



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO: 893

DATA: 12/03/2014

# **A P P U N T I**

STUDENTE: Mottola

MATERIA: Fondam. di Meccanica Struttur.+ Eserc. + temi d'esame

Prof. Chiandussi

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

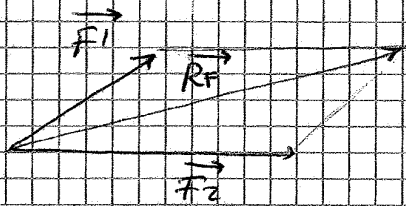
**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**



# STATICA

## Grandezze

- Forza, Momento: grandezza vettoriale (modulo direzione verso) oppure si possono indicare le componenti. È la verso che varia la condizione di equilibrio su un corpo libero
- Operazione di risultante sulle forze  $\vec{R}_F$  risultante di Forza



Se si vogliono in componenti cartesiane

$$R_{Fx} = \sum_{i=1}^n F_{xi}$$

$$R_{Fy} = \sum_{i=1}^n F_{yi}$$

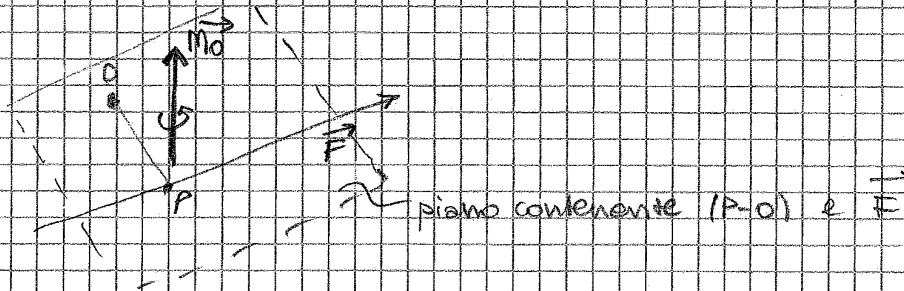
$$R_{Fz} = \sum_{i=1}^n F_{zi} \quad \text{eventualmente in 3D}$$

La risultante è un vettore di tipo libero e non è legato ad un certo punto di applicazione

- Momento di una forza: risultato di un prodotto vettoriale (esterno)

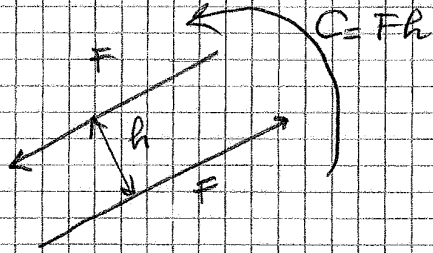
$$\vec{M}_O = (\vec{P}-\vec{O}) \wedge \vec{F}$$

$\vec{M}_O$ : polo  
 $\vec{P}$ : punto di applicazione della forza  
 $\vec{F}$ : forza  
 distanza tra Polo e punto di passaggio per la forza P (punto di applicazione della forza)





Es:



Non ho forze ma ho momento: soddisfa

$$C = F \cdot h$$

Le forze esistono ma io tengo conto solo del momento puro  $C \rightarrow$  non

sta guardate)

$\Rightarrow$  È il caso della coppia in uscite del motore elettrico

Fuori regola: come cambia il risultante se il polo cambia da  $O$  ad  $O'$ ? È la trasposizione; si sfrutta la formula

$$\vec{R}_{MO'} = \vec{R}_{MO} + \underbrace{(O - O')} \wedge \vec{R}_F$$

distanza  
polo nuovo  
e polo vecchio

In generale se  $O \neq O'$   $R_{MO'} \neq R_{MO}$

se il sistema non ha forze risultanti

se polo  $\vec{R}_F = 0$  non ha forze risultanti allora

$$\vec{R}_{MO'} = \vec{R}_{MO}$$

Il polo si sceglie ~~se~~ ~~polo~~ ~~nesso~~ se non ha forze risultanti il risultante del momento risultante è lo stesso

Es: se ho una risultante di forze, ~~is~~ ~~sto~~ non funziona così

### EQUILIBRIO STATICO

un sistema è in equilibrio statico se si ha

equilibrio alla traslazione

equilibrio alla rotazione

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \text{3 comp}$$

$$\sum_i (\vec{M}_{O_i} + \vec{C}_i) = 0 \quad \text{3 comp}$$

allora in qualche maniera crolla

## EQUIVALENZA STATICA

Due sistemi dal punto di vista statico sono equivalenti se  
 hanno

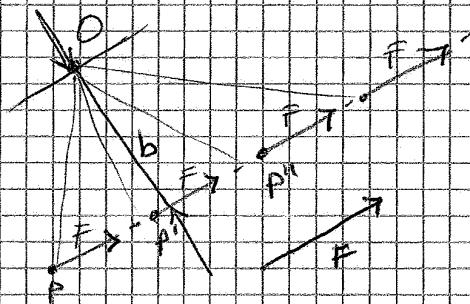
- stessa forza risultante
- stesso momento risultante

equivalenti  $\neq$  identici  
 Si dice che ~~due~~  
ho equivalenza sull'equilibrio

ho si fa per semplificare

### Esempio

1) Trasporto trasversale di una forza

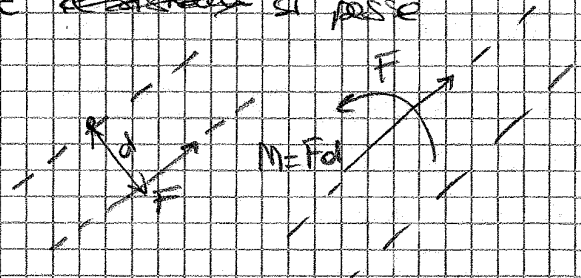


Se la forza è sempre  
 la stessa, è la si  
 è scostata rispetto alla  
 direzione  
 forza, il momento  
 non cambia perché  
 solo il braccio  $b$

Se molto invece la  $F$  più lontana sta eseguendo il  
 trasporto trasversale, cambiando il braccio della  
 forza

Posso cambiare il momento se ~~è~~ si passe  
 ad un sistema equivalente

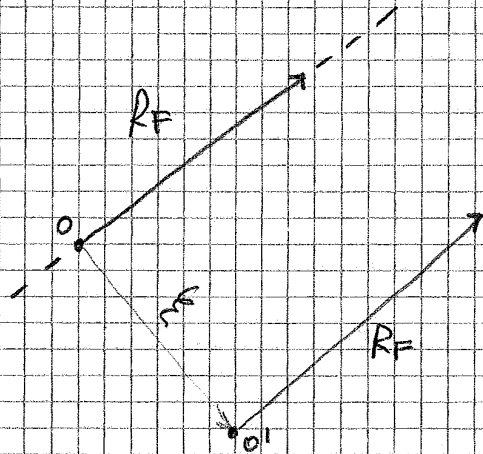
Il momento non cambia  
 + lo stesso allora devo  
 tenere conto di un termine  
 aggiuntivo detto momento di  
 trasporto (se no non avrei equilibrio alla rotazione)  
 ("coglio mettere  $F$  in  $\bullet$ ")



