



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 895

DATA: 12/03/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Candido Dafne

MATERIA: Applicazioni avanzate di Fisica Tecnica

Prof. Asinari

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

Lezione del 6 marzo 2013

Prima parte della lezione:

Possiamo dire che, tutte le volte che c'è una sommatoria si può chiamare l'indice della sommatoria **saturato**. Se questo succede allora tanto vale non scrivere la sommatoria. Se un indice rosso è ripetuto due volte sotto intende la sommatoria. Un indice saturato è un indice per cui non si può scegliere un suo singolo valore. Avrà tutti i valori, la sommatoria lo costringe ad assumere tutti i valori (da $j=1$ a $j=D$, per esempio).

Se un indice compare una sola volta e non c'è la sommatoria, lo definisco **libero** e posso sceglierne i valori. A riguardo possiamo dire "uno libero" riferendoci ad un vettore, "due libero" riferendoci ad un tensore, "zero libero" se ci riferiamo ad uno scalare.

1. Se faccio *a scalare b* ottengo:

$$\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^D \quad \rightarrow \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \doteq \sum_{i=1}^D a_i b_i = \sum_{j=1}^D a_j b_j = \dots = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \in \mathbb{R},$$

2. Se considero *A scalare b* ottengo:

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{D \times D}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^D \quad \rightarrow \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{b} \doteq \sum_{j=1}^D A_{ij} b_j = \dots =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} A_{11}b_1 + A_{12}b_2 + \dots + A_{1D}b_D \\ A_{21}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{2D}b_D \\ \dots \\ A_{D1}b_1 + A_{D2}b_2 + \dots + A_{DD}b_D \end{array} \right\} \in \mathbb{R}^D,$$

l'indice j è saturato e di fatto c'è la sommatoria. L'indice i non ha la sommatoria ed è libero. Contando gli indici liberi posso sapere quanti gradi di libertà si hanno a disposizione.

3. In questo tipo di prodotto ho due sommatorie perché ho il simbolo del due punti:

$$\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{D \times D} \quad \rightarrow \quad \mathbf{A} : \mathbf{B} \doteq \sum_{i=1}^D \sum_{j=1}^D A_{ij} B_{ij} = \dots =$$

$$= A_{11}B_{11} + A_{12}B_{12} + \dots + A_{1D}B_{1D} +$$

$$+ A_{21}B_{21} + A_{22}B_{22} + \dots + A_{2D}B_{2D} +$$

$$+ \dots + A_{D1}B_{D1} + A_{D2}B_{D2} + \dots + A_{DD}B_{DD} \in \mathbb{R}$$

Il processo classico è quello di scrivere l'espressione tramite gli operatori piuttosto che con le matrici perché sono più compatti ed hanno un significato fisico (fare un bilancio sul volume di controllo, usando la divergenza ad esempio, [si capirà più in là con lo studio questa frase]) e sono indipendenti dal sistema di riferimento scelto. Potrebbe essere comodo

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \in \mathbb{R}^D, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{D \times D} &\quad \rightarrow \quad \nabla \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}) = \frac{\partial (A_{ij} a_j)}{\partial x_i} = \\
 &= A_{ij} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} + \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_i} a_j = \\
 &= A_{ij} \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right)^T + \frac{\partial (A_{ji})^T}{\partial x_i} a_j = \\
 &= \mathbf{A} : (\nabla \mathbf{a})^T + (\nabla \cdot \mathbf{A}^T) \cdot \mathbf{a} \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Questa è una derivata speciale di due fattori. Se fosse la derivata di a per b faremmo a per la derivata di b più b per la derivata di a. Qui in realtà sono quantità più grandi e operatori complicati. Usiamo la notazione di E: prodotto matrice per colonna cioè il pallino del prodotto scalare indica una sommatoria, dunque saturo l'ultimo indice che sarebbe j e poi applico la divergenza sull'indice libero cioè i. Ora applico la regola della derivazione composta. A è evidentemente un tensore, ma anche l'altro ha due indici, introduco il trasposto. Ottengo così il gradiente di a trasposto.

- a diadico a è a_{ij} quindi un tensore, quindi ha due gradi, facendone la divergenza saturo l'indice j. Faccio algebra come al solito. $\partial a_j / \partial x_j$ è la divergenza, quindi un

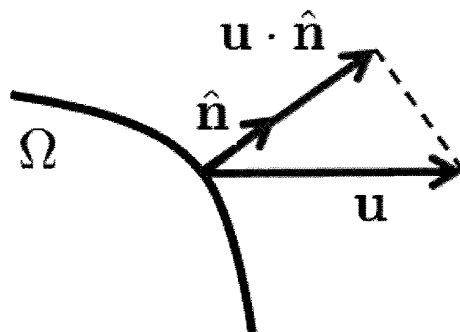
$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \in \mathbb{R}^D &\quad \rightarrow \quad \nabla \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}) = \frac{\partial (a_i a_j)}{\partial x_j} = \\
 &= a_i \frac{\partial a_j}{\partial x_j} + \frac{\partial a_i}{\partial x_j} a_j = \\
 &= (\nabla \cdot \mathbf{a}) \mathbf{a} + (\nabla \mathbf{a}) \cdot \mathbf{a} \in \mathbb{R}^D
 \end{aligned}$$

numero. Questo numero è moltiplicato per un vettore, l'altro termine è $\partial a_i / \partial x_j$ è il gradiente, è un tensore perchè ha due indici. Moltiplicato per a mi da un vettore.

- Il seguente esempio provate a svolgerlo voi

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0 \\
 \frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} - \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p &= 0 \\
 \frac{\partial (\rho e_t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e_t \mathbf{u} + p \mathbf{u}) &= 0
 \end{aligned}$$

Suddivido il bordo in tanti pezzettini e vedo se su ognuno di questi elementi la massa esce o entra e poi faccio una somma. Scompongo u in due componenti: una che sarebbe u scalare n che è parallela ad n e perpendicolare alla superficie, e una tangente alla superficie stessa.



Considero la componente solo normale alla superficie. Ottengo:

$$\frac{\partial m_{\Omega}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho dV = - \oint_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (2)$$

Quella che ottengo è una portata volumetrica. Questi $\frac{m^3}{s}$ li moltiplico per la densità. Se faccio $\frac{m^3}{s}$ moltiplicati $\frac{kg}{m^3}$ ottengo $\frac{kg}{s}$ che è consistente con il termine che sto cercando (fare l'analisi dimensionale per credere). Supponiamo come nel disegno che la componente normale alla superficie sia uscente: è una perdita e se è così la massa diminuisce. Quindi una componente positiva rispetto ad n essendo sempre uscente n è sempre una perdita e quindi deve dare un contributo negativo. Quel volumetto essendo infinitesimo può permettersi di caratterizzare il suo interno con poche variabili proprio perchè infinitesimo.

Applichiamo il teorema della divergenza, o del bilancio locale. Ci dice che se abbiamo un vettore e ne facciamo un prodotto scalare con un vettore rispetto ad una superficie infinitesima, e ne calcolo l'integrale del bordo, faccio cioè il flusso netto, questo è pari all'integrale di volume della divergenza del vettore:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS &= \oint_{\partial\Omega} (F_1 n_1 + F_2 n_2 + F_3 n_3) dS = \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \right) dV = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} dV \end{aligned} \quad (3)$$

quindi per applicare devo $F = -\rho u$

Inverto i due operatori integrale e derivata se e solo se Ω è fisso nel tempo.

Questo integrale mi da zero. Noi sappiamo che se faccio l'integrale del seno di x sul periodo mi da zero, dove le due aree sono uguali in modulo. Quindi una funzione non nulla integrata sul periodo può darmi zero. Se io adesso ho un integrale nullo, non posso necessariamente dire che l'integrando sia zero. La condizione sull'integrale è debole. Questo è vero per un certo Ω . Ma se io posso ripetere questa dimostrazione per un finito numero di Ω arbitrari e ottengo sempre lo stesso risultato allora significa che è l'integrando ad essere

suo significato è strettamente legato a quello fatto ieri, siamo giunti a quella derivata facendo un'assunzione cioè che ω non variasse nel tempo rispetto a questa derivata $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$. Si fa dunque una misura relativa al tempo in un certo punto fisso rispetto all'osservazione.

2. Il secondo termine è la divergenza di quel qualcosa che è in grassetto perchè se φ è uno scalare allora l'argomento è un vettore. Quello che otteniamo è il flusso. Se φ non dovesse essere uno scalare ma dovesse essere una quantità più complessa il flusso di φ ha sempre una dimensione in più. Questo termine nasce dal fare il flusso al bordo prima di applicare il teo della divergenza.
3. Il terzo termine è detto di sorgente o pozzo $s(\varphi)$. Questo termine è quello più oscuro. Ha le stesse unità di misura di $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$. Se avessi una sorgente avrei un termine $s(\varphi)$ positivo. Per la massa non succede e questo termine è uguale a zero. La quantità φ è conservata se questo termine è pari a zero, come la massa. Quindi la massa totale è conservata. Esempio: **se avessi una miscela di metano e ossigeno la quantità specifica di metano e ossigeno potrebbe variare!** Se la densità fosse solo di un componente, esso può variare. Se la reazione è esotermica e φ è la densità di uno dei reagenti quel termine molto probabilmente sarebbe di pozzo.

Sapendo che

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = \left(\sum_{i=1}^D \right) \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial x_i} = \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = \rho \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho$$

ritorniamo alla notazione. Andiamo a definire un nuovo operatore mettendo insieme questi due termini, chiamata derivata sostanziale, o materiale, o lagrangiana

$$\frac{D}{Dt} \doteq \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \tag{11}$$

se vado a sostituire nella relazione precedente:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{10}$$

In generale, dovremmo avere dunque in mente:

- la derivata euleriana;
- la derivata lagrangiana;
- la derivata punto;

Che relazione c'è tra queste derivate? Buona parte delle eq della meccanica classica sono eq alle derivate ordinarie: le funzioni sono solo del tempo. In questo caso la derivata è definita in modo non ambiguo ma in maniera chiara. Le cose si complicano se le funzioni dipendono dal tempo e dallo spazio. Se ho una funzione che dipende solo dal tempo posso calcolare la derivata:

bordo: quindi otteniamo

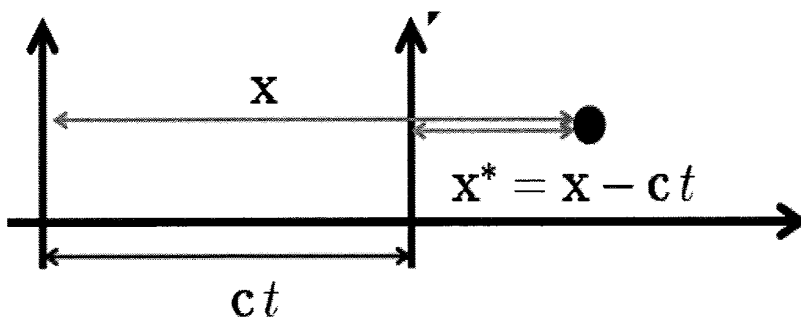
$$x' = x - ct$$

l'osservatore sulla nave dice che lo spostamento è x' mm mentre per quello sulla banchina è di x mm. Quindi avrò due velocità diverse, c e:

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u} - \mathbf{c}$$

se dimostriamo che la derivata lagrangiana è invariante, stesso risultato se applicato dai due osservatori da lo stesso risultato riusciamo anche a dimostrare che quella euleriana è non invariante. La parte avvertiva cura i limiti della derivata euleriana. L'osservatore fisso sulla banchina misura tutte le grandezze senza apice. Immagino la funzione φ con cambio di variabili in funzione dell'osservatore in moto. Se φ dipende da t^* ma la voglio derivare rispetto a t farò $\frac{\partial \varphi}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t}$, stessa cosa per x' . Se u' è $u-c$ vado a sostituire e derivare rispetto alle due variabili.

$$\begin{aligned} \frac{D\varphi}{Dt} &= \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi = \frac{D\varphi(t^*, \mathbf{x}^*)}{Dt} = \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial t^*} \frac{\partial t^*}{\partial t} + \nabla^* \varphi \cdot \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial t} + (\mathbf{u}^* + \mathbf{c}) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t^*} \nabla t^* + \nabla^* \varphi \cdot \nabla \mathbf{x}^* \right) = \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial t^*} + \nabla^* \varphi \cdot (-\mathbf{c}) + (\mathbf{u}^* + \mathbf{c}) \cdot \nabla^* \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \varphi = \frac{D^* \varphi}{Dt^*} \end{aligned} \quad (17)$$



Se immagino che φ sia funzione di x' e t' ognuno dei termini dell'espressione originale deve dividersi in due. Non si può fare un gradiente spaziale nel tempo, ecco perchè manca un termine. I

due termini che dipendono da c si elidono. Ciò che rimane è esattamente la derivata lagrangiana che misura l'altro osservatore che è in movimento.

La presenza della derivata lagrangiana garantisce che l'equazione sia invariante anche essa. Tutto ciò che è derivato nel tempo l'importante è che sia possibile confinarlo nella derivata lagrangiana, quindi questo basta per definire l'eq invariante. A causa della presenza della divergenza di flusso tutte le equazioni sono riscrivibili con derivata lagrangiana. Se si tratta di andare a studiare la quantità di moto: momentum è in italiano quantità di moto...in italiano il momento è forza per braccio. Si parte da una grandezza che è una velocità rappresentativa di tutta la quantità di moto all'interno del volume Ω . u_Ω è il rapporto tra la quantità di moto dell'intero sistema (che sarebbe l'integrale nella formula 18) diviso per la massa dell'intero sistema considerato m_Ω :

$$\mathbf{u}_\Omega = \frac{1}{m_\Omega} \int_\Omega \rho \mathbf{u} dV \quad (18)$$

Lo stesso approccio vorremmo che fosse applicato ad altre grandezze come la q.tà di moto: in ognuna di queste dimostrazioni si integra sempre nel nostro volume di controllo Ω . Per definire la q.tà di moto dell'intero sistema Ω prendo la definizione puntuale e la integro sul volume ottenendo così un effetto di q.tà di moto complessivo. La q.tà di moto complessiva divisa per la massa mi darà una velocità baricentrica rappresentativa del nostro sistema Ω .

$$\mathbf{u}_\Omega = \frac{1}{m_\Omega} \int_\Omega \rho \mathbf{u} dV \quad (18)$$

Quando vado a fare la variazione nel tempo euleriana della q.tà di moto (non è altro che la derivata euleriana) ottengo:

$$\frac{\partial(m_\Omega \mathbf{u}_\Omega)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega \rho \mathbf{u} dV = - \oint_{\partial\Omega} \mathbf{F}(\rho \mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \int_\Omega \mathbf{s}(\rho \mathbf{u}) dV \quad (19)$$

Dove Ω è fisso, arbitrario, ma fisso!

Se volessi studiare il contributo dei flussi al bordo del volume farei un integrale sul bordo $\partial\Omega$ considerando un elementino ds . Per ogni punto definito sul "pallone" $\partial\Omega$ è possibile definire un versore $\hat{\mathbf{n}}$ uscente per convenzione e normale alla superficie. Considero la velocità di un punto di $\partial\Omega$ dunque non è detto che \mathbf{u} sia normale alla superficie in quel punto considerando che la superficie è del tutto arbitraria. Si fa cmq una proiezione di \mathbf{u} lungo la direzione di $\hat{\mathbf{n}}$ (prodotto scalare).

