{CM}$$

a) fissata la direzione dell'asse, I è minimo se l'asse passa per CM

b) $I_\gamma = I_{CM} + m d^2$ per $\forall \gamma$, stessa d ⇒ stesso I

TEOREMA KONIG

– per un oggetto che ruota e trasla in generale $\vec{L} \neq I\vec{\omega}$

Scelgo γ qualsiasi non passante per CM $\parallel$ γ' passante per CM con direzione fissa

$$\vec{L}_\gamma = \vec{L}_{\gamma'} + \vec{L}_{CM}$$

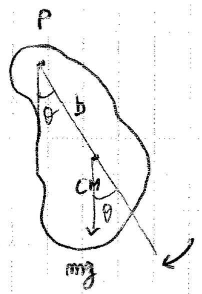
$L_\gamma = L_{\gamma' \equiv CM} + m V_{CM}\, d$ d: dist $(\gamma \to \gamma')$

$$I_\gamma W = (I_{CM} + W) + m(V_{TR} + w \cdot d)\, d$$

$$\boxed{\underbrace{I_\gamma W = I_{CM} W + m d^2 w}_{\text{STEINER}} + \underbrace{\boxed{m V_{TR} d}}_{\text{termine correttivo dovuto alla traslazione del corpo}}}$$

PENDOLO COMPOSTO

corpo rigido vincolato in P qualunque libero di ruotare attorno a un asse γ per P orizzontale



γ passante per P fisso $\Rightarrow$ $\vec{V}_{TR} = 0$
$\vec{a}_{TR} = 0$

$\Rightarrow$ pura rotazione

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ $L = cost = I_\gamma W$

$$I_\gamma \frac{d\vec{w}}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \vec{b} \wedge m\vec{g}$$

$I_\gamma\, \alpha = \underbrace{-}_{\text{di richiamo}} b\, mg \sin\theta$ $I_\gamma \frac{d^2\theta}{dt^2} = -b\, mg \sin\theta$

con piccole oscillazioni $\sin\theta \sim \theta$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{b\, mg}{I_\gamma}\theta$$

$\frac{d^2x}{dt^2} = -W^2 x$ MOTO ARMONICO

il moto del pendolo composto è armonico

$W^2 = \frac{b\, mg}{I}$ $T = \frac{2\pi}{W} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{bmg}}$

pendolo fisico

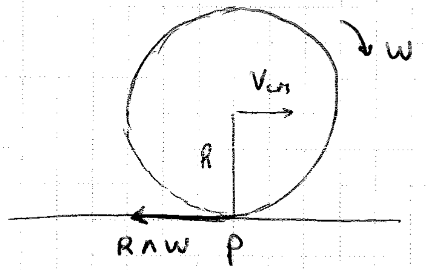
$I \to ml^2$ (massa puntiforme) $l \to b$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{lmg}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

MOTO DI ROTOLAMENTO

↳ moto di rototraslazione particolare per cui ∃ punto P generico che ha istantaneamente velocità nulla

$t \Rightarrow V_p = 0$
$t + dt \Rightarrow V_p \neq 0$ } a tempi diversi punti diversi hanno velocità nulla



γ passante per CM

$V_{CM} = V_{TR}$

il punto istantaneamente fermo è P (punto di contatto)

$\vec{V}_P = 0$ $\quad V_P = V_{TR} + \vec{\omega} \wedge \vec{R}$

$V_P = V_{TR} - \omega R$

$\boxed{V_{CM} = \omega R = V_{TR}}$ } caratteristica moto rotolamento

PROPRIETÀ

1) $K = K_{ROT} + K_{TRASL} = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} m V_{CM}^2 =$
$= \frac{1}{2} \underbrace{\left(I_{CM} + m R^2 \right)}_{I_P \,:\, \text{mom. inerzia rispetto a P}} \omega^2$

$K = K$ di pura rotazione risp. a P

ROTALAMENTO INTESO COME i) rotazione attorno γ + traslazione
ii) pura rotazione attorno al polo P

man mano che la sfera ruota cambiano i punti di contatto
⇒ P avanza nel tempo, è un asse istantaneo di rotazione

ii) ATTRITO CON IL PIANO
contatto col piano solo in P ma $V_P = 0 \Rightarrow$ ATTRITO STATICO
⇒ non compie lavoro, applicato su punto fermo, ∄ dr

iii) SLITTAMENTO

$V_{TR} = V_{CM} \neq \omega R$ non c'è rotolamento perfetto
CASO LIMITE $V_{CM} = 0$ (la ruota gira su se stessa e non riesce a imprimere V_{TR})