Il sistema resta sempre in equilibrio

Ottengo che

$$R_{M0'} = \sum = \frac{R_{M0}}{R_F}$$



### CARICHI E VINCOLI

Carichi:

→ azioni esercitate  $w_g$  sulla struttura → dati

→ possono essere • concentrati

→  $H_P$  che siano concentrati (punti) se

- il punto di applicazione è piccolo
- è la risultante

• distribuiti

- di volume • peso specifico di un materiale

es: → è volume bidimensionale

- di superficie: pressione di un fluido / peso all'unità di area di un elemento bidimensionale (lo approssimo in casi)

### Vincoli

completano le date partendo loro (vincoli interni) o a tre

basamenti (esterni) esercitando reazioni (che solitamente vengono dal

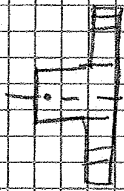
problema

## Tipi di vincolo

Si definisce ordine del vincolo, grande corrispondente di reazione (gradi di ~~libertà~~ libertà) a zero

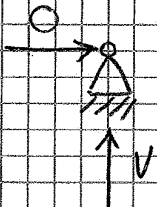
~~Vincolo doppio~~

Vincolo semplice Appoggio o carrello (1 reazione incognita)



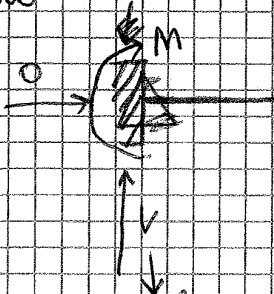
il movimento orizzontale è libero, è bloccato lungo l'asse ~~orizzontale~~ verticale secondo quale nasce la componente di reazione

Vincolo doppio Cerniera (2 reazioni incognite)



nb: 2 reazioni incognite

Vincolo triplo Incastro (3 reazioni incognite)



non è possibile la rotazione del pezzo

forze esercitate dal sistema di ~~forze~~ basamento ~~contattando~~ verso gli altri elementi



Per problemi piani

$$h = v - 3m$$

$\swarrow$  # reazioni (incognite)  
 $\downarrow$  un elemento sul piano lo incl. viene con 3 parametri  
 $\searrow$  # di elementi

che

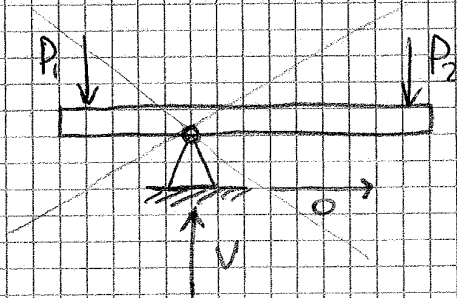
$$v = 3i + 2(c+p) + a$$

$\swarrow$  # di incastri  
 $\uparrow$  # di cerniere  
 $\nwarrow$  # di appoggi  $\rightarrow$  solo incastri singoli. cerniere introduce una reazione circolare +  $\Delta$  movimento  
 guida più semplice  
 cerniere introduce 2 incognite

Se

- $h < 0$  il sistema è IPOSTATICO (o labile - non è abbastanza stabile) non ho abbastanza vincoli per determinare la sua ~~posizione~~ <sup>posizione</sup> in modo univoco

È possibile trovare un equilibrio se le azioni esercitate dall'esterno non sono arbitrarie ma soddisfanno alcune condizioni



$$h = v - 3m$$

$$m = 1 \text{ la trave}$$

$$v = c = 1 \text{ la cerniera}$$

$$h = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = -1$$

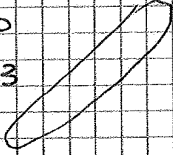
ho un grado di libertà assegnabile

le reazioni sono  $v$  e  $O$

Se ho 2 forze  $P_1$  e  $P_2$

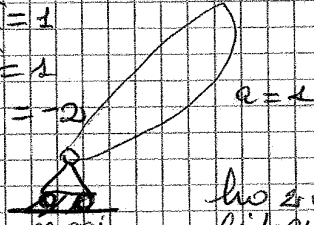
Esempi sul testo → come attaccate alla situazione ipostatica

$m=1$   
 $\sigma=0$   
 $h=3$



un elemento libero ha 3 gradi di libertà f. le estremità

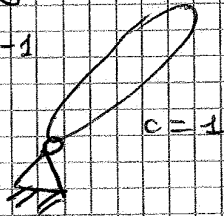
$m=1$   
 $Q=1$   
 $\sigma=1$   
 $h=-2$



oppoggio (p. 10) solo sul piano

ho 2 gradi di libertà restano

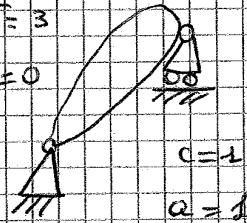
$m=1$   
 $\sigma=2$   
 $h=-1$



carriera

ho un grado di libertà

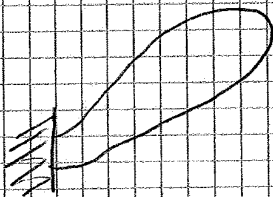
$m=1$   
 $\sigma=3$   
 $h=0$



$C=1$   
 $Q=1$

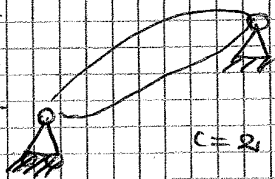
Se ho un unico stato

$u=3$   
 $m=1$   
 $Q=0$



Se ho 2 carriere

$m=1$   
 $\sigma=4$   
 $h=1$



È una volta ipostatica

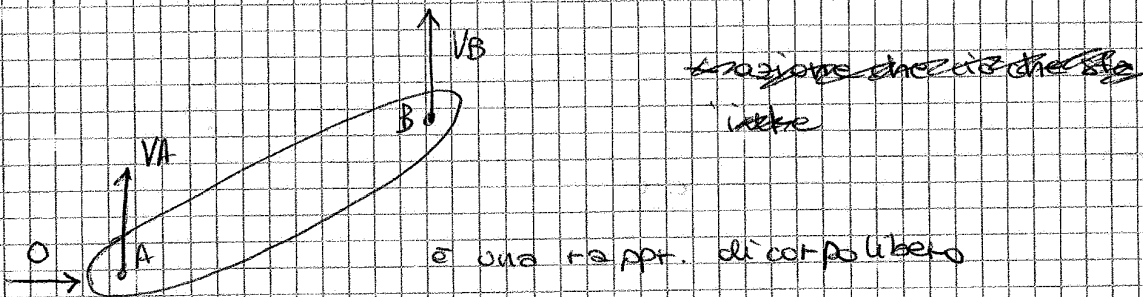
## SCRITTURA DELLE EQUAZIONI

1) staccare ogni elemento, isolandolo dai vincoli

2) in corrispondenza delle interazioni seguenti le componenti di reazione incognite, con una certa arbitrarietà nella scelta dei segni