RICORDA CHE:

1. Il flusso della q.tà di moto è un tensore degli sforzi idrostatici e idrodinamici;
2. Il secondo termine è definito sorgente o pozzo (è un integrale volumetrico) ed è dovuto alla presenza di un campo gravitazionale o comunque di un campo esterno. Se tutta la massa contenuta in Ω fosse soggetto ad un campo esterno essa potrebbe accelerare.

Possiamo pensare di arrivare a definire il flusso della q.tà di moto tramite tre contributi:

$$\mathbf{F}(\rho \mathbf{u}) = \mathbf{F}_{adv} + \mathbf{F}_{stat} + \mathbf{F}_{dyn}$$

Primo contributo: il flusso avvevativo

Qualsiasi cosa ci sia dentro Ω , considerato che la massa al bordo di Ω può muoversi con una certa velocità essa può trasformare la q.tà contenuta dentro Ω . \mathbf{F} è un tensore perchè deve sempre tenere conto di tutte e 9 le possibili componenti. Mi concentro sul trasporto di q.tà di moto iesima del componente. Qui posso ragionare analogamente a quanto fatto per la conservazione della massa cioè una componente di trasporto (proiezione di \mathbf{u} su \mathbf{n}). La q.tà che voglio trasportare è la densità per la componente libera u_i . Tutte le volte che si va a vedere un flusso che è dovuto solo al fatto che in quel punto c'è velocità non nulla si parla di *avvezione* (trasporto per velocità non nulla).

$$\mathbf{F}_{\text{dyn}} = 0 \text{ and } \mathbf{F}_{\text{stat}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \text{ is parallel to } \hat{\mathbf{n}}$$

$$\mathbf{F}_{\text{stat}}(\rho\mathbf{u}) = p\mathbf{I} \quad (22)$$

E nel caso in cui però il fluido fosse in movimento? Dovrei per caso usare una definizione differente? Come si definisce quando ci sono anche termine avvevivo e termine idrodinamico oltre a quello idrostatico? Posso usare la seguente definizione: faccio la traccia del tensore Π e la divido per 3.

$$p = \text{Tr}(\Pi)/3$$

Si ricorda che la traccia è la somma degli elementi sulla diagonale principale di un tensore. Se sono nel caso limite ottengo che la traccia $\text{Tr}(\Pi) = p+p+p = 3p$ che diviso 3 fa p , cioè proprio la pressione. Il vantaggio di questa definizione è che qualsiasi sia il tensore Π questa definizione è sempre valida. *Dunque, per non modificare questa definizione, se dovessi aggiungere degli elementi ad un tensore idrostatico, saranno elementi a traccia nulla.*

Terzo contributo: il flusso idrodinamico

Questo contributo risulta il più difficile perchè non tiene conto del moto ma tiene conto dello sforzo e quindi della deformazione del campo di moto. E' il termine legato alla viscosità e alla dissipazione. A livello sperimentale, rispetto ai casi di prima, cambia il fatto che quando appare è perchè si è in un caso di moto non uniforme. Dunque si richiama a proposito il gradiente di velocità. Alla fine in questo contributo intuitivamente si capisce che comparirà un elemento parente del gradiente di velocità.

$$\nabla \vec{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

Il grave problema in questo caso è che il gradiente di \mathbf{u} non è simmetrico. Provare a svolgere i calcoli del gradiente di \mathbf{u} per tre dimensioni x, y, z per credere. Si osserva che gli elementi simmetrici rispetto alla diagonale principale non sono uguali, questo perchè x, y e z sono assi indipendenti. Possiamo risolvere questa situazione introducendo una correzione che consiste nel sommare al gradiente della velocità il gradiente della stessa trasposto.

$$\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T$$

Di questa correzione si calcola la traccia (per questa dimostrazione vedere alla fine degli appunti):

$$2 \text{Tr}(\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T) = 2 \frac{\partial u_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial u_y}{\partial y} + 2 \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

che da di solito una componente non nulla. Per rispettare la definizione di pressione devo aggiungere una componente simmetrica αI . α Rappresenta un fattore di libertà, nel caso in cui dovessi forzare la traccia ad essere nulla. Ottengo dunque:

cinematica;

- Manca al ragionamento fatto il segno dell'espressione: il segno non cambia la forma funzionale o le unità di misura. Quindi potrebbe essere definito con il + o con il -. Se ho un dubbio con il segno guardo la stabilità. Si prende il più semplice dei campi di velocità non costanti (tipo una curva o una sinusoidale) e vedo se nell'evoluzione di questo profilo ogni variazione tende ad annullarsi nel tempo, cioè il sistema tende a smorzarsi e quell'andamento mi da il giusto segno da considerare nel tensore idrodinamico. E' abbastanza intuitivo che il segno sia negativo perchè consistente con le forze di tipo resistivo. Ottengo dunque:

$$\mathbf{F}_{\text{dyn}}(\rho\mathbf{u}) = -\mathbf{\Pi}_\nu = -\rho\nu \left(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T - \frac{2}{3}\nabla\cdot\mathbf{u}\mathbf{I} \right) \quad (27)$$

Posso dunque mettere tutti e tre i contributi insieme e sono sicuro che non manca nulla perchè questa struttura è in accordo con le prove sperimentali sui fluidi. Dunque la struttura finale è la seguente:

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u} + p\mathbf{I}) = \nabla\cdot\mathbf{\Pi}_\nu + \mathbf{s}(\rho\mathbf{u}) \quad (28)$$

equazione di conservazione di momento

N.B. 1 Il termine

$$\mathbf{s}(\rho\mathbf{u})$$

è quello chiamato di sorgente/pozzo di q.tà di moto ed è tipicamente dovuto all'accelerazione di un campo di moto. Come unità di misura è facile capire che deve essere:

$$\rho\cdot\vec{a} = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

N.B.2 E' possibile fare delle esemplificazioni quando c'è il tensore identità. In componenti:

$$I = \delta_{(i,j)} \rightarrow \begin{cases} \delta_{(i,j)} = 0 & \text{se } i \neq j \\ \delta_{(i,j)} \neq 0 & \text{se } i = j \end{cases}$$

Dunque se devo scrivere:

$$\nabla\cdot(\rho I) = \frac{\partial(p\delta_{(i,j)})}{\partial x_j} = \delta_{(i,j)} \frac{\partial p}{\partial x_j} = \sum \delta_{(i,j)} \frac{\partial p}{\partial x_j} = \frac{\partial p}{\partial x_i} = \nabla p$$

con i indice libero, non viene mai ripetuto. Di seguito la spiegazione del passaggio:

1. Scrivo prima l'argomento $p\delta_{(i,j)}$;
2. Devo fare una particolare derivata nello spazio che si chiama divergenza, dunque prendo l'ultimo indice e lo saturo (sarebbe j) ;
3. Nella sommatoria sopravvive solo il termine per cui $i=j$.

Dunque a volte può essere più semplice scriverlo così $\nabla\cdot(\rho I)$ perchè evidenzia la parte

poi scomposto.

$$\mathbf{f}(\rho e_t) = \mathbf{f}_{adv} + \mathbf{f}_{therm} + \mathbf{f}_{mech}$$

Domanda dal pubblico: *Potrebbe ripetere le caratteristiche del gradiente dell'energia potenziale?*

Risposta del prof: *Fino ad ora nel derivare la q.tà di moto abbiamo incluso in generale anche il termine di sorgente/pozzo, cioè abbiamo ammesso la possibilità di avere un campo esterno che induce un'accelerazione su tutte le masse presenti dentro Ω . Ma non abbiamo aggiunto nessuna specificazione ulteriore. Tra tutti i campi possibili per semplicità, ci focalizziamo solo su una famiglia di campi in cui non ci sono 3 componenti indipendenti, ma sono tutte e tre figlie dello stesso potenziale e_p , mediante l'operatore gradiente. Quando si verifica ciò si ha a che fare con un campo detto conservativo, cioè una forza per unità di peso, un'accelerazione che ammette potenziale.*

Lezione del 21 marzo 2013

Il sistema di equazioni Navier-Stokes è costituito dalle equazioni di conservazione della massa e di conservazione della q.tà di moto. In aggiunta a questo, qualora ci fossero delle variazioni del campo di temperatura nelle energie del sistema è necessario risolvere anche l'equazione della conservazione dell'energia totale. Abbiamo già visto che a livello microscopico distinguiamo energie cinetica da quella potenziale. A livello macroscopico distinguiamo invece tra energie cinetica potenziale e interna. Riassumendo potremo denominare semplicemente energia quella totale che è l'unica che effettivamente di conserva. Essendo conservata non avremo nessun termine di sorgente/pozzo. Andiamo ad analizzare i vari contributi del flusso.

$$\mathbf{f}(\rho e_t) = \mathbf{f}_{adv} + \mathbf{f}_{therm} + \mathbf{f}_{mech}$$

Il **termine avveffivo** è analogo a tutti quelli visti fino ad ora, dove questo termine è sempre legato al fatto che il flusso è in moto: se si ha al bordo una certa velocità non nulla l'energia totale verrà trasportata. Se questa velocità ha una componente normale alla superficie tenderà a far entrare o uscire dal volume di controllo, dipende dal segno della componente. Ricordiamo dunque che il termine avveffivo dipende dalla velocità.

$$\mathbf{f}_{adv}(\rho e_t) = \rho e_t \mathbf{u} \quad (34)$$

Essendo energia meccanica e interna i due pilastri dell'energia totale ovviamente è possibile trasferire energia totale o con un flusso termico per via termica o con un flusso meccanico per via meccanica. A prima vista sembrerebbe che si stanno mettendo insieme cose che hanno effettivamente una qualità ingegneristica differente (si sta parlando di exergia). E' molto più facile avere a disposizione un flusso termico piuttosto che un flusso meccanico. (Piccola digressione sulle forme di energia.)

Il secondo termine è il **flusso termico** che non è altro che il vettore descrittivo del flusso

espressione:

$$\frac{\partial(\rho e_t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e_t \mathbf{u} + p \mathbf{I} \cdot \mathbf{u}) = \nabla \cdot (-\mathbf{q}_\alpha + \mathbf{\Pi}_\nu \cdot \mathbf{u}) \quad (37)$$

Termine avvevivo: in questo termine stiamo già considerando un termine cubico di velocità poiché l'energia totale ha un pezzo di energia meccanica che a sua volta ha energia cinetica che contiene velocità al quadrato che poi viene di nuovo moltiplicato per u

Flusso meccanico: decomposto in parte idrostatica e parte dinamica

Flusso termico

In questa scrittura abbiamo $p \mathbf{I} \cdot \mathbf{u} = p \mathbf{u} = (\rho p \nu) \mathbf{u}$
Introducendo il volume massico compare quello che nei corsi precedenti si chiamava lavoro di spostamento

Mettendo di nuovo tutto insieme ottengo:

$$\frac{\partial(\rho e_t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e_t \mathbf{u} + \mathbf{q}_\alpha + \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{u}) = 0 \quad (39)$$

dove tra parentesi sono evidenti i tre termini di flusso. Come già detto non è tramite questa equazione che si stabilisce la bontà di una macchina.

Vediamo dunque un riassunto delle equazioni viste fino ad ora:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (40a)$$

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = \nabla \cdot \mathbf{\Pi}_\nu + \rho \mathbf{a} \quad (40b)$$

$$\frac{\partial(\rho e_t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e_t \mathbf{u} + p \mathbf{u}) = \nabla \cdot (-\mathbf{q}_\alpha + \mathbf{\Pi}_\nu \cdot \mathbf{u}) \quad (40c)$$

dove

$$\mathbf{\Pi}_\nu = \rho \nu \left(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{I} \right) \quad (41)$$

$$\mathbf{q}_\alpha = -\lambda \nabla T = -\rho c_p \alpha \nabla T \quad (42)$$

dove queste due vengono denominate *relazioni costitutive o fenomenologiche*. Queste equazioni sono valide per fluidi newtoniani, cioè fluidi in cui il tensore degli sforzi dipende linearmente dalle deformazioni

Proprietà in comune tra le equazioni di NSF:

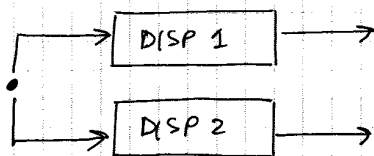
- tutte le equazioni viste hanno sempre almeno il termine di flusso avvevivo a partire dalla più semplice che è quella di continuità. Nel flusso avvevivo compaiono velocità e la grandezza di cui sto facendo il bilancio. Quindi si può fare un discorso più generalizzato:

Per tutti i casi considerati io posso sempre far comparire una lavorata lagrangiana, dato che tutte queste equazioni sono invarianti galileiane. Quindi non dobbiamo preoccuparci che noi stiamo risolvendo queste eq. rispetto ad un altro sys di riferimento diverso dall'altro nella misura in cui non sono accelerati uno rispetto all'altro. Cosa accaderebbe se i sistemi fossero accelerati, bisognerebbe aggiungere delle forze inerziali. Quindi il sistema di equazioni precedente si può risolvere in maniera tutta lagrangiana. Per i motori: applicare un modello lagrangiano-euleriano vuol dire che tutta la miscela preesistente in camera è descritta scrivendo l'eq con sistema di riferimento fisso (div. euleriana) e solidale al cilindro del cilindro pistone, tutto quello che rigenera la nuova camera da iniettare, che è spinta dall'iniettore e trova la resistenza della vecchia camera, ha un fronte che tende a frastagliarsi. Questa parte qui del dominio viene studiata lagrangianamente, cioè inseguendo una certa porzione di fluido di camera fresca. Questo approccio è giustificato dal fatto che il volume della camera fresca non è noto a priori e questo approccio è valido per tutte le volte in cui non è noto a priori il volume del dominio. Quando l'analisi è euleriana-euleriana significa che tutto quello che si può studiare in maniera euleriana (vecchia camera) lo si studia così e che tutto quello che si dovrebbe studiare lagrang. viene studiato con un approccio euleriano anche esso.

GRANDETTE NON CONSERVATE

Abbiamo due dispositivi con ognuno un ingresso e un'uscita. Supponiamo di

avere lo stesso flusso d'ingresso. Se il flusso fa riferimento



If flusso che esce dalla macchina 1 è $= a$ qh che esce dalla macchina 2

ad una grandezza conservata il flusso in ingresso $\dot{m} = a$ qh in uscita. Questa, da un punto di vista ingegneristico, è una pessima idea* cioè cui consente di esprimere qualcosa sulla grandezza più che sulle macchine.

Tutte le grandezze che ci servono possono essere dedotte dalle eq. di NSF, cioè il modello descrittivo non cambia e non introduciamo nulla di nuovo.