CLASSIFICAZIONE

Variabili estensive ⇒ non variano da punto a punto ma si sommano (es. V) (es. m)

Variabili intensive ⇒ i valori cambiano nei punti appartenenti al volume e non si sommano (es. T) (es. p)

③ STATO TERMODINAMICO

L'insieme dei valori delle variabili termodinamiche a un dato tempo

ES. gas perfetto, sistema chiuso

$p(t), V(t), T(t), m$ ↲ Stato $= \{p, V, T, m\}$ a $t = t_0$

ES. corpo elastico

$$S = \{\underset{\text{deformazione}}{\varepsilon}, \underset{\text{sforzo}}{\sigma}, T, m\}$$

④ EQUILIBRIO TERMODINAMICO

→ se non succede nulla dall'esterno p, V, T sono costanti nel tempo

- EQUILIBRIO INTERNO: le variabili termodinamiche devono avere lo stesso valore in tutti i punti
  (sempre garantito
- EQUILIBRIO CON L'AMBIENTE
  i) equilibrio meccanico – $p_{GAS} = p_{AMBIENTE}$
  – pareti rigide
  ii) equilibrio termico – $T_{SISTEMA} = T_{AMBIENTE}$
  iii) equilibrio chimico – no reazioni chimiche

⑤ EQUAZIONE DI STATO f

Se il sistema si trova in equilibrio ⇒ le variabili termodinamiche non sono indipendenti

⇒ esiste una funzione che fornisce una variabile in funzione delle altre

ES GAS PERFETTI $pV = nRT$

R ↳ cost $8.31 \frac{J}{kmol}$

ES SOLIDO ELASTICO $\sigma = K\varepsilon$

fuori dalle condizioni d'equilibrio l'equazione di stato non è più valida.

STATO = $\{p, V, T\}$

se la trasf. è reversibile ⇒ $T = f(p, V)$

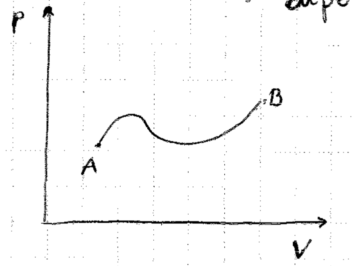
la T è espressa in funzione delle altre due

⇒ STATO = (p, V)

↳ 2-D

$$\begin{cases} p = p(t) \\ V = V(t) \end{cases} \qquad T = f(p, V)$$

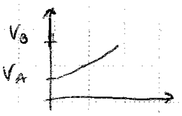
↳ dipendenza implicita dal tempo



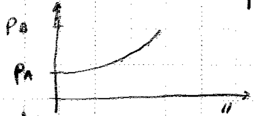
curva 2D

DIAGRAMMA DI CLAPEYRON

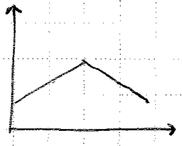
TRASFORMAZIONE REALE

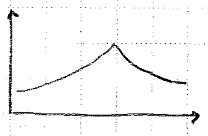


controllo $p(t)$ e $V(t)$



posso sempre definire "$p^{-1}(t)$" e "$V^{-1}(t)$"

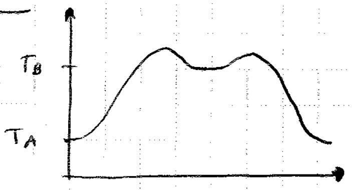




Se REVERSIBILE A → B → A

p e V seguono la stessa traiettoria

$T = f(p, V)$



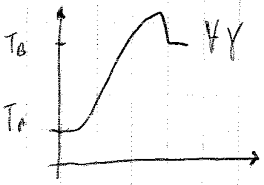
trasformazione identica sia all'andata sia al ritorno

conseguenze

$$\begin{matrix} Q_{AB} = -Q_{BA} \\ W_{AB} = -W_{BA} \end{matrix} \Bigg\} \begin{matrix} dQ_{AB} = -dQ_{BA} \\ dW_{AB} = -dW_{BA} \end{matrix}$$

