NUMERO: 898

DATA: 12/03/2014

APPUNTI

STUDENTE: Mazziotta

MATERIA: Fondamenti di Macchine

Prof. Casalino

CONCETTO DI MACCHINA → Insieme di organi meccanici (elementi fissi che scambiano energia tra loro sotto forma di lavoro (es. macchine a fluido in cui lo stantuffo scambia lavoro con il liquido contenuto).

Compito principale delle macchine: trasformare il lavoro in energia.

Obiettivo: trovare le forze che producono tale lavoro.

1ª CLASSIFICAZIONE MACCHINE
- → Macchina MOTRICE (turbina)
  ↓
  Il fluido compie lavoro sugli organi meccanici.
- → Macchina OPERATRICE (compresso
  ↓
  la macchina compie lavoro sul fluido.

2ª CLASSIFICAZIONE MACCHINE
- → Macchine TERMICHE (compressori, turbine)
  ↓
  Utilizzano gas, vapore la densità ρ è variabile.
- → Macchine IDRAULICHE (turbopompe)
  ↓
  Utilizzano liquidi. ρ costante.

CONVENZIONE USATA PER MACC. A FLUIDO:
- → LAVORO POSITIVO → Il fluido riceve lav
- → LAVORO NEGATIVO → Il fluido eroga lavo

3ª CLASSIFICAZIONE
- → Macchine VOLUMETRICHE (MACCHINA PERIODICA o ALTERNATIVA)
  ↓
  Hanno una camera a VOLUME VARIABILE per via del cilindro che scorre. Essendoci variazione di volume vi è uno scambio di lavoro.
- → TURBO MACCHINE (turbine/compressori) → MACCHIN DINAMIC
  ↓
  Hanno elementi rotanti e sfruttano la rotazione di tali elementi per la creazio di energia e lavoro.

RICORDO: 1° PRINCIPIO TERMODINAMICA:

$$de = \delta Q + \delta L$$

er convenzione si assume positivo tutto ciò che è ceduto al sistema al fluido).

o scopo è scrivere il 1° principio in forma EULERIANA e LAGRANGIANA.

1° PRINCIPIO IN FORMA LAGRANGIANA

iguarda un sistema chiuso il quale non scambia materia con l'esterno. Come sistema si considerano i GAS (sistemi a massa costante).

a forma lagrangiana si occupa di studiare l'evoluzione di tali sistemi da un tempo iniziale ad un tempo finale, concettualmente esprime il concetto di CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA.

Attraverso il lavoro di spostamento è possibile accelerare le molecole in modo ordinato, attraverso i fenomeni termici invece vengono accelerate in modo disordinato.

• ENUNCIATO DEL 1° PRINCIPIO:

In qualunque modo venga scambiato calore o lavoro la quantità di energia sarà pari alla variazione di energia totale del sistema

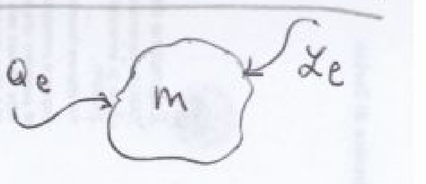
① $$Q_e + \mathcal{L}_e = \Delta\mathcal{E}$$

$\hookrightarrow \mathcal{E}_f - \mathcal{E}_i$

dove Q_e = calore fornito dall'ext al fluido;

$\mathcal{L}_e$ = lavoro fornito da ext a fl

l'energia $\mathcal{E}$ è composta da vari addendi:



$$\mathcal{E} = \underbrace{U}_{\text{ENERGIA INTERNA (TERMICA)}} + \underbrace{\mathcal{E}_c}_{\text{ENERGIA CINETICA MICROSCOPICA}} + \underbrace{\mathcal{E}_g}_{\text{ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE}} + \mathcal{E}_{cf}$$

$\mathcal{E}_{cf} \hookrightarrow$ ENERGIA LEGATA ALLE FORZE CENTRIFUGHE. (in caso di presenza di elementi rotanti)

Dividendo l'equazione ① per la massa m si ottiene:

$$\boxed{Q_e + L_e = \Delta e}$$

dove Q_e = CALORE massico

L_e = lavoro massico

Δe = energia massica.

Quindi l'energia massica è:

$$e = du + e_c + e_g + e_{cf}$$

Ricaviamo tutti i termini:

• du:

$dU = c_v\, dt$

er un gas perfetto: $\Delta U = C_v\, dt$

• e_c:

$e_c = \frac{1}{2}C^2$ dove C = velocità media del sistema o lineare

• e_g:

$e_g = gz$ dove z = quota

• e_{cf}:

a forza centrifuga $F = m\omega^2 r$ nel caso di moto su traiettoria circolare

on $v = \omega r$

↓

trascurando m, come fatto per le altre energie: Integro la forza per ottenere l'energia.

$$e_{fc} = \int_{R_i}^{R_f} \omega^2 r \, dr = \omega^2 \int_{R_i}^{R_f} r \, dr = \frac{1}{2}\left[(\omega R_f)^2 - (\omega R_i)^2\right]$$

Quindi il 1° principio in forma lagrangiana diventa:

$$\boxed{Q_e + L_e = C_v dT + \frac{c^2}{2} + gz + \frac{1}{2}\left[(\omega R_f)^2 - (\omega R_i)^2\right]}$$

1° PRINCIPIO IN FORMA EULERIANA :

Si individua un volume di controllo fisso e bisogna studiare il passaggio del fluido attraverso questo. Il fluido tra ingresso e uscita cambierà alcune delle sue caratteristiche.

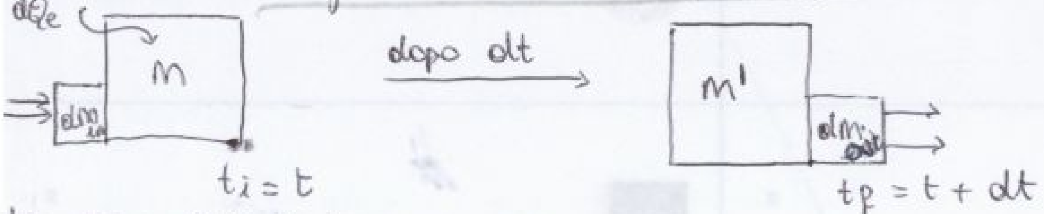
Noi adottiamo 2 semplificazioni fondamentali:

1) Si suppone che il fluido entri con caratteristiche tutte uguali (raggio, velocità, volume ecc...); ⇝ fluido con caratt. costanti

2) FLUIDO STAZIONARIO : $\frac{\delta}{\delta t} = 0$ ⇝ resta uguale all'entrata e all'usci

Possiamo dire che la forma euleriana si ricava dalla lagrangia applicata ad un opportuno volume di controllo.

Consideriamo il seguente volume di controllo:



dm = massa infinitesima che entra

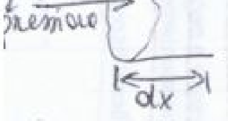
Scriviamo quindi il 1° principio in forma lagrangiana per il sistema in figura:

$$Q_e + \mathcal{L}_e = \Delta U + \Delta E_{c,g,cf} \rightsquigarrow \text{LAGRANGIANA}$$

$$dQ_e + \underbrace{d\mathcal{L} + d\mathcal{L}_{spost}}_{} = dU + dE_{c,g,cf} \quad ②$$

$d\mathcal{L}_{spost}$ rappresenta il LAVORO DI SPOSTAMENTO ovvero quel lavoro necessario a spingere l'aria dentro al volume e a tirarla fuori.

Proviamo a scrivere il lavoro di spostamento considerando un certo volumetto al quale è impartita una pressione P. Tale pressione provocherà il lavoro di spostamento:



$$\boxed{d\mathcal{L}_{spost_i} = p_i A_i \, dx_i = p_i \cdot dV_i}$$

ingresso FORZA dV_i

Ricordando la legge dei gas perfetti: $pdV = dmRT$

⇓

$$d\mathcal{L}_{spost_i} = p_i \underset{dm_i v_i}{dV_i} = dm_i R T_i = p_i v_i dm_i$$

↳ VOLUME SPECIFICO: $v_i = \frac{V_i}{m_i}$

$dQ_e + d\mathcal{L} = de$

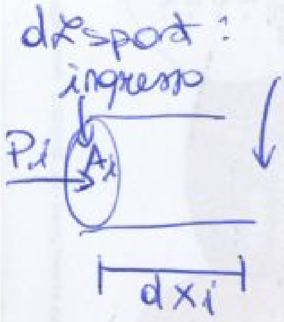
$dQ_e + d\mathcal{L}_i + d\mathcal{L}_{spost} = de$

$dQ_e + d\mathcal{L}_i + d\mathcal{L}_{spost} = d\mathcal{U} + dE_{c,g,cf}$

$\mathcal{U} = m \cdot dU$

$Q_e = m\,dE$

$d\mathcal{L}_{spost}$:



$F_i = P_i A_i$

$L_{spost} = P_i A_i dx_i = P_i dV_i =$

$= \cancel{P_i}\, dm_i RT = P_i\, dm_i v_i$

$dV_i = dv_i dm_i$

lavoro positivo: entrante! $dm_i = dm_e$

INGRESSO: $l_{spost} = p_i\, dm_i v_i = p_i v_i \dot{m}\, dt$

USCITA: $l_{spost} = -p_e\, dm_e v_e = -p_e v_e \dot{m}\, dt$

⇓

$dL_{spost} = \dot{m}(p_i v_i - p_e v_e)\, dt$

$dQ_e + d\mathcal{L}_i + \dot{m}(p_i v_i - p_e v_e)\, dt = d\mathcal{U} + d\mathcal{E}_{c,g,cf}$

⇓

moltiplico e divido per dt:

$$\frac{dQ_e}{dt}dt + \frac{d\mathcal{L}_i}{dt}\cdot dt + \dot{m}(p_i v_i - p_e v_e)\, dt = \frac{d\mathcal{U}}{dt}dt + \frac{dE_{c,g,cf}}{dt}dt$$

$$\dot{Q}_e^{dt} + P_i\, dt + \dot{m}(p_1 v_1 - p_e v_e)\, dt = \dot{m}(dU)^{dt} + \dot{m}(dE_{c,g,cf})\, dt$$

$$\dot{Q}_e + P_i + \dot{m}(p_i v_i - p_e v_e) = \dot{m}[(U + E_{c,g,cf})_{exit} - (U + E_{c,g,cf})_i]$$

⇓

$$\dot{Q}_e + P_i = \dot{m}[(U + E_{c,g,cf} + pv)_{exit} - (U + E_{c,g,cf} + pv)_i]$$

$U + pv \rightsquigarrow$ entalpia $= i$

⇓

$$\dot{Q}_e + P_i = \dot{m}[(i + E_{c,g,cf})_{exit} - (i + E_{c,g,cf})_i]$$

⇓

divido per $\dot{m}$ ⇒ $Q_e + L_i = \Delta i + \Delta E_{c,g,cf}$

Ora calcoliamo il lavoro di spostamento all'uscita :   sono uguali

$$d\mathcal{L}_{spost\,exit} = -\overbrace{p_e v_e}^{dV_e} dm_{exit} \Rightarrow d\mathcal{L}_{spost} = p_i v_i dm_i - p_e v_e dm_e = \dot{m}(p_i v_i - p_e v_e)dt$$

Nel caso stazionario la massa in ingresso è pari a quella di uscita

$\boxed{dm_i = dm_e = \dot{m}\,dt}$ dove $\dot{m}$ = PORTATA IN MASSA.

Avendo definito il lavoro di spost. possiamo tornare alla ②:

$$\boxed{dQ_e + d\mathcal{L} + d\mathcal{L}_{spost} = dU + dE_{c,g,cp}}$$

$\frac{d\mathcal{L}}{dt}$ = POTENZA

dividendo e moltiplicando per il tempo dt :

$\dot{m}dt = dm_e = dm_i$

$$\dot{Q}_e dt + \underset{\text{POTENZA}}{P_i} dt + \dot{m}(p_i v_i - p_e v_e)dt = \dot{m}[(U + E_{c,g,cp})_{exit} - (U + E_{c,g,cp})_i]dt$$

la semplifico tutta per dt :

$$\dot{Q}_e + P_i + \dot{m}(p_i v_i - p_e v_e) = \dot{m}[(U + E_{c,g,cp})_{exit} - (U + E_{c,g,cp})_i]$$

$$\dot{Q}_e + P_i = \dot{m}[(U + E_{c,g,cp} + p v)_{exit} - (U + E_{c,g,cp} + pv)_{in}]$$

Il termine $U + pv = i$ = ENTALPIA $di = dU + vdp$

$$\Downarrow$$

$$\dot{Q}_e + P_i = \underbrace{\dot{m}[(i + E_{c,g,cp})_e - (i + E_{c,g,cp})_i]}_{\dot{m}\Delta(i + E_{c,g,cp})}$$

↑
VARIAZ. TRA ING. E USCITA

se ci sono PIÙ INGRESSI O PIÙ USCITE :

$$\dot{Q}_e + P_i = \Sigma\, \dot{m}_{e_j}(i_j + E_j] - \Sigma \dot{m}_{i_K}(i_K + E_K)$$

Quando si ha UN SOLO INGRESSO E UN'UNICA PORTATA $\dot{m}$ semplifico ulteriormente dividendo per $\dot{m}$:

$$\boxed{Q_e + L_i = \overset{pv+U}{\Delta i} + \Delta E_{c,g,cp}}$$

dove L_i = LAVORO compiuto dalla macchina
→ EULERIANA sul fluido.

Per il GAS PERFETTO si ha :

$$\left.\begin{array}{l} \Delta U = c_v \Delta T \\ pv = R\Delta T \end{array}\right| \Rightarrow \Delta i = \Delta(U + pv) = c_v\Delta T + R\Delta T = c_p \Delta T$$

2° PRINCIPIO E FORME MISTE:

e 1° principio non dice su quale forma di energia devo agire per ariare la velocità piuttosto che la pressione in quanto quest'ultima nformazione si ricava dal 2° principio attraverso una grandezza detta ENTROPIA. → Serve per capire quale forma di energia è utile per variare la velocità uesto esprime il grado di disordine di una materia o meglio definisce univocamente il livello energetico quindi il salto di entropia tra due stati fissati (definisce la max energia scambiabile.)

Si ha che: • 2° PRINCIPIO → 1° p. in forma mista euleriana

$$\boxed{T\,\underset{\text{ENTROPIA}}{ds} = dU + p\,dv = di - v\,dp}$$ [F. EULERIANA CON ENTROPIA]

↳ IL GRADO DI DISORD. AUMENTA SE AUMENTA TEMP O VOLUME O SE DIMINUISCE LA PRESSIONE

arentesi: Perchè?

$$ds > \frac{\partial Q_{irr}}{T}$$

$$T\,ds > \partial Q_{irr}$$ ovvero $$T\,dS = \partial Q_{irr} + L_w$$

L_w ← Termine positivo

2° PRINCIPIO

LAVORO DELLE RESIST. PASSIVE ($v\,dp$ nel caso euleriano)

– FORMA MISTA 1° PRINCIPIO: (EULERIANA)

$$dQ_e + dL_e = dU + dE_{c,g,cf}$$

$$\boxed{dL_i - dL_w = v\,dp + dE_{c,g,cf}}$$

↳ Si ottiene combinandola con la forma euleriana del 1° principio.

TRASFORMAZIONE ISENTROPICA

Consideriamo macchine adiabatiche a fluido come gas perfetto: Considero il primo principio in forma euleriana: (MISTA)
Innanzitutto diciamo che la trasformazione è detta Isentropica sia perchè non varia l'entropia sia perchè non ci sono perdite quindi:

$$\boxed{S = \text{costante},\ dS = 0,\ dL_w = 0.}$$

Nel primo principio in f. euleriana avevamo che:

$$\boxed{di - v\,dp = T\,ds}$$ Divido per T:

$$c_p\frac{dT}{T} - \frac{v}{T}dp = dS = 0$$

$$c_p\frac{dT}{T} - R\frac{dp}{p} = 0$$

Ricorda che l'entalpia per i gas perfetti è pari a:
$di = c_p\,dT$ e $pV = mR^*T \Rightarrow \frac{V}{T} = \frac{mR^*}{p}$

$$R = mR^*$$

Integro:

$$c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - R\ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = 0$$

Ricordando che: $c_p - c_v = R$ e che $\frac{c_p}{c_v} = \gamma$ si ha:

$$P_2 v_2^{\gamma} = P_1 v_1^{\gamma} \quad \text{oppure} \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad \text{oppure} \quad \frac{v_2}{v_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

A grandi variazioni di pressione corrispondono piccole variaz. di temperatura

$Tds = di - v dp$

divido per T :

$ds = \frac{di}{T} - v\frac{dp}{T}$

Per gas perfetto $di = Cp\, dT$ / ~~vdp~~ $pv = MR^* T \Rightarrow \frac{v}{T} = \frac{MR^*}{P}$

$ds = Cp\frac{dT}{T} - v\frac{dp}{T}$

Essendo trasf isentropica : $ds = 0$

$$\Downarrow$$

$$Cp\frac{dT}{T} = v\frac{dp}{T}$$

$$Cp\frac{dT}{T} = \underbrace{MR^*}_{R}\frac{dp}{P}$$

$$\Downarrow$$

$$Cp\frac{dT}{T} = R\frac{dp}{P} \Rightarrow Cp \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = R \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

$$c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - c_p \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) + c_v \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$c_p\left(\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\cdot\frac{P_1}{P_2}\right)\right) = -c_v \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{c_p}{c_v}\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\frac{P_1}{P_2}\right) = -\ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

$$\gamma \cancel{\ln}\left(\frac{T_2}{T_1}\cdot\frac{P_1}{P_2}\right) = -\cancel{\ln}\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\gamma}\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\gamma} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{-1} \Rightarrow \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\gamma}\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\gamma} = \frac{1}{\left(\frac{P_2}{P_1}\right)}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\gamma} = \frac{\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{-1}}{\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\gamma} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{-\gamma}} \Rightarrow \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\gamma} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\gamma-1}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

TRASFORMAZIONE ADIABATICA (ISENTROPICA)

Trasformazione che deve svolgere la turbomacchina in presenza di compressori e turbine.