* non dà nessuna info utile ingegneristicamente parlando

Se mi limito al caso di forze esterne conservative come nel campo gravitazionale ad esempio, questo termine a non è altro che meno il gradiente dell'energia potenziale

$$\underline{a} = -\nabla \varphi_p$$

Ricordiamo che noi siamo partiti dall'eq. delle q.ta' di moto per ottenere l'energia cinetica (40b)

$$\frac{\partial(\rho \underline{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u} \otimes \underline{u}) + \nabla p = \nabla \cdot \underline{\underline{\Pi}} + \rho \underline{a}$$

che in formula Lagrangiana sarebbe:

$$\rho \frac{D \underline{u}}{Dt} = -\nabla \cdot \underline{\underline{\Pi}} + \rho \underline{a}$$

↓

$$\rho \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \rho \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} = -\nabla \cdot \underline{\underline{\Pi}} + \rho \underline{a}$$

moltiplico entrambi i membri per \underline{u}

$$\rho \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} \cdot \underline{u} + \rho (\underline{u} \cdot \nabla \underline{u}) \cdot \underline{u} = -(\nabla \cdot \underline{\underline{\Pi}}) \cdot \underline{u} + \rho \underline{a} \cdot \underline{u}$$

$$\rho \frac{\partial \underline{u}_k}{\partial t} + \rho \underline{u} \cdot \nabla \underline{u}_k = -(\nabla \cdot \underline{\underline{\Pi}}) \cdot \underline{u} + \rho \underline{a} \cdot \underline{u}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial \underline{u}_k}{\partial t} + \rho \underline{u} \cdot \nabla \underline{u}_k - \rho \underline{a} \cdot \underline{u} = -(\nabla \cdot \underline{\underline{\Pi}}) \cdot \underline{u} \\ \underline{a} = -\nabla \varphi_p \end{array} \right. \Rightarrow \rho \frac{\partial \underline{u}_k}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u}_k + \rho \underline{u} \cdot \nabla \varphi_p = -(\nabla \cdot \underline{\underline{\Pi}}) \cdot \underline{u}$$

$$\rho \frac{\partial \underline{u}_k}{\partial t} + \rho \underline{u} \cdot \nabla \underline{u}_k = -(\nabla \cdot \underline{\underline{\Pi}}) \cdot \underline{u}$$

Se il campo esterno oltre che essere conservativo è anche

costante nel tempo (come è di fatto il campo gravitazionale) posso aggiungere nella derivata nel tempo un termine perché essendo costante nel tempo darà derivata nulla. Dunque anche l'argomento della derivata euleriana diventa l'energia meccanica.

$$\rho \frac{D \underline{u}_k}{Dt} = -(\nabla \cdot \underline{\underline{\Pi}}) \cdot \underline{u} \quad (*)$$

← serve a indicare l'eq. alla pagina successiva

Sto cercando di ottenere l'equazione Lagrangiana dell'energia meccanica. Una volta ottenuta l'equazione la confronto con il gruppo di eq in forma Lagrangiana ottenute in precedenza (slide 32). Quelle nella slide 32 sono grandezze conservate: accadeva che in quel caso lì avevo a secondo membro sempre la divergenza di altri flussi ma per questa q.ta' non ho

d'energia totale è conservata ma non tutta l'energia totale è ugualmente pregiata. Di sicuro l'en. meccanica è pregiata, cioè che non è meccanica è almeno parzialmente convertibile in en. meccanica. d'en. meccanica è pregiata perché è versatile, posso fare tante cose diverse, persino per scopi termici (tranne l'attrito). A causa dei limiti del secondo principio però non è possibile fare il contrario! Posso prendere l'energia termica per scaldarmi, posso produrre en. meccanica ma mai completamente. Quindi l'energia meccanica può risolvere sia compiti meccanici che termici, l'energia termica può risolvere a scopi termici ma solo parzialmente a scopi meccanici. Quindi potremmo indicare l'energia meccanica come indicatore della qualità delle altre forme di energia dando un valore massimo all'energia meccanica e alle altre forme di energia dare un valore proporz. a quanto possono essere convertite in energia meccanica. A volte si parla di en. utilizzabile, che è la quota parte di energia utilizzabile meccanicamente, indipendente dell'energia che stiamo prendendo in considerazione. d'energia utilizzabile è detta exergia. In alcuni casi a grosse energie sono associate bassi valori di exergia.

Ritornando alla nostra equazione a secondo membro non abbiamo la div di qualcosa. Potrei pensare, come si fa nel caso delle derivate di fattori, di portare dentro la divergenza qualcosa ma poi fuori devo aggiungere qualcosa altro. Quindi porto dentro la parentesi il prodotto scalare e sottraggo il termine in più. Questo esercizio qui è uno di quelli visti negli esercizi sulla nomenclatura.

divergenza $(\nabla \cdot \underline{\underline{\pi}}) \cdot \underline{u} = u_i \frac{\partial \underline{\underline{\pi}}_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial (\underline{\underline{\pi}}_{ij} u_i)}{\partial x_j} - \underline{\underline{\pi}}_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} =$

qui faccio la derivata del prodotto e tolgo il termine che ho aggiunto

ho la divergenza di $\underline{\underline{\pi}}$ e quindi saturò l'ultimo indice j

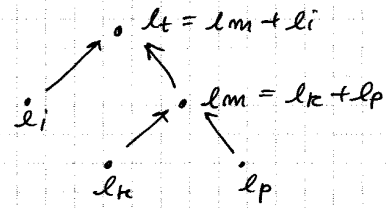
$= \nabla \cdot (\underline{\underline{\pi}}^T \cdot \underline{u}) - \underline{\underline{\pi}} : \nabla \underline{u}$

questo è un flusso meccanico ed è esattamente quel flusso meccanico che compariva parlando dei 3 flussi di en. totale!

è un prodotto due volte scalare tra due tensori. Questo qui chiaramente non è la div di un flusso. Questo termine è sorgente/pozzo. Parlando di energia pregiata qst. termine è visto come pozzo, energia persa x attriti.

Per quanto riguarda l'energia interna le cose sono più semplici: cioè essendo l'en totale la somma di en. meccanica e interna, avendo a disposizione entrambe le eq. ottengo quella dell'en interna per differenza

$$l_i = l_t - l_m$$



Quindi otteniamo:

$$\frac{\partial (p l_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (p l_i \underline{u} + q_\alpha) = - \underline{\Pi} : \nabla \underline{u} \quad \text{energia interna}$$

Dim:

$$(1) \frac{\partial (p l_t)}{\partial t} + \nabla \cdot (p l_i \underline{u} + p l_m \underline{u} + q_\alpha + \underline{\Pi} \cdot \underline{u}) = 0 \quad \text{energia totale}$$

$$(2) \frac{\partial (p l_m)}{\partial t} + \nabla \cdot (p l_m \underline{u} + \underline{\Pi} \cdot \underline{u}) = \textcircled{-P} \quad \begin{array}{l} \text{energia} \\ \text{meccanica} \\ \text{termine perso} \end{array}$$

Sottraggo membro a membro (1) - (2)

$$\frac{\partial (p l_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (p l_i \underline{u} + q_\alpha) = \textcircled{P} \quad \leftarrow \text{adesso diventa termine di sorgente!}$$

Effetti:

- nell'eq dell'en totale avevamo dei flussi sia termici che meccanici che così facendo invece sono ritirati ognuno nelle rispettive energie
- a causa di questa operazione di sottrazione ciò che è perso per en. meccanica diventa sorgente di en. interna. Questo ci consente subito di capire perché l'en totale è conservata: il termine perso di energia meccanica sposta energia a favore di quella interna

Il vantaggio di questi conti è che sono fatti punto per punto quindi rispetto a quello che facevamo una volta negli esercizi di fisica tecnica dove si diceva "vado a prendere la mia eq. di bilancio di en. meccanica, vedo che c'è una quota parte consumata, quella è l'en meccanica persa per attrito" - questa en persa per attrito la posso legare all'energia termica di attrito tramite quello che nei corsi base si spiega quistodora. Quindi anche allora avevamo questo genere di idia. Il vantaggio è che ora lo faccio punto per punto. Quindi è vero che io magari ho a che fare con una turbina con una classe di efficienza, ma facendo

Lezione di Asinari – 4 aprile 2013

nelle scorse puntate abbiamo visto che ci sono due grandezze molto significative che sono l'energia interna e l'energia meccanica che non sono conservate. Sono i due costituenti dell'energia totale e sono utili per giudicare le macchine perchè tanto più l'energia meccanica è preservata nei processi tanto più la macchina si può classificare efficiente. Al punto tale da considerare l'energia meccanica stessa come indicatore di qualità delle altre forme di energie e da qui nasce il discorso sull'exergia.

Adesso vediamo del sistema completo NSF due casi particolari. Ci son due casi significativi: uno è quello delle moderate velocità cioè bassi numeri Mac, l'altro è il caso opposto. MA è il numero adimensionale

$$MA = \frac{(\text{velocità caratteristica})}{(\text{velocità del suono})}$$

tipicamente si dice che fin quando questo rapporto è al di sotto di 0,2 si può usare invece del sistema di equazioni complete un sistema semplificato.

Vediamo i due casi separatamente.

- Quando la velocità del deflusso è più bassa di tanto rispetto alla velocità del suono, che dipende ovviamente dal fluido di cui stiamo parlando, (*quindi 340 m/s sono tipiche dell'aria in condizioni ambiente, mentre per l'acqua è più piccola. Ecco perchè non ha senso parlare di basse velocità o alte velocità, è meglio rapportarsi alla velocità del suono di quel fluido lì e ragionarci in rapporto usando MA*), quindi quando siamo a circa 0,2 cioè un quinto della velocità del suono di quel fluido possiamo usare un approccio che è detto **limite incompressibile**. Il limite incompressibile fa vedere come, quando la velocità è bassa rispetto alla velocità del suono, effettivamente il fluido si comporta come se fosse incompressibile. Questo semplifica non poco le equazioni viste fino ad ora. Non c'è contraddizione tra queste cose, perchè in teoria io potrei usare comunque un software completo per risolvere un caso incompressibile, perchè il software risolve il caso completo che include anche il caso incompressibile. Perchè dico in teoria e non in pratica? Nei metodi numerici, e qui ci riferiamo alla parte di Canuto, che si usano per risolvere queste equazioni si fa grosso affidamento al tipo di equazioni. Cioè sono metodi specificamente progettati per risolvere meglio certi tipi di equazioni. Quindi se so fin dall'inizio che son interessato ad un deflusso basso rispetto alla velocità del suono, quindi un caso di limite incompressibile, è meglio usare dei metodi numerici ottimizzati in tal senso. Questo in generale è una prassi comune. In questo limite incompressibile vedremo le funzioni dissipative, come mai in certe condizioni distruggiamo energia meccanica e vedremo anche l'equazione della conduzione che è quella usata dell'esercitazione con Canuto. Questo è il primo grande filone delle esemplificazioni, cioè il caso incompressibile. Analizziamo due casi particolari. Uno riguarda l'ottimizzazione delle macchine e l'altro lo studio della conduzione.
- L'altro grosso filone che vedremo è il **limite comprimibile**. Limite diametralmente opposto è il caso limite in cui la velocità di deflusso è dell'ordine della velocità del suono, quindi chiaramente elevata. Questo limite comprimibile fa vedere che in queste condizioni per qualsiasi tipo di fluido, sia esso anche un liquido, manifesta comportamenti del tipo comprimibile. Noi useremo questo limite comprimibile per studiare i fenomeni di propagazione del suono e di fatto rientra in questo capitolo

$$\frac{Dh}{Dt}\rho = \frac{De_i}{Dt}\rho + p \frac{Dv}{Dt}\rho + v \frac{Dp}{Dt}\rho$$

sostituisco $v = \frac{1}{\rho}$

$$\frac{Dh}{Dt}\rho = \frac{De_i}{Dt}\rho + p \frac{D\frac{1}{\rho}}{Dt}\rho + \frac{Dp}{Dt}$$

la derivata di $\frac{(D\rho)}{Dt} = -\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\frac{(D\rho)}{Dt}$

$$\frac{Dh}{Dt}\rho = \frac{De_i}{Dt}\rho - \frac{p}{\rho} \frac{(D\rho)}{Dt} + \frac{Dp}{Dt}$$

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \rho \frac{De_i}{Dt} + \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \rho \frac{De_i}{Dt} + \frac{Dp}{Dt} + p \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (57)$$

se guardiamo gli appunti uno dei possibili modi per scrivere l'equazione di continuità è proprio il seguente

$$\frac{(D\rho)}{Dt} = -\rho \nabla \cdot (\mathbf{u}) \quad \text{divergenza di } \mathbf{u}.$$

Questo è uno dei modi per scrivere che l'equazione di continuità che è invariante chiamando in causa la derivata lagrangiana della densità. Posso sostituire e ottenere l'espressione finale (57 slide 40)

$$\frac{Dh}{Dt}\rho = \frac{De_i}{Dt}\rho + \frac{p}{\rho}(\rho \nabla \cdot (\mathbf{u})) + \frac{Dp}{Dt}$$

il ρ si semplifica:

$$\frac{Dh}{Dt}\rho = \frac{De_i}{Dt}\rho + p \nabla \cdot (\mathbf{u}) + \frac{Dp}{Dt} \quad 57 \text{ slide } 40$$

questa espressione ci dice che la derivata lagrangiana dell'entalpia moltiplicata per la densità è uguale alla derivata lagrangiana dell'energia interna più due altri termini. È sufficiente prendere l'equazione vista la volta scorsa e aggiungere questi due termini e ottengo l'equazione dell'entalpia. Ricordiamo l'equazione dell'energia interna (56b slide 39)

$$\frac{\partial(\rho e_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e_i \mathbf{u} + \mathbf{q}_\alpha) = -\Pi : \nabla \mathbf{u} \quad (56b)$$

La fonte di errore dove sta? Sotto opportune ipotesi questi due termini sono molto piccoli, perchè uno sarebbe portato a dire che l'equazione dell'entalpia sarebbe circa l'equazione dell'energia interna, che potrebbe essere vero ma non in generale. Altro aspetto a volte si confondono le due cose: si dice equazione dell'energia tanto che si a interna o entalpia di fatto hanno al stessa forma le equazioni. Questo modo di dire è piuttosto pericoloso perchè ci sono anche altre forme di energia, confondendo le cose. Per esempio energia interna ed energia meccanica hanno proprietà completamente opposte, tanto è vero che se una scende

Di seguito la dimostrazione dei due termini che spariscono $p \nabla \cdot (u)$ che spariscono

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\Pi}} : \nabla \underline{u} &= - (\rho \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{\Pi}}_v) : \nabla \underline{u} = \\ &= -\rho \underline{\underline{I}} : \nabla \underline{u} + \underline{\underline{\Pi}}_v : \nabla \underline{u} = \\ &= -\rho [\nabla \cdot (\underline{\underline{I}} \cdot \underline{u}) - (\nabla \cdot \underline{\underline{I}}) \cdot \underline{u}] + \underline{\underline{\Pi}}_v : \nabla \underline{u} = \\ &= \rho \nabla \cdot (\underline{\underline{I}} \cdot \underline{u}) + \underline{\underline{\Pi}}_v : \nabla \underline{u} = \\ &= -\rho \nabla \cdot \underline{u} + \underline{\underline{\Pi}}_v : \nabla \underline{u} \end{aligned}$$

ottenendo

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q}_\alpha + \frac{Dp}{Dt} + \underline{\underline{\Pi}}_v : \nabla \mathbf{u} \quad (58)$$

Altra grandezza significativa è l'entropia. A stretto rigore derivare l'entropia dalle grandezze precedenti sembra una cosa un po' strana. In realtà nelle cose viste prima, il secondo principio c'era già. Vi ricordate quando abbiamo dedotto il tensore degli sforzi fluidodinamici? Abbiamo trovato la forma simmetrica, presa traccia nulla, abbiamo introdotto un coefficiente che poi è a viscosità. Adesso dobbiamo anche sceglierne il segno per garantirne la stabilità: in questo c'è il secondo principio perchè stabilendo il segno dico in che direzione deve andare la mia trasformazione. Quindi quello che abbiamo fino ad ora chiamato effetto delle viscosità non è altro che un modo diverso per tenere conto del secondo principio. Ecco perchè da questa informazione nascosta si può esprimere il secondo principio mediante l'entropia. Quindi il secondo principio è già incluso in NSF, è dentro le relazioni fenomenologiche. Viene fatta l'assunzione che è detta relazione di Gibbs:

$$T ds = de_i + p dv \quad (61)$$

equazione valida in casi reversibili e non:

- nel caso di sistemi reversibili il primo membro sarebbe il dQ , $pdv=dLi$ e la loro differenza darebbe la variazione di energia interna; se il deflusso è completamente reversibile si dimostra che $dQ=Tds$ e che quindi è uguale a $dQ=de_i+ dLi$.
- Nel caso di sistemi non reversibili si richiama il teorema di Gouy Stodola, cioè le irreversibilità che io avrò in deflusso non reversibile saranno pari al lavoro delle forze di attrito. Per cui

$$\begin{aligned} T ds &\neq dQ \\ p dv &\neq dL_i \\ T ds - dL_i &= de_i \end{aligned}$$

Usiamo questa relazione come definizione di entropia che fino ad ora non era mai stata introdotta. Nel sistema di equazioni base non c'è l'entropia quindi usiamo questa definizione. Perchè sto usando i differenziali con il d piccolo? Perchè sono differenziali esatti come si dice nei corsi precedenti. Il differenziale esatto si usa quando esiste il funzionale, altrimenti uso una delta che indica forma senza funzionale. Se voglio definire una relazione fondamentale per spiegare che cosa è l'entropia questa deve essere la stessa in tutti i sistemi non accelerati quindi la derivata giusta da usare è quella lagrangiana.

conservata. Il fatto che la variazione di entropia sia nulla implica che il sistema sta subendo trasformazioni reversibili. Una trasformazione reversibile è una trasformazione in cui i due gradienti sono trascurabili, a limite nulli. Se uno dei due è non nullo, o entrambi, si parla di trasformazioni non reversibile e quindi irreversibile.