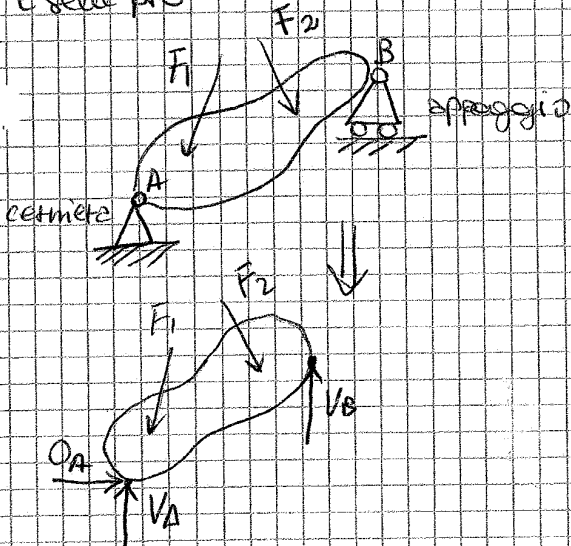
» questo rappresentazione si chiama diagramma di corpo libero

Quello che sta indicando così sono le azioni degli altri elementi sull'elemento considerato



Per ogni elemento scrivere le equazioni di equilibrio

Esempio



$F_1$  e  $F_2$  sono forze esterne

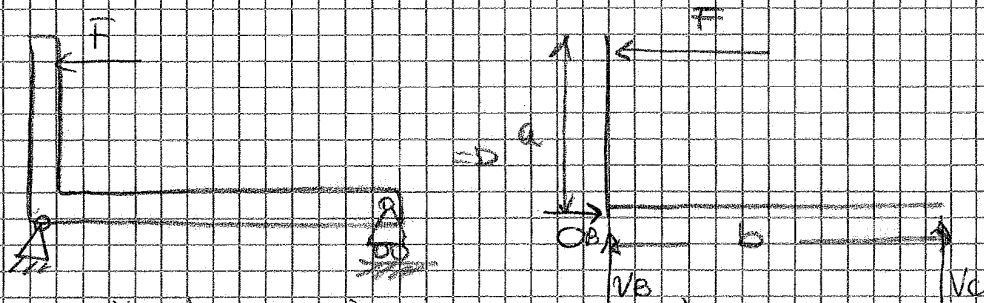
Il verso è arbitrario nei vincoli esterni; nei vincoli interni deve essere rispettato il principio di azione e reazione

Es

FONDAMENTI MECCANICA STRUTTURALE

7/10/11

Riprendo l'esempio



Abbiamo scritto le equazioni secondo a)

$$\begin{array}{l}
 \rightarrow \\
 \uparrow \\
 \curvearrowright
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \end{array} \right\}
 \begin{array}{l}
 O_B = F \\
 V_B = F \frac{a}{b} \\
 V_C = -V_B = -F \frac{a}{b}
 \end{array}$$

Se invece adotto un'altra scelta

b) B):  $V_C \cdot b + V_B \cdot 0 + F \cdot a = 0$       2<sup>a</sup> di eq alle rotazione

C):  $+V_B \cdot b - F \cdot a$

D):  $O_B - F = 0$

$$\begin{array}{l}
 V_C = -\frac{F \cdot a}{b} \\
 V_B = +\frac{F \cdot a}{b} \\
 O_B = F
 \end{array}$$

prendo un altro polo (= con un punto di passaggio delle incognite)

3<sup>a</sup> equazione può essere l'equilibrio orizzontale

CONCLUSIONE

osservazione 1)

Quando una equazione di equilibrio delle rotazioni può scrivere una di equilibrio alle traslazioni perché la normale per le rotazioni viene scritta sulla superficie di base



Ho che

$C = 3$

cerniere  $\begin{cases} \rightarrow 2 \text{ esterne} \\ \rightarrow 1 \text{ interna} \end{cases}$

$q = 0$  appoggi

$i = 0$  incastri

$m = 3$  elementi

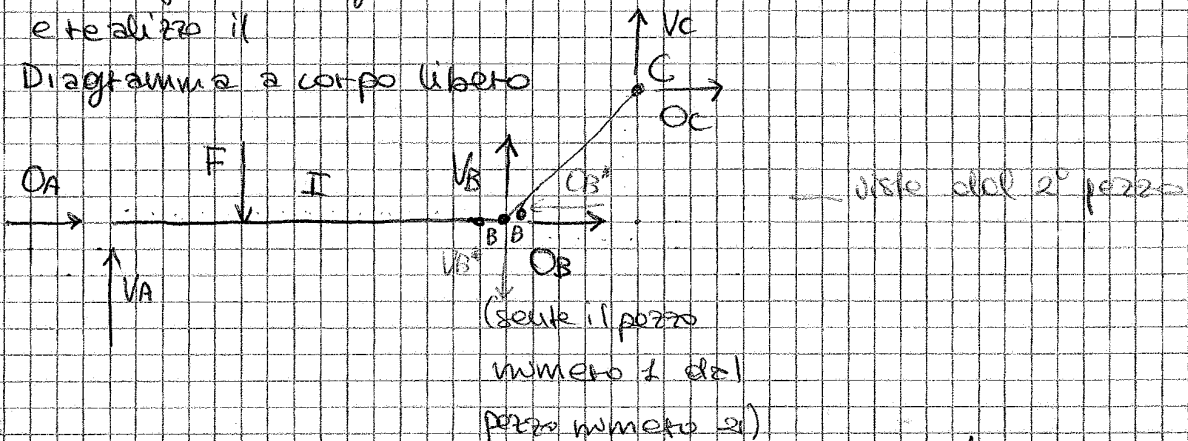
$h = \sigma - 3m = 6 - 3 \cdot 3 = 0$  ISOSTATICO

$\sigma = 3 \cdot 2 = 6$

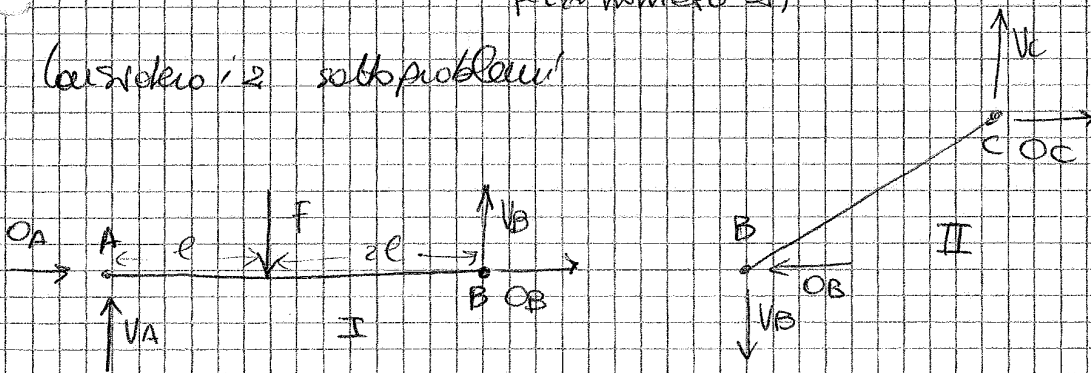
La dimensione del problema è di 6 eq in 6 incognite