se IRREVERSIBILE A → B → A

T indipendente da p, V



esistono infinite funzioni da T_B a T_A al ritorno

CALORE

esperimento Joule : $W \Rightarrow \Delta T$

si può produrre ΔT in altri modi. es: immergendo un corpo caldo nell'acqua

$\Delta T_{H_2O} \Rightarrow \Delta U$ generata da scambio di calore

(sist non non adiabatico) ($W_{MECC} = 0$)

stessa ΔT prodotta da

⇒ lavoro in condizioni adiabatiche

⇒ calore

Stessa $\Delta T \Rightarrow$ stessa ΔU

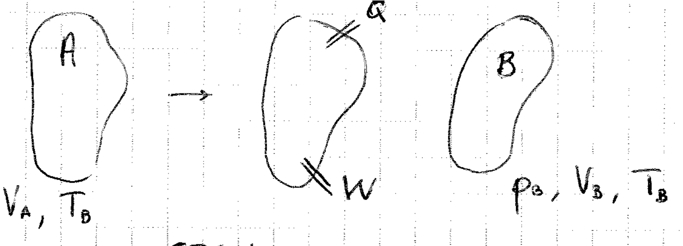
$$\begin{cases} \Delta U = -W \\ \Delta U = Q \end{cases}$$

⇒ Q e W sono entrambe delle energia $Q = -W$ udm $[J]$

BILANCIO DELL'ENERGIA

data una trasformazione di un sistema da uno stato all'altro

⇒ esistono scambi di energia



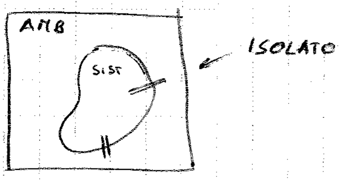
SEGNO

- Q ⇒ freccia uscente ⇒ $Q_{ceduto} < 0$
  ⇒ freccia entrante ⇒ $Q_{assorbito} > 0$
- W ⇒ freccia uscente ⇒ W prodotto dal sist. > 0
  ⇒ freccia entrante ⇒ W subito dal sist < 0

i) bilancio di energia esterno, con l'ambiente

$Q_{SIST} = -Q_{AMB}$

$W_{SIST} = -W_{AMB}$



ii) bilancio di energia interno al sistema

⇒ SISTEMA SCAMBIA ENERGIA (→ varia energia interna)

ΔU = ENERGIA SCAMBIATA

$\Delta U = Q - W$ ⇒ conservazione dell'energia

se ho: – calore assorbito $Q > 0 \Rightarrow \Delta U \uparrow$

– lavoro prodotto $W > 0 \Rightarrow \Delta U \downarrow$

I PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

conservazione dell'energia dal punto di vista termodinamico

① LAVORO ② CALORE ③ ENUNCIATO ④ APPLICAZIONI

LAVORO

⇒ scambio di energia meccanica
↳ mediato da forze

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

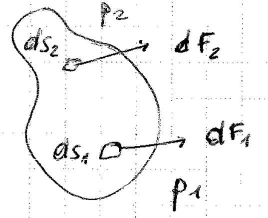
i) PRESSIONE ⇒ sostituisce le forze (scalare)

$$p \, d\vec{S} = d\vec{F}_m$$

↳ superficie infinitesima su cui $\vec{F}$ è applicata

$$d\vec{S} = \vec{n} \, dS$$

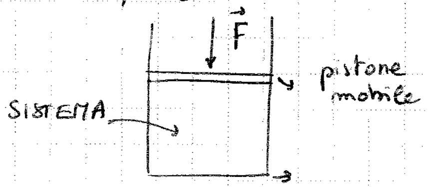
↳ versore ⊥ alla superficie



se F è distribuita in modo omogeneo

$$p = \frac{F}{S}$$

ii) LAVORO



Schiaccio il pistone con una $\vec{F}$ dall'esterno

$$\Rightarrow p_{EXT} = \frac{F_{EXT}}{S}$$

per effetto di $\vec{F}$ applicata il pistone si sarà spostato di un tratto dx

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} \qquad \vec{F}_{EXT} \parallel d\vec{x} \Rightarrow \cos\theta = 1$$

$$dW = F \cdot dx = p_{EXT} \, S \, dx = \boxed{p_{EXT} \cdot dV}$$

↳ p esercitata dall'ambiente sul gas

in termodinamica il lavoro è legato a una variazione di V (se non c'è l'equilibrio $p_{sist} \neq p_{ext}$)