C'è un problema: questo termine qua non è a stretto rigore esattamente uguale a quelli che abbiamo visto.

$$\rho T \frac{Ds}{Dt}$$

Questo perchè ho la densità moltiplicato per la derivata lagrangiana della grandezza ρ ma ho anche la T ! Se volessi risolvere questa difficoltà, basta dividere tutta l'espressione per T .

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = -\left(\frac{1}{T}\right) \nabla \cdot q_\alpha + \left(\frac{1}{T}\right) \Pi_\nu : \nabla u \quad (63)$$

se divido per la temperatura il primo termine del secondo membro non è più un flusso perchè T sta fuori! Quindi dividendo per la T sto spostando solo il problema al secondo membro perchè questo termine a secondo membro non è più la divergenza di qualcosa. Io vorrei avere lì una divergenza di un qualcosa tutto dentro l'argomento della divergenza. Ma cosa è allora questo termine? Se il flusso termico è $\frac{Watt}{m^2}$ se divido per T diventa un flusso

entropico che di fatto è $\frac{Watt}{(m^2 K)}$. Quindi il flusso è quello di entropia. Non posso portare banalmente il T dentro, la T varia da punto a punto. Se voglio portarlo dentro devo aggiungere il termine mancante. Quindi ottengo la (63')

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = - \nabla \cdot \left(\frac{q_\alpha}{T} \right) + \frac{q_\alpha}{T} \cdot \nabla \left(\frac{1}{T} \right) + \frac{1}{T} \cdot \Pi_\nu : \nabla u$$

l'entropia può al massimo essere generata quindi io devo avere a che fare con grandezze positive. Dimostro che il secondo termine è positivo:

$$\begin{aligned} q_\alpha \cdot \nabla \left(\frac{1}{T} \right) &= (-\lambda \nabla T) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{T} \right) = (-\lambda \nabla T) \left(-\frac{1}{T^2} \right) \frac{\partial T}{\partial x_i} = \\ &= (-\lambda \nabla T) \left(-\frac{1}{T^2} \right) \nabla T = \frac{\lambda}{T^2} \nabla T^2 > 0 \end{aligned}$$

si parla di forme dissipative quadratiche: sono funzioni che descrivono la produzione di entropia, quadratica perchè il modo più semplice di avere una produzione è quello di prendere un quadrato., dimostreremo che anche l'altro contributi è positivo, e quindi essendo due termini positivi l'entropia ha due possibili sorgenti una strettamente termica e l'altra legata al trasporto meccanico. La volta scorsa abbiamo parlato di perdite di energia meccanica che possono generare produzione di energia interna. Classico esempio l'attrito:

PRIMO PRINCIPIO

pag 200

10 Aprile 2013

Questa suddivisione viene fatta per mettere a primo membro tutto ciò che è irreversibile

$$\underline{\underline{\pi}} \cdot \underline{\underline{u}} = (\underline{\underline{p}} \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{\pi}} \underline{\underline{D}}) \cdot \underline{\underline{u}} = \underbrace{p \underline{\underline{u}}}_{\text{reversibile}} - \underbrace{\underline{\underline{\pi}} \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{u}}}_{\text{irreversibile}}$$

Tipicamente ciò che è irreversibile ha due grandi caratteristiche:

- ciò che è irreversibile dipende sempre dai gradienti di temperatura o di velocità, cosa valida per il flusso termico e per il tensore degli sforzi viscoso
- Le irreversibilità prodotte dipendono sempre dal tipo di fluido: a parità di gradiente fluidi diversi hanno irreversibilità diverse. Pensando all'esempio più semplice che è l'irreversibilità meccanica a parità di deformazione del campo di moto un fluido più viscoso mi dà degli sforzi viscosi più grandi. Stessa cosa per il flusso termico: a parità di ∇T il fluido con diffusività termica maggiore mi dà irreversibilità maggiore. Prandtl dà una misura di confronto tra questi due termini di irreversibilità meccanica e termica.

Perché l'altro termine reversibile si mette a primo membro?

Perché nella formulazione classica del primo principio scritta in forma canonica a secondo membro si scrive tutto ciò che dipende dalle funzioni di stato - da pressione è un tipico esempio di funzioni di stato

il termine di spostamento ad essa collegato è di nuovo un termine legato ad una grandezza di stato. Ma nel termine reversibile $p \underline{\underline{u}}$ c'è la velocità! Come facciamo? Divido e moltiplico per la densità ρ così $\frac{1}{\rho} = v$ volume massico e così compare un termine $p \cdot v$

$$p \underline{\underline{u}} - \underline{\underline{\pi}} \underline{\underline{D}} = (p v) \rho \underline{\underline{u}} - \underline{\underline{\pi}} \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{u}}$$

Da notare che tipicamente la superficie del bordo attraverso la quale si ha scambio termico non sono uguali necessariamente alle superfici del bordo dove ho scambio di massa ($M \neq N$) - cioè l'espressione che abbiamo scritto vale sempre. Quindi vediamo i vari termini:

• INTEGRALE DEL FLUSSO

$$\phi_j = - \oint_{\partial \Omega_j} \underline{q}_\alpha \cdot \underline{\hat{n}} \, dS$$

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\underline{q}_\alpha) \, dV \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Applico Gauss al contrario}}}{=} \int_{\partial \Omega} \underbrace{-\underline{q}_\alpha \cdot \underline{\hat{n}}}_{\substack{\text{proiezione del flusso nella direzione} \\ \text{normale}}} \, dS = \sum_{j=1}^M \int_{\partial \Omega_j} \underbrace{-\underline{q}_j \cdot \underline{\hat{n}}}_{\substack{\text{il segno - è giustificato} \\ \text{dal fatto che il flusso è} \\ \text{positivo se entrante, quindi} \\ \text{opposto a } \underline{\hat{n}} \Rightarrow \text{ecco che il } \ominus}} \, dS$$

• POTENZA MECCANICA

$$W_t^* = - \oint_{\partial \Omega} (\underline{\pi}_v \cdot \underline{u}) \cdot \underline{\hat{n}} \, dS$$

↓
solo della parte viscosa

Il primo membro è costituito da due grandezze che derivano da differenziali non esatti, sonoatrici: la difficoltà di questo

primo membro sta proprio nel fatto che devo tenere conto per queste grandezze delle condizioni al bordo e non sono calcolabili a partire dalle iniziali o finali - Sono grandezze dunque già intrinsecamente spaziali, non sono definite in modo univoco per l'intero sistema fanno riferimento a tutto un bordo con tutti i possibili casi -

$$(h + l_k + l_p)_i = \frac{1}{G_i} \oint_{\partial \Omega_j} \rho (h + l_k + l_p) \underline{u} \cdot \underline{\hat{n}} \, dS$$

l'entalpia totale ($h + l_k + l_p$) nella sezione i-esima è una media ponderata data dall'integrale diviso la portata

• PORTATA IN MASSA

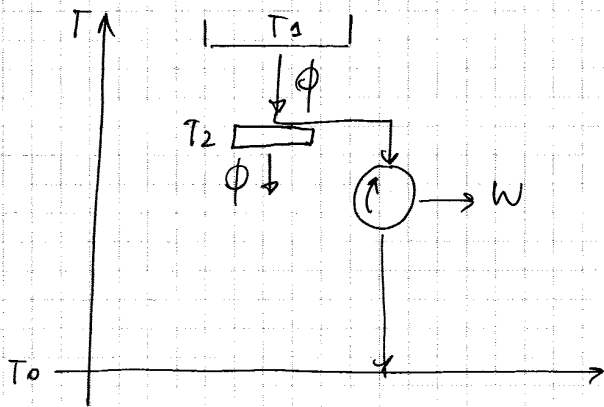
$$G_i = \oint_{\partial \Omega_i} \rho \underline{u} \cdot \underline{\hat{n}} \, dS$$

Se vogliamo definire in un modo compatto tutte le grandezze medie in massa prendo la mia grandezza i-esima X

$$\bar{X}_i = \int_{\partial \Omega_j} \rho \underline{u} \cdot \underline{\hat{n}} \, dS \cdot \left(\frac{1}{\int_{\partial \Omega_j} \rho \underline{u} \cdot \underline{\hat{n}} \, dS} \right) \rightarrow \text{questo è un peso}$$

definita rispetto alla porta i-esima

Stabiliamo un asse delle T. Supponiamo di avere una disponibilità di flusso



termico da T_1 - d'ambiente, ha temperatura T_0 . Questo flusso termico lo do in pasto al ciclo di Carnot e ottengo una certa potenza meccanica W .

$$\eta_{\text{CARNOT}} = \frac{W}{\phi} = 1 - \frac{T_0}{T_1}$$

29.93

$$W = \phi \left(1 - \frac{T_0}{T_1}\right)$$

Il collegamento tra potenza meccanica e il flusso termico è il motore. Supponiamo che il flusso invece di essere dato immediatamente in pasto alla mia macchina attraversi una lamina di metallo (massa sottile). In virtù dello scambio termico la mia vecchia T_1 diventa T_2 : è giusto perché se io voglio che il flusso attraversi una superficie di scambio termico la temperatura deve per forza scendere a T_2 , cioè vi deve essere un grad di T che "invoglia" il flusso termico ad andare lì. Se sono così brava faccio in modo che il flusso che entra nella lamina è lo stesso che esce da essa. Quindi ora abbiamo a che fare con lo stesso flusso ad una temperatura T_2 più bassa. Questo flusso lo uso nel ciclo di Carnot per ottenere W' .

$$W' = \phi \left(1 - \frac{T_0}{T_2}\right) \quad \text{con } T_2 < T_1 \Rightarrow W' < W$$

Quindi l'efficienza del secondo motore a parità di motore a ciclo di Carnot è più bassa quindi la potenza meccanica estraibile è più bassa W' .

Questo ragionamento è utile per capire che la bontà dello scambio termico ha a che fare con la potenza meccanica estraibile.

Questo schema appena fatto rimane valido anche in totale assenza di attriti.

Anche supponendo totale assenza di attriti il coeff di Carnot rimane comunque minore di 1. Anche lo scambio termico va ottimizzato per ottenere grande potenza meccanica, non solo eliminare gli attriti per contribuire.

Non motore di Carnot privo di attriti ha un rendimento strettamente minore di 1: quindi non è solo l'attrito che riduce i rendimenti perché il rendimento dipende dai due livelli di temperatura.

(ogni volta che faccio uno scambio termico perdo un pezzo)

Esiste l'entropia che risente di tutti i due i termini, attriti e scambio termico.

Supponiamo di prendere un coeff, di incrementarlo, lo confrontiamo con la superficie di scambio ^{in cond. normali} termico normale

Incrementato $\rightarrow \frac{h'}{h} / (f'/f)^{1/3}$

in condizioni normali

So che per incrementare lo scambio termico devo inserire degli ostacoli all'interno del flusso il coeff. di attrito perché aumentano l'attrito, lo scambio termico h - Traente questo

rapporto però osservo come elemento di h'

cosa provoca nel coeff di attrito f (cioè nell' aumento di f) Questo ultimo non si valuta alla prima potenza ma alla radice cubica e questo perché è un punto molto vicino all' ottimo entropico - come si vede se nella mia soluzione si vede che f aumenta troppo allora addirittura la soluzione trovata peggiora le cose (cioè si vanifica così l'effetto di h')

Come posso descrivere l'equazione precedente? di due grandezze considerate le chiamo σ ; abbiamo:

$$\sigma_T \text{ TERMICA} = \frac{1}{T} \nabla T \cdot \nabla T$$

$$\sigma_M \text{ MECCANICA} = \frac{1}{T} \underline{\underline{\Pi}}_D : \underline{\underline{\nabla u}}$$

Sono i due termini strettamente positivi per il primo principio che danno

produzione di entropia per via meccanica o per via termica - di irreversibilità vanno distinte in interne e esterne:

- interne, dovute ad attrito $\Rightarrow \sigma_M$;
- esterne sono dovute allo scambio termico, $\nabla T \Rightarrow \sigma_T$;

Prendiamo un motore di Carnot ideale privo di attriti quindi privo di irreversibilità interne - benché sia privo di attriti il suo rendimento meccanico è minore di 1? Perché si fanno ancora le irreversibilità interne termiche - quindi abbiamo:

$$-\nabla \cdot \left(\frac{1}{T} \underline{q}_d \right) + \sigma_T + \sigma_M = \frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho s \underline{u})$$

Questo è il famoso termine di irreversibilità

Integrando sul volume di controllo

$$\sum_{j=1}^M \frac{\phi_j}{T_j} + \sum \text{irr} = \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right)_{cv} + \sum_{i=1}^N G_i s_i$$

Anche in questo caso si distinguono le zone di flusso di bordo dalle zone in cui si ha scambio di entropia massica

Indica quale impatto hanno sul sistema i gradienti di temperatura esterni o i gradienti di velocità esterni

i gradienti di temperatura sono nulli e rimangono solo le irreversibilità meccaniche, come vengono correlate entrambe con il lavoro degli attriti? Le lo dice questo teorema: se sono in un caso isoterma, la temperatura è uguale a quella dell'ambiente quindi il gradiente è nullo non ha irreversibilità termiche allora l'irreversibilità è quella persa per attrito diviso la temperatura dell'ambiente

L'EQUAZIONE DELL'EXERGIA o DELL'ENERGIA UTILIZZABILE

Usiamo la quota parte di energia meccanica utile solo per capire la bontà di una macchina.

Questi schemi sono utili a capire che l'analisi energetica è diversa dall'analisi exergetica. D'ANALISI ENERGETICA mette enfasi sulla q.ta', si valuta in J e se rapportata in tempo in $W = J/s$.

Spesso però è più utile la qualità dell'energia. Supponiamo di avere una macchina motrice, interposta tra due termostati, la differenza di temperatura dei termostati consente da una parte di ottenere un flusso di calore da una temperatura più alta, ricoverare

in un'altra quota parte dal termostato a T inferiore e la loro differenza si traduce in energia meccanica. Nella figura 14 si ha proprio un esempio con diagrammi a freccia dei due tipi di analisi.