Ridisco il sistema immaginando di staccare i 2 elementi dai nodi e realizzo il

Diagramma a corpo libero



Considero i 2 sottoproblemi



Scrivo le equazioni secondo b

Se considero

$\sum \ominus B \downarrow : +VA \cdot 3e - F \cdot 2e = 0$

$\sum \oplus A \uparrow : -F \cdot e + VB \cdot 3e = 0$

VA, VB, CB non si vedono

Prova

Sul 1° pezzo

$$\uparrow \Rightarrow V_A + V_B - F = 0 \quad \text{verifico}$$

$$\frac{2}{3}F + \frac{F}{3} - F = 0 \quad \text{OK}$$

Ho una  $F \rightarrow$  cui servono reazioni verticali che mi consentano l'equilibrio.  $F$  si distribuisce

$-\frac{2}{3}$  in A  $\rightarrow$  la reazione in A  $\rightarrow$  è legata alla distanza tra F e B

$-\frac{1}{3}$  in B la reaz. vert. in B è legata alla dist tra A e F

devo  
dare

reazione quello + vicino (è + carico)

In realtà con VB e VA a carico il pezzo numero 2

Se nasce VB è un carico x il secondo

Nasce una VB verso il basso e allora nascono VC

VB e VC fanno egale traslazione ma una allo rotazione  
e free no' bisogno che nascano reazioni orizzontali

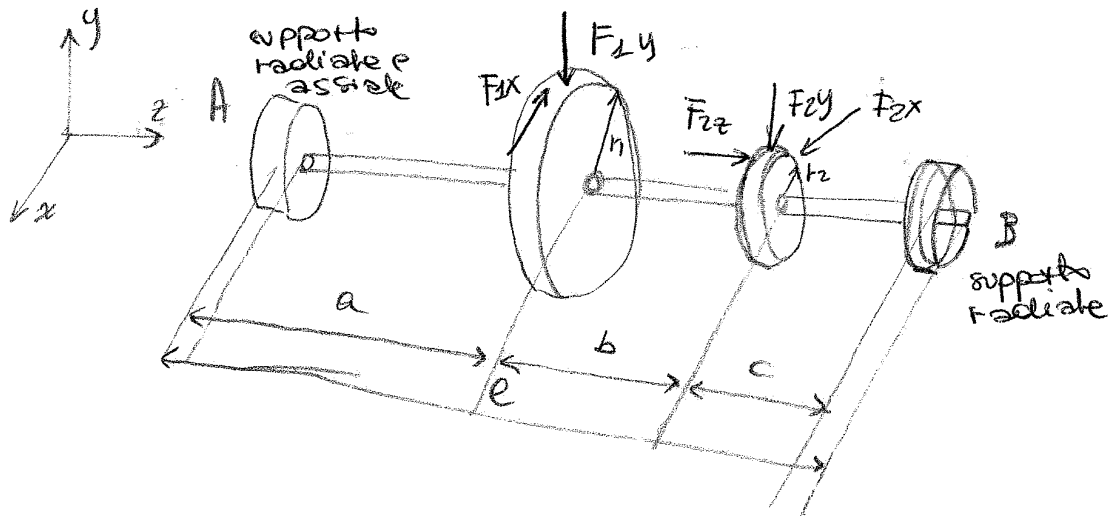
Se è nata OB allora devo nascerne anche una forza nel  
pezzo 1 e per che da equilibrio da OA

$$OA + OB = 0$$

### Esempio

Si ha un pezzo come riportato in figura in cui sono applicate le forze

- radiali (y)
  - tangenziali (x)
  - assiale (z)
- } applicate all'eccentricità che corrisponde al raggio della ruota



### Il sistema di vincolo

A → impedisce all'estremità di muoversi radialmente e assialmente (impedisce le 3 traslazioni x, y, z)

B → impedisce che l'asse si muova lungo x e lungo y ma permette lo scorrimento longitudinale

$a = 10 \text{ mm}$

$b = 20 \text{ mm}$

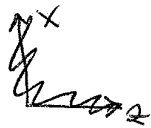
$c = 25 \text{ mm}$

$l = 105 \text{ mm}$

$r_1 =$

$r_2 = 10 \text{ mm}$

13/1/12



continuo l'esercizio...

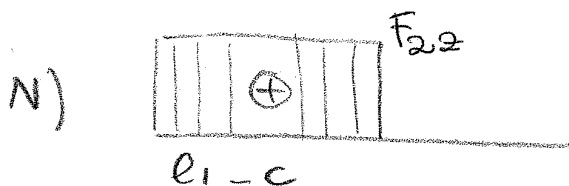
Per il comportamento assiale sul piano  $xy$  ho visto che esiste una forza longitudinale riportata in asse

aggiungendo  $F_{2z}$

(A al punto dove è applicate le forze)

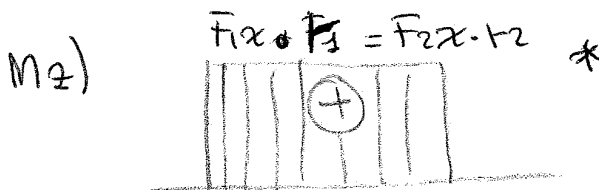
Nella zona interessata c'è una situazione di trazione

Devo completare i diagrammi



l'operazione di rimettere in asse le forze genera una coppia di trasporto nel piano  $xy$

Le forze  $F_{1x}$  e  $F_{2x}$  sono state responsabili delle azioni di trazione. allora ho e livello di  $Mz$  tra le 2 ruote si ha il momento costante che vale



la coppia di trasporto corrispondente

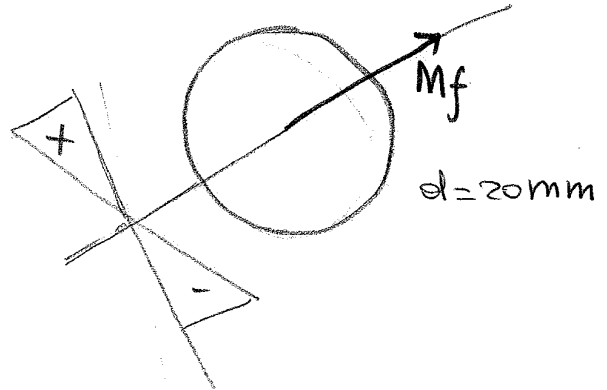
$F_{1x} \cdot r_1 + F_{2x} \cdot r_2 = 0$  per l'equilibrio rotazionale del sistema: il sistema deve essere in condizioni stazionarie e la ~~forza~~ <sup>coppia</sup> deve agire che una parte deve essere uguale a quella applicate dall'altra