Queste hanno compressioni veloci (dell'ordine del centesimo) e non i è tempo a sufficienza affinchè gli scambi di calore siano onsiderati NON TRASCURABILI => per tale motivo è possibile considerar ati macchine ADIABATICHE : $Q_e = 0$

= non vi sono perdite $\boxed{L_w = 0}$

$\}$ $dS = 0$ ⇝ ISENTROPICA

Nasce dalle ipotesi appena dette.

n'ultima ipotesi ma non meno importante è quella di TRASCURARE LE VARIAZIONI DI ENERGIA CINETICA (solo momentaneamente perchè in realtà non è possibile trascurarle).

— — — STUDIO DI TURBINE E COMPRESSORI.

Introduciamo delle ipotesi per studiare le turbomacchine con l'ausilio del 1° principio in forma euleriana:

$$Q_e + L_i = \Delta i + \Delta E_{c,g,cf}$$ ⇝ PUNTO DI PARTENZA

o con entropia : $Tds = di - vdp$

-Ipotesi fondamentali per turbomacchine:

A) Trascurare EN. GRAVITAZIONALE ⇝ è piccola rispetto alle altre forme di energia, in generale in tutte le turbomacchine eccetto che nelle TURBOPOMPE nelle quali viene compresso un liquido. In turbine e compress. comunque $\Delta E_p = 0$;

B) studiare la turbomacchina in un sistema di riferimento fisso, cioè non devono esserci rotazioni, quindi si ha: $\Delta E_{cf} = 0$.

Una terza ipotesi aggiuntiva ma implicita è quella di considerare il CASO STAZIONARIO, ipotesi di base in quanto in assenza di questa non è possibile considerare la Ⓐ e la Ⓑ.

Ultima ipotesi:

Ⓒ TRASCURO VARIAZIONI DI ENERGIA CINETICA : ΔE_c.

Partendo da queste Hp il 1° PRINCIPIO diventa:

$$\boxed{\cancel{Q_e} + L_i = \Delta i + \Delta E_c}$$ ⇝ VARIANO SOLO ENTALPIA E ENERGIA CINETICA

ΔE_c: C'è se non posso trascurarla

Q_e: 0 ↑ macchina adiabatica

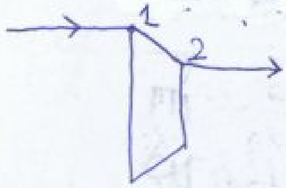
Nei compressori e le turbine $\boxed{\Delta E_c = 0 \text{ (PER ORA)}}$ quindi:

$$\boxed{L_i = \Delta i}$$ ⇝ ADIABATICA

Per gas ideale : $\boxed{L_i = c_p(T_2 - T_1)}$

COMPRESSIONE ADIABATICA.

- SCHEMA DEL COMPRESSORE :



Durante la compressione all'uscita ho una temperatura più alta.

Il lavoro è:

$\mathcal{L}_i = \mathcal{L}_c > 0$

La compressione può essere ritenuta con buona approssimazione adiabat

Lo scopo è trovare $\mathcal{L}_c$ nel caso ideale e reale.

Il lavoro abbiamo detto che in tal caso è:

$L_i = \Delta i$ ⇝ trascuro en. cinetica

In base alla macchina che si ha, si utilizza una trasformazione differente per passare da P_1 a P_2. Per vedere quale trasformazione utilizzo si traccia un diagramma costituito da due isobare rappresentate come tratti di esponenziale. [Nel piano T/S le isobare sono exp]

PARENTESI → isobara nel piano i - s.

$T ds = h - v\,dp$ → 0 perchè in un'isobara $dp = \emptyset$

$T ds = dh - \emptyset \Rightarrow \boxed{T = \frac{dh}{ds}}$

$\uparrow$ pendenza dell'esponenziale

$\boxed{\begin{array}{l} a^x = b \\ \ln_a b = x \end{array}}$

$h = c_p T \Rightarrow T = \frac{h}{c_p}$

$\Downarrow$

$\boxed{\frac{dh}{dS} = \frac{h}{c_p}} \Rightarrow \boxed{\frac{dh}{h} = \frac{dS}{c_p}} \rightsquigarrow \ln \frac{h}{h_0} = \frac{1}{c_p}(S - S_0)$

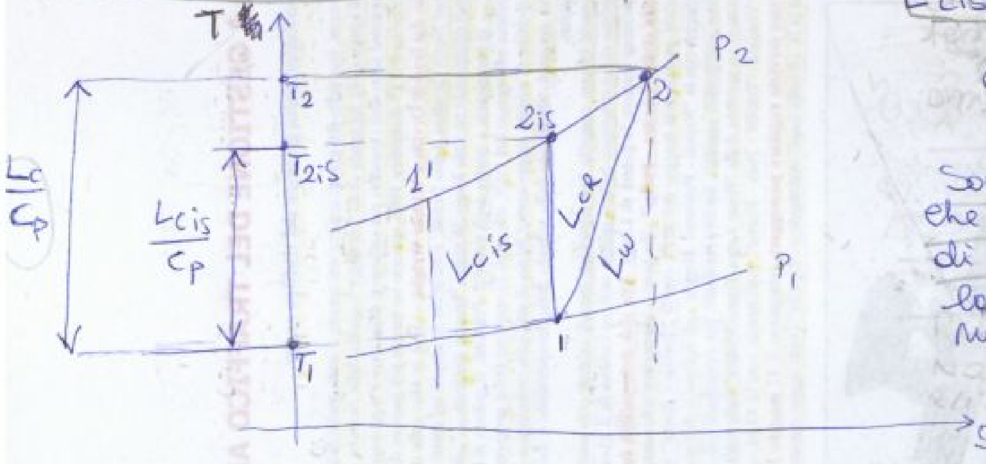
$\Downarrow$

$\boxed{\frac{h}{h_0} = e^{\frac{S - S_0}{c_p}}} \Rightarrow \boxed{h = h_0\, e^{\frac{S - S_0}{c_p}}}$

Immagino allora che il compressore comprima da P_1 a P_2 $(P_2 > P_1)$ e traccio le isobare

$\boxed{L_{cis} + L_{cR} + L_w = L_c}$

$\uparrow$ lav. di controrecupero



Sono tutte curve diverse che si ottengono traslando di una stessa quantità la 1ª curva. Man mano che ci si sposta a destra la distanza verticale tra due curve consecutive aumen

Punto 2is ⇝ PUNTO ISENTROPICO : punto in cui non vi sono perdite L_w

Per trovare il lavoro interno ~~bisogna~~ possiamo seguire due strade:

Ⓐ Calcolo del lavoro isentropico;

Ⓑ Calcolo del lavoro politropico.

} Due strade diverse per trovare lo stesso lavoro

Ⓐ LAVORO ISENTROPICO: $\boxed{L_i = \Delta i}$

$$L_{cis} = c_p (T_{2is} - T_1) \underset{\uparrow}{<} L_c = c_p (T_2 - T_1) \rightsquigarrow \text{IDEALE.}$$

$$\boxed{T_2 > T_{2is} \Rightarrow L_{cis} < L_c}$$

Sapendo che:

$$\boxed{T_{2is} = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = T_1 \beta^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

$$\rightarrow L_{cis} = c_p (T_{2is} - T_1) = = c_p \left(T_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - T_1\right) = = c_p T_1 \left(\beta_c^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right)$$

$$\boxed{\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

e sostituendo nel lavoro si ha:

$$\boxed{L_{cis} = c_p T_1 \left(\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right) = c_p T_1 \left(\beta_c^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right)}$$

dove:

$$\beta_c = \text{RAPPORTO DI COMPRESSIONE} = \frac{p_2}{p_1}$$

Per trovare il LAVORO DI COMPR. REALE (+ PERDITE) considero il RENDIM. ADIABATICO DI COMPRESSIONE:

$$\boxed{\eta_c = \frac{L_{cis}}{L_c}} \Rightarrow L_c = \frac{L_{cis}}{\eta_c} = \frac{c_p T_1 \left(\beta^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right)}{\eta_c}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{L_c = \frac{L_{cis}}{\eta_c} = \frac{1}{\eta_c} c_p T_1 \left(\beta_c^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right)}$$

dove $\boxed{T_2 = T_1 + \frac{L_c}{c_p}}$ ← temperatura reale. → VEDI GRAFICO

il quale è anche uguale a: $L_{c,re} = c_p (T_2 - T_1)$

Ⓑ TRASF. POLITROPICA (la uso sempre per trovare L_c e T_2)

Legge della politropica:

$$p v^m = \text{costante}$$

Per avere entropia costante devo avere $\boxed{m > \gamma}$.

Supponiamo che $1 \rightarrow 2$ sia politropica. Avendola possiamo subito ricavare:

$$\boxed{T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{m-1}{m}}} \qquad m > \gamma \text{ per } \Delta S > 0$$

Quindi:

$$\boxed{L_c = c_p T_1 \left(\beta_c^{\frac{m-1}{m}} - 1\right)}$$

Il problema di tale equazione è trovare m quindi per trovare il lavoro reale troviamo un'espressione migliore attraverso RENDIMENTO POLITROPICO (O IDRAULICO O DI PICCOLO STADIO):

$$\boxed{\eta_{yc} = \frac{L_c - L_w}{L_c}} \rightsquigarrow \text{lavoro effettuato} - \underset{\underset{L_w}{\uparrow}}{\text{perdite}}$$

conto di tutte le perdite tra cui il lavoro di controrecupero:

$$\eta_{yc} > \eta_c \qquad \frac{L_c - L_w}{L_c} > \frac{L_{cis}}{L_c}$$

Esplicitiamo η_{yc} attraverso la forma mista del 1° principio (f. eulerian

$$L_i = L_c = \int_1^2 v\,dp + \cancelto{0}{\Delta E_c} + L_w$$

Per una politropica possiamo scrivere: (devo trovare $\int v dp$)

$$p v^m = p_1 v_1^m$$

$$\Downarrow$$

$$v^m = \frac{p_1 v_1^m}{p} \Rightarrow v = v_1 \cdot p_1^{1/m} \cdot p^{-\frac{1}{m}}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_1^2 v\,dp = p_1^{1/m} v_1 \cdot \int_1^2 p^{-1/m}\,dp = \frac{m}{m-1} p_1^{1/m} v_1 \left[p_2^{\frac{m-1}{m}} - p_1^{\frac{m-1}{m}} \right] =$$

$$= \frac{m}{m-1} p_1 v_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right] = \frac{m}{m-1} R T_1 \left[\beta_c^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right]$$

$$\Downarrow$$

$$L_c - L_w = \frac{m}{m-1} R T_1 \left[\beta_c^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right]$$

Quindi il rendimento politropico diventa:

$$\eta_{yc} = \frac{L_c - L_w}{L_c} = \frac{\frac{m}{m-1} \cancel{R T_1} \cancel{\left[\beta_c^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right]}}{\frac{\gamma}{\gamma-1} \cancel{R T_1} \cancel{\left(\beta_c^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right)}} = \frac{\frac{m}{m-1}}{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{m-1}{m} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \left(\frac{1}{\eta_{yc}} \right) \qquad \boxed{c_p = \frac{\gamma}{\gamma-1} R}$$

$$\Downarrow \quad c_p T_1 \left(\beta_c^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right)$$

LAVORO REALE:

$$\boxed{L_c = c_p T_1 \left(\beta_c^{\frac{\gamma-1}{\gamma} \cdot \frac{1}{\eta_{yc}}} - 1 \right)} \qquad \boxed{T_2 = T_1 + \frac{L_c}{c_p}}$$

Ricapitolando i rendimenti ottenuti sono:

$$\eta_c = \frac{L_{c,is}}{L_{c,reale}} < \eta_{yc} = \frac{L_c - L_w}{L_c}$$

$$L_c = L_{cis} + L_w + \boxed{L_{cR}} \longrightarrow \text{lavoro di contro recupero}$$

$$\parallel$$

$$L_c = \int_1^2 v\,dp + L_w \qquad \Rightarrow L_c = \boxed{\int_1^{2is} v\,dp - \int_1^2 v\,dp} - L_w$$

$$L_{cis} = \int_1^{2is} v\,dp + 0$$

Il lavoro di controrecupero determina un'espansione del gas conseguente a un riscaldamento per effetto degli attriti.

Nel caso di fluidi incomprimibili (o per fluidi con β_c molto piccolo) $\rightarrow \eta_c = \eta_{yc}$

Bisogna fare gli stessi passaggi fatti per la compressione:

A) CASO ISENTROPICO:

- LAVORO ISENTROPICO:

$$L_{tis} = c_p(T_3 - T_{4is}) \qquad \text{dove } T_{4is} = \frac{T_3}{(P_3/P_4)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

- RAPPORTO DI ESPANSIONE:

$$\boxed{\beta_t = \frac{P_3}{P_4}}$$

[Al numeratore viene messa sempre la quantità più grande perché $\beta > 1$]

Posso quindi scrivere il lavoro in funzione di β_t:

$$\boxed{L_t = \eta_t c_p T_3 \left(1 - \frac{1}{\beta_t^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}\right)} \qquad \boxed{T_4 = T_3 - \frac{L_t}{c_p}}$$

dove η_t = RENDIMENTO ADIABATICO DI ESPANSIONE

$$\boxed{\eta_t = \frac{L_t}{L_{tis}}}$$

B) CASO POLITROPICO:

$$T_4 = \frac{T_3}{\beta_t^{\frac{m-1}{m}}}$$

dove $m < \gamma$ per[illegible] $\Delta S > 0$

- LAVORO POLITROPICO:

$$L_t = \eta_{yt} c_p T_3 \left(1 - \frac{1}{\beta_t^{\frac{m-1}{m}}}\right) \qquad T_4 = T_3 - \frac{L_t}{c_p}$$

dove

η_{yt} = RENDIMENTO POLITROPICO (O IDRAULICO):

$$\boxed{\eta_{yt} = \frac{\overset{\text{LAVORO REALE}}{L_t}}{L_t + \underset{\text{LAVORO CHE POTREI OTTENERE}}{L_w}}}$$

Come fatto prima, scrivo il 1° principio nella forma mista.

$$L_t = -\int_3^4 v\,dp - L_w$$

$$L_t + L_w = \int_4^3 v\,dp$$

Per la politropica si ha:

$$p v^m = p_3 v_3^m \implies v = p^{-\frac{1}{m}} p_3^{\frac{1}{m}} \cdot v_3$$

CICLO DI BRAYTON - JOULE (O CICLO A GAS).

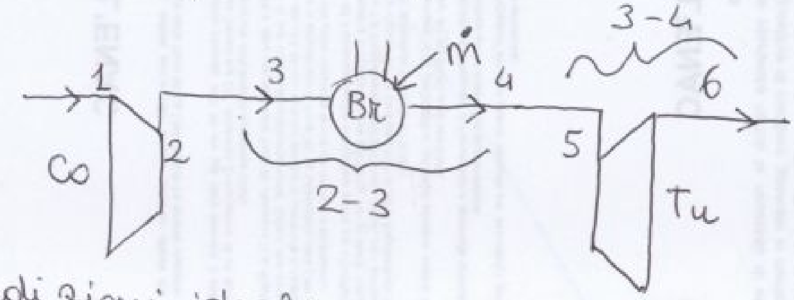
Mette insieme compressore e turbina supponendo di voler scaldare il fluido tra di essi.

Usato nelle turbine a gas o anche come motore di emergenza affiancato alla macchina a vapore, o ancora anche nelle centrali elettriche.

A) CICLO IDEALE:

→ 2 ADIAB + 2 ISOBARE

Generatore di gas = compressore + camera di combust + turbina



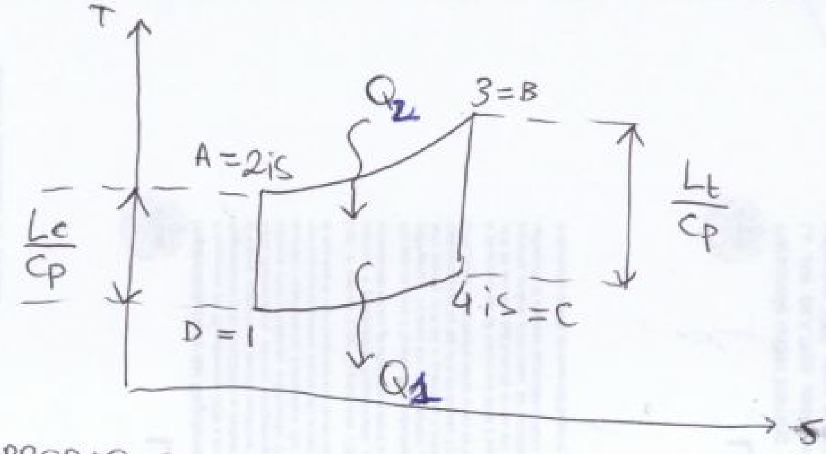
In condizioni ideali esso realizza il seguente ciclo:

1 → 2 Adiabatica reversibile (isentropica) [COMPRESSIONE];

2 → 3 Fornitura di calore isobara (p cost);

3 → 4 compress. adiabatica reversibile (espansione);

4 → 1 Sottrazione di calore isobara.