OSSERVAZIONI

i) se $dV = 0 \Rightarrow dW = 0 \Rightarrow \int_\gamma dW = 0$
⇒ nell'ISOCORA → $W = 0$
($\Delta V = 0$)

ii) se $dV > 0$ V ↑ ⇒ $dW > 0$ compiuto dal sistema
se $dV < 0$ V ↓ → $dW < 0$ subito dal sistema

iii) se la trasf. è REVERSIBILE ⇒ $p_{EXT} = p_{AMB}$
↳ equilibrio

$$dW = p dV$$

CALORE

$Q \not\Leftrightarrow \Delta T$ in genere non c'è legame tra Q e ΔT

tutto ciò che non rientra nell'energia meccanica rientra nel calore CALORE ⇒ ENERGIA NON MECCANICA

classificazione

a) calore legato a ΔT

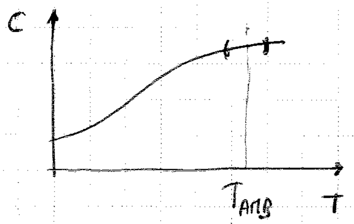
$$Q \overset{def}{=} m \cdot c \cdot \Delta T$$

↳ W meccanico necessario per avere stessa ΔT in modo adiabatico

Q ⇒ proporzionale a ΔT e alla massa

c ⇒ calore specifico
- proprietà del materiale
- funzione della temperatura

└ $c(T)$



per un solido a T_{AMB} c è approssimativamente costante

per i gas $c(T)$ dipende dal tipo di trasformazione subita
⇒ introduco calore infinitesimo

$m \to n$

c ⇒ calore specifico molare

$$dQ = n\,C(T)\,dT$$

$$Q = \int_\gamma n\,c(T)\,dT$$

↳ devo necessariamente conoscere $c(T)$

i) GAS PERFETTO per TRASFORMAZIONE ISOCORA

$c(T) = c_v$
- $3/2\,R$ gas monoatomico
- $5/2\,R$ gas biatomico

$$Q = n c_v \Delta T$$

ii) GAS PERFETTO per TRASFORMAZIONE ISOBARA

$c(T) = c_p$
- $5/2\,R$ per gas monoatomico
- $7/2\,R$ per gas biatomico

$$Q = n c_p \Delta T$$

b) calore in assenza di ΔT

i) CALORE LATENTE: associato a sostanze che stanno subendo una trasformazione di fase

per ogni sistema termodinamico esiste T_c per cui al di sotto di T_c la sostanza ha proprietà x

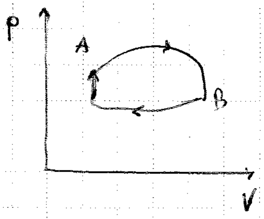
$T < T_c$ ⇒ proprietà x

$T > T_c$ ⇒ proprietà y

ES liquefazione / conduttore → superconduttore

CONSEGUENZE

i) TRASF. CICLICA



$$\Delta U = U_A - U_A = 0 = Q_{AA} - W_{AA}$$

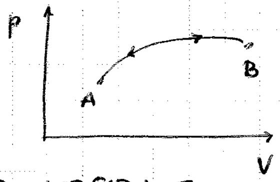
$$Q_{AA} = W_{AA} \qquad \boxed{W_{AB} \neq - W_{BA}}$$

$$Q_{scambiato} = W_{prodotto}$$

in senso orario (REVERSIBILE)

$$W_{AA} > 0 \implies Q_{AA} > 0 \quad \text{assorbito}$$

ii) ANDATA E RITORNO



$$\Delta U_{AB} = U_B - U_A = -(U_A - U_B) = -\Delta U_{BA}$$

$$-W_{AB} + Q_{AB} = -W_{BA} + Q_{BA} \;\cancel{\implies}\; W_{AB} = -W_{BA}$$

se REVERSIBILE

$$W_{AB} = -W_{BA}$$
$$Q_{AB} = -Q_{BA}$$

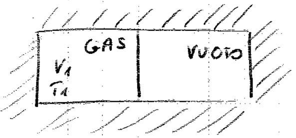
iii) $Q_{AB} = \Delta U_{AB} + W_{AB}$ strumento per calcolare Q

APPLICAZIONI

a) ESPANSIONE LIBERA DI GAUSS

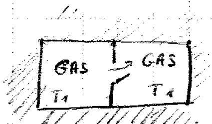
gas che espande nel vuoto in condizioni adiabatiche
trasf. irreversibile