Tensioni max, vire di flessione

$$\sigma_{zz, f} = \pm \frac{M_f d}{J_f}$$

$$M_f = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = 2,65 \cdot 10^4 \text{ Nmm}$$

$$J_f = \frac{\pi}{64} \cdot d^4 = 7,85 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$$



$$\sigma_{zz, f} \approx \pm 34 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Le sostituisco 0

$$\& N = 100$$

$$A = 344$$

la tensione è poco significativa

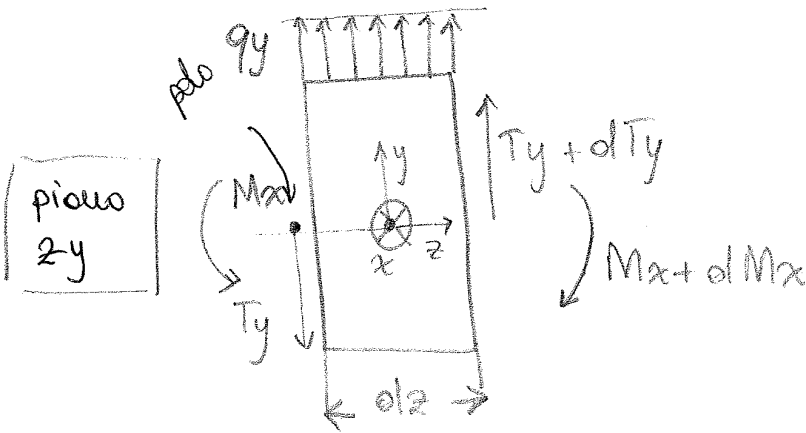
Assieme a questo agisce la tensione originata dal momento torcente  $M_z$

$$\tau = \frac{M_z^*}{J_p} \cdot \frac{d}{2} = \frac{5 \cdot 10^4}{1,57 \cdot 10^4} \cdot \frac{20}{2} = 32 \text{ N/mm}^2$$



D/MO STRAZIONE  
TAGLIO DERIVATA DI M<sub>x</sub>

Scrivo gli eq.



$$1: T_y + dT_y - T_y + q_y dz = 0$$

$$2: \underbrace{M_x + dM_x - M_x}_{sx} - (T_y + dT_y) dz = 0$$

Se metto polo a sx.

$$\underbrace{-q_y dz \cdot \frac{dz}{2}}_{forza} = 0$$

Si ottiene

$$\frac{dT_y}{dz} = -q_y$$

la derivata del taglio è il carico distribuito

$$\frac{dM_x}{dz} = T_y$$

il taglio è ancora la derivata del momento flettente

$$dM_x - (T_y + dT_y) dz - q_y dz \cdot \frac{dz}{2}$$

LO TRASCURO  $\checkmark$  del 2° ordine

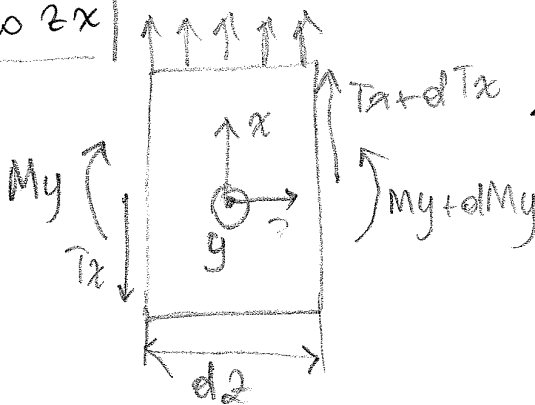
→ Scrivo le equazioni

$$1: T_x + dT_x - T_x + q_x dz = 0$$

$$2: (M_y + dM_y) - M_y + (T_x + dT_x) dz + q_x dz \cdot \frac{dz}{2} = 0$$

et

Nel piano z-x



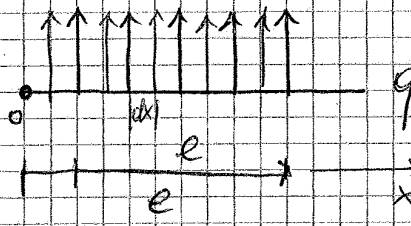
$$\frac{dT_x}{dz} = -q_x$$

Come sopra

$$\frac{dM_y}{dz} = T_x$$

bisogna sempre le relazioni momento e taglio e tra taglio e

Carico diffuso - asse centrale (2) forza distribuita



si può sostituire con la risultante sull'asse centrale

è facile per verificare che l'origine  $o$  è il polo

l'origine  $o$  è il polo

$$R_F = \int_0^e q dx = q \cdot e$$

della carica  $q$  si integra

$$R_{M0} = \int_0^e x q dx = q \cdot \frac{e^2}{2}$$

di braccio

Ho sostituito la distribuzione continua con la risultante comparsata dal momento risultante

$$e = \frac{R_{M0}}{R_F} \quad \text{una cui spostati } \frac{e}{2}$$

$$= \frac{q \frac{e^2}{2}}{q e} = \frac{e}{2} \Rightarrow \text{posso sostituire i carichi con la risultante applicata alla mezzina}$$

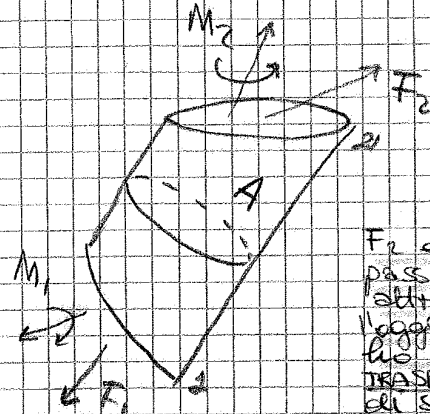
Ho equivalente dal polo statico, una cui è lo stesso del polo fisso

Si sollecita la grandezza  $\sigma$ , tensione, che agisce punto per punto e lo si confronta con la soglia caratteristica limite del materiale

Un pezzo soggetto ad azioni (forze / momenti) in equilibrio ad esempio

- 1 reazioni vincolari
- 2 carichi esterni

Ma in qualche maniera i carichi applicati all'esterno passano nel materiale e si trasmettono all'interno fino a raggiungere i vincoli e l'equilibrio

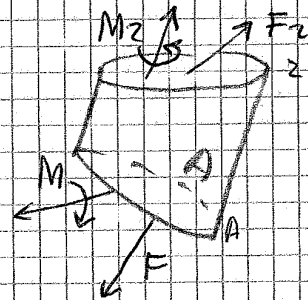


$F_2$  e  $M_2$  passano attraverso l'oggetto e, lungo un'area, TRASMISSIONE DEI SFORZI ALL'INTERNO DEL MATERIALE fino al punto di applicazione  $F_1$  e raggiungono l'equilibrio

La trasmissione degli sforzi da interpretare  $\Rightarrow$  come? attraverso la statica!