ISOBARA:
SALTO ENTALP = CALORE
ISENTROPICA:
SALTO ENTALP = LAV. MECC

- RAPPORTO DI COMPRESSIONE:

$$\beta_C = \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\gamma}$$

Noi vogliamo trovare il rendim. termodinamico del ciclo ideale

- Def. generale di rendimento:

$$\eta = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{Q_1}{Q_2}$$

Dove:

$$\left.\begin{array}{l} Q_1 = c_p(T_B - T_A) \\ Q_2 = c_p(T_C - T_D) \end{array}\right\}$$ salti entalpici: = calore fornito o ceduto → per isobara

~~Sostituendoli nella def. di rendimento ideale si ha:~~

~~$\eta_{id} = 1 - \frac{Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{(T_B - T_A)}{(T_C - T_D)}$~~

A questo punto ricordo che; se:

① Un ciclo è formato da 4 politropiche;

② le coppie di trasf. sono eguali;

③ Due trasf. sono isentropiche

si ha che:

Dalla legge dei gas perfetti (f. differenziale):

$$\underset{\substack{0\\ \uparrow \\ \text{isobara}}}{\cancel{\frac{dp}{p}}} = \frac{dT}{T} - \frac{dV}{V} \Rightarrow \frac{dT}{T} = \frac{dV}{V} \Rightarrow \frac{V_A}{V_B} = \frac{T_A}{T_B} \Big/ \frac{V_D}{V_C} = \frac{T_D}{T_C}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{T_A}{T_B} = \frac{T_D}{T_C}$$

Ma per via delle isentropiche:

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{costante}$$

$$\frac{p_1}{\rho_1^\gamma} = \frac{p_2}{\rho_2^\gamma} \Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \overset{\substack{\text{RAPP. DI COMPR.}\\ \downarrow}}{\beta_C} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^\gamma = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{p_A}{p_D} = \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_D}{V_A}\right)^\gamma = \left(\frac{V_C}{V_B}\right)^\gamma \Rightarrow V_D V_B = V_C V_A \Rightarrow \frac{V_A}{V_B} = \frac{V_D}{V_C}$$

Ma per le isobare abbiamo detto che:

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{T_A}{T_B} \quad e \quad \frac{V_D}{V_C} = \frac{T_D}{T_C}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{T_A}{T_B} = \frac{T_D}{T_C} \Rightarrow T_A T_C = T_D T_B$$

Quindi il rendimento ideale diventa:

$$\eta_{id} = 1 - \frac{T_C(1 - \cancel{T_D/T_C})}{T_B(1 - \cancel{T_A/T_B})} = 1 - \frac{T_C}{T_B} = 1 - \frac{T_D}{T_A} \qquad \eta_{carnot} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Confrontando col rendimento di Carnot mi accorgo che:

1) Il rendimento di entrambi i cicli è dipendente dalla temp. max raggiunta (T_2 per Carnot, T_B ($\sim$1300K) per Joule-Bra

2) Mentre η_{carnot} è calcolato nelle due temp. estreme T_1 e T_2 Quello di J-B sulle temperature ai capi delle isentropiche.

quindi:

$$\boxed{\eta_{J-B} < \eta_{carnot}}$$

Ora vogliamo scrivere il rendimento η_{J-B} in funzione di β_c.
Ricordo che per l'isentropica:

$$\frac{T_C}{T_B} = \left(\frac{P_C}{P_B}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{1}{\beta_c^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

$$\Downarrow$$

$$\eta_{id\,J-B} = 1 - \frac{1}{\beta_c^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \implies \eta_{id} \propto \beta_c$$

Adesso voglio trovare l'espressione del LAVORO UTILE ovvero il lavoro effettivamente estratto dal ciclo:

$$L_{utile} = L_T - L_C = Q_2 - Q_1$$

Per il caso ideale si ha:

$$L_{t,is} = c_p(T_B - T_C)$$

$$L_{c,is} = c_p(T_A - T_D)$$

Per dimostrare che $L_U = L_{t,is} - L_{c,is}$ applico il 1° PRINC DA 1 A 1 (PER TUTTO IL CICLO):

$$Q_e + L_i = 0$$

$$\Downarrow$$

$$L = -L_i = Q_1 - Q_2$$

Ma essendo le trasf da 2 → 3 e da 4 → 1 isobare ottengo:

$$L = Q_1 - Q_2 = c_p(T_B - T_A) - c_p(T_C - T_D)$$

Cambiando l'ordine degli addendi ho:

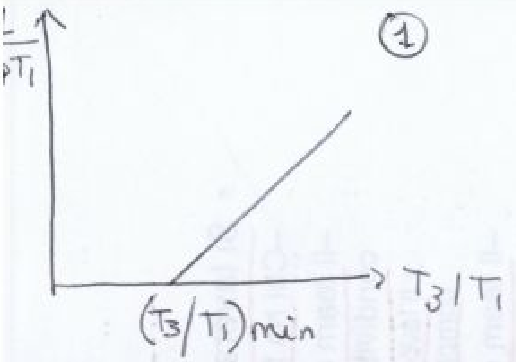
$$L = \underbrace{c_p(T_B - T_C)}_{L_t} - \underbrace{c_p(T_A - T_D)}_{L_c} = L_t - L_c = Q_1 - Q_2$$

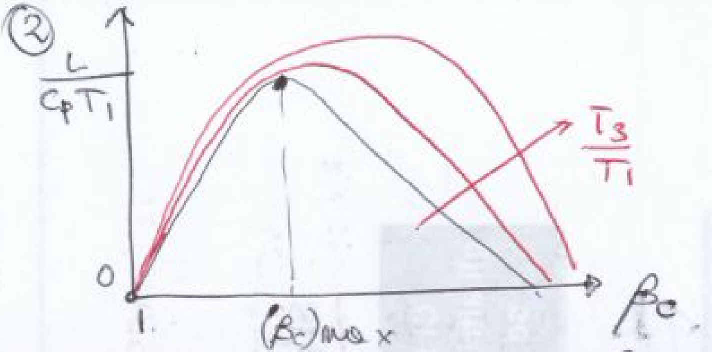
$$\Downarrow$$

$$\eta_{id} = \frac{L_t - L_c}{Q_1} = \frac{L_{utile}}{c_p T_D} = \frac{T_B c_p\left(1 - \frac{1}{\beta^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}\right) - c_p T_D\left(\beta^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right)}{c_p \, T_D = T_1}$$

$$= \frac{T_B}{T_D}\left(1 - \frac{1}{\beta^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}\right) - \left(\beta^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right) = \boxed{\left(\frac{T_B}{T_D} - \beta^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)\left(1 - \frac{1}{\beta^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}\right)}$$

Derivo risp. a β e poi pongo = 0
trovo il MAX di β





Abbiamo quindi scritto il lavoro utile come funzione β_c e $\tau = \frac{T_B}{T_D} = \frac{T_3}{T_1}$.

Per diagrammarlo su un grafico bidimensionale fisso $\tau = T_3/T_1$ come parametro libero. (grafico ②)

Dal grafico si evince che il lavoro utile si annulla se $\beta_c \doteq 1$ cioè se $P_2 = P_1 \rightarrow (\mathcal{L}_c = \mathcal{L}_t = \emptyset)$

tra parentesi ottengo 1 - 1

oppure per:

$$\beta_c = \left(\frac{T_3}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

essendo però per definizione:

$$\beta_c = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \Rightarrow T_2 = T_3 \Rightarrow T_4 = T_1$$

In altre parole il lavoro utile si annulla se non c'è compressione o combustione. La presenza di due ∅ implica un punto di estremo (di massimo) che si ottiene dalla:

$$\boxed{\frac{\partial L_u}{\partial \beta_c} = \emptyset}$$

Inoltre il rendimento è funzione solo di β_c:

Cresce al crescere di β_c
⇓
ciò vale anche per il ciclo Otto o meglio per tutti i cicli con
• 2 isentropiche + 2 trasf. uguali
ciò si spiega perché suddividendo in porzioni infinitesime un ciclo di questi, si ottiene un ciclo di Carnot.

Tutti questi cicli infinitesimi hanno uguale rendimento.

Volendo calcolare la variazione di entropia si ha che?

$$S_3 - S_2 = S_4 - S_1$$

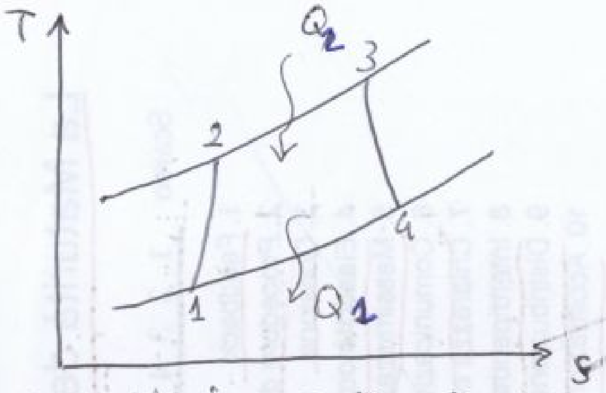
$$\Delta S = \int \overset{\rightarrow Q}{c_p \frac{dT}{T}} - \int \overset{\text{cosa è??}}{R \cancel{\frac{dp}{p}}} \rightarrow 0 \quad \text{perchè } 2\rightarrow 3,\ 1 \rightarrow 4 \text{ sono isobare}$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta S = c_p \ln \frac{T_3}{T_2} = c_p \ln \frac{T_4}{T_1}$$

$$TdS = di - vdp$$
$$dS = \frac{di}{T} - \frac{v}{T} dp$$
$$dS = \int c_p \frac{dT}{T} - \int \cancel{\frac{R}{p} dp} \rightarrow 0$$
$$\frac{v}{T} = \frac{R}{p}$$

2) CICLO REALE.



In tale ciclo il rendimento è funzione di β_c e della temperatura.

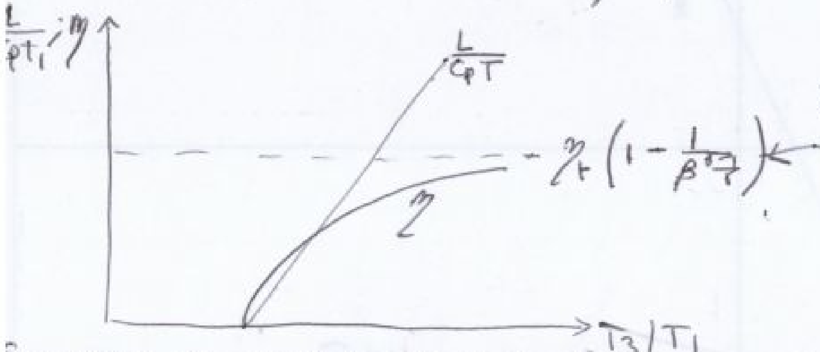
Non ci sono più isentropiche ma compress. e espansione avvengono con perdite, inoltre vi è ~~va~~ una caduta di pressione tra 2 e 3 (combustione) ma tale caduta la trascuriam e consideriamo $p_3 = p_2$ per semplif. i calcoli.

Si ha un aumento di entropia quindi le trasf. risultano spostat

$$\frac{L}{c_pT_1} = \frac{L_t - L_c}{c_pT_1} = \eta_t \frac{T_3}{T_1}\left(1 - \frac{1}{\beta_c^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}\right) - \frac{1}{\eta_c}\left(\beta_c^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right) =$$

$$= ⊛\left(\boxed{\eta_t \frac{T_3}{T_1} \cdot \frac{1}{\beta^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} - \frac{1}{\eta_c}}\right)\left(\beta^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right)$$

Su per giù è analogo al caso ideale => metto lavoro e rendimento sullo stesso grafico:

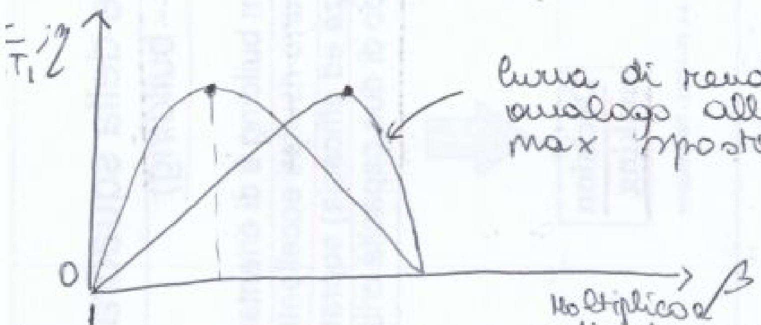


Al crescere di T_3/T_1 $\frac{L}{c_pT_1}$ tende a tale valore mentre il rendimento global cresce

ompare η_t perché quando $(T_3/T_1) \to +\infty$ => il lavoro della turbin diventa molto più grande di quello del compressore cosicché quest'ultimo diventa trascurabile [se non fosse trascurabile avrebbe un effetto predominante sul rendim. globale]

$$\left(\frac{T_3}{T_1}\right)_{min} = \frac{1}{\eta_t\eta_c}\beta^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Pongo ⊛ = 0



curva di rendimento ⇝ comportamento analogo alla curva di lavoro ma col max spostato a destra

Rendimento globale:

Moltiplico e divido per T_1

$$\eta = \frac{L}{Q_1} = \frac{L}{c_p(T_3 - T_2)} = \frac{L/c_pT_1}{\frac{T_3}{T_1} - \frac{T_2}{T_1}}$$

nel punto di lavoro max se faccio crescere β? :

All'inizio il lavoro non cambia ma cresce T_2 e T_3 resta costante (perchè mi sposto a destra). Crescendo T_2, Q_1 decresce e il rendim ~~[illegible]~~ aumenta o diminuisce?!?

Man mano che facciamo accettare alla turbina temperature più alte (per via di materiali migliori) useremo β_C più alti.

Temperature odierne ~ 1600 k con β ~ 40.

Ciclo ~~B~~ BJ ⇝ esempio di ciclo aeronautico

Servono per consid. il caso $\Delta E_c \neq 0$.

GRANDEZZE TOTALI O D'ARRESTO: $(i, T, p, \rho, S, c \neq 0)$

Si consideri una corrente di gas dentro un condotto con le seguent caratteristiche:

- corrente adiabatica $Q_e = \emptyset$;
- NO organi motori $L_i = \emptyset$.

Le grandezze totali o di arresto sono i valori assunti da ciascuna grandezza nell'ipotesi in cui la corrente sia arres isentropicamente.

Definiamo tali grandezze.

Il 1° principio in forma euleriana per un gas perfetto è:

$$Q_e + L_i = \underset{\left[\frac{1}{2}(0^2-c^2)\right]}{\underset{\uparrow}{\Delta E_c}} + \overset{0}{\cancel{\Delta E_{g,cp}}} + \underset{(i^0-i)}{\underset{\downarrow}{\Delta i}}$$

$$0 = i^0 - i + \frac{0^2-c^2}{2} \Rightarrow \boxed{i^0 = i + \frac{c^2}{2}}$$

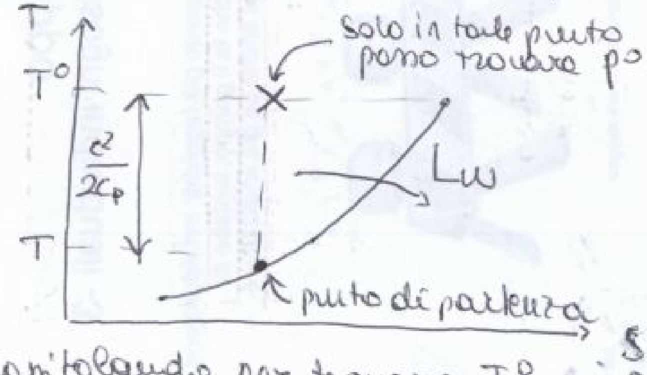
ENTALPIA TOTALE

Sapendo che:

$$i^0 = c_p T^0 \Rightarrow i^0 = i + \frac{c^2}{2} = c_p T + \frac{c^2}{2}$$

$$\boxed{T^0 = \frac{i^0}{c_p} = T + \frac{c^2}{2c_p}}$$

TEMPERATURA TOTALE ⇝ È indipendente dal tipo di trasformazione



Qualunque punto a destra del punto di partenza potrebbe essere un punto di arresto.

Ricapitolando per trovare T° e i° basta arrestare la corrente quind $L_i = Q_e = 0$ mentre per trovare p^0, ρ^0, v^0 bisogna arrestarla isentropicamente quindi anche $L_w = \emptyset$.

Troviamo le altre grandezze totali considerando che la corrente deve essere arrestata isentropicamente.
Quindi riprendendo la legge dell'isentropica si ha:

$$\frac{p^0}{p} = \left(\frac{T^0}{T}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \rightsquigarrow \text{1° METODO}$$

2° METODO ⇝ Utilizzo la velocità del suono:

$$C_S = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_{s=cost}} = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma R T}$$

[GAS PERFETTI: $\frac{p}{\rho} = RT$]

Per far comparire la velocità del suono riscrivo la T^0 come segue:

NUMERO DI MACH

$$\boxed{M = \frac{c}{c_s}} = \frac{c}{\sqrt{\gamma R T}} \Rightarrow M^2 = \frac{c^2}{\gamma R T}$$

[$C_p = \frac{\gamma}{\gamma-1} R$]

⇓

$$\boxed{T^0 = T + \frac{c^2}{2C_p} = T\left(1 + \frac{c^2}{2 \underbrace{\frac{\gamma}{\gamma-1} R}_{C_p} T}\right) = T\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)}$$

TEMPERATURA TOTALE

Attraverso la legge dell'isentropica si ha:

$$\frac{T}{p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} = cost \Rightarrow \frac{T^0}{T} = \left(\frac{p^0}{p}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \Rightarrow \frac{p^0}{p} = \left(\frac{T^0}{T}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

⇓

$$\boxed{p^0 = p\left(\frac{T^0}{T}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = p\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$

PRESSIONE TOTALE

Se $c = 0$ ⇒ GRAND STATICHE = GRAND TOT.