ANALISI EN: si prende una larghezza delle frecce proporzionale alla q.ta' di energia scambiata nel processo. Essendo l'energia conservata, l'energia che fluisce dal termostato superiore viene ripartita in $\eta_E Q_H$ e Q_L . È un caso conservativo, quindi la q.ta' di energia viene ripartita in diversi livelli.

Da un'idea visiva dei termini più importanti. Ma non da informazioni di qualità.

ANALISI EXERGETICA: come si relaziona il termostato ambiente rispetto ai due momenti? Talvolta qui il caso in cui il termostato ambiente coincide con il più basso fra i due necessari al funzionamento del motore. Il motore rigetta quella quantità quota parte a causa del secondo principio all'ambiente - se così è, cioè il termostato più basso è quello a temperatura ambiente, il flusso o la q.ta' di energia associata allo scambio con l'ambiente allora

FIGURA 13. Diagramma temperatura -energia per una macchina termica motrice. Entropia generata e perdita di lavoro durante il ciclo

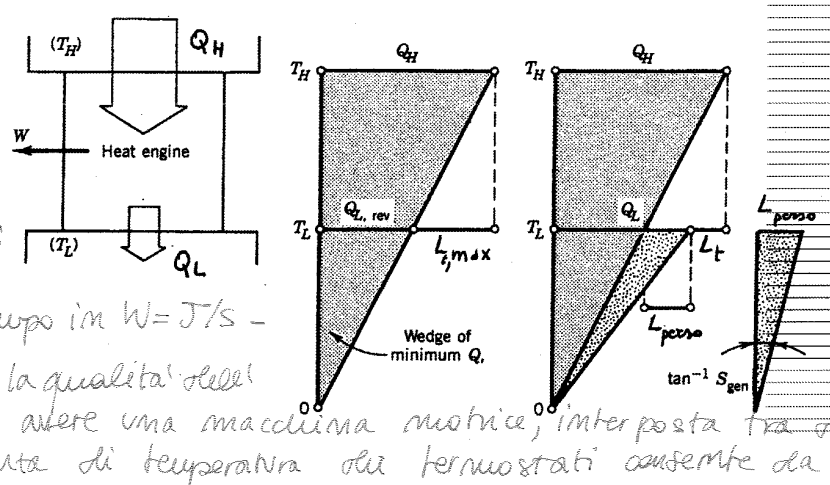


FIGURA 14. Trasformazioni energetiche ed exergetiche per una macchina termica motrice (TIPICI DIAGRAMMI DA REPORTI DEUSONALI)

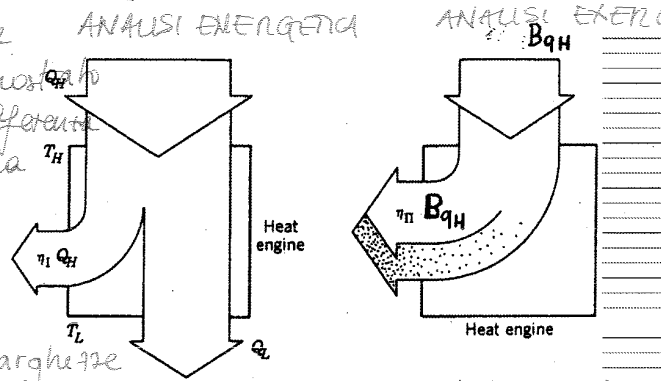
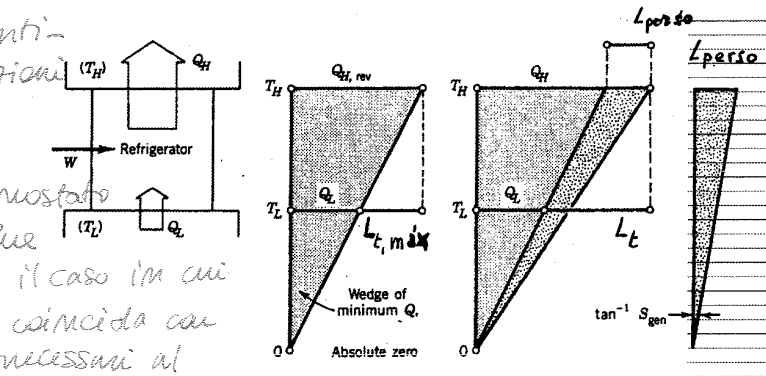


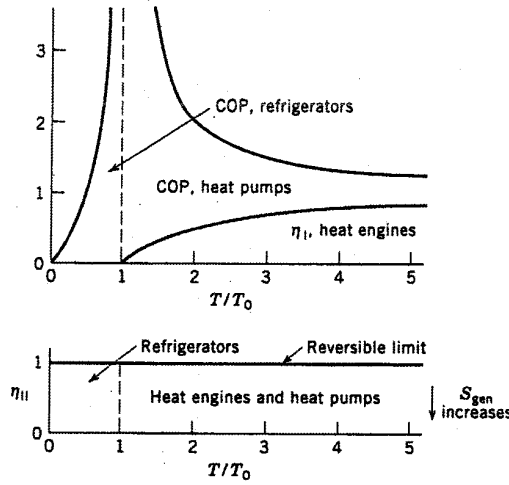
FIGURA 15. Diagramma temperatura -energia per una macchina termica operatrice. Entropia generata e perdita di lavoro durante il ciclo



118 è zero, perché il coeff di carnot è $R. Borchellini (1 - T_0/T_0) = 0$ e quindi non c'è una freccia verso il basso, non vi è quota parte di exergia rilasciata all'ambiente. B_{qH} rappresenta la q.ta' di exergia in ingresso, essendo

L'EQUAZIONE DELL'EXERGIA o DELL'ENERGIA UTILIZZABILE

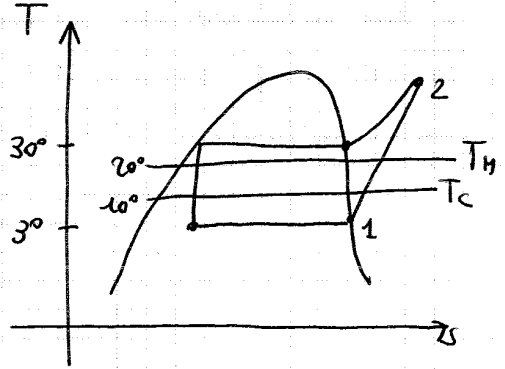
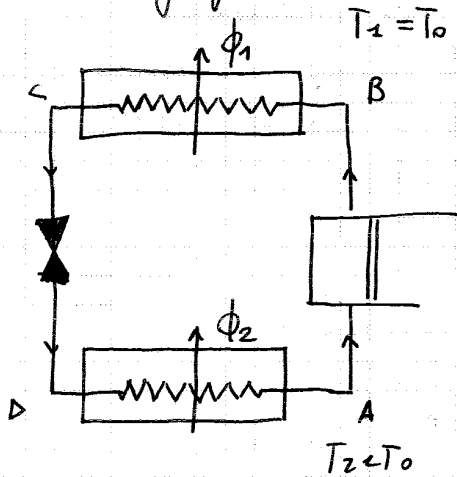
FIGURA 18. Valori delle efficienze di primo e secondo principio per motori, frigoriferi e pompe di calore



non so
chi sia

Im caso di impianti piu' semplici puo' risultare comodo usare questo diagramma circolare detto di "EISMANN". Questo concetto potrebbe essere lo schema di un ciclo Joule (che un condensatore, probabilmente che un passaggio di stato) - l'idea di base e' quella di riuscire a tracciare su un unico cerchio cioè che e' il flusso legato alle risorse che io spendo quando faccio funzionare il sistema e il prodotto che ottengo. Viene calcolato il flusso di exergia associato al flusso termico iniziale Y_{QH} , entro nel bruciatore (heater) vi e' una parziale distribuzione di exergia. Di ^{quella} questa che rimane una quota parte e' destinata alla turbina che a sua volta ne distugge una parte, un'altra parte e' l'energia meccanica prodotta dalla turbina stessa e la restante parte e' data ai successivi componenti che seguono la turbina. Il prodotto dell'impianto non e' soltanto la potenza prodotta dalla turbina, una quota parte di questa energia meccanica deve essere spesa per poter azionare le pompe.

Secondo esempio: ciclo feigo



$\eta = 0,9$ R134a $G = 0,057 \text{ kg/s}$

Prendiamo come punto di riferimento $T = -40^\circ\text{C}$ con $h=0$ ed $s=0$

APPUNTI VOLANTI

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \rho \frac{De_i}{Dt} + \rho p \frac{Dv}{Dt} + \rho v \frac{Dp}{Dt}$$

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = \rho \frac{De_s}{Dt} + \rho v \cdot n + \frac{Dp}{Dt}$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + v \cdot (\rho e_i n + q_n) = -\underline{\underline{\pi}} : \underline{\underline{v}} n$$

$$\rho \frac{De_i}{Dt} = -v \cdot q_n - \underline{\underline{\pi}} : \underline{\underline{v}} n$$

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = -v \cdot q_n + \rho v \cdot n + \frac{Dp}{Dt} - \underline{\underline{\pi}} : \underline{\underline{v}} n$$

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + v \cdot (\rho h n + q_n) = \underline{\underline{\pi}} : \underline{\underline{v}} n + \frac{Dp}{Dt}$$

$$v \cdot n = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\pi}} : \underline{\underline{v}} = \mu (v_n + v_n^T - \frac{2}{3} v \cdot n \underline{\underline{I}}) = \mu (v_n + v_n^T)$$

$$\frac{v_n + v_n^T}{2} = 2 v_n^s \Rightarrow \underline{\underline{\pi}} : \underline{\underline{v}} = \mu (2 v_n^s)$$

$$\underline{\underline{\pi}} : \underline{\underline{v}} n = \mu 2 v_n^s : (v_n^s + v_n^w) = 2\mu (v_n^s)^2$$

$$(v_n^s)^2 = 0 \wedge \frac{Dp}{Dt} = 0 \Rightarrow \rho \frac{Dh}{Dt} + v \cdot q_n = 0$$

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + v \cdot (\rho h n + q_n) = 0$$

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho h v_i)}{\partial x_i} = -v \cdot q_n$$

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho h \cdot v_n + \rho v_n \cdot v_n = -v \cdot q_n$$

$$h \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \cdot v \cdot (\underline{\underline{v}} n) \right] + \left(\rho \frac{\partial h}{\partial t} + \rho v_n \cdot v_n \right) = -v \cdot q_n$$

$$dh = c_p dt$$

$$\rho Dh = \rho c_p dt$$

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = -v \cdot q_n$$

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = -v \cdot q_n = v \cdot (2 \underline{\underline{v}} T)$$

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = 2 \underline{\underline{v}}^2 T \Rightarrow \frac{DT}{Dt} = 2 \underline{\underline{v}}^2$$

Fintanto che il fluido si muove a velocità inferiori a quelle del suono esso ha tutto il tempo di potersi adattare, ma se Ma aumenta e la velocità del fluido comincia a inseguire la velocità del suono a quel punto non è più possibile per il fluido adattarsi -
Quindi

I ASSUNZIONE $|\underline{u}| \ll c_s \Rightarrow \nabla \cdot \underline{u} = 0$

rimane

$$\underline{\underline{\tau}}_D = \mu (\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T)$$

la tecnica che abbiamo usato noi, cioè quella di rendere simmetrico un tensore che non lo è aggiungendo semplicemente il trasposto, come abbiamo fatto lì non è un caso speciale, in matematica la si usa spesso - A tale fine o si aggiunge il trasposto oppure prendo un tensore non simmetrico e lo divido in due parti, una parte simmetrica e una parte non simmetrica -
Posso dunque fare:

(1) $\frac{\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T}{2} = \nabla \underline{u}^S$ Parte simmetrica: significa che se ne faccio il trasposto non cambia
 $(\nabla \underline{u}^S)^T = \nabla \underline{u}^S$

(2) $\frac{\nabla \underline{u} - \nabla \underline{u}^T}{2} = \nabla \underline{u}^W$ Parte antisimmetrica: se ne faccio il trasposto non cambia, ma ci aggiungo il meno

Se sommo (1) e (2) ho $(\nabla \underline{u} = \nabla \underline{u}^S + \nabla \underline{u}^W)$

Dunque: $\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T = \nabla \underline{u}^S \cdot 2$ e quindi: $(\nabla \underline{u}^W)^T = -\nabla \underline{u}^W$

$\mu = \rho \nu$

$\underline{\underline{\tau}}_D = \mu (\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T) = 2\mu \nabla \underline{u}^S$

Quindi dato qualsiasi gradiente di velocità ne prendiamo solo la parte simmetrica.

$\underline{\underline{\tau}}_D : \nabla \underline{u} = 2\mu \nabla \underline{u}^S : (\nabla \underline{u}^S + \nabla \underline{u}^W)$

Questa decomposizione è detta su parti ortogonali

prodotto

Perché è utile questa scrittura? Il doppio prodotto scalare tra un tensore simmetrico e un tensore antisimmetrico vale zero - Prodotto doppio scalare implica simmetria

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} + \rho \underline{u} \cdot \nabla h + \rho \nabla \cdot (\underline{u} h) = -\nabla \cdot \underline{q}$$

Questi due termini non sono altro che l'equazione di continuità moltiplicata per h

$$h \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) \right) = 0$$

divergenza della q.ta di moto

l'equazione di continuità è una grandezza conservata per la densità e anche moltiplicata per h quei due termini mi danno zero.

Quindi abbiamo:

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} + \rho \underline{u} \cdot \nabla h = -\nabla \cdot \underline{q} \Rightarrow \rho \left(\frac{\partial h}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla h \right) = \rho \frac{Dh}{Dt} = -\nabla \cdot \underline{q}$$

NoB. Per ora abbiamo fatto solo due ipotesi!!

Come si può calcolare la variazione di entalpia? Principalmente mediante una variazione di temperatura

$$[C_p] = \frac{J}{kg \cdot K}$$

$$dh = c_p dT$$

Il differenziale che devo usare in termo meccanica dei continui è il lagrangiano perché l'unico ad essere invariante rispetto ai movimenti non accelerati

$$Dh = c_p DT$$

Quindi:

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = -\nabla \cdot \underline{q}$$

Non rimane altro che sostituire Fourier come si fa nell'nei corsi di base

$$\underline{q} = -\lambda \nabla T$$

conduttività termica $[\lambda] = \frac{W}{m \cdot K}$

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T)$$

d'eq così come si scelta λ funzione sia a primo che secondo membro della temperatura

III ASSUNZIONE

$\lambda = \text{costante}$

stutto rigore serve un metodo numerico che si adatti a comprendere tutte e 3 le nature delle equazioni-

d'equazione che abbiamo studiato oggi per esempio ha due nature: ellittica o parabolica a seconda del caso

Qual è il significato fisico di queste diverse nature?