1) Taglio orizzontale il componente in una generica sezione  $A$

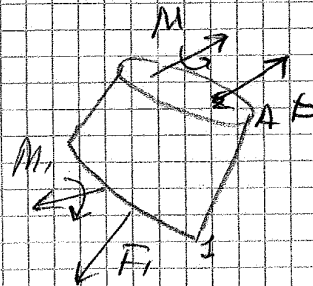
Nel punto di intersezione detto  $P$  di  $F_2$  e  $M_2$  che si fanno equilibrio con quella di  $F_1$



2) La stessa cosa si fa per il metà ed il 2° metà

Stesso caso  $F$  e  $M$  in modo da garantire l'equilibrio

$M$  e  $F$  nel 1° e nel 2° caso sono = i termini per azione e reazione



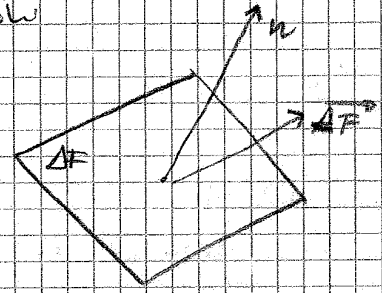


COMPONENTI DI TENSIONE

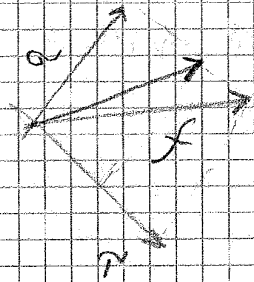
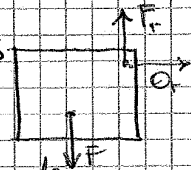
Si fanno HP sui passaggi al limite: i limiti sono uguali

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A} = \vec{f} \quad (\text{è un vettore})$$

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{M}}{\Delta A} = \vec{0} \quad (\text{vettore nullo})$$



Perché? Coprendo con un es. No lungo una delle x e z estremo



Quando ho 2 forze disallineate si realizza un momento se blocco anche la rotazione lo equilibrio alla rotazione

Facciamo tendere a zero l'area con il quale tengo le catelline non è + possibile esercitare una coppia di momenti

richiede  $F \times b$

su uno zomolo livello a 1 punto non si può più avere un braccio e le seconde HP è fisicamente plausibile

$f$  è detto vettore tensione (forza/Area)  $\equiv P$  nei fluidi

È il concetto di  $P$  nei fluidi ESTESO ad ogni solido

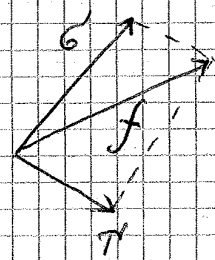
Nei fluidi  $F \perp$  all'area, mentre nei solidi non è vero

La  $f$  in generale è inclinata rispetto all'area  $n \rightarrow$  la Forza di Pisto sempre come  $n$  in un fluido

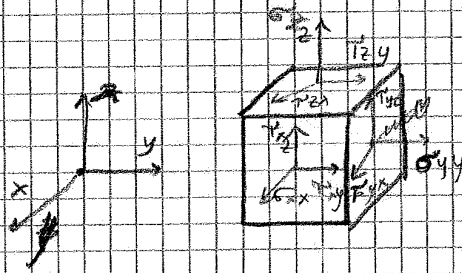
quindi

- contributo totale alla  $T_x$  fide  $T$
- " " " " " "  $\sigma$

di  $f$   
~~si detta~~



Il numero di doppie pedine



Ho 9 termini distinti  $\Rightarrow$  9 componenti

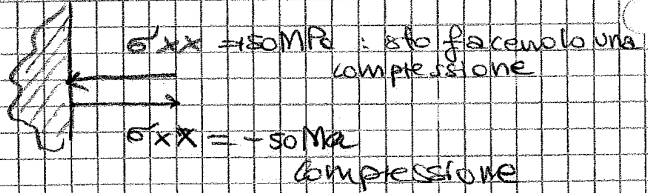
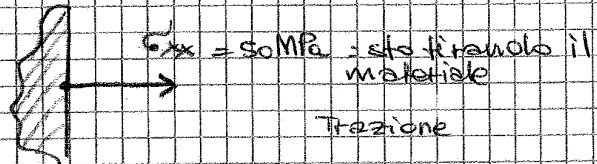
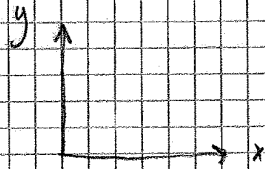
**CONVENZIONI**

La tensione ha la stessa dimensione fisica della  $P$ , in meccanica si esprime usualmente in  $MPa = \frac{N}{mm^2}$

Il verso della componente  $\sigma$  è sempre uscente dal materiale

Se  $\sigma > 0 \Rightarrow$  Ho una TRAZIONE

Se  $\sigma < 0 \Rightarrow$  Ho una COMPRESSIONE



nb: Per i fluidi la compressione è opposta: il fluido può solo premere e non esercitare una trazione!

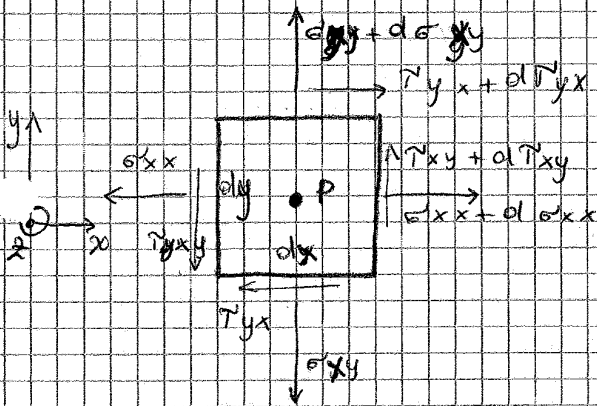
Rispetto alla tensione  $\tau$  si sceglie arbitrariamente il segno se il  $\tau > 0$  agisce come la forza, altrimenti negativa.

Risposta da una faccia ad un'altra si ha una direzione delle componenti di un vettore stesso

è complessivamente la sua direzione  $df$

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x + dx \\ y &\rightarrow y + dy \\ z &\rightarrow z + dz \end{aligned} \Rightarrow f + df$$

Su queste situazioni posso studiare un equilibrio



Scego il polo P ed il des di rotazione  $\rightarrow$  univoco le forze = tensioni x aree

$$\begin{aligned} \sum M_P &= \underbrace{dx \cdot dy \cdot dz}_{\text{area}} \cdot \tau_{yx} \cdot \left(\frac{dx}{2}\right) - dx \cdot dz \cdot \tau_{yx} \cdot \frac{dy}{2} + dy \cdot dz \cdot (\tau_{xy} + d\tau_{xy}) \cdot \frac{dx}{2} \\ &= dx \cdot dz \cdot \tau_{yx} \cdot \frac{dy}{2} - dx \cdot dz \cdot (\tau_{yx} + d\tau_{yx}) \cdot \frac{dy}{2} = 0 \end{aligned}$$