CONSIDERAZIONI SULLE GRAND. TOTALI:

Immagino di fare un'evoluzione da p_1, T_1, c_1 a p_2, T_2, c_2.
Considero $L_i = 0 = Q_e$.
Il primo principio visto prima diventa:

$$0 = i_2 - i_1 + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2}$$

⇓

$$i_2 + \frac{c_2^2}{2} = i_2^0 = i_1 + \frac{c_1^2}{2} = i_1^0$$

⇒ L'entalpia totale, per una trasf. adiabatica e senza lavoro è costante e lo è anche la temp totale

per Q, L = 0

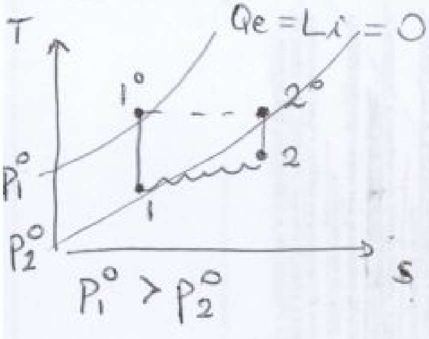
i^0, T^0 = costanti.

se anche $L_w = 0$ => p^0, ρ^0 ecc. = costanti ~> TRASF. ADIAB REVERSIBILE.

Quindi:

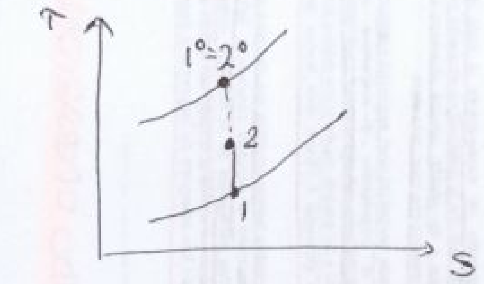
CASI LIMITE:

$L_w > 0$



$p_1^0 > p_2^0$

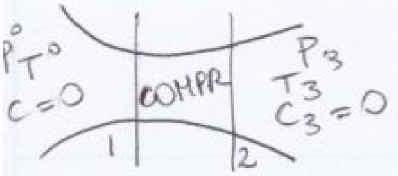
$L_w = 0$



STUDIO COMPRESS. E ESPANSIONE NEL CASO $\Delta E_c \neq 0$.

- COMPRESSIONE ADIABATICA PER $\Delta E_c \neq 0$:

Innanzitutto bisogna capire cosa fa un compressore:
Un compressore preleva aria e la sposta in un luogo a pressione più alta attraverso un opportuno condotto:



le grandezze totali in ① corrispondono alle grandezze totali di aspirazione perchè l'ipotesi di base è che non ci sono lavoro e scambi di calore.

stessa cosa avviene allo scarico in quanto non ci sono perdite quindi: $p_2^0 = p_3 = p_3^0$.

ciò fa dedurre che a noi importano le grandezze TOTALI.

⇓

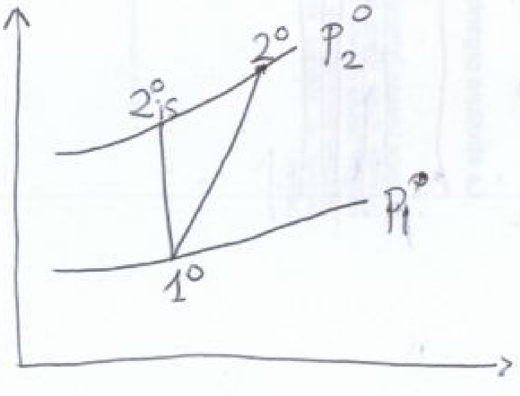
POUNTO DI VISTA TOTAL TO TOTAL => Parto da una grandezza tot. e arrivo ad un'altra grand. totale.

Il nostro scopo è trovare la velocità di uscita dal compressore alla luce di ciò so che:

$$L_c = c_p (T_2^0 - T_1^0) \quad [\text{PERCHÉ È ADIAB}]$$

Il lavoro isentropico sarà uguale a:

$$L_{c_{is}} = c_p (T_{2is}^0 - T_1^0)$$



Il COEFF. DI COMPRESSIONE sarà uguale a:

$$\beta_c' = \frac{p_2^0}{p_1^0}$$

Velocità e pressione camminano di pari passo inversamente (con la compressione si ha una diminuzione di velocità.

Si ha, per la legge dell'isentropica, che:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \Rightarrow \frac{T_{2is}}{T_2} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \Rightarrow T_{2is} = \beta_C^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \cdot T_2$$

Il lavoro di compressione sarà:

$$\boxed{L_C = \frac{1}{\eta_C} c_p T_1^0 \left(\beta_C^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right)} \quad e \quad \boxed{T_2^0 = T_1^0 + L_C / c_p}$$

Allo stesso modo si ha che:

$$\boxed{T_2^0 = T_1^0 \ \beta^{\frac{\gamma-1}{\gamma} \cdot \frac{1}{\eta_{yc}}}}$$

Ed il lavoro POLITROPICO è:

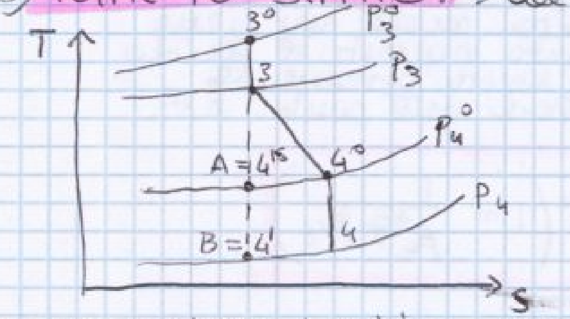
$$\boxed{L_C = c_p T_1^0 \left(\beta_C^{\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{1}{\eta_{yc}}} - 1\right)}$$

- ESPANSIONE ADIABATICA ⇝ Discorso più sottile.

Bisogna adottare due punti di vista:

A) TOTAL TO TOTAL; → All'uscita la turbina è collegata ad un altro organo;

B) TOTAL TO STATIC. → All'uscita non c'è nulla.



la turbina converte la pressione in velocità. Se io parto da fermo ad una pressione totale all'uscita avrò le stesse condizioni e valori in entrata. Quindi i valori di uscita dipendono solo dalle condizioni iniziali totali (di ingresso)

Ingresso della turbina ⇝ faccio riferimento alle condiz. totali di Ingresso.

Uscita della turbina ⇝ Valori dipendenti dalle condizioni all'uscita della turbina. Ad esempio se all'uscita ho semplicemente l'ambiente esterno, troverò la pressione di 1 bar [TOTAL TO STATIC] se invece a valle della turbina ho un'altra turbina ⇒ VISIONE TOTAL TOTOTAL.

Analizziamo i due casi:

A) TOTAL TO TOTAL:

$$L_{t,is} = c_p (T_3^0 - \underset{T_{4is}}{\underset{\parallel}{T_A}})$$

Come prima per la legge dell'isentropica si ha:

$$\left(\frac{T_A}{T_3^0}\right) = \left(\frac{P_4^0}{P_3^0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \Rightarrow T_A = T_3^0 \left(\frac{P_4^0}{P_3^0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

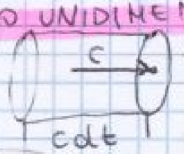
Chiamando: $\beta_t = \frac{P_3^0}{P_4^0} \Rightarrow T_A = \frac{T_3^0}{\beta_t^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$

PORTATA IN MASSA:

Definizione di portata = Massa che attraversa una determinata sezione nell'unità di tempo.

Noi consideriamo che le particelle abbiano tutte una velocità C ⊥ Area: [FLUSSO UNIDIMENSIONALE]

$\frac{\text{massa}}{\text{tempo}}$



$C \perp A$

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = \frac{\rho \underbrace{A\,c\,dt}_{\text{VOLUME}}}{dt} \Rightarrow \dot{m} = \rho c A$$ ⇝ DEFINIZIONE COMUNE DI PORTATA.

Se le velocità fossero diverse avrei una situazione più complicata, inoltre se la velocità fosse inclinata di un angolo α dovrei considerare la sua componente ⊥ Area.

Ciò che vogliamo fare è scrivere la $\dot{m}$ in un modo più utile.

In un ugello vedremo che ρ e V variano quindi bisogna trovare una scrittura alternativa delle grand. totali:

$$\dot{m} = f(p^\circ, T^\circ, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{press. statica}}}{p}) = f(p^\circ, T^\circ, M)$$

Troverò 2 espressioni della portata, una in funzione di $\varepsilon = \frac{p}{p^\circ}$ e una in funzione di M.

Ciò che noi sfruttiamo è il fatto che il legame tra grandezze totali e statiche è una trasf. isentropica:

$$s = \text{cost.}$$

Per la legge dell'isentropica:

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p^\circ}{\rho^{\circ\gamma}} \Rightarrow \boxed{\rho = \rho^\circ \left(\frac{p}{p^\circ}\right)^{1/\gamma}}$$ ⇒ DENSITÀ IN FUNZ. DEL RAPP. DELLE PRESSIONI.

Per trovare la velocità C uso il 1° Principio in forma mista:

$$\cancel{L_i} = \int v\,dp + \Delta E_c + \cancel{\Delta g, cf} + \cancel{L_w}$$

⇒ Elementi nulli perché stiamo considerando un'isentropica con $L_i = 0$ e senza perdite quindi $L_w = 0$.

$$\Downarrow$$

$$\int_{p_0}^{p^\circ} v\,dp + \frac{0^2 - c^2}{2} = 0$$

$$\downarrow$$

$$\frac{c^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{p^\circ}{\rho^\circ}\right)\left[1 - \left(\frac{p}{p^\circ}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right] \quad (*)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{C = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{p^\circ}{\rho^\circ}\right)\left[1 - \left(\frac{p}{p^\circ}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]}}$$ ⇒ VELOCITÀ IN FUNZ DEL RAPP. DELLE PRESSIONI

Avendo trovato ρ e c posso trovare la PORTATA in funzione del rapporto delle pressioni:

$$\boxed{\dot{M} = \frac{p^\circ A}{\sqrt{p^\circ/\rho^\circ}} \cdot \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{p^\circ}{\rho^\circ}\right)^{\frac{2}{\gamma}}\left[1 - \left(\frac{p}{p^\circ}\right)^{\frac{\text{[illegible]}}{\gamma}}\right]}}$$

(*) DIMOSTRAZIONE:

$$\rho = \rho^0 \left(\frac{p}{p^0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \qquad \frac{c^2}{2} = \int_p^{p^0} \frac{1}{\rho}\, dp$$

$$\frac{c^2}{2} = \int_p^{p^0} v\, dp$$

$$\frac{c^2}{2} = \int_p^{p^0} \frac{1}{\rho^0} \left(\frac{p}{p^0}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} =$$

$$\frac{1}{\rho^0} \cdot (p^0)^{\frac{1}{\gamma}} \int_p^{p^0} p^{-\frac{1}{\gamma}} dp = p^{0\,1/\gamma} \cdot \overset{X}{\boxed{\frac{1}{\rho^0}\, \frac{\gamma}{\gamma-1}}} \left[(p^0)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - (p)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] =$$

$$= X \left[(p^0)^{\frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma}} - (p)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} (p^0)^{1/\gamma} \right] =$$

$$p^{0\,\frac{\frac{1}{\gamma}}{-1}} = p^{0\,\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \left(\frac{1}{p^0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

$$= X \left[p^0 - (p^0)^{1/\gamma} \cdot (p)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] = X p^0 \left[1 - \boxed{(p^0)^{\frac{1}{\gamma}-1}} \cdot p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] =$$

$$= X p^0 \left[1 - \left(\frac{p}{p^0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] = \frac{p^0}{\rho^0} \frac{\gamma}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{p}{p^0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{c = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{p^0}{\rho^0}\right) \left[1 - \left(\frac{p}{p^0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}}$$

PORTATA IN FUNZIONE DEL RAPPORTO p/p^0:

$$\dot{m} = \rho A c = \rho^0 \left(\frac{p}{p^0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \cdot A \cdot \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{p^0}{\rho^0}\right) \left[1 - \left(\frac{p}{p^0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]} =$$

$$= \rho^0 A \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \cdot \left(\frac{p^0}{\rho^0}\right) \left[\left(\frac{p}{p^0}\right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left(\frac{p}{p^0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{2}{\gamma}} \right]} =$$

$$= \boxed{\rho^0 A \cdot \sqrt{\frac{p^0}{\rho^0}}} \cdot \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left[\left(\frac{p}{p^0}\right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left(\frac{p}{p^0}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \right]} =$$

$$\boxed{= \frac{\rho^0 A}{\sqrt{\rho^0/p^0}} \cdot \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left[\left(\frac{p}{p^0}\right)^{2/\gamma} - \left(\frac{p}{p^0}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \right]}} = \boxed{\frac{p^0 A}{\sqrt{p^0/\rho^0}} \cdot \sqrt{\ - - -}}$$

$$A \cdot \sqrt{(\rho^0)^2 \frac{p^0}{\rho^0}} = A \cdot \sqrt{p^0 \rho^0} = p^0 A \cdot \sqrt{\frac{\rho^0}{p^0}} = \frac{p^0 A}{\sqrt{p^0/\rho^0}}$$

Per gas perfetto:

$$\dot{m} = \frac{p^0 A}{\sqrt{RT^0}} \cdot \sqrt{\ - - -}$$

Dai grafici precedenti si evince che man mano che $\frac{p}{p_0}$ decresce si ha un aumento di $\dot{m}_{corr}$ fino al max in $\left(\frac{p}{p_0}\right)_{cr} \equiv M = 1$ infine la $\dot{m}$ continua a decrescere fino a $\left[\left(\frac{p}{p^0}\right) = 1\right] \equiv (M = c = \emptyset)$

Tali grafici descrivono l'andamento della portata per una corrente qualunque in un condotto generico, limitatamente a un punto (o una sezione). Già da questi grafici possiamo trarre qualche considerazione su come variano certe grandezze se ne fissiamo altre e soprattutto posso capire come deve variare la sez. del condotto quando voglio avere un aumento piuttosto che diminuz. di portata.

— — — — — — — — — — — — — —

UGELLI E DIFFUSORI

Condotti o tubi a pareti fisse (in t) e a sezione variabile (in x)
Le pareti fisse implicano lavoro nullo quindi l'ugello non è propriamente una macchina perché non scambia lavoro ma converte l'entalpia interna del fluido in en. cinetica.:

$$\varepsilon \leftrightarrow \varepsilon_K$$

Distinguo:

- UGELLI (EFFUSORI) dove $p\downarrow$, $c\uparrow$;
- DIFFUSORI: $p\uparrow$ $c\downarrow$.

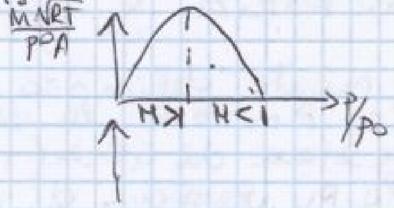
Per studiarli parto da 2 ipotesi fondamentali:

1ª) FLUSSO STAZIONARIO ⤳ Massa invariata tra le due sezioni.
Portata uguale in tutti i punti; $\frac{\partial}{\partial t} = \emptyset$

2ª) FLUSSO UNIDIMENSIONALE ⤳ Uniforme su piani ⊥ a x, in ogni punto c è parallela a x. $\frac{\partial}{\partial x} \neq \emptyset$ $\left(\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = \emptyset\right)$
Se la sezione si allarga la velocità non rimane ⊥ alla sezione.

COME VARIANO LE GRAND. FONDAM. ALL'INTERNO DELL'UGELLO?
In realtà lo abbiamo già visto attraverso i grafici.
Il ② grafico ha $\dot{m}$ portata ∝ a ρc:

$$\frac{\dot{m}\sqrt{R^* T^0}}{p^0 A} = \frac{\rho c \sqrt{R^* T^0}}{p^0} = f(\varepsilon) = f(M)$$



- CASO SUBSONICO: [M<1]:

· Prevale sempre l'aumento o diminuzione di c rispetto a quello di ρ.
Il Mach può salire solo fino al punto critico! Nel caso di ugello converg. può ragg. al max valore 1 in quanto per andare oltre serve un divergente.
Se l'Area aumenta (ugello divergente) la portata corretta diminuisce e dobbiamo spostarci verso destra ⇒ pressione aumenta, Mach diminuisce:

- UGELLO SUBSONICO: $A\downarrow$; $p\downarrow$, $M\uparrow$; $c\uparrow$; $T\downarrow$; $\rho\downarrow$; $\rho c\uparrow$
- DIFFUSORE SUBSONICO: $A\uparrow$, $p\uparrow$, $M\downarrow$; $c\downarrow$; $T\uparrow$; $\rho\uparrow$; $\rho c\downarrow$

Si noti che a moto subsonico l'aumento o diminuzione di velocità prevale rispetto a quello di ρ.
Quindi nel caso subsonico si ha un aumento di velocità, a parità di $\dot{m}$, e una diminuzione di sezione.
È più adatto quindi un ugello convergente il quale è presente nei comuni motori a getto (turbogetto e turbofan)

FLUSSO REVERSIBILE ⇒ TRASCURO LE PERDITE :

$S_m = S_t \rightsquigarrow S$ cost

Per definizione però $s = s^0 \Rightarrow \begin{cases} T_m^0 = T_t^0 \\ S_m^0 = S_t^0 \end{cases} \Rightarrow p_m^0 = p_t^0 \,/\, \rho_m^0 = \rho_t^0$

Fatte tali ipotesi bisogna determinare la PORTATA. In realtà è stata già calcolata nelle pagine precedenti, bisogna solo adattarla in funzione di $\frac{p}{p^0}$ (o di M) al caso di interesse.
In particolare io voglio conoscere le grandezze di gola, quindi si ha:

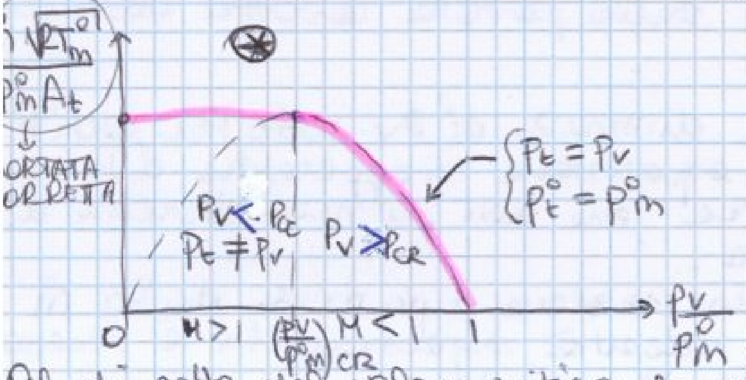
$$\dot m = \frac{p^0 A}{\sqrt{RT^0}} \cdot \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\left[\left(\frac{p}{p^0}\right)^{2/\gamma} - \left(\frac{p}{p^0}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right]} =$$

$$= \frac{p_t^0 A_t}{\sqrt{RT_t^0}} \cdot \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\left[\left(\frac{p_t}{p_t^0}\right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left(\frac{p_t}{p_t^0}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right]}$$

Se la pressione di valle fosse uguale a quella di gola $[p_t = p_v]$ e se il fluido è effettivamente adiabatico reversibile cioè $T_t^0 = T_m^0$ e $p_t^0 = p_m^0$ allora la portata corretta a monte sarà uguale a quella di gola:

$$\dot m = \frac{p_m^0 A_t}{\sqrt{RT_m^0}} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\left[\left(\frac{p_v}{p_m^0}\right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left(\frac{p_v}{p_m^0}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right]}$$

In tal caso il grafico è uguale a quello visto qualche pagina fa:



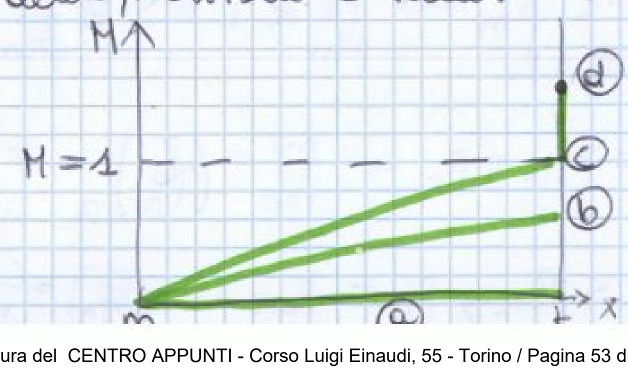
Questa situazione vale solo in campo subsonico in quanto non possono esserci salti di pressione.