APPARATO SPERIMENTALE $\qquad p_{EXT} = 0$ (vuoto)



apro un rubinetto fra i due scomparti

⇓



misuro T sperimentalmente

la trasformazione è adiabatica isoterma e irreversibile

STATO INIZIALE $\quad V_1, T_1 \implies p_1 = \dfrac{nRT_1}{V_1}$

STATO FINALE $\quad V_2 = 2V_1, T_1 \quad p_2 = \dfrac{nRT_1}{2p_1} = \dfrac{p_1}{2}$

$$Q = 0 \qquad W = \int \underset{0}{p_{ext}}\, \Delta V = 0 \qquad \Delta U = 0 = Q - W$$

interpretazione

i) V cambia, U cost. ⟹ U non dipende da V

ii) U non dipende da p

iii) <u>U dipende solo da T</u>, T cost U cost trovare T in funzione del Volume

↳ definire le equazioni della trasf. adiabatica

$$\frac{dT}{T} = -\frac{R}{c_v}\cdot\frac{dV}{V} \qquad \left[\frac{R}{c_v} = \frac{c_p - c_v}{cv} = \gamma - 1\right]$$

$$\frac{dT}{T} = -(+\gamma - 1)\frac{dV}{V} \qquad \int_{T_A}^{T_B}\frac{dT}{T} = \int_{V_A}^{V_B} -(\gamma-1)\frac{dV}{V} \qquad \ln\frac{T_B}{T_A} = -(\gamma-1)\ln\frac{V_B}{V_A}$$

$$\ln\frac{T_B}{T_A} = (\gamma-1)\ln\frac{V_A}{V_B} \qquad \ln\frac{T_B}{T_A} = \left(\ln\left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma-1}\right)$$

$$\frac{T_B}{T_A} = \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma-1} \qquad \boxed{T_B V_B^{\gamma-1} = T_A V_A^{(\gamma-1)}} \qquad T\cdot V^{(\gamma-1)} = cost$$

nell'adiabatica reversibile

CONSEGUENZE

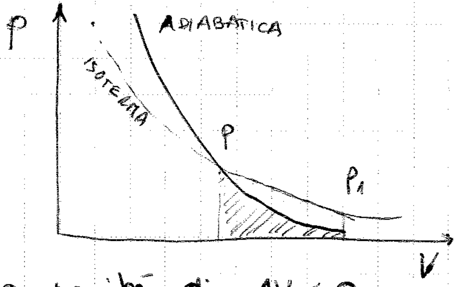
- $T = \frac{pV}{mR}$

$$\Rightarrow pV^{\gamma} = mR \Rightarrow pV^{\gamma} = k$$

$$\boxed{p_A V_A^{\gamma} = p_B V_B^{\gamma}} \qquad p = p_A V_A^{\gamma} V^{-\gamma} \Rightarrow p = f(V)$$

$pV^{\gamma} = cost$

IPERBOLE più inclinata (simile all'isoterma)



a parità di ΔV
$W_{ADIAB} < W_{ISOT}$

l'area sottesa è inferiore

a parità di $\Delta V < 0$

$|W_{ADIAB}| > |W_{ISOT}|$ ma $W_{ADIAB} < W_{ISOT}$

valori negativi

- $\gamma > 1 \Rightarrow pV^{\gamma} = k$ $\quad TV^{\gamma-1} = k'$ $\qquad \gamma - 1 > 0 \qquad V\uparrow \Rightarrow V^{\gamma-1}\uparrow$

$TV^{\gamma-1} = cost \Rightarrow T\downarrow, p\downarrow$

un'espansione adiabatica reversibile provoca diminuzione di T e p

ENERGIA $\Rightarrow V\uparrow \Rightarrow W > 0$

$T\downarrow \Rightarrow \Delta U < 0 \qquad \Delta U = -W$

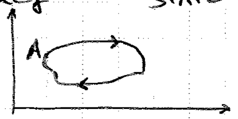
C) TRASFORMAZIONI PARTICOLARI IRREVERSIBILI

⇒ la definizione è la stessa di prima
⇒ ΔU la stessa indipendentemente dalla trasformazione

Q	$Q = \Delta U = mc_v \Delta T$	$\Delta U + p_{ext} \Delta V$	$\Delta U + W$	0
W	0	$p_{ext} \Delta V$ se $p_{ext} = cost$	$\int p_{ext}\, dV$	$-\Delta U = -mc_v \Delta T$
	ISOCORA	ISOBARA	ISOTERMA	ADIABATICA