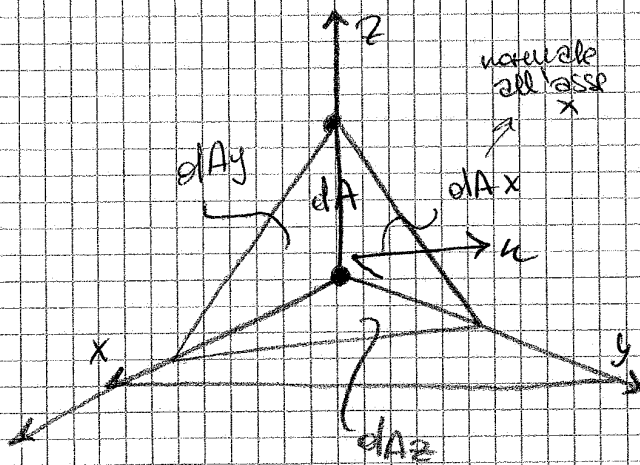
de mot  
no  $\sigma_{xx}$  non da contributo perché ha zero braccio  
Semplificando

I termini di ordine superiore sono trascurabili rispetto ad i termini finiti

$$\sum \tau_{xy} - \sum \tau_{yx} = 0 \Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx} \Rightarrow \text{dove esiste così affinché l'elemento fosse all'equilibrio rispetto alla rotazione}$$

Allora ho

- 3 di tipo normale  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$
- 3 di tipo tangenziale  $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$



Per ciascun triangolo  
 rettangolo  $\gamma$  di cui  
 può si definire un  
 triangolo rettangolo  
 di dimensioni infinitesime  
 con  
 - centro nell'origine  
 - un cateto di lunghezza  
 generica e poi  
 si costruiscono le  
 forze: i cateti  
 sono corris. a  $z$

ha le 3 facce del triangolo, e il  
 4° è il triangolo realizzato dalle  
 3 ipotenuse

Area di direzione verso up

$$\{n\} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} n_x &= \cos \hat{n}_x \\ n_y &= \cos \hat{n}_y \\ n_z &= \cos \hat{n}_z \end{aligned}$$

↑  
 le componenti sono i coseni direttori

Tra le 3 aree ci sono dei legami

l'ossatura area

$$dA_x = dA \cdot n_x$$

↑  
 coseno direttore

$$dA_y = dA \cdot n_y$$

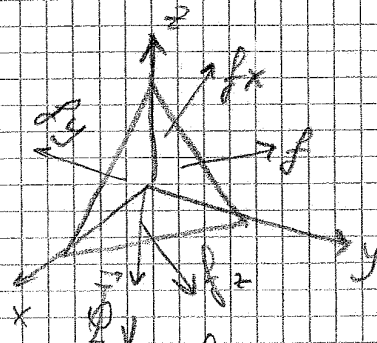
$$dA_z = dA \cdot n_z$$

è la proiezione dell'  
 area obliqua sul  
 piano

Introducendo le componenti di  $f$  e  
 scrivendo gli equilibri si ottiene

l'ossatura  $f$  è una tensione

(moltiplicata per la area per  
 ottenere la risultante).



Le forze per unità di volume



Conoscere la matrice fa sì di conoscere lo stato di tensione in un singolo punto: se voglio conoscere il vettore tensione  $\left. \begin{matrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{matrix} \right\}$  in un punto posso conoscerlo e tutta della matrice su una  $\neq$  faccia e individuata da  $n$

Che differenza c'è

vettore di tensione  $\Rightarrow$  ho già individuato una superficie e verso "  $\Rightarrow$  ho una info completa  $\nearrow$

$n$  ed  $f$  sono // ?

In generale no! perché ho le componenti  $T_{ij}$  alla superficie  $\Rightarrow$  ho componenti  $T_{ij}$  ali

Inspero' casi speciali!

Le direzioni privilegiate per le quali  $k_f$  sono  $\perp$  alla superficie (e quindi  $\tau = 0$ )  $\rightarrow$  come nei fluidi

È noto il problema autovalori autovettori: ~~in questo~~ caso speciale

$$[A] \{ \sigma \} = \lambda \{ \sigma \}$$

$$[A] \{ \sigma \} = \lambda \{ \sigma \}$$

l'inclinazione non viene alterata

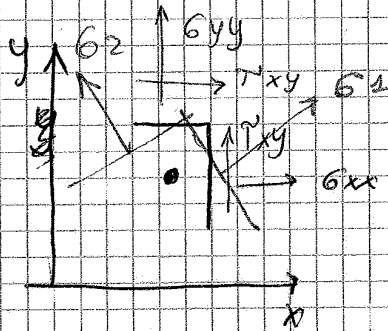
$$([A] - \lambda [I]) \{ \sigma \} = \{ 0 \}$$

è un sistema di eq omogeneo

Se posso annullare il det trovo una eq caratteristica: i gli autovalori sono le radici  
gli autovettori si determinano inserendoli nel 2° eq  $\neq$

la selezione è

Del punto di vista grafico in 2D con un riferimento  
 non principale

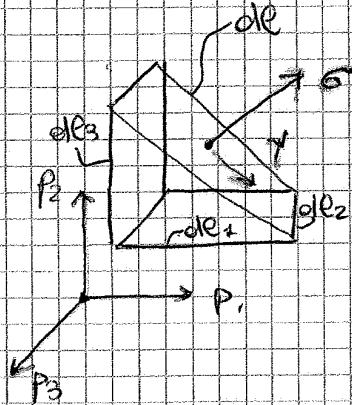


Nei riferimenti principali nessi gli assi in numero delle forze ha loro  $\tau$  sono correlate solo da  $\sigma$  e non ci sono tensioni taglianti

Il tipo di struttura e il suo lo caratterizza di unico e il punto  $\tau$  sempre una scelta del riferimento che mi riporta ad una matrice del tensore delle tensioni

Ragioniamo su un cubo (2 facce di tipo triangolo, una faccia obliqua rettangolare, 2 facce rettangolari)

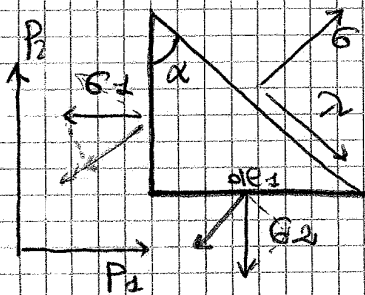
gli assi principali sono orientati come



Considero il solido di dimensioni infinitesime in modo da non dover utilizzare gli integrali

Sulle facce oblique agiscono  $\sigma$  e  $\tau$  perché ~~sulle~~ ~~facce~~ questa faccia è NON PRINCIPALE invece sulle altre facce non ho componente  $\tau$  solo e ~~si~~ risultano solo della tensione principale

Grandezze nel piano 1-2



Sono forze negative

Per definire  $\sigma$  in direzione si prende l'angolo  $\alpha$

$$dx_1 = dx \sin \alpha$$

$$dx_2 = dx \cos \alpha$$

Esprimiamo  $\sigma$  e  $\tau$  in fun di tutto il resto

Per vedere la componente  $\sigma$  scido l'equilibrio della faccia in direzione  $\nearrow$

Ottengo gli stessi risultati

Quando  $\alpha=0$   $T=0$ , sono su una forza principale e non viene esser componente tangente