Al di sotto del valore critico la ~~pressione~~ portata corretta non segue più l'andamento precedente ma

$p_t = p_{CR} = p^0\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ [se $p_v < p_{CR}$)

$\Rightarrow M = 1$??

Per capire come funziona bisogna ~~con~~ fare un grafico che tenga conto della variazione della pressione a valle:



L'ugello quindi ha un andamento visto nel grafico ⊛ quindi si dic
che la $\dot m$ corr si mantiene costante finché $p_v < P_{CR}$.
Questo spiega perché la $\dot m$ si mantiene costante ~~[illegible]~~
in ogni sezione.

$$\Downarrow$$

A parità di T^0_m e P^0_m $\Longrightarrow$ $\dot m$ è cost per $P_v < P_{cr}$.

Ora volendo determinare la **PORTATA $\dot m$** bisogna:

Ⓐ Verificare la validità delle ipotesi;

Ⓑ Chiedersi in quale situazione sta funzionando l'ugello:

$$\frac{P_v}{P^0_m} = \begin{cases} > \left(\frac{P_v}{P^0_m}\right)_{CR} & ① \\ \leq \left(\frac{P_v}{P^0_m}\right)_{CR} & ② \end{cases}$$

① $\frac{P_v}{P^0_m} > \left(\frac{P_v}{P^0_m}\right)_{CR}$

$P_t = P_v$ / $P^0_t = P^0_m$

$$\dot m = \frac{P^0_m A_t}{\sqrt{R\,T^0_m}}\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\left[\left(\frac{P_v}{P^0_m}\right)^{2/\gamma} - \left(\frac{P_v}{P^0_m}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right]} = \boxed{\frac{P^0_m A_t}{\sqrt{RT^0_m}}\cdot f(M_t)}$$

oppure

$$\frac{P_t}{P^0_t} = \frac{P_v}{P^0_m} = \frac{1}{\left(1-\frac{\gamma-1}{2}M_t^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$

Si ricava M_t e si sostituisce nella $f(M_t)$ per trovare $\dot m$.

② Se $\frac{P_v}{P^0_m} \leq \left(\frac{P_v}{P^0_m}\right)_{CR}$

$P_t = P_v = P_{cr}$ e $M_t = 1$

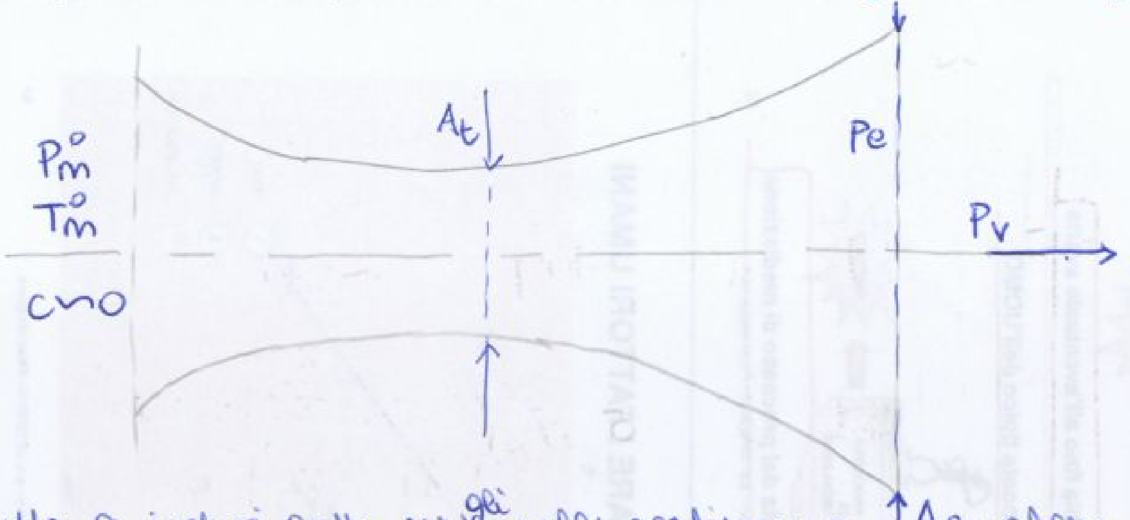
$$\Downarrow$$

$$\dot m = \dot m_{CR} = \boxed{\frac{P^0_m A_t}{\sqrt{RT^0_m}}\cdot f(M_t = 1)}$$

dove

$$f(M_t = 1) = \frac{\sqrt{\gamma}}{\left(1-\frac{\gamma-1}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}}$$

UGELLO CONVERGENTE/DIVERGENTE (DE LAVAL)



Tutte le ipotesi fatte per gli ugelli continuano a valere con l'eccezione della reversibilità del flusso nel divergente. A causa di ciò non si può più dire che $p_e^o = p_m^o$ e questo implica che p_e e p_e^o sono incognite.

Nell'ugello di De Laval inoltre, le sezioni significative diventano 2 A_t e A_e.

Come per il semplicemente convergente, l'obiettivo è calcolare e visualizzare l'andamento della $\dot{m}$. Se nel semplicemente convergente, essendo p_t incognita, ho sostituito la p_r, ora assumo che: $p_e = p_v$, $p_e^o = p_m^o$. ⊛

In tale situazione la portata corretta $\dot{m}_{corr}$ avrebbe l'andamento generale, per adesso però ci si limita a sostituire per ipotesi questi valori e vedere quando sono verificate le uguaglianze. La $\dot{m}$ sarebbe:

$$\dot{m} = \frac{p_e^o A_e}{\sqrt{R^* T_m^o}} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\left[\left(\frac{p_e}{p_e^o}\right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left(\frac{p_e}{p_e^o}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right]}$$

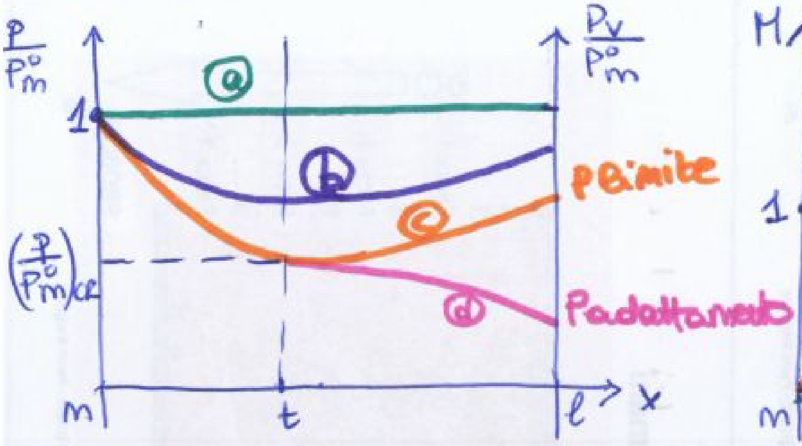
la quale riscritta con le ipotetiche relazioni, diventa:

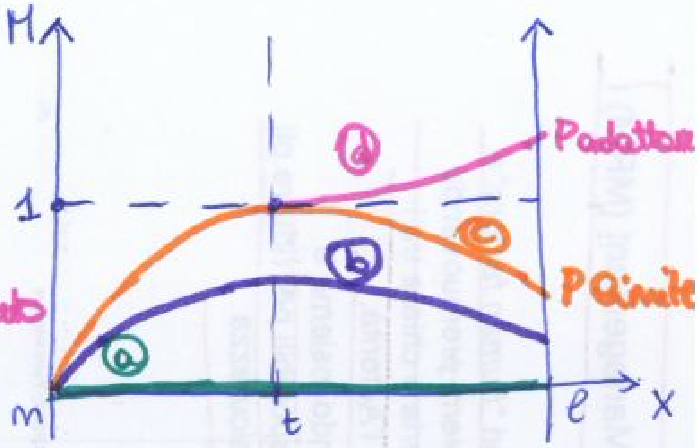
$$\dot{m} = \frac{p_m^o A_e}{\sqrt{R^* T_m^o}} \cdot \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\left[\left(\frac{p_v}{p_m^o}\right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left(\frac{p_v}{p_m^o}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right]}$$

Per capire come è l'andamento della portata bisogna analizzare i grafici visti anche nel semplicemente convergente.

Quando l'ugello è critico o NON critico?
Perchè?

CHOKED = Raggiungimento nell'ugello della condizione critica.





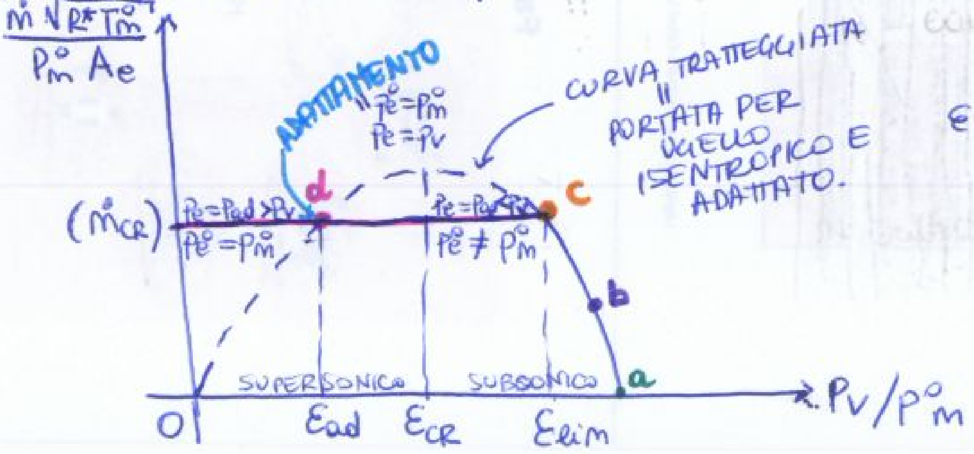
ⓐ la $P_v = P_m = P_m^\circ$ => Il fluido, non essendo soggetto ad alcuna forza, rimane fermo.

ⓑ Riduco leggermente la Pv. Il segnale risale il condott
e si stabilisce una condizione di equilibrio caratterizzata da $P_e = P_v$. Nel tratto convergente, la velocità aumenta fino ad avere un massimo in gola. In pratica si ha un transitorio da
il fluido comincia ad accellerare a velocità bassa (subsonico) e la pressione scende. Ciò vale finché arrivo alla sezione di gola dove incontrerò il divergente e quindi diminuirà nuovam. la velocità. Quindi valgono le relazioni:

$$\begin{cases} P_e^\circ = P_m^\circ \\ P_e = P_v \rightsquigarrow \text{CONDIZIONE DI UGELLO ADATTATO.} \end{cases}$$

ⓒ Porto ora la Pv a un valore ancora più basso: Pelimite. Questa
ondizione è detta CASO LIMITE o DISCRIMINANTE.
a Pelimite è il valore di Pv per cui il M in gola vale 1.
superata la gola la corrente rallenta e $P_e = P_v = P_{elimite}$.
Dato che il convergente a questo punto è diventato critico,
lteriori diminuzioni di Pv lasceranno invariata la $\dot{m} = \dot{m}_{CR}$.
el caso limite si verifica che: $p_e = p_v = p_{elim}$, $p_e^\circ = p_m^\circ$, $M_t = 1$.

osso quindi tracciare la portata:



$\varepsilon = \frac{p}{p_m^\circ}$

SOLO IN D
POTREI AVERE
FLUSSO
ISENTROPICO
E
ADATTATO.

Dalla figura osservo che la portata nel convergente/divergente coincide con quella generale fino a $P_v \geq P_{lim}$ poi si mantiene costante (SEGNALE PIATTO). Esiste però ancora un punto coincidente con la curva generica, esso è il punto ⓓ. Si chiama PUNTO DI ADATTAMENTO. Tale condizione prende questo nome perchè l'ugello ha un comportamento ricalcante quello teorico. Si ottiene attraverso un'ulteriore diminuzione di P_v sotto la P_{limite}. É identificato dalle relazioni:

$$P_e = P_v \, , \; P^\circ_e = P^\circ_m \, , \; M_t = 1 .$$

Prima di vedere cosa accade quando $P_{ad} < P_v < P_{lim}$ e quando $P_v < P_{ad}$, osservo che il punto limite e quello di adattamento sono gli unici in cui si verificano contemporaneamente le tre seguenti relazioni e poichè in entrambi i casi $\dot m = \dot m_{CR}$, posso scrivere che:

1) $$\dot m_{CR} = \frac{P^\circ_m A_t}{\sqrt{R^* T^\circ_m}} f(M_t = 1) \rightsquigarrow \frac{P_v}{P^\circ_m} < \left(\frac{P}{P^\circ_m}\right)_{lim} \rightsquigarrow M = 1$$

2) $$\dot m_{CR} = \frac{P^\circ_m A_e}{\sqrt{R^* T^\circ_m}} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\left[\left(\frac{P_e}{P^\circ_m}\right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left(\frac{P_e}{P^\circ_m}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right]} =$$

3) $$= \frac{P^\circ_m A_e}{\sqrt{R^* T^\circ_m}} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\left[\left(\frac{P_a}{P^\circ_m}\right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left(\frac{P_a}{P^\circ_m}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right]} \left. \right\} \begin{array}{l} M < 1 \\ \frac{P_v}{P^\circ_m} > \left(\frac{P}{P^\circ}\right)_{lim} \end{array}$$

Uguagliando la ① = ② = ③ si può:

a) Ricavare la P_{limite} o la P_a se conosco A_t e A_e;

b) Ricavare A_t/A_e o A_e/A_t se conosco P_{lim} e P_a.

Ora mi chiedo, cosa succede se:

ⓔ $P_{ad} < P_v < P_{lim}$;

ⓕ $P_v < P_{ad}$

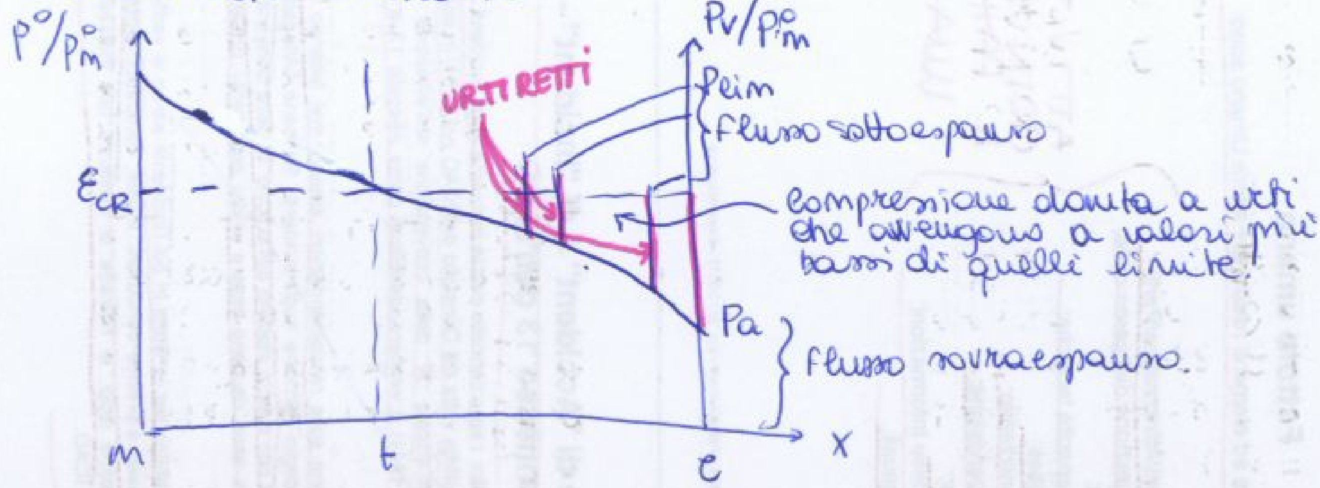
Analizzo prima il caso ⓕ $\rightsquigarrow$ più facile:

Il flusso è, già nel divergente, supersonico; il segnale dovrebbe risalire il condotto ma la sua velocità è sonica, perciò $P_e = P_{ad} > P_v$, ne consegue un'espansione solo fuori l'ugello. All'interno non succede nulla.