In Navier - Stokes - Fourier abbiamo due grandi nature:

- PARABOLICA: legata alla conduzione e in generale a qualsiasi fenomeno di stabilizzazione (se ho un picco di temperatura questa natura tende a eliminarlo, lo stesso vale per gli sforzi viscosi, se io ho un gradiente di velocità loro cercano di fermarli)
Quindi tutto ciò che è stabilizzante, diffusivo, smorzante è principalmente di tipo parabolico
- IPERBOLICA: tutto ciò che è legato a fenomeni ondulatori tipo il suono, tutto ciò che è anisotropo, tutto ciò che aumenta l'instabilità è di natura iperbolica molto difficile risolvere questo tipo di equazioni-

da CAOTICA avviene quando ho di fatto una combinazione generale della stabilità del sistema e non posso avere velocità infinite ma allo stesso tempo la parte avvertiva prevale su quella dissipativa -
In queste circostanze nasce una soluzione caotica

la natura delle equazioni dipende dai coefficienti delle equazioni di ordine massimo

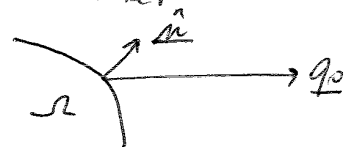
$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + f = 0$$

- PARABOLICA SE $B^2 - 4AC = 0$ (calore)
- IPERBOLICA SE $B^2 - 4AC > 0$ (onde sonore)
- ELLITTICA SE $B^2 - 4AC < 0$

Prendendo la def di flusso termico secondo Fourier

$$-\vec{n} \cdot \nabla T = -\frac{q_0 \cdot n}{\lambda}$$

$$q_0 = -\lambda \nabla T \Rightarrow \nabla T = -\frac{q_0}{\lambda}$$

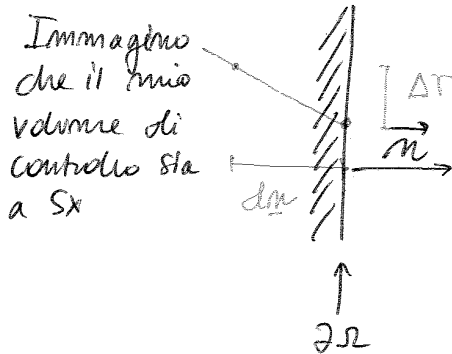


λ : conducibilità termica

$\vec{n} \cdot q_0$, denominatore di questa espressione è la proiezione di q_0 lungo \vec{n} e lo perché è anche indicata q_n perché è la componente normale. Dunque si può ben dire ora che

$\frac{\partial T}{\partial n}$ è certamente nota e pari a un flusso q_n/λ .

A volte si preferisce specificare che $\frac{\partial T}{\partial n}$ è definita rispetto a Ω . Cosa vuol dire? Ho un'interfaccia, che è $\partial\Omega$ del volume di controllo, prendo un punto generico, ne disegno la



Immagino che il mio volume di controllo sta a Δx

normale. In questo caso essendo la parete piana \vec{n} è la stessa lungo la parete. \vec{n} definisce un asse e definisce un verso.

Calcolare $\frac{\partial T}{\partial n}$ significa andare a valutare i valori di T lungo quest'asse. Peccato che il nostro

Dominio Ω finisce proprio lungo la parete. Quindi a stretto rigore se io volessi valutare $\frac{\partial T}{\partial n}$ in quel punto lì dovrei calcolare solo il limite $\Delta x \rightarrow 0$ della derivata, quindi prendere due punti definiti a Δx nel mio Ω e calcolare il rapporto incrementale.

$\lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta n}$ = ottengo il valore di T in un punto molto molto vicino

alla parete, quindi a stretto rigore matematico mi avvicino al punto base da sinistra. A stretto rigore cosa c'è oltre Ω a noi non interessa

ROBIN

Oltre il 99% delle condizioni al contorno nelle nostre applicazioni benché sia anche il + complicato. Questo perché di solito i nostri domini Ω sono sempre definiti all'interno di un contesto + ampio, tipo un impianto. Da un punto di vista ingegneristico non si può mai trascurare quello che c'è fuori Ω . Quindi noi rimaniamo comunque interessati a cosa c'è nel dettaglio cosa avviene nel volume Ω che ho scelto, quello che sta fuori non lo trasuro ma lo tratto in maniera semplificata.

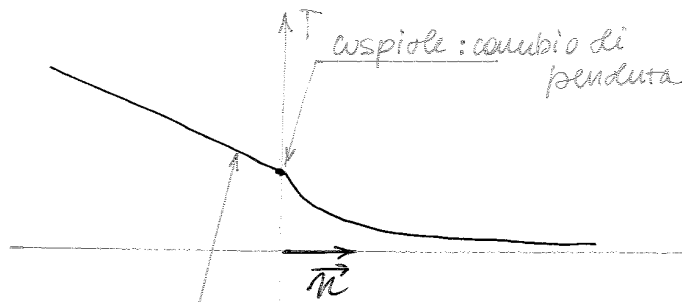
Per usare Newton mi serve $h \rightarrow$ per stimare h mi serve h_0

N.B. da conducibilità del solido può essere anche molto grande mentre nel nostro problema a destra abbiamo un fluido che ha una conducibilità comunque molto bassa. Non vanno confuse! Potrebbero esserci 4 ordini di grandezza di differenza!

Ma h_0 è definito rispetto alla conducibilità del fluido

Commento su $T = \infty$:

Facciamo un diagramma delle temperature:



Tipica config. di raffreddamento nel solido

T_{∞} è una temperatura del fluido molto distante e che non è influenzata dalla presenza del solido!

Newton ha definito la sua correlazione fenomenologica, cioè h , prendendo i valori estremi cioè la temp. del fluido

a ridosso della parete e la temp del fluido a ∞

distante. È solo una convenzione! È comunque molto utile prendere T_{∞} perché nei nostri problemi T_{∞} il fluido potrebbe essere a contatto con n solidi contemporaneamente, ma non importa perché T_{∞} rimane comunque = a se stessa.

Quindi uso q_m per definire la formula di Robin

$$\frac{\partial T}{\partial n} = -\frac{q_m}{\lambda} = \frac{h(T_{\infty} - T)}{\lambda}$$

- T : temp del solido Ω
- λ : è quella del solido

- T_{∞} : dipende dal fluido
- h : dipende dal moto del fluido e dalla viscosità sup
- Re : moto del fluido
- Pr : natura del fluido

Robin rappresenta da un lato una condizione di congruenza dell'interfaccia tra il solido Ω e il fluido che però utilizza informazioni da ambo i lati. Nel punto di contatto c'è continuità dei flussi termici. Nell'espressione in alto vengono mischiate grandezze che fanno riferimento a cose diverse (in leggi di scritte verdi)

Normalmente quando si pensa ad un solido (bagno di alluminio liquido in un congelatore) - se devo pensare di studiare la ^{conduttività} ~~conduttività~~ nell'alluminio fuso uno pensa mi cerco la conduttività dell'alluminio fuso, se poi dovesse fermarmi la diffusività me la calcolo tanto sono solo proporzionali dal fattore $(\text{densità}) \times (\text{valore specifico})$.
 Cioè tutti hanno chiaro in mente che α è solo un altro modo di esprimere la conduttività normalizzata. In realtà non è proprio così: l'equazione che abbiamo dedotto dipende da α , mentre magari la condizione di Robin dipende solo da λ . Quindi se io dovessi risolvere una conduttione con una condizione al contorno di Robin mi servirebbero entrambe. Perché mi servono entrambe? Qual è la differenza tra le due? È la capacità termica.

Quindi se ho un problema CONDIZIONE + CONDIZIONE DI ROBIN visto che mi servono sia α che λ , significa che questo problema risulta essere sensibile anche alla capacità termica del mio pezzo di alluminio Ω . A parità di flusso, un oggetto che ha una capacità termica maggiore risponde molto più lentamente in termini temporali, mentre se un oggetto ha una capacità piccola si adatta subito. Quindi bisogna fare molta attenzione a non confondere i due aspetti: una cosa è la conduttività che mi dice quanto il pezzo è efficace a dare il flusso (lavagna di sx, condizione di Robin) un'altra è l'inerzia, cioè la capacità termica del pezzo (a parità di flusso che il pezzo sta dando o ricevendo il suo tempo di risposta determina quanta capacità termica abbiamo).

FUNZIONI DISSIPATIVE:

Nelle scorse lezioni le funzioni dissipative ci sono servite a generalizzare l'idea diffusa che gli ingegneri hanno a riguardo della dissipazione per attriti. Abbiamo capito che la dissipazione per presenza di attriti è prevalentemente meccanica ma non è unica, esiste anche la dissipazione termica. Abbiamo visto per esempio che nell'ottimizzazione degli scambiatori è importante la dissipatività termica, perché cercare di "ucciderne" una per volta porterebbe

Esistono dei flussi turbolenti isotermi. Ovvero esistono dei flussi che manifestano un carattere turbolento pur avendo $\partial_d = 0$ ($\cdot E_T = 0$). Come le due cose siano correlate dunque non è ancora chiarissimo, perché anche per differenze di temperatura modeste la parte di dissipazione meccanica sembra essere comunque quella prevalente.

TURBOLENTE \longrightarrow Il primo ad accorgersi fu Leonardo da Vinci: egli ebbe le straordinarie qualità per poter rappresentare il deflusso. Si intravede un vortice principale, quello più grande e poi tutti gli altri più piccoli. I vortici più piccoli sono praticamente ∞ , le cose più grandi, detti da noi vortici INERTALI, sono governati dall'energia meccanica, questi sono governati da altri e tanti vortici, mentre quelli più piccoli sono governati sia dagli altri + piccoli, sia dai vortici grandi. Ho una certa disponibilità di energia meccanica e questa quando va riducendosi in fluido crea grandi strutture. Queste grandi strutture per opportuni (elevati) n. di Reynold diventano instabili. Questo significa che l'interfaccia comincia a frastagliarsi ed alcune parti cominciano a staccarsi, che creano vortici ancora più piccoli. Questa prima generazione è essa stessa instabile, e ne figlia ancora più piccoli, ancor di più fino a quando non si ha produzione di energia interna. Noi sappiamo che tutto quello che si perde in energia meccanica ce la ritroviamo sotto forma di energia ~~meccanica~~ interna. Questo rimane ancora valido. Ma come? Ci sono due possibili strade di spiegazione: posso avere un moto locale di rotazione, che sia puramente macroscopico e che semplicemente dissipi come dissiperebbe un disco a contatto con un altro ~~disco~~ ^{solido}. Questo è vero, cioè si ha trasformazione di energia meccanica in altro, quello che si aggiunge adesso è che non tutti i mediocelli sono stabili. Se sono instabili, la natura quale tipo di trasformazione ha trovato? Se un disco è cioi non si esce

Si abbassano e dopo un po' tutto si ferma.

Ma nel nostro caso abbiamo a che fare con strutture instabili, e che quindi non dissipano. Nella slide dopo si osserva ancora meglio: a sx ho stabilità a dx ho instabilità e le simulazioni vengono fatte con queste equazioni di termo-meccanica dei continui

Abbiamo sempre tutto rimangiando in campi di velocità bassa
 \Rightarrow Mac molto piccolo $Ma = \frac{u}{V_{sonico}}$ molto piccolo. Sotto queste condizioni:

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0$$

Se penso a un generico campo vettoriale penso ad avere 3 variabili, con la condizione precedente ho un grado di libertà in meno. Quindi a basse velocità, se volessi essere preciso non posso prendere una qualsiasi distribuzione del campo di velocità. Si costruiscono quindi dei campi irrotazionali solenoidali, cioè campi a divergenza nulla, ma comunque estremamente complessi tali per cui entrambe le velocità siano a divergenza nulla!

Soppoiamo di avere un campo di velocità tormentato, dividolo in due componenti

$$\underline{u} = \bar{\underline{u}} + \underline{u}'$$

↓
 decomposizione di Reynolds

Quindi la divergenza nulla non mi costringe a prenderlo regolare. Per avere a che fare con un campo regolare prendo strutture abbastanza grandi. Facendo un parallelismo con quanto detto prima siamo in una situazione in cui \uparrow la viscosità e \downarrow Reynolds \Rightarrow così rendo stabili le strutture e mi grafici precedenti le isole rosse si muovono fino a diventare piccolissime. Se dovesse succedere di \downarrow la viscosità e \uparrow Reynolds si muove uguale a gli di prima inizialmente, poi però una collina comincia a generare un petto, poi un altro. Il punto rosso del diagramma precedente è il punto in cui praticamente non è avvenuta dissipazione.

Quindi la nostra eq. un po' semplificata è:

$$(1) \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) = \underbrace{\mu \nabla^2 u}_{\text{il termine dissipativo è il laplaciano della velocità}} - \nabla p$$

Questa prima famiglia di esemplari fa comparire sempre

Ogni volta che si vede un laplaciano devo pensare subito al fatto che è uno

il termine dissipativo è il laplaciano della velocità (è comparso l'eni il laplaciano della velocità nell'equazione delle conduttività)

stabilizzatore, infatti lo moltiplichiamo, l'eni per la conduttività termica, oggi per la viscosità. Questo termine infatti tende a rendere privo di asperità il profilo di T o di velocità. Questa equazione (1) mi dice che lo stabilizzatore è questo termine qua ($\mu \nabla^2 u$). Come faccio a sapere che è uno stabilizzatore?

Prendo $u(x)$ nel grafico: il laplaciano è negativo, perché la derivata di un paraboloide rivolto verso il basso e quindi tenderebbe ad "appiattire questa collina". Se invece di questo andamento di $u(x)$ ho un andamento $u'(x)$ a valle per ragioni opposte questo termine stabilizzatore tenderebbe ad appiattare la valle tendendo a portare una soluzione

con andamento piatto.

Il termine caotico è il termine quadratico ($\rho u \otimes u$) ed è fonte di instabilizzazione. Parlando in termini un po' più fisici

$\rho u \otimes u$ → viene detto termine inerziale

$\mu \nabla^2 u$ → viene detto termine viscoso

Il numero di Reynolds è definito come termine inerziale diviso termine viscoso:

$$Re = \frac{t \cdot \text{inerziale}}{t \cdot \text{viscoso}}$$

Io vedo un comportamento instabile solo quando vedo che Reynolds supera una certa quota perché

è proprio quando il termine inerziale supera di molto quello viscoso.

Visto che ora ci siamo resi conto che non possiamo risolvere queste equazioni con il vero u cerco di farlo almeno per la \bar{u} .

Prendiamo il caso stazionario per semplicità: cosa si intende ora?

Rispetto a quella totale, la rumore o alla media?

Normalmente il concetto di stazionario si applica a \bar{u} , cioè si fa per scontato che anche se macroscopicamente vedo delle condizioni medie stazionarie, in realtà di fatto so che il flusso è turbolento.

$$\left\langle \frac{\partial p(\bar{u} + u')}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial p \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial p \langle u'^2 \rangle}{\partial t}$$

\downarrow la media non varia il valore medio \downarrow la media del rumore è zero
 CASO STAZIONARIO MACROSCOPICAMENTE rispetto a \bar{u} (dove dunque la \bar{u} non cambia nel tempo) infatti il rumore è definito a media nulla

Gli altri termini sono termini lineari, quindi trascurando il primo termine faccio:

$$\langle \nabla \cdot (p(\bar{u} + u') \otimes (\bar{u} + u')) \rangle = \mu \nabla^2 \bar{u} - \nabla p$$

Cosa succede quando vado a comporre due termini quadratici? Vengono fuori quattro termini:

- media - media ⇒ mi da media al quadrato!
 - media - errore ⇒ l'errore della media è zero
 - errore - errore ⇒
 - errore - media ⇒
- dunque questi due termini si annullano
 → media dell'errore al quadrato mi da qualcosa che non so ma sicuramente sopravvive

Quindi ottengo:

$$\nabla \cdot (p \bar{u} \otimes \bar{u}) + \nabla \cdot \left\langle p \frac{u' u'}{\rho} \right\rangle = \mu \nabla^2 \bar{u} - \nabla p$$

Nei software che si usano in ambito industriale che si chiamano RANS si usano queste equazioni. RANS: REYNOLD AVERAGED NAVIER STOCKES!

da riduzione di equazioni con velocità totale u riducendo l'ordine di media molto molto fitte, quindi decidiamo di conseguenza di concentrarci non tanto su u ma su \bar{u} pagando il prezzo di non essere capace di descrivere vortici più piccoli (quindi studiamo solo gli aspetti macroscopici del problema. Passo dalle equazioni in $u \rightarrow$ in \bar{u} . Questo concetto di avere equazioni in \bar{u} è stato inventato da Reynolds. Quindi le equazioni con \bar{u} si chiamano RANS. E qui subito vengono fuori dei piccoli problemi...