D) TRASFORMAZIONI CICLICHE

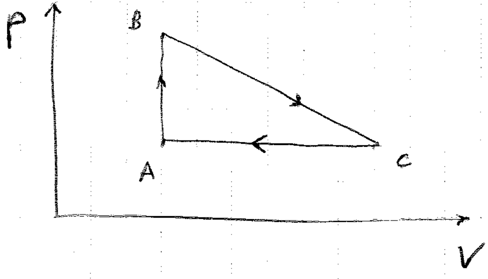
def: STATO INIZIALE ≡ STATO FINALE



- proprietà
  - → $W > 0$ se verso orario
  - → $\Delta U = U_A - U_A = 0 \quad \Rightarrow Q = W$
- macchine
  - a) converte calore in lavoro o viceversa
  - b) ripetibile ⇒ uso lo stesso sistema termodinamico per compiere più cicli
  - c) classificazione
    - i) $W > 0 \Rightarrow$ MACCHINA TERMICA
      assorbe Q, produce W
    - ii) $W < 0 \Rightarrow$ MACCHINA FRIGORIFERA
      $W < 0$ assorbito
      ↳ produco Q
  - d) sorgente/i ⇒ SIST. TERMODINAMICO (A → A) non cambia stato (→ cambia stato l'ambiente)
    ⇒ negli stati intermedi ⇒ interazione con ambiente

⇒ FASI DELLA TRASFORMAZIONE in cui l'ambiente assorbe calore
- FASI IN CUI NON CEDE CALORE
- FASI IN CUI CEDE CALORE

ESEMPIO

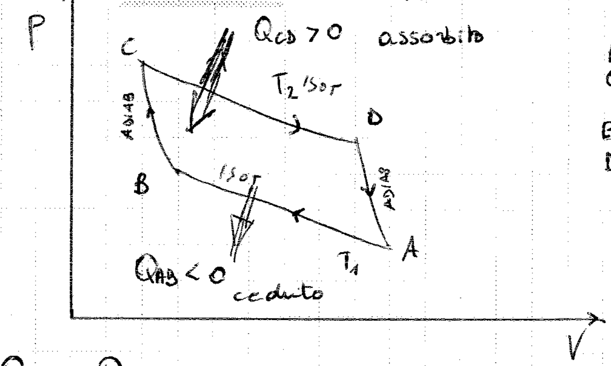


A → B isocora
B → C adiabatica reversibile
C → A isobara

$$\left.\begin{array}{l} \Delta U_{AA} = 0 \\ W_{AA} > 0 \quad Q_{AA} > 0 \end{array}\right\} \text{globalmente}$$

CICLO DI CARNOT (CICLO=MACCHINA)

- è una macchina termica ($W > 0$) che lavora fra due sorgenti a T cost ($T_1 < T_2$)
- ciclo reversibile: 2 ADIABATICHE + 2 ISOTERME



AB, CD } isoterme

BC, DA } adiabatiche reversibili

$Q_{BC} = Q_{DA} = 0$

- $Q_{AB} = W_{AB} = MRT_1 \ln \frac{V_B}{V_A} < 0$ $\qquad W_{AB} < 0$

  $\hookrightarrow \Delta U_{AB} = 0$

- $Q_{CD} = W_{CD} = MRT_2 \ln \frac{V_D}{V_C} > 0$

$$\Rightarrow \eta = 1 - \frac{|Q_{CED}|}{Q_{ASS}} = 1 - \frac{|Q_{AB}|}{Q_{CD}}$$

$$BC \Rightarrow T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1}$$

$$T_1 V_B^{\gamma-1} = T_2 V_C^{\gamma-1}$$

$$DA \Rightarrow T_1 V_A^{\gamma-1} = T_2 V_D^{\gamma-1}$$

faccio il rapporto

$$\left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_C}{V_D}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$$

$$Q_{AB} = MRT_1 \ln \frac{V_B}{V_A} = MRT_1 \ln \frac{V_C}{V_D} = -MRT_1 \ln \frac{V_D}{V_C}$$

DATI NECESSARI PER RISOLVERE IL CICLO DI CARNOT

- T_1, T_2
- due volumi qualsiasi dei 4

$$\Rightarrow \eta = 1 - \frac{|Q_{AB}|}{Q_{CD}} = \boxed{1 - \frac{T_1}{T_2}} \quad \text{con } T_1 < T_2$$