ⓔ É bene innanzitutto distinguere tra $P_{cr} < P_v < P_{lim}$ e $P_{ad} < P_v < P_{c}$

Se: $P_{CR} < P_v < P_{lim} \rightsquigarrow$ la corrente diventa supersonica nel divergente, tuttavia dovendo essere $p_e = P_v$ la corrente in qualche modo deve tornare subsonica e questo è possibile attraverso un urto retto. Man mano che P_v decresce si sposta verso l'uscita (A_e) fino a coincidervi se $P_v = P_{CR}$.

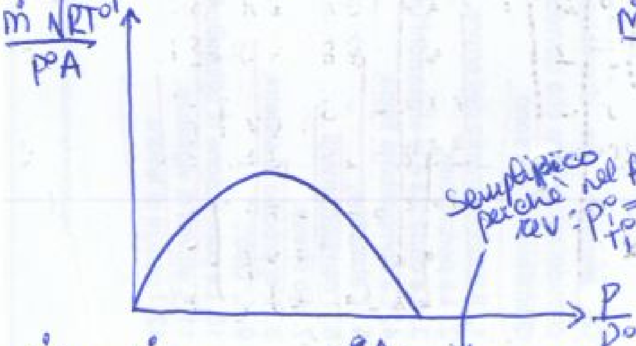
se ~~Pad~~ $P_v < P_{cr}$ la corrente rimane supersonica e compaiono solo urti obliqui. Tali urti in genere sono collocati nel divergente senza simmetria e questo se l'ugello serve a generare una spinta può essere molto rischioso



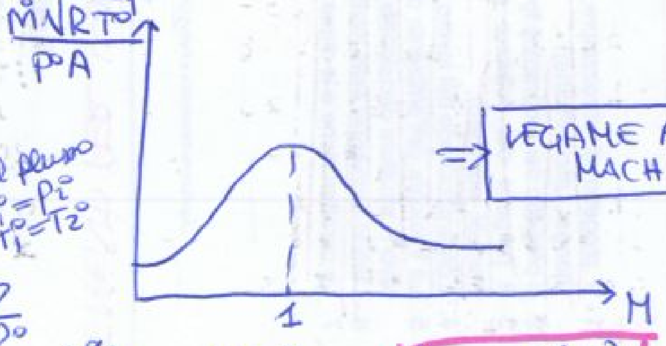
Quindi imponendo una pressione di adattamento il flusso arrivato in gola si comporta come sonico e incontrando il divergente accelererà comportandosi come supersonico.
Il fluido accelerando senza accorgersi del segnale della variazione di pressione arriva a un certo valore di Mach, si crea un'onda d'urto e di colpo scende a subsonico. La pressione fa la stessa cosa. L'onda d'urto è dissipativa quindi l'entropia varia e non sono più isentropico. Arriverò a un certo punto sulla bocca d'uscita dell'ugello dove vi sarà un urto, nel momento in cui le particelle avvertono il segnale di variazione di pressione inchiodano.

Solitamente il max valore alla quale si può arrivare è la Pad in quanto andando oltre si creano urti che spingono il flusso verso parti sbagliate.
Condizione ottimale $P_e \leq 2{,}5\, P_{ad}$.

CASO: DELL'UGELLO ADIAB. REV. (SENZA URTI):
Nel caso di MOTO STAZIONARIO, l'eguaglianza delle portate può essere espressa mediante portata corretta e grafico:



semplifico perché nel flusso rev: $p_1^0 = p_2^0$, $T_1^0 = T_2^0$



⟹ LEGAME AREA/MACH

37

$\dot m_1 = \dot m_2$

$\boxed{\frac{A^*}{A} = \frac{f(M)}{f(1)}}$

$$\frac{\cancel{p_1^0} A_1}{\sqrt{R\cancel{T_1^0}}} \cdot f(M_1) = \frac{\cancel{p_2^0} A_2}{\sqrt{\cancel{RT_2^0}}} f(M_2) \Longrightarrow \boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{f(M_2)}{f(M_1)}}$$

$$+\frac{\dot m\sqrt{RT^o_m}}{P^o_m A_t}$$

ESERCITAZIONE ①.

ESERCIZIO ①:

UGELLO SEMPLICEMENTE CONVERGENTE:

DATI:

SEZIONE DI GOLA: $A_t = 20\,cm^2$

Espande isentropicamente ARIA ($R = 287\,J/Kg\cdot K$, $\gamma = 1,4$)

Condizioni totali $T^o_m = 500K$, $P^o_m = 3bar$.

Determinare portata e pressione, temperatura e velocità nella sezione di gola nei casi di pressione nell'ambiente di scarico pari a $p_v = 2bar$ e $p_v = 1bar$.

SVOLGIMENTO.

Innanzitutto devo capire se l'ugello è CRITICO O NON CRITICO.

Calcolo il rapporto critico ($M=1$):

$$\left(\frac{p}{p^o}\right)_{CR} = \frac{1}{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1,4-1}{2}\cdot 1^2\right)^{\frac{1,4}{1,4-1}}} = \frac{1}{1,893} = 0,528$$

Vediamo ora se l'ugello è critico o NO, quindi vedo se:

$$\underbrace{\frac{p_v}{p^o_m} \geq \left(\frac{p}{p^o}\right)_{CR}}_{\text{NON CRITICO}} \quad \text{oppure} \quad \underbrace{\frac{p_v}{p^o_m} < \left(\frac{p}{p^o}\right)_{CR}}_{\text{CRITICO}}$$

$p_t = p_v$

$P^o_t = P^o_m$

$\Uparrow$

1° CASO: $p_v = 2bar$:

Se $p_v = 2bar \Rightarrow \frac{P_v}{P^o_m} = 0,667 > 0,5283 \rightsquigarrow$ UGELLO NON CRITICO

$\Downarrow$ All'uscita avrò $p_t = p_v = 2bar$

METODO Ⓐ:

Calcolo la portata attraverso la formula dell'ugello isentropico:

$$\dot m = \frac{P^o_{t=m}\cdot A_t}{\sqrt{RT^o_{t=m}}}\cdot\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\left[\left(\frac{P_{t=v}}{P^o_{t=m}}\right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left(\frac{P_{v=t}}{P^o_{t=m}}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right]} =$$

$$= \frac{3\cdot 20\cdot 10^{-4}}{\sqrt{287\cdot 500}}\cdot\sqrt{\frac{2(1,4)}{0,4}\cdot\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{1,4}} - \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2,4}{1,4}}\right]} = 1,037\,\frac{Kg}{s}$$

METODO Ⓑ: PASSO ATTRAVERSO NUMERO DI MACH:

$$\frac{P_t}{P^o_t} = \frac{P_v}{P^o_m} = \frac{1}{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_t^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \Rightarrow M_t = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}\left[\left(\frac{P^o_t}{P_t}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-1\right]} = 0,7836$$

Noto Mach posso trovare la PORTATA CORRETTA:

$$f(M) = \frac{\sqrt{\gamma}\,M}{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}} = 0,655 \Rightarrow \dot m = \frac{P^o_m A_t}{\sqrt{RT^o_m}}\cdot f(M_t) = 1,037$$

Ora trovo l'area di uscita per la quale l'ugello è adattato, cioè $P_{ad} = P_o$:

BILANCIO DELLA PORTATA:

$$\dot{m}_t = \dot{m}_e$$

$$\frac{\cancel{p_t^o} A_t}{\cancel{\sqrt{R T_t^o}}} f(1) = \frac{\cancel{p_e^o} A_e}{\cancel{\sqrt{R T_e^o}}} f(M_e)$$

$\Downarrow$

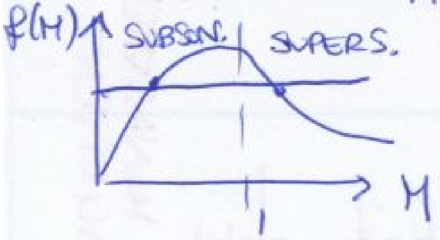
dove $M_e = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}\left[\left(\frac{P_{e=m}^o}{P_o}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-1\right]} = 1,709$

$\Downarrow$

$$A_e = \frac{A_t f(1)}{f(M_e)} = \boxed{404\ cm^2}$$

Trovo Mach, veloc., pressione di uscita se $A_e' = 350\ cm^2$:

$f(M_e) = f(1) \cdot \frac{A_t}{A_e}$ ⇝ 2 soluz. una subsonica una supersonica



$\Downarrow$

Procedo per tentativi:

$c_e = M_e\sqrt{\gamma R T_e}$

$T_e = \frac{T_e^o}{1+\frac{\gamma-1}{2}M_e^2}$

→ $A_e = 404\ cm^2 \rightarrow \boxed{c_e = 8km}$

→ $A_e = 350\ cm^2$

$\Downarrow$

$c_e = \boxed{742\ m/s}$

↓

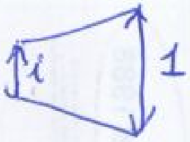
SOTTOESPANSO

$\Downarrow$

URTI FUORI DALL'UGELL

ESERCIZIO ③

Dimensionare la presa d'aria per un turbofan in volo nelle seguenti condizioni:



$M_0 = 0,85$

z (quota) $= 300000$ ft ($T_0 = 226,6$ K , $p_0 = 30,05$ Pa)

$\dot{m} = 100$ kg/s

Mach all'ingresso della presa $M_i = 0,7$

" all'uscita presa/ingresso compressore $M_1 = 0,55$

Flusso adiab/reversibile.

Si determino inoltre $\dot{m}$, M_i al DECOLLO a quota $\emptyset$ ($M_0 = 0$, $T_0 = 288$ K, $p_0 = 101,3$ KPa) sapendo che $M_1 = 0,6$.

SVOLGIMENTO:

- DIMENSIONAMENTO:

$$\dot{m} = \frac{p_0^o A}{\sqrt{R T_0^o}} \cdot f(M) \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} A_1 = 0,42 \, m^2 \\ A_i = 0,909 \, m^2 \end{matrix}}$$

$$p_0^o = p_0 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

$$T_0^o = T_0 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2\right)$$

- DECOLLO:

$$\dot{m}_1 = \frac{p_1^o A_1}{\sqrt{R T_1^o}} \cdot f(\underset{\underset{0,6}{\uparrow}}{M_1}) = \frac{p_i^o A_i}{\sqrt{R T_i^o}} f(M_i)$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{f(M_i) = 0,66} \Rightarrow \underline{M_i \simeq 0,8}$$

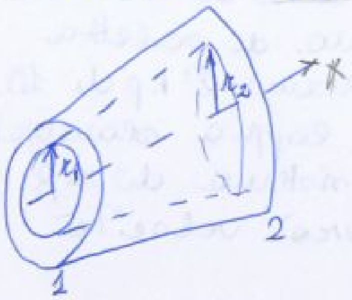
$$\Downarrow$$

$$\dot{m} = \ldots$$

LAVORO NELLE TURBOMACCHINE:

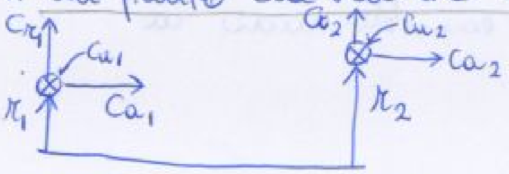
TEOREMA DEL MOMENTO DELLA Q.D.M.

Tale teorema serve per valutare la coppia e quindi il lavoro scambiato tra fluido e turbomacchina.
Considero un volume di controllo cilindrico come in figura:



Una quantità di fluido entra nella sezione 1 a raggio r_1 ed esce a sezione 2 a raggio r_2
le ipotesi usate sono:
- 1D $\rightsquigarrow dr \rightarrow 0$;
- flusso stazionario : $\frac{\partial}{\partial t} = 0 \Rightarrow \dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}$.

In un punto la velocità è costituita da 3 componenti:



a: assiale
r: radiale
u: tangenziale.

Quale sarà il momento angolare del flusso?
Preso un sistema (una massa m dal punto di vista lagrangiano) calcolato il suo momento della q.d.m rispetto un qualunque asse, si ha la generazione di un momento angolare dovuto alla variaz. di quantità di moto:

$$|\vec{m}| = |\vec{r} \wedge \vec{c}_u| = r c_u$$

Tale momento varia nel momento in cui si ha l'applicazione di una coppia esterna.
Considerando il punto di vista euleriano (volume di controllo) si può dire che:

$$M = M_{finale} - M_{iniziale} \leftarrow (\text{sarebbe quello angolare} \times \overset{\text{portata}}{\downarrow}\text{massa})$$

M_{finale}, $M_{iniziale}$: || momento della portata che entra per il punto ① + massa del volume di controllo.

$$\Downarrow$$

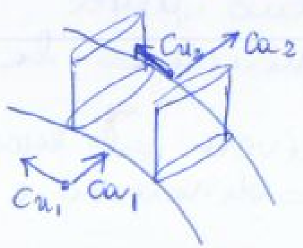
$$M = M_{\dot{m}dt_2} + M_{vc} - (M_{\dot{m}dt_1} + M_{vc})$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{M = \dot{m} r_2 c_{u_2} - \dot{m} r_1 c_{u_1}}$$

→ coppia che devo imporre all'albero lungo la direzione tg. (dentro al fluido)

A questo punto mi interessa sapere qual è la coppia scambiata con le palette. Cioè suppongo di ingrandire la prima sezione, in questa sono ricavate delle palette e suppongo anche che tale volume di controllo includa un solo stadio di rotore:



In queste palette il flusso entra in modo allineato alla direzione della paletta.

43

Considero quindi una palettatura rotante e applico il 1° principi
$Q_e = 0$ ⤳ caso adiabatico

$$\Downarrow$$

$$L_i = c_p (T_2 - T_1) + \frac{C_2^2 - C_1^2}{2} \leftarrow \text{Rispetto a sistema di rif. assoluto/fisso}$$

Il primo principio non considera la direz. della velocità quind
osso considerare il modulo:

$$C = \sqrt{C_a^2 + C_u^2 + C_r^2}$$

Se mi pongo in un riferimento rotante con le palette, il 1° princ. diventa: $(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{vedo tutto fermo}}}{L_i} = 0,\ Q_e = 0)$

$$0 = c_p (T_2 - T_1) + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{W: velocità relativa alla paletta}}}{\frac{W_2^2 - W_1^2}{2}} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{energia rotazionale dovuta a forze centrifughe.}}}{\frac{u_2^2 - u_1^2}{2}} \leftarrow u = \text{vel. palette}$$

Ricordo che: $\vec{W} = \vec{C} - \vec{u}$
Inoltre essendo u tangenziale (di trascinamento) si ha:
$W_a = C_a, \quad W_r = C_r, \quad W_u = C_u - u$
Grazie a tali espressioni giungo all'equazione 3 del lavoro:

$$\Downarrow$$

$$L_i = \cancel{\Delta h^0} + \frac{C_2^2 - C_1^2}{2} - \left(\cancel{\Delta h} + \frac{W_2^2 - W_1^2}{2} + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2} \right)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{L_i = \frac{C_2^2 - C_1^2}{2} - \frac{W_2^2 - W_1^2}{2} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2}}$$

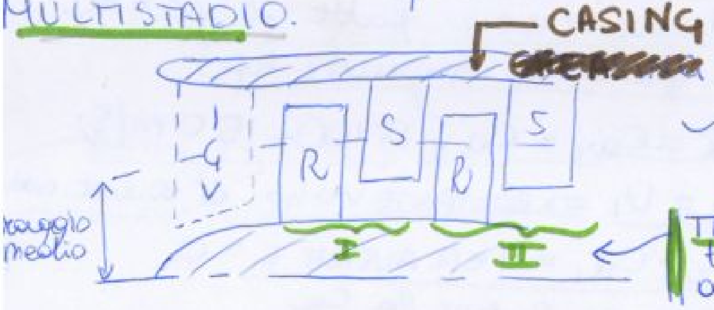
COMPRESSORE ASSIALE:

Macchina presente in tutti i grandi motori aeronautici quindi per grandi portate. Non va bene per portate piccole perchè avrei palette basse (tipo 2mm) e si avrebbero delle perdite sopra e sotto che non fanno passare il flusso, motivo per cui per palette basse si usano i compressori centrifughi e per quelle ancora più basse, compressori volumetrici.

Un altro vantaggio del compressore assiale è che è poco ingombrante (cosa fondamentale in campo aeronautico).

Ogni stadio di compressore assiale è capace di generare un rapporto di compressione molto basso (es. 1,3) motivo per cui un solo stadio di compressore non basta ma servono compressori MULTISTADIO.

ALTEZZA PALETTE ⇝ DECRESCENTE



⇝ Sequenza di stadi

TAMBURO ⇝ PARTE cilindrica o troncoconica che ruota a velocità ω

La portata sarà pari a:

$$\dot{m} = \rho C_a \cdot \underbrace{2\pi r_m \cdot h}_{\text{SUP. LATERALE (PALETTA)} \rightsquigarrow \text{PROFILO}} = \rho C_a A_p$$

IGV = talvolta viene messo. Se c'è, è posto davanti al 1° rotore

↓

INLET, GUIDE, VANE ⇝ ingresso di guida che si assicura che il flusso entri nel rotore nelle migliori condizioni.

IPOTESI

- r_m = costante (sono possibili alcune variazioni per motivi costruttivi che noi trascuriamo
  raggio medio
- $C_r = 0$ ⇝ velocità radiale nulla ⇝ in realtà c'è ma essendo piccola la trascuriamo.