Si definisce MODELLO DI TURBOLENZA nell'ambito di un approccio RANS la ricetta dettagliata di come calcolare tutti i termini in τ_{ij} .
 Si classificano i modelli di turbolenza in base a quante equazioni in più sono costretti a risolvere. Nella classe industriale ci sono generalmente due equazioni:

- FAMIGLIA A DUE EQUAZIONI:
 - modello $k \epsilon$ (per la grandezza k e ϵ)
 - modello $k \omega$ (per la grandezza k e ω)

Generalmente il modello $k \epsilon$ si utilizza quando voglio calcolare sforzi a parete. (RIDUZIONE A 2 DEI G.D.L.)
- FAMIGLIA A 6 EQUAZIONI: uno potrebbe chiedersi cosa è questo termine $(u' \otimes u')$? È un tensore simmetrico a 6 componenti. Quindi ha 6 gradi di libertà.

k : energia cinetica turbolenta

IL MODELLO $k \epsilon$: Stiamo parlando dei piccoli vortici fonte di rumore. Essendo gli unici stabili, dissipano. Quindi il termine $u' \otimes u'$ deve dare una qualche forma di dissipazione. $u' \otimes u'$ è un tensore! L'unica cosa che dissipa sotto forma tensoriale è un tensore degli sforzi (parte viscosa). Quindi da qui l'ipotesi di BOUSSINESQ:

$$u' \otimes u' = -2 \nu_t \nabla \underline{u}^S = -\nu_t (\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T)$$

↓

lo esprimiamo esattamente come faccio per la parte viscosa degli sforzi. la forma sarà la stessa ma con uno scalare diverso, ν_t

In questo modo riduco i 6 gradi di libertà a 1, cioè la viscosità turbolenta che è una viscosità aggiuntiva

la viscosità turbolenta può essere fino a 10 volte quella molecolare. Tutto sta a come si sceglie ν_t : non può essere una costante, a differenza della viscosità molecolare. Stiamo passando da un termine quadratico ad uno lineare: stiamo assumendo che l'effetto medio di questa non linearità turbolenta alla fine sia solo quello di aumentare la viscosità. È questo il trucco del modello. Quello che possiamo fare è che con questa non linearità si possa riprodurre l'effetto della viscosità della turbolenza non lineare.

Miscelazione isoterma di gas perfetti:

Quali sono le irreversibilità? Il sys è isoterma $\Rightarrow dT = 0$ e lo sappiamo fermo $\Rightarrow dV = 0$. Quindi non ci aspetteremmo l'irreversibilità!

In realtà esiste irreversibilità chimica, legata ai due effetti:

→ legata alla concentrazione

→ presenza di reazioni chimiche (quando ad esempio brucia il combustibile)

Prendo un volume, lo separo e metto le specie chimiche differenti A e B (Fig. 25). I due comparti si trovano a pressioni e temp. p e T . Non c'è azione meccanica contro il setto, il che significa che quando v'è il setto non c'è un moto macroscopico di miscela, di trasporto delle singole specie. La pressione finale e la temp. finale è di nuovo p e T . Se ci fosse stata una diff. di T (∇T) avrei avuto delle irreversibilità termiche che non ho. Se ci fosse stata una differenza di pressione ∇p avrebbe indotto un ∇V che non c'è, quindi avrebbe indotto un ∇p tipo di irreversibilità meccanica, che comunque c'è.

NUMERO DI MOLE: concetto della chimica

È un numero di Avogadro di molecole

$n_A = N_A$ numero di molecole della specie A

$n_B = N_A$ " " " " " " " "

Si usano nella legge dei Gas perfetti. Esistono differenti notazioni. C'è anche la legge con il volume massico.

$pV = nRT$
 numero di moli Costante universale

$v = \frac{V}{M} \Rightarrow pV = \left(\frac{m}{M}\right) RT$

peso molecolare (o molare) $n = \frac{m}{M} \Rightarrow \frac{R}{M} = \text{costante del gas} = R^*$

Per l'aria per esempio $R^* = 287 \frac{J}{kg \cdot K}$

quindi $[R^*] = \frac{J}{kg \cdot K}$ mentre $[R] = \frac{N \cdot m^2}{mol \cdot K} = \frac{J}{mol \cdot K} \Rightarrow$ questa è quella universale

questa qui dipende dal gas che stiamo considerando

Relazione di Gibbs: vale sia per trasformazioni reversibili che per trasformazioni irreversibili. Evitare di derivarla dal primo principio!

(3) $ds = \frac{dq}{T} = \frac{dli}{T} = \frac{dU}{T} \Rightarrow$ sotto condizioni di reversibilità

↑ lavoro interno ↑ energia interna • $ds = \frac{dq}{T}$

• $dli = p \cdot dv$ ← area sottesa al diagramma di clausius

Quindi più crescono le moli più ~~crescono~~ la pressione parziale della specie. A volte si introducono anche le frazioni molari:

$$y_A = \frac{n_A}{n_{TOT}} \quad \text{frazione molare della specie A}$$

$$y_A = \frac{P_A}{P_{TOT}}$$

Per poter collegare la chimica con la termodinamica sappiamo che:

$$dh = du + p dv + v dp$$

$$T ds - p dv = du - p dv - v dp$$

$$T ds = dh - v dp \quad \text{finalmente qui ho il}$$

differenziale di pressione come si usa in chimica. Essendo $dh = cp dt$ se $dt=0$ (isoterma) $\Rightarrow dh=0$, e solo se si sta parlando di gas perfetti

Quindi:

$$ds = -\frac{v dp}{T} = -\frac{\overset{\text{massa}}{M} \overset{\text{volume}}{V} dp}{T} = -\frac{V dp}{T}$$

$$ds = ds \cdot M$$

volume massico

ostituendo l'equazione di gas perfetti:

$$pV = nRT$$

$$\frac{V}{T} = \frac{Rm}{P} \Rightarrow$$

$$ds = -\frac{V dp}{T} = -\frac{Rm dp}{P} = -Rm \frac{dp}{P}$$

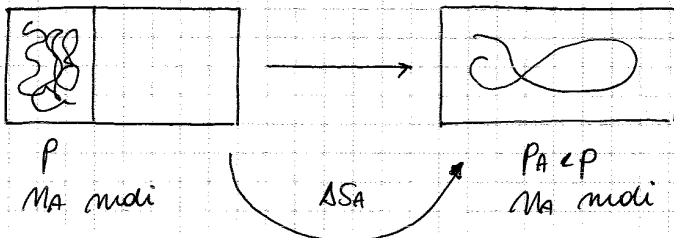
Relazione importante: ci dice che se vado a studiare una miscela isoterma per esempio in una miscela ideale l'entropia dipende anche dalla pressione. Dunque l'entropia è sensibile alla pressione.

La chimica ci dice che specie diverse sono in realtà soggette a pressioni diverse perché a livello macroscopico utilizzando una sonda è possibile calcolare la pressione totale, cioè l'effetto complessivo dovuto agli urti sia delle molecole di tipo A che di B. Mentre l'entropia di A o di B dipendono da quanto sono vicine o meno le molecole, dunque dalla loro pressione parziale e l'entropia del sistema è la somma delle due entropie.

$$\Delta S = -nR \ln\left(\frac{P}{P_0}\right)$$

Guardiamo la nostra trasformazione soltanto su A:

generata su una certa trasformazione (abbiamo A)



$$\Delta S_A = -n_A R \ln\left(\frac{P_A}{P}\right) > 0$$

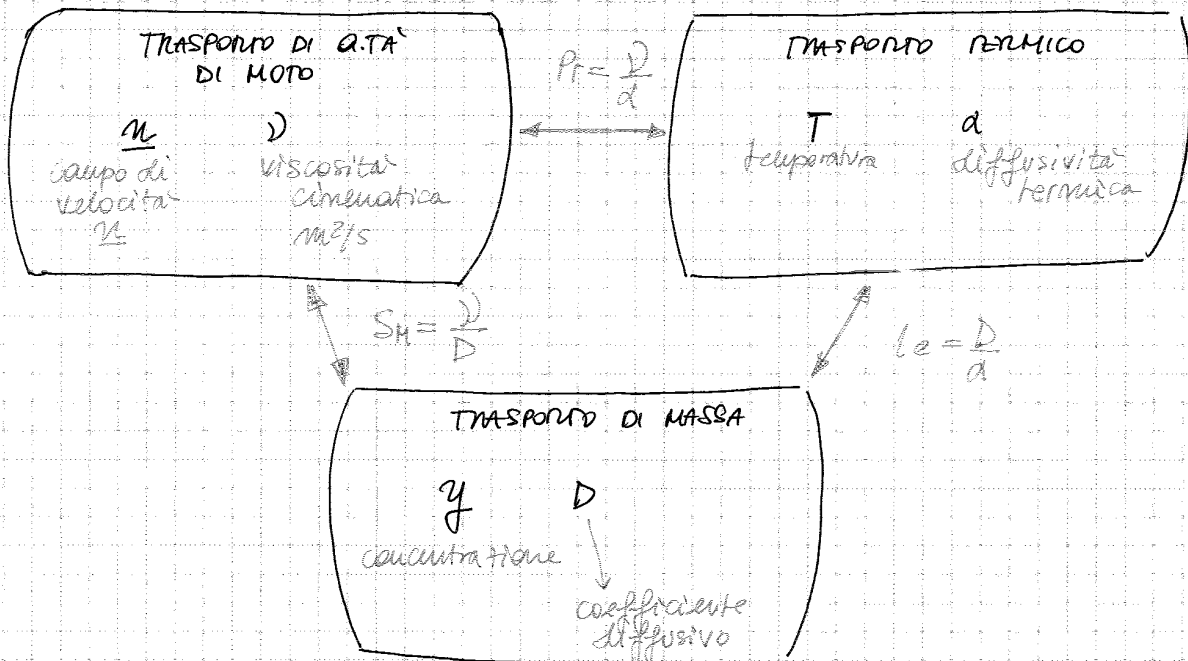
↑
fin / init.

e rimmuovo il fetto ho il massimo \bar{s} (ho due pistoni A e B che raddoppiano il loro volume).

Il trasporto di massa è importantissimo in molte applicazioni.

Noi facciamo riferimento solo alle applicazioni ingegneristiche che fanno l'uso di numeri adimensionali. Mentre in termomeccanica i concetti sono molto più raffinati: il flusso di massa di A $q_A = -D \nabla y_A$ (y_A concentrazione) (D : coefficiente di diffusione [D] = m^2/s). Si introduce a questo punto una produzione di irreversibilità $\sigma_y \approx \nabla y^2$ proporzionale con y^2 (modello descrittivo è più raffinato). Un modello descrittivo meno raffinato e che vediamo ora è l'analogia di Lewis:

$Le = \frac{D}{\alpha}$ in molte applicazioni ingegneristiche ho un trasferimento di calore e un trasferimento di massa, come faccio a studiare singolarmente quello di massa? Ora vediamo, cioè lo collego ad un fenomeno di trasporto che già conosco



Il rapporto tra il t. di q.ta' di moto e quello termico sta nel numero di $Pr = \frac{D}{\alpha}$, il rapporto tra il tr. di massa e gli termico sta come il numero di Lewis $Le = \frac{D}{\alpha}$ e l'ultimo è dato dal numero di Schmidt $Sh = \frac{D}{p}$. Fluidi che hanno Pr molto grandi sono fluidi che hanno viscosità cinematica ν che è più grande di quella termica mentre quelli che hanno $Pr \approx 1$ hanno i due flussi comparabili. Quando capita di avere un altro fenomeno di trasporto lo posso scegliere di risolvere le equazioni o no a seconda della risposta che mi danno i numeri adimensionali

abbiamo visto 16 maggio 2013
Nella prima sezione dell'exergia, ~~per~~ quanto riguarda
i fluidi più semplici - Abbiamo visto le miscelate, ci rimane da vedere
cosa succede nelle miscelate reattive -

Nella prima parte, quando si parla di fluidi puri si vede sostanzial-
mente come l'exergia dipenda dalla Temperatura - In realtà quello che
veramente importa è quanto la temperatura si discosta da quella ambiente
Perché sappiamo che se ho a disposizione un flusso alla temperatura
ambiente in realtà non posso farci nulla dal punto di vista exergetico
Quindi ciò che è importante quando vengono valutati gli effetti
della temperatura, si osserva quanto si discosta o in eccesso o in difetto
rispetto alla temperatura ambiente - Per ricordarsene si parla generalmente
di effetto termico o di effetto termo meccanico (l'exergia dipende dalla T)
[PARTE 1 DELLE SLIDE] - Abbiamo poi visto anche l'effetto della miscelazione
Subito dove venirci in mente la chimica anche se è possibile vedere gli
effetti della miscelazione come più espansioni contemporanee: questa
lettura in chiave meccanica è a noi un po' meno più familiare -
Si va dunque a utilizzare, o a spreccare a seconda delle situazioni, il
lavoro meccanico delle espansioni di ogni specie appartenente alla
miscela durante il miscelamento - d'effetto però di come

miscelazione è un effetto molto molto più piccolo rispetto all'effetto
che si ha di tipo termo meccanico - Questo ^{tempo di miscelazione si ha} di effetto quando considero

una miscela che contiene specie ad una concentrazione diversa da
quella ambiente o addirittura considero delle specie che non sono
presenti in quantità apprezzabili - Ci sono due casi in cui questo effetto
assume una sua rilevanza negli impianti di condizionamento quando si
va a trattare la concentrazione della miscela con le condizioni ambiente -
Se voglio tenere in conto dell'exergia di miscelazione vuol dire che in
qualche modo presumo di voler ricavare del lavoro meccanico da essa -
Questo si può fare: basta avere dei pistoni con un piattello fusibile
ad alcune specie chimiche cioè lasci passare solo alcune specie chimiche
e non altre ma non è un dispositivo di comune utilizzo, normalmente
non abbiamo dei pistoni con capacità selettiva del piattello di alcuni
gas rispetto ad altri - Questa applicazione richiederebbe tutta una
serie di membrane che utilizza delle tecnologie di filtrazione chimica

L'è bisogno di un termine che tenga conto delle natura specifica chimica di quelle specie rispetto a tutte le altre. Vediamolo direttamente applicato all'entalpia di formazione. Che significato ha l'entalpia di formazione? Si applica per tutte quelle specie chimiche non presenti nell'ambiente di riferimento. Supponiamo di avere il metano, che non è presente nell'ambiente naturale in modo apprezzabile. Quando dico in maniera apprezzabile intendo in media, cioè chiaramente in atmosfera è presente il metano ma in media no. Supponiamo che sia una reazione di combustione standard. Se io ho una specie che non è presente in ambiente un modo per metterla in comunicazione è quella ~~che~~ ^{di altre} supponiamo che vi sia una reazione di combustione standard questa produce prodotti che sono presenti in ambiente tipo acqua, anidride carbonica. Quindi se io ho una specie che non è presente in ambiente la riconduco a quelle presenti in ambiente tramite una reazione di combustione standard. Questo a livello alchemico si può fare: prendo una molecola che non c'è, in qualche modo la scompongo in molecole che ci sono, ero' dal punto di vista energetico in realtà di fatto c'è un rilascio di energia che è un potere calorifero tra l'altro. Quindi se io prendessi una molecola di metano, facessi avvenire una reazione standard, producessi una molecola di anidride carbonica, d'acqua nelle quantità che ci indica la reazione standard e le riportassi i prodotti alla temperatura e alla pressione dell'ambiente naturale dovrei tenere conto dell'energia che il processo di combustione ha liberato. In pratica è vero che la molecola di metano non è presente nell'ambiente però è anche vero che ha un contenuto di energia, che è quell'energia che si libera durante un processo di combustione e che in qualche modo si deve tenere in conto per ricordarsi che intrinsecamente ha più energia di quelle stabili che trova in ambiente. Quindi attribuiamo alla molecola di metano un'entalpia di formazione pari all'energia che libererebbe se bruciata in una reazione di combustione standard. Questo è il significato fisico dell'energia di formazione: partendo dalla combustione del metano che libera energia quanta me devo fornire al sistema per costruire una molecola di metano a partire dai suoi prodotti allungati. Questa è dunque un'energia immagazzinata dentro i legami chimici di una molecola. Una specie di reazione chimica al contrario