Noi vogliamo sviluppare la 1ª espressione del lavoro per un generico compressore e vedremo come il lavoro dipende dalle grandezze che ci interessano e poi le legheremo.

Per fare ciò partiamo dall'espressione del lavoro e disegnamo i triangoli delle velocità all'ingresso e all'uscita per poterlo scrivere.

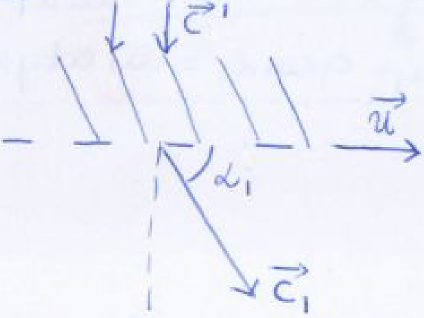
Ricordiamo che:

$$L_i = C_{u_2}u_2 - C_{u_1}u_1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Se } u_2=u_1}}{=} (C_{u_2}-C_{u_1})u_2 = u_1$$

In conclusione l'unica cosa che permette di capire se il triangolo è quello di un compressore è che:

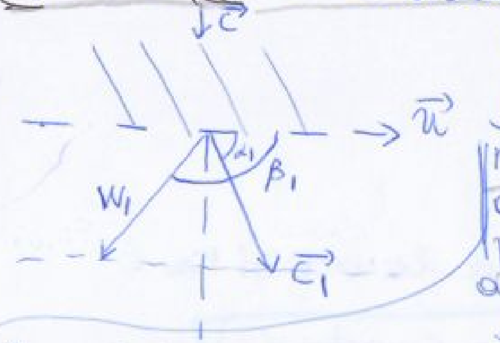
$$C_{u_2} > C_{u_1} \Longleftrightarrow C_2 > C_1$$

Ora vediamo come deve essere fatta una paletta per realizzare il triangolo di velocità visto.
Bisogna fare una sezione a raggio medio e poi spianarla in un piano, in tale sezione vedo il profilo della paletta.
In genere a valle della presa d'aria vi è un IGV o un altro statore che ruotano C_1. La direzione di C_1 è stabilita dall'angolo α_1:



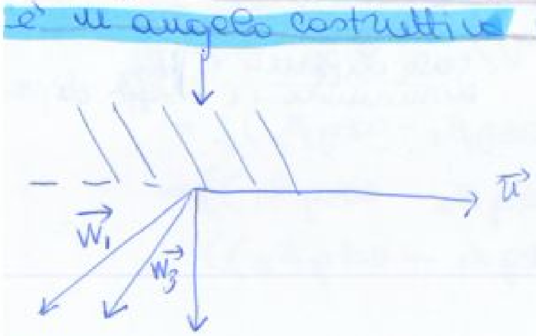
Se c'è l'IGV, α_1 è l'angolo formato tra esso e direz. tg.
α_1 è un angolo costruttivo in quanto dipende da come è fatta la macchina e non da come funziona.
La c_1 può anche provenire dal bordo di fuga della palettatura precedente o rotore.

Al contrario la $\vec{W}_1$ non ha una direzione fissa ma dipende da $\vec{c}_1$ e da $\vec{u}$. È individuato dall'angolo β_1: varia con la portata e il numero di giri.



L'angolo della W_1 non è sempre uguale a quello della paletta ma dipende dal funzionamento della macchina. In genere non è allineata a u e quindi al bordo di attacco della paletta ma essendo l'angolo piccolo posso considerarlo allineato, così risulta anche W_2 risulta allineata al bordo di fuga della paletta.

β_1 quindi dipende dal funzionamento e non è costruttivo, Il margine massimo costruttivo dell'angolo tra u e W_1 deve essere 10° per evitare lo stallo del rotore.
La paletta del rotore deve riuscire a ruotare la $\vec{W}_1$ fino a portarla alla $\vec{W}_2$ che deve essere parallela al bordo di uscita del rotore stesso, la sua direzione è identificata dall'angolo β_2 che è un angolo costruttivo in quanto è fisso:



Per lo statore, noi sappiamo che il flusso arriva con velocità c_2 e poi uscirà con una velocità $\boxed{C_3 = C_1}$ (perchè all'inizio avevo imposto una velocità ottimale mediante IGV e inoltre voglio ottenere un multistadio con stadi tutti uguali)

EFFETTO UTILE

Quindi abbiamo ricavato:

$$L_c = u(C_a \, \text{cotg}\,\beta_2 + u - C_a \, \text{cotg}\,\alpha_1)$$

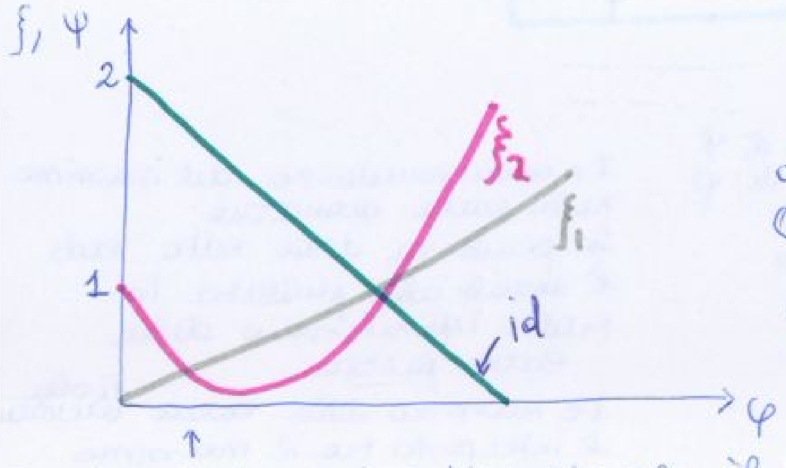
$$\varphi = \frac{C_a}{u}$$

$$\Psi = 2(1-\varphi(\text{cotg}\,\alpha_1 - \text{cotg}\,\beta_2) = \frac{L_c}{u^2/2}$$

Faccio alcune considerazioni:

Ⓐ Se $L_c = \Psi \frac{u^2}{2}$ ⇝ converrebbe aumentare quanto più possibile la u. Essa però è limitata da considerazioni aerodinamiche a un valore di 300 m/s.

Ⓑ Se $\Psi \to 0 \Rightarrow C_a = 0$ o $A \to \infty$ soluzione inutile.



Esprime in termini adimensionali il rapporto tra lavoro sviluppato e portata smaltita.

Tale grafico però non è utile al fine di determinare le perdite, motivo per cui uso la forma mista del 1° principio.

Vogliamo determinare le L_W. Esse possono essere di due tipi:

- DISTRIBUITE ⇝ legate all'attrito (L_{W_1});
- CONCENTRATE ⇝ L_{W_2}

$$\Downarrow$$

$$L_{W_{TOT}} = L_{W_1} + L_{W_2}$$

- PERDITE DISTRIBUITE: ⇝ attrito palette/fluido

Proporzionali al quadrato della velocità:

$$L_{W_1} \propto \dot{m}^2 \propto C_a^2$$

Definisco il COEFFICIENTE DI PERDITA:

$$\xi_1 = \frac{L_{W_1}}{u^2/2} = K\varphi^2 \rightsquigarrow L_{W_1} = K\dot{m}^2 \text{ (valida in generale)}$$

- PERDITE CONCENTRATE: tipicamente sono quelle di scia (imbocco scorretto

Hanno un minimo attorno all'incidenza ottimale e rimangono piccole. All'aumentare dell'incidenza avrò scie più grandi e rischio di stallo.

⇝ Si tratta di perdite per imbocco scorretto dei palettaggi:

$$\xi_2 = \frac{L_{W_2}}{u^2/2}$$

$$\Downarrow$$

$$\xi = \frac{L_W}{u^2/2} = \xi_1 + \xi_2$$

caso ideale

stallo dorso (positivo)

stallo ventre (negativo)

$\Downarrow$

Essendo $R^* = c_p - c_v = c_p\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) = c_p\frac{\gamma-1}{\gamma}$

$\Downarrow$

$$L_c - L_w = R^* T_1\left(\frac{p_3}{p_1} - 1\right) = c_p T_1\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)(\beta_c - 1)$$

$\Downarrow$

$$\beta_c = \frac{L_c - L_w}{c_p T_1} \cdot \frac{\gamma}{\gamma-1} + 1 = \frac{L_c - L_w}{c_p T_1 \frac{\gamma-1}{\gamma}} + 1$$

Ricordo che $c_p\frac{\gamma-1}{\gamma} = R$

Moltiplicando e dividendo per $u^2/2$:

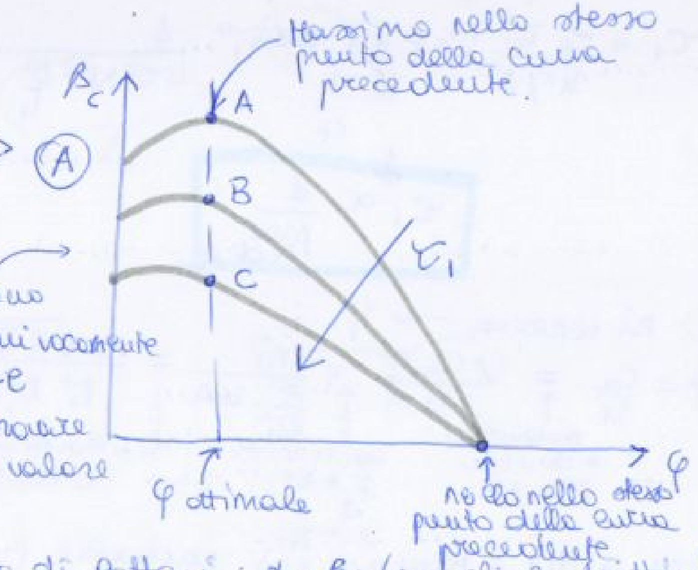
$$\beta_c = \frac{L_c - L_w}{u^2/2} \cdot \frac{u^2/2}{c_p T_1 \frac{\gamma-1}{\gamma}} + 1 = \frac{\frac{L_c - L_w}{u^2/2}}{\frac{c_p T_1 \frac{\gamma-1}{\gamma}}{u^2/2}} + 1$$

Definisco il COEFFICIENTE TERMOMETRICO:

$$\boxed{\tau_1 = \frac{c_p T_1}{u^2/2}}$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\beta_c = 1 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{\psi - \xi}{\tau_1}} \Longrightarrow Ⓐ$$



τ_1 = parametro libero.

Fissato un valore di φ da cui dipendono ψ/ξ/ η_{yc} e uno di τ_1 definisco univocamente una curva di quelle sopra e un valore preciso di β_c quindi dato φ posso trovare ψ e ξ e scegliendo per tentativi un valore di τ_1 trovo β_c.

Tutto dipende da un numero limitato di fattori: α_1, β_2 (angoli costruttivi), φ e τ_1. I primi due servono per trovare ψ_1 e η_{yc} poi attraverso τ_1 ricavo β_c. In tal modo riesco a trovare ~~le~~ PRESTAZIONI DELLO STADIO DEL COMPRESSORE e vale anche per i MULTISTADIO.

Infatti fissare un valore di $\varphi = \frac{c_a}{u}$, vuol dire identificare un preciso modo di funzionamento della macchina.

L'unico problema è che tali grandezze non sono direttamente misurab

cioè sono funzioni di φ, solamente la portata è facilmente ricavabile bisogna quindi cercare di creare un grafico con grandezze più facilmente misurabili.

$\Downarrow$

upponiamo di conoscere i 3 punti di massimo del grafico $\beta_c - \varphi$ Ⓐ.
umentando τ, diminuiscono i giri corretti e quindi il punto C si sposterà a sinistra rispetto a B.

Per ogni valore di φ posso associare un valore preciso di rendimento massimo. Spostandomi a destra o a sinistra diminuisce il rendimen soprattutto se mi sposto a Re bassi.

Quindi, si ha che:

Ⓐ Il β_C aumenta all'aumentare del numero di giri corretti, questo parametro infatti è un indice dell'energia che il compressore è in grado di trasmettere al fluido.
Contrariamente a quanto accadeva con τ, che rappresenta invece il rapporto tra l'energia posseduta dal fluido in ingresso e quella generata dal compressore.

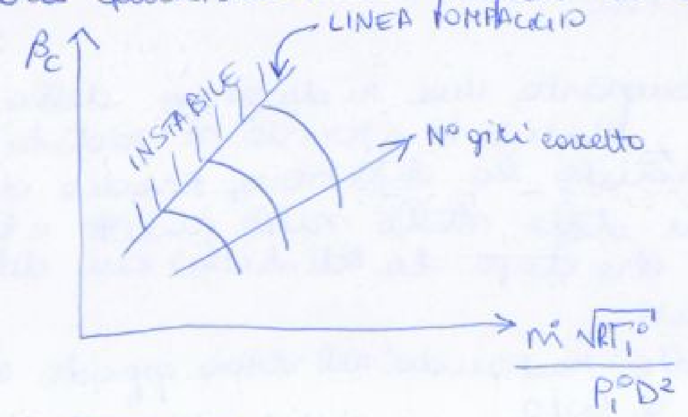
B) Muovendoci verso numeri di giri corretti maggiori, un certo φ si sposta sempre più a destra e in alto;

C) La curva iso-φ che congiunge i punti A, B, C (φ ottimali → MAX) è detta SURGE LINE → LINEA DEL POMPAGGIO.

D) Le curve iso-η sono curve (MAPPA COLLINARE) di livello che tendono a richiudersi su se stesse in corrispondenza delle regioni di alto numero di Mach (effetti d'impatto) o a bassi Reynolds. (effetti viscosi).

FUNZIONAMENTO FUORI PROGETTO: POMPAGGIO E STALLO ROTANTE.

a mappa vale per un singolo compressore ma anche per un'intera famiglia di compressori con φ uguale. Se anche τ, è lo stesso allora funzioneranno proprio nello stesso punto:



Le curve sono interrotte in corrispondenza del max ovvero lungo la linea di pompaggio. (La sua posizione dipende da dove è inserito il compressore)
a destra della linea → funzionamento stabile,
a sinistra → funz. instabile

- POMPAGGIO:

Il fenomeno consiste in un'inversione del flusso all'interno del compressore, il quale aspira dallo scarico e manda verso l'aspirazione. È un fenomeno dannoso che sollecita il compres provocandone la rottura.

Per comprendere meglio il significato di funz. instabile e stabile e di pompaggio, la cui linea separa i due funzionament faccio il seguente esempio:
Immagino di inserire un compressore in un circuito che collega due serbatoi di capacità finita aventi l'uno la pressione il doppio dell'altro.
Scegliendo una curva a un particolare N° corretto la retta del B_c esterno imposto dal circuito interseca la curva in due punti:

↓

LIMITI PROGETTUALI

Andamento della velocità e della pressione ⟶ dipendenti dalla grand delle sez. di ingresso e uscita.
Tipicamente nello statore abbiamo un rallentamento e sez di ingresso più piccola rispetto quella di uscita (SUBSONICO).
Ora dobbiamo stabilire quali valori di α_1 e β_2 e γ sono ammissibili e quindi quali limitazioni di carattere aerodinamico devono avere tali grandezze.
Nelle turbine e nei compressori centrifughi si tratta di limitazioni e problemi strutturali.

Prima limitazione: MASSIMO SALTO DI PRESSIONE:

Suppongo di avere una corrente a velocità c che scorre su una lamina piana. Nasce un gradiente di velocità nello STRATO LIMITE. Suppongo che il fluido poi deve raggiungere una $p_2 > p_1$ quindi deve comprimersi e lo fa a scapito della sua velocità. Il problema è per le particelle dello strato limite in quanto deve guadagnare pressione ma non può farlo a scapito della velocità perchè è troppo bassa. Se supero un certo limite di p_2 le particelle non hanno energia a sufficienza per andare avanti motivo per cui il profilo cambia e molte particelle si fermano.
Se p_2 fosse ulteriormente alta le particelle si fermano e tornano indietro ⟶ STALLO SUL TAMBURO O SULL'CASING.
La stessa cosa avviene se ho un profilo alare con incidenza troppo al
Esiste un COEFFICIENTE DI PRESSIONE:

$$\boxed{C_p} = \frac{p_2 - p_1}{\frac{1}{2}\rho W_1^2} = \frac{p_3 - p_2}{\frac{1}{2}\rho C_2^2} < \boxed{C_{p\,MAX} \simeq 0{,}5}$$

↓ ROTORE

↑ STATORE

⟶ PROBLEMA RIGUARDANTE SOLO IL COMPRESSORE, NELLA TURBINA LA PRESS. DIMINUISCE.

Tipicamente il c_p è più grande alle tip per il rotore e all hub per lo statore.

- Considero il ROTORE:

Mi metto in un sistema di riferimento solidale al rotore (che ruota) e applico il 1° PRINCIPIO IN FORMA MISTA:

$$L_i = 0 = \int_1^2 v\,dp + \frac{W_2^2 - W_1^2}{2}$$

⟶ Trascuro L_w ed E_{cf}, E_g.

Considerando che ρ = cost (STADIO PICCOLO) si ha:

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho} + \frac{W_2^2 - W_1^2}{2} = 0 \qquad \cancel{\rho}\frac{p_2 - p_1}{\cancel{\rho}} + \frac{\rho(W_2^2 - W_1^2)}{2\rho} = 0$$

MOLTIPLICO E DIVIDO PER ρ

DIVIDO PER $\cancel{\rho}\ \frac{1}{2}\rho W_1^2$:

$$\frac{p_2 - p_1}{\frac{1}{2}\rho W_1^2} + \frac{\cancel{\frac{1}{2}\rho} W_2^2}{\cancel{\frac{1}{2}\rho} W_1^2} - \frac{1\cancel{\rho}}{\cancel{\rho}} = 0 \Rightarrow C_p = 1 - \frac{W_2^2}{W_1^2}$$

Da cui si ricava che:

$$\boxed{C_p = 1 - \frac{W_2^2}{W_1^2}}$$

Dire che $c_p < C_{p\,max}$ vuol dire che:

$$\frac{W_2^2}{W_1^2} > 1 - C_{p\,MAX}$$

⟶ Rallentamento flusso non troppo grande.

Sapendo che $C_a = W \operatorname{sen}\beta$

$$\boxed{\left(\frac{\operatorname{sen}\beta_1}{\operatorname{sen}\beta_2}\right)^2 > 1 - C_{p\,MAX}}$$

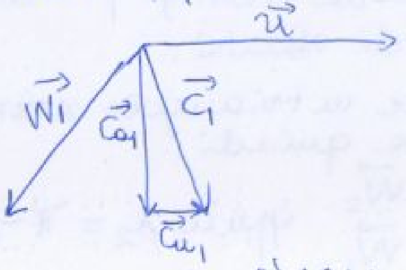
⟶ ciò limita la rotazione che il rotore può fare. Tale limitazione fa sì che:
α_1, α_2 = max 45° | Differenza tra asse paletta e corrente max 15°20°.
β_1, β_2 = max 135°

In alternativa si potrebbe diminuire C_{a_1}, dalla quale dipende la $\dot{m}$. Vorrebbe dire quindi che a una diminuz. di C_{a_1} dovrebbe corrispondere un aumento di A affinchè $\dot{m}$ = cost.
L'unica cosa che si può fare, in conclusione, è aumentare $\vec{C}_{u_1}$ rispettando l'uguaglianza:

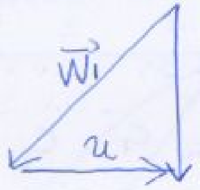
$$u - C_{u_1} = C_2$$

A tale scopo interviene l'IGV che devia il flusso assiale e fa sì che assuma una comp. tg. L'IGV mantiene costante la $\vec{C}_a$ ciò vuol dire che accelera il flusso, mediante un'area convergente nello stesso tempo.

CON IGV:



SENZA IGV:



$\vec{C_1} = \vec{C_a} = \vec{C_0}$

Come si vede l'IGV aumentando la c_1 diminuisce la $\vec{W_1}$
L'IGV esercita una forza sul fluido ma essendo nullo lo spostamento, non c'è lavoro.

Mettendo insieme le due limitazioni introdotte fin ora possiamo ricavare il ΔP nello stadio.
Iniziamo dal rotore:

$$\frac{P_2}{P_1} = 1 + \frac{P_2 - P_1}{P_1} \underset{\uparrow}{=} 1 + \frac{\frac{1}{2}\rho \vec{W}_1^2 C_{P_R} \cdot \gamma}{P_1 \gamma} = 1 + \frac{1}{2} C_{P_R} \overbrace{\frac{W_1^2}{\underbrace{\frac{P_1}{\rho} \cdot \gamma}_{\gamma RT}}}^{M^2_{rel}} \cdot \gamma$$

$$c_P = \frac{P_2 - P_1}{\frac{1}{2}\rho W_1^2}$$

molt. e div per ρ

$$\Downarrow$$

$$\frac{P_2}{P_1} = 1 + \frac{1}{2} C_{P_R} \cdot \gamma M^2_{1\,rel}$$

Analogamente nello statore:

$$\frac{P_3}{P_2} = 1 + \frac{1}{2} C_{P_S} \cdot \gamma M_2^2 \quad \text{dove } M_2 = \frac{C_2}{\sqrt{\gamma R T_2}}$$

Ultima approssimazione: (Riassumo tutte le condiz)
1) $M_1 \simeq M_2 \simeq 0{,}8$;
2) $C_{P_R} \simeq C_{P_S} \simeq 0{,}5$

Con queste condizioni:

$$\frac{P_3^0}{P_1^0} \overset{\text{rach. ideali}}{\simeq} \frac{P_3}{P_1} = \frac{P_2}{P_1} \cdot \frac{P_3}{P_2} = \beta_c^2 = \left(1 + \frac{\gamma}{2} C_P M^2\right)^2 \simeq 1{,}44 \; (1{,}498)$$

Tenendo in conto le perdite $\Rightarrow \beta_c = 1{,}3$ (per stadio)
Ciò ci obbliga a usare compressori multistadio per arrivare a compressori con almeno un $\underline{\beta_c = 40}$.

$$\Downarrow$$

applicando il 1° principio alla girante rispetto al rif. solidale che gira):

$$\cancel{L+Q}\to 0 = h_2-h_1+\frac{W_2^2-W_1^2}{2} \quad Ⓑ$$

Facendo il rapporto tra Ⓐ e Ⓑ scopro che R vale:

$$R=\frac{W_1^2-W_2^2}{(C_2^2-C_1^2)+(W_1^2-W_2^2)}$$

Poichè nel triang. simmetrico $\vec{C_1}=\vec{W_2}$ e $\vec{C_2}=\vec{W_1}$ $\Rightarrow R=0,5$

Il signif. più intuitivo di R si può definire accettando l'hp di ρ = costante. $\left[\frac{p_2-p_1}{\rho}+\frac{W_2^2-W_1^2}{2}=0\right]$

$$\frac{c_p(T_2-T_1)}{c_p(T_2^0-T_1^0)}$$

$$p_2-p_1\simeq\frac{1}{2}\rho(W_1^2-W_2^2)$$

$$p_3-p_2\simeq\frac{1}{2}\rho(C_2^2-C_3^2)$$

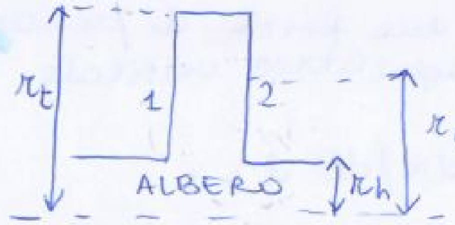
$$\Rightarrow \boxed{R=\frac{p_2-p_1}{p_3-p_1}}$$

$\rightsquigarrow$ GUAD. PRESS ROTORE.

$\rightsquigarrow$ GUAD. DI PRESS TOT

EQUILIBRIO RADIALE:

Fin ora abbiamo studiato il problema a raggio medio della pal in realtà c'è una situazione diversa alla punta e alla base della paletta:



t = TIP
m = Mean
h = hub

u_1 e u_2 variano in funzione della posizione radiale.
Il lavoro e i coeff. adimensionali in cui u compare, variano anch'essi.

La differenza tra r_1 e r_2 può essere notevole, infatti se all'ingresso il raggio della paletta (r_1) può essere approssimato alla metà del raggio della sezione, cioè vale:

$r_h\simeq\frac{D}{4}$ $\quad r_t\simeq\frac{D}{2}$

$$\frac{r_h}{r_t}\simeq\frac{\cancel{D}/4_2}{\cancel{D}/\cancel{2}_1}\simeq\frac{1}{2}$$

Negli ultimi stadi invece il rapporto $r_h/r_t\simeq 0,9$ ovvero $r_h\sim r_t$

⇓

Le approssimazioni fatte prima a raggio medio sono piuttosto corrett a valle ma non a monte.

Il fatto di non trascurare più questo aspetto ci porta a due immediate conseguenze:

1) la velocità radiale del flusso $\vec{Cr}\neq 0$ $\Rightarrow$ per avere $Cr=0$ bisogna fare gli equilibri;
2) Bisogna rivalutare i Tdv in funzione di $\vec{r}$, di modo che all'uscita dal singolo stadio il flusso sia compresso uniformemente, p^0 uguale ovunque.

Noi vogliamo che $C_r \simeq 0$ motivo per cui è necessario che C_u venga costantemente piegata per essere mantenuta tangente alla traiettoria stessa, altrimenti la particella fluida seguirebbe la tg con una componente che rispetto alla girante diventa radiale.

Ma, affinché $\vec{C_u}$ devii è necessaria un'accelerazione e quindi una forza che è data dall' aumento di pressione.

Abbiamo concluso che:

$$p = p(r)$$

Ma noi vogliamo che $p^o(r) = \text{costante}$ ②

Poichè p e p° sono legate dalla velocità quello che ci chiediamo è: come costruire i TdV di modo che la condiz. appena detta sia soddisfatta?

A tale proposito assumo che:

ⓐ Il flusso giunge all'ingresso con condizioni totali uniformi:

$$\frac{dT_1^o}{dr} = \frac{dP_1^o}{dr} = 0;$$

b) $\frac{ds}{dr} = 0$ ⇝ reversibilità per tutto il compressore

c) Impongo che $\frac{dL_i}{dr} = 0$ (non è un'ipotesi ma una richiesta), cioè Li è uguale ai diversi raggi.

Inoltre rendimento e Lu sono indipendenti dal raggio.

$L_c = u(C_{u2} - C_{u1}) = \omega r (C_{u2} - C_{u1})$ ⇝ Stiamo comprimendo uniformemente il flusso ($r \cdot \Delta C_u$ costante)

Essendo ω costante e indipendente dal raggio posso ometterla e dire che:

② $\boxed{L_i = L_c = r(C_{u2} - C_{u1})} \Rightarrow$
- → r bassi ⇝ $C_{u2} - C_{u1}$ GRANDE
- → r alti ⇝ $C_{u2} - C_{u1}$ PICCOLO.

Combinando insieme la ① e la ② si ricava:

1° principio diviso per dr:

$$\frac{T\,ds}{dr} = \frac{dh}{dr} - \frac{v\,dp}{dr} \longrightarrow \frac{dh}{dr} - \frac{v\,dp}{dr} = \underset{\uparrow\ \frac{dS}{dr} = 0}{0} \text{ (per hp)}$$

Ricordo che:
$h^o = h + \frac{c^2}{2}$
⇓
$h = h^o - \frac{c^2}{2}$

$$\frac{dh}{dr} = \frac{dh^o}{dr} - \frac{d(C_u^2 + C_a^2 + C_r^2)}{2\,dr}$$

veloc. globale

Inoltre:
Per una isentropica il lavoro è = salto entalpico

$$L_i = h_2^o - h_1^o = c_p(T_2^o - T_1^o)$$

per hp è = 0

$$\frac{dL_i}{dr} = \frac{dT_2^o}{dr} - \frac{dT_1^o}{dr} \Rightarrow \frac{dT_2^o}{dr} \underset{\uparrow \text{ a meno di } c_p}{\sim} \frac{dh_2^o}{dr} = 0$$

SVERGOLAMENTO PALETTE.

SVERGOLAMENTO A VORTICE LIBERO

Tale criterio prevede che:

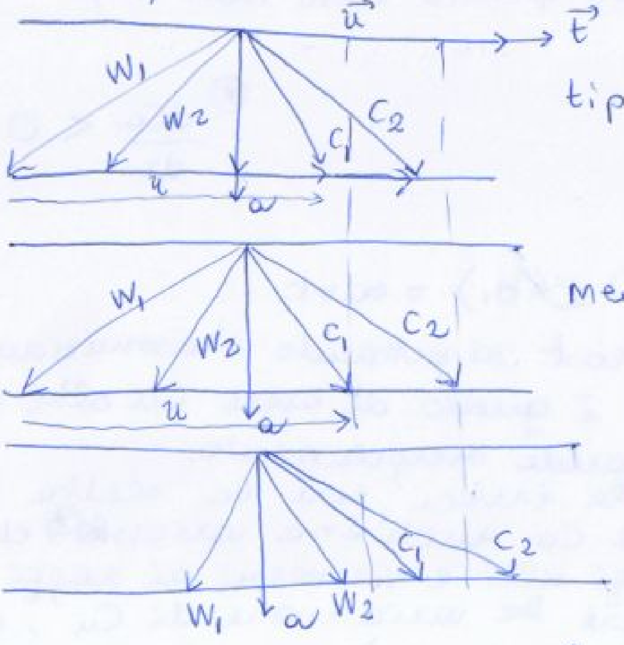
$r\,C_{u_1} = a_1$ con $a_1, a_2 \in R$ e $a_2 > a_1$ nel compressore

$r\,C_{u_2} = a_2$

Dall'equazione Ⓘ si deduce che se $r\,C_u$ = costante allora anche C_a = costante. La scelta di $r\,C_u$ = costante soddisfa la I. Si parla di **VORTICE LIBERO** perchè dal teorema del Momento della quantità di moto non ci sono momenti applicati se $r\,C_u$ = costante. Ciò ci fa concludere che C_a sia costante o assumendo valori diversi tra 1 e 2 o anche lo stesso valore. Abbiamo ora tutti gli elementi per costruire i vari triangoli di velocità. Facciamo un esempio:

$r_h = 0{,}33$, $r_m = 0{,}66$, $r_t = 1$.

Prendiamo quindi un triangolo di velocità simmetrico per il raggio medio e andiamo a disegnare secondo il vortice libero in ingresso e in uscita all'hub e alla tip:



tip ⤳ punta ⤳ veloc. molto inclinate

mean ⤳ medio

hub ⤳ radice ⤳ C spostate verso destra

Dal triangolo in m conosco $u_1 C_{u_1}$ e $u_2 C_{u_2}$, come diventano i TdV al tip e all'hub?

- hub: dovendo essere $r\,C_u$ = costante, essendosi dimezzato r, C_u deve raddoppiare mentre la u si dimezza.
- tip: $\vec{u}$ aumenta del 50%, mentre C_u diminuisce della stessa percentuale.

Nell'hub si ha: [ω cost]

$C_{u\,h} = C_{u\,m} \cdot \frac{r_m}{r_h}$

$U_h = \boxed{U_m \cdot \frac{r_h}{r_m}} \leftarrow \omega$ ⤳ cost.

COMPRESSORI TRANSONICI:

Rientrano nella famiglia dei compr. assiali.
Il termine transonico si riferisce al fatto che una parte della paletta (hub) funziona in regime subsonico, l'altra (tip) in regime supersonico. Valori tipici del M rel sono:

$$(M_{rel})_{sub} \simeq 0,8 \qquad (M_{rel})_{sup} \simeq 1,5 \div 2$$

Il vantaggio nel costruire tali macchine è la possibilità di superare la limitaz. progettuale sul M.rel massimo, con la conseguenza di poter ottenere rapporti di compressione maggiori.

Si è detto infatti che:

$$\beta_{c(R/S)} = \frac{P_{out}}{P_{in}} = 1 + \frac{\gamma}{2} c_{P(R/S)} M^2_{rel}$$

dove:

$$M_{1rel} = \frac{\sqrt{[C_{a1}^2 + (u - C_{u1})^2]}}{\sqrt{\gamma R^* T_1}}$$

Il fatto che M_{1REL} possa aumentare permette di aumentare anche la $\vec{u}$ e per la scrittura del lavoro:

$$L_c = u\,(C_{u2} - C_{u1}) \Rightarrow \text{anche } L_c \text{ aumenta}$$

L'aumento di M_1 rel è realizzato sottoforma di un aumento di $\vec{u}$ a parità di $\vec{C_1}$. In un caso la $|u|$ può anche arrivare a 500 m/s. Il β_c dello stadio raggiunge anche valori fino a 1,7:

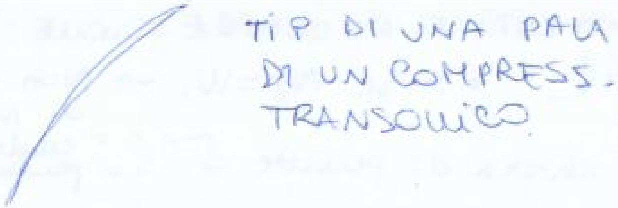
$$\beta_c \simeq 1,7.$$

Evidentemente far lavorare i fan dei motori moderni in regime subsonico vorrebbe dire non sfruttare la compressione all'hub.

NOTA:

I fenomeni di passaggio dal regime subsonico a quello supersonico, per quanto critici, sono in genere limitati a brevi tratti della paletta.

Come deve essere una paletta che comprime un flusso supersonico? Da questo punto di vista, per i criteri di svergolamento, le palette tendono a essere piatte (poco inarcat) alla tip:



ANALISI DELLO STALLO ROTANTE: (ROTORE)

Stallo ~> bassa energia dello strato limite che non riesce a vincere un grad. avverso di pressione. Inoltre nel p. di max spessore il fluido raggiunge un valore basso di P che accentua il ΔP.

La Pmin è legata a quanta forza le palette scambia col fluido:

$$\boxed{(P_1 - P_{min}) \propto \text{Forza}}$$

Tutto ciò si sintetizza col COEFF. DI DIFFUSIONE D (fatto da Lieblein):

$$\boxed{D_R = 1 - \underbrace{\frac{\vec{W}_2}{\vec{W}_1}}_{\sim c_p} + \frac{\overset{\text{Forza esercitata da tutte le palette}}{|W_4 - W_{u1}|}}{\underbrace{2\sigma W_1}_{\sim \text{Num. palette}}}}$$

$$\boxed{\sigma = \frac{\text{corda paletta}}{\text{passo paletta}} = \frac{c}{s}} \Rightarrow \text{SOLIDITÀ PALETTATURA.}$$

Valore max di D ≃ 0,5. $^{(0,4)}$ A partire da questo valore è noto il triang. di velocità, definisco σ e quindi so quante palette mettere:

$$\sigma = \frac{\text{corda}}{\underbrace{\frac{2\pi r}{N°}}_{\text{PASSO}}} = \frac{N° \text{ corda}}{2\pi r}$$

Se vogliamo molta forza => $\overset{\text{metto}}{\text{molte}}$ palette.

Il numero di palette viene limitato di modo che la forza che agisce su una paletta sia piccola affinchè non stalli, dato che aumentando le palette diminuisce la pressione su ciascuna.

In modo analogo per uno STATORE:

$$\boxed{D_S = 1 - \frac{C_3}{C_2} + \frac{|C_{u2} - C_{u3}|}{2\sigma C_2}}$$