Se questi due sono =, mi aspetto che il testo si dovrebbe semplificare, ma vedendo come sono scritte non riesco a vedere come è possibile che si semplifichino:

$$\bar{s}_i(T_{ref}, p) = f(\text{pressione totale della miscela})$$

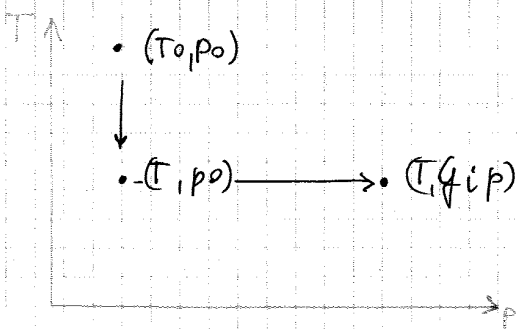
$$\bar{s}_i(T_{ref}, y_i p) = f(\text{anche di } y_i)$$

Il ragionamento che sta dietro è questa:

$$\bar{s}_i(T, y_i p) = \bar{s}_i^\circ(T_0, p_0) + \bar{s}_i(T, y_i p) - \bar{s}_i(T_0, y_i p) + \bar{s}_i(T_0, y_i p) - \bar{s}_i^\circ(T_0, p_0)$$

Attenzione: entrambe le formule sono corrette! Se una funzione dipende da $y_i p$ dipende anche da p ovviamente. Quando si scrive la formula in catena sembra non semplificarsi tutto, uscito in questa seconda maniera è invece leggermente più chiaro.

Un modo per interpretare questa formula è pensare di partire da un punto del piano T, p determinato dalle coordinate (T_0, p_0) che chiamiamo stato morto. Da questo punto mi sposto variando



solo la temperatura da $T_0 \rightarrow T$.

Successivamente mi sposto in $(T, y_i p)$.

Dunque io ho tre valori di entropia da tenere in considerazione:

- l'entropia dello stato morto
- l'entropia del secondo punto che si differenzia dallo stato morto

solo per il valore di temperatura.

• l'entropia di quel punto che si differenzia per temperatura e pressione. In alcuni libri il termine di formazione e quello che varia solo per un valore di temperatura vengono accumulati in un unico termine. Combinare due termini della formula precedente significa che i primi due punti nel diagramma sono stati combinati in un'unica tabella, quindi rimane solo il termine di pressione.

$$\bar{s}_i(T, p) = \bar{s}_i^\circ(T) - R \ln \frac{y_i p}{p_{ref}}$$

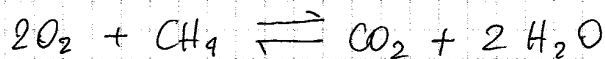
Qui intervengono le formule per calcolare entalpie molari e le entropie molari. Queste sono ottenute sempre tramite i tre contributi (formazione, variazione di T, variazione di p).

I termini che vediamo comparire sono dovuti alle pressioni parziali

$$\bar{s}_i(T_0, f_i, p_0) = \bar{s}_i(T_0, p_0) - R \ln f_i$$

Ci sono sempre due approcci, quello tipico dei chimici che è tabellare, e quello ingegneristico che sta nel calcolare.

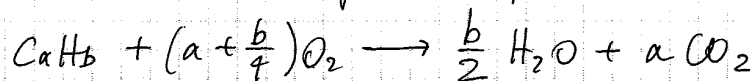
Slide 47. Facciamo un esempio: a suo le colonne dove possiamo trovare due prodotti e due reagenti tipici, l'acqua è considerata come acqua liquida o sottoforma di vapore acqua. Nello stato di riferimento scelto l'entalpia di formazione dell'ossigeno è 0 e le altre sono espresse rispetto a questo valore di riferimento. Nella tabella il potere calorifero è espresso per unità di massa (MJ/kg) - le concentrazioni molari (x) sono molto diverse da quelle prodotte dalla reazione



Nei prodotti ho un rapporto 1 a 2 in termini molari. Quindi in termini di concentrazioni molari:

$$y_{CO_2} = 1/3 \quad ; \quad y_{H_2O} = 2/3 \quad \text{sono diversi da gli} \\ \text{due ho in ambiente} \\ \text{(e)!}$$

Faccendo riferimento alla reazione generica precedente



con $a=1$ e $b=4$ otteniamo proprio la reazione di combustione del metano. L'exergia del metano risulta 52,19 MJ/kg

mentre l'equazione della q.ta' di moto si semplifica molto
eliminando il termine avvevivo e a secondo membro non c'è nessun

$$\frac{\partial(\rho \underline{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u} \otimes \underline{u}) + \nabla p = \rho \underline{a}$$

Rimane il ∇ di pressione che sarà
bbe la parte idrostatica
del tensore degli sforzi

↑
termine avvevivo

effetto che riguarda la viscosità - Vediamo come è possibile combinare queste due equazioni - Si osserva una sorta di diagonale: la quantità di moto

$$(1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0$$

$$(2) \quad \frac{\partial(\rho \underline{u})}{\partial t} + \nabla p = 0$$

compare sia nel flusso dell'eq di
continuità che nella derivata euleriana
dell'eq della q.ta' di moto - Quindi
esiste questo tipo di simmetria -
In realtà esiste anche nell'altra

diagonale questo tipo di simmetria tra pressione e densità (nei
gas perfetti queste due grandezze sono legate) - Un'idea può essere prendere
la divergenza della (2), così può comparire la divergenza della q.ta' di
moto che è uno dei termini dell'altra equazione (1) - Potendo invertire
divergenza e derivata nel tempo:

$$(2)_{bis} \quad \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot (\rho \underline{u}) + \nabla^2 p = 0 \quad \nabla^2(\cdot) = \nabla \cdot \nabla(\cdot)$$

laplaciano della pressione

Facendo la div del gradiente di pressione ottengo il laplaciano della
pressione! Ora l'argomento della derivata nel tempo di (2)bis è lo
stesso che ho nell'eq (1) - Quindi:

$$\text{DA (1)} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \text{lo sostituisco in (2)bis}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot (\rho \underline{u}) + \nabla^2 p = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) + \nabla^2 p = 0$$

$$(3) \quad -\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \nabla^2 p = 0 \quad \text{il termine q.ta' di moto è}$$

un po' fastidioso perché essendo un vettore ha tre componenti e vorrei
seguire invece una relazione soltanto tra scalari - Questa equazione (3)
è definita in funzione di due variabili, densità e pressione -
Pensando alla legge dei gas perfetti potremmo legare queste due gran-
dette e il coeff di proporzionalità tra i due e la temperatura -

$$pV = RT \Rightarrow p = RT\rho$$

Regola in catena:

L'entropia non varia nello spazio

$$Dp(p, s) = \frac{Dp}{Dp|_s} Dp + \frac{Dp}{Ds|_p} Ds = c_s^2 Dp$$

\uparrow a $s = \text{costante}$ \uparrow a $p = \text{costante}$

Seguo la derivata lagrangiana perché il u ad essere invariante rispetto al sistema di moto non accelerato. Per fare la derivata della pressione a entropia costante significa seguire una direzione tale per cui l'entropia sia costante, quindi lungo un asse // all'asse della densità (se immagino di plotare $p = f(p, s)$ in un piano p, s). Facendo l'analisi dimensionale della pressione diviso densità cosa ottengo?

$$\frac{\text{pressione}}{\text{densità}} = \frac{N}{m^2} \cdot \frac{m^3}{\text{kg}} = \frac{\text{kg} \frac{m}{s^2} \cdot m^3}{m^2 \text{ kg}} = \frac{m^2}{s^2} \Rightarrow \text{cioè una velocità al quadrato}$$

Domunque il coeff al posto della derivata $\frac{Dp}{Dp|_s}$ è proprio la velocità del suono

$$c_s = \sqrt{\frac{Dp}{Dp|_s}} \quad \text{Velocità del suono}$$

Nei corsi precedenti si fanno delle trasformazioni isoentropiche, cioè una trasformazione esprimibile come:

$$p v^{\gamma} = \text{costante}$$

Se è isoentropica: $\gamma = \frac{cp}{cv} \Rightarrow p v^{\gamma} = \text{cost}$ a volte si dice adiabatica reversibile!

Questa info è molto importante perché ci dice come muoverci sul piano:

$$p = \frac{\text{cost}}{v^{\gamma}} = \text{cost} \cdot p^{\gamma} \quad \frac{Dp}{Dp|_s} = \gamma p^{\gamma-1} = \gamma \frac{p^{\gamma}}{p} = \gamma p^{\gamma} = \gamma p^{\gamma}$$

$\gamma = 1,34 \approx 1,37$ dell'aria!

Posso così calcolarmi la velocità del suono per un fluido per cui valga questa relazione (gas perfetti)

$$\frac{Dp}{Dp|_s} = \gamma p \quad v = \gamma RT \quad \Rightarrow \quad c_s = \sqrt{\gamma RT}$$

compte che ho fatto la derivata di p^{γ}

Qui possiamo capire perché la teoria precedente era erroneamente isoterma: con la teoria sbagliata avrei ottenuto la derivata pari alla radice di $R \cdot T$ e quindi la differenza con la teoria corretta è

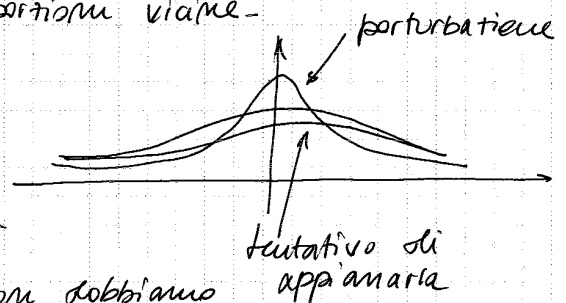
Se prendessimo una barra e la riscaldassimo con una fiamma ossidrica otterremmo gradualmente, molto più lentamente, temperatura uniforme in tutta la barra.

Questa questione è utile per sottolineare i problemi riguardanti due famiglie diverse di problemi:

• FAMIGLIA DEI PROBLEMI DI CONDUZIONE

È rappresentativa dei fenomeni diffusivi, cioè quelli per cui una perturbazione si cerca di appiattirsi sulle porzioni vicine.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T$$



Sono generalmente fenomeni

irreversibili: α è la madre di αx che è

fonte di irreversibilità termica dunque non dobbiamo

tentativo di appiattirla

stupirci! Da un punto di vista matematico queste equazioni si possono

definire di tipo parabolico. Dal punto di vista fisico queste equazioni

sono stabilitanti: tutto ciò che è dissipazione in realtà in natura è

stabilitante (anche se per noi ingegneri assume un'accezione negativa)

• FAMIGLIA DEI SISTEMI AVVESTITI

In questo caso ci si riferisce a fenomeni che sono legati al trasporto avvestito

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c_s^2 \nabla^2 p$$

In questo caso se parto in un certo istante con un certo profilo

l'onda viene ripartita metà a sinistra e metà a destra e continuano

all'infinito. Nel caso monodimensionale possiamo dire che l'equazione

non distrugge il problema, lo divide semplicemente. Questo perché abbiamo

assunto viscosità nulla, ma non è proprio così in realtà. Sono fenomeni

reversibili, da un punto di vista matematico sono equazioni iperboliche

(difficili da risolvere). Sono instabilitanti: non muore mai la perturbazione.

Nel diagramma della slide l'asse delle ascisse è lo spazio, quello delle ordinate è il tempo: è un diagramma spazio-tempo.

Che forma hanno queste linee? Slide 52. Rappresentano i picchi, sono

delle rette con espressione $x \pm c_s t = \text{costante}$, quindi la forma

funzionale è la stessa, mentre hanno coeff angolare di segno opposto

($\pm c_s$). Queste linee vengono chiamate generalmente linee caratteristiche,

oppure caratteristiche di questa funzione

È quindi verifica l'effetto da: ci sono diverse persone che si tengono per mano. Un conto è la velocità con la quale muovo il braccio e un conto alla velocità a cui reagiscono al segnale. Quindi il caso delle onde acustiche è quello per cui anche se le particelle si muovono poco il segnale è comunicato molto in fretta.

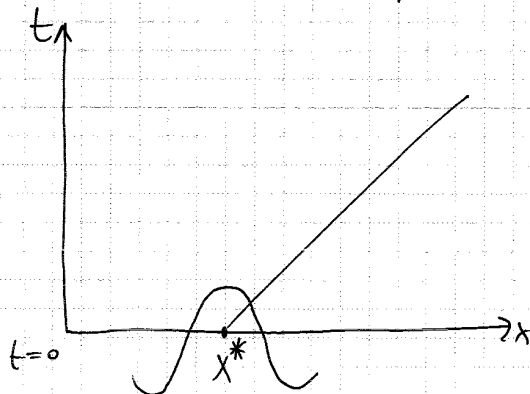
Ritorniamo a pensare in termini di densità (seguendo il principio per cui rarefatto significa con densità minore mentre compresso significa con densità maggiore)

n = numero di onda

$$f(0,x) = p_0 + p_M \cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) = p_0 + p_M \cos(kx) \quad p_M \ll p_0$$

Nei casi di base si è abituati a ragionare in questi termini: prendo una dimensione x , la divido per la lunghezza d'onda del segnale quando ho percorso tutta la lunghezza per cui il rapporto $\frac{x}{\lambda} = 1$ ricomincio. Quindi in termini di argomento del coseno per completare una lunghezza d'onda devo essere a 2π . Questo ragionamento va bene in questa sezione di acustica si preferisce parlare di numero d'onda che sia $\frac{2\pi}{\lambda}$. Altri numeri d'onda sono caratterizzati da piccole lunghezze d'onda (che sono molto delicati nei codici).

Per generalizzare quella equazione: si prende la condizione iniziale corrispondente a f al tempo $t=0$ con la generica posizione x e cerco una soluzione generica che parte da quelle condizioni iniziali e sia soluzione dell'equazione delle onde. Prendiamo un generico punto della sinusoide del coseno, per esempio quello di picco. Man mano che passa il tempo, il picco dove è andato a finire? Come sappiamo dalle slide precedenti i due picchi dell'onda si spostano uno a dx e l'altro a dx. Ad un certo tempo dove si troverà il picco che ho scelto?



$$x - ct = cost$$

$$t=0 \quad x = x^*$$

$$t>0 \quad x - ct = x^*$$

lo trovo semplicemente sulla linea caratteristica corrispondente

Quindi se prendo un certo punto x^* al tempo $t=0$ basta porre pari a $x^* = cost$ della linea caratteristica