Quando  $\alpha=90^\circ$   $T=0$  invariante

Alcune formule

Si applica la trasformazione notevole

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}$$

$$G = G_1 \cos^2 \alpha + G_2 \sin^2 \alpha$$

$$T = (G_1 - G_2) \sin \alpha \cos \alpha$$



$$G = \frac{G_1 + G_2}{2} + \frac{G_1 - G_2}{2} \cos 2\alpha$$

$$T = \frac{G_1 - G_2}{2} \sin 2\alpha$$

facciamo il quadrato e sommiamo

$$\left( G - \frac{G_1 + G_2}{2} \right)^2 + T^2 = \left( \frac{G_1 - G_2}{2} \right)^2$$

centro origine  $x^2 + y^2 = R^2$

$$(x - x_{centro})^2 + y^2 = R^2$$

è l'eq di una circonferenza in un piano g/ce con centro in  $\frac{G_1 + G_2}{2}$



osservando l'angolo superiore al uscire di  $\alpha$  la componente normale decresce e quella tangenziale cresce

$\Rightarrow$  Ho il  $T_{max}$  per  $\alpha = \frac{\pi}{4}$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \quad \bullet \sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$

$$\bullet \tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

È importante notare — il livello max di  $\tau$  si ha su una superficie inclinata di  $45^\circ$  rispetto alle superfici principali

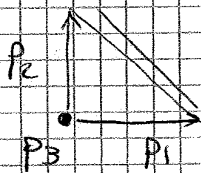
Questa componente tangenziale non ha ~~nessa~~ interpretazione fisica essa è puramente condizionale

A pag 13 ho  $\neq$  cerchi

Il cerchio di Mohr mi dice come si modificano  $\sigma$  e  $\tau$  quando il piano ruota attorno all'asse  $z$

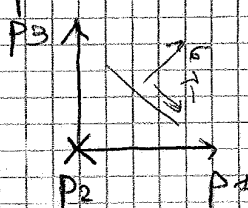
Il piano che ruota  $\equiv$  a un fascio di piani

$\Rightarrow$  il cerchio descrive la situazione su tutti i "piani" che ruotano attorno all'asse  $z$

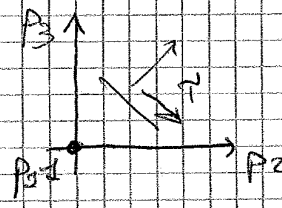


(\*)

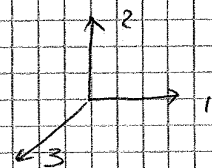
possiamo vedere tutto per ~~questo~~ gli altri assi



tutto allo stato  $z$



tutto allo stato  $z$



~~Non è alcuna posizione per cui  $\sigma > \sigma_2$  e...~~

Non è alcuna posizione per cui  $\sigma > \sigma_2$  e...

- $\sigma \leq \sigma_2 \rightarrow$  max tensione normale e cui un mat può essere sottoposto
- $\sigma > \sigma_3 \rightarrow$  non è alcuna inclinazione del piano che riesce a sostenere una tensione  $< \sigma_3$
- $|\tau| < \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \rightarrow$  non è alcuna inclinazione per cui il taglio  $>$

Questo ragionamento è fatto nelle direzioni principali (fatti con valori ed auto vettori) per questo posso sfruttare i cerchi per fare la COSTRUZIONE DIRETTA (SENZA AUTOVETTORI E MA) e sapere necessariamente i valori e auto vett.

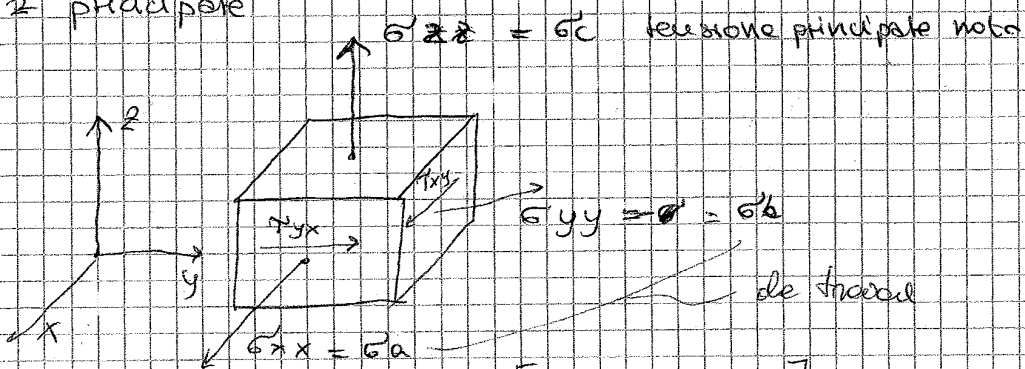
Per risolverlo

1) Si conoscono  $\sigma$  principale e il corrispondente asse principale

2) Si conoscono le componenti di tensione normali e trasversali su altri 2 piani tra loro che fanno parte del fascio di piani aventi per sostegno il piano e l'asse principale di cui sopra

ESEMPIO: Ho di sapere che  $z$  è l'asse principale

$z$  principale



Se scendo il cubo

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{ab} = \frac{\sigma'_{xx} + \sigma'_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma'_{xx} - \sigma'_{yy}}{2}\right)^2 + \tau'_{xy}{}^2}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{\tau'_{xy}}{\frac{\sigma'_{xx} - \sigma'_{yy}}{2}}$$

Calcolo TENSIONI PRINCIPALI (y è la direzione principale)

Si spuntiamo i cerchi di Mohr

$$\sigma_{a,b} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}$$

Se y = principale i pedici sono x e z

$$\sigma_{a,b} = \frac{250 + (-120)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{250 - (-120)}{2}\right)^2 + 90^2}$$

$$= 65 \pm 206$$

ho le 2  
tensioni  
principali  
sulle asse

$$\sigma_a = 271 \text{ MPa}$$

$$\sigma_b = -141 \text{ MPa}$$

Ordinamento delle asse delle tensioni principali

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

$$\sigma_3 = \sigma_b = -141 \text{ MPa}$$

$$\sigma_1 = \sigma_a = 271 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \sigma_{yy} = 170 \text{ MPa}$$

Una volta individuato il riferimento P1, P2, P3 e l'angolo tra i riferimenti  $\alpha^*$

Calcolo  $\tan \alpha^* < 45^\circ$

$$\left| \tan 2\alpha^* \right| = \left| \frac{2\tau_{xz}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \right| = \left| \frac{2 \cdot 90}{250 - (-120)} \right|$$

$$= \frac{180}{370} = 0,49$$

attenzione in  
questo caso i  
pedici non  
sono  
principali

$$2\alpha^* = \arctan(0,49) = 25,9^\circ \quad \alpha^* = 13^\circ$$

L'angolo dei rif può essere compreso tra  $\pm 90^\circ$   
per stabilirlo quello è l'angolo che si conserva nella  
tabella che sta dietro la copla dell'esecuzione

$\alpha = \alpha^* - 90^\circ$  perché  $-45 < \alpha < -90$

$\alpha = 13 - 90 = -77^\circ \Rightarrow$  rotazione  $\alpha$  da direzione principale  $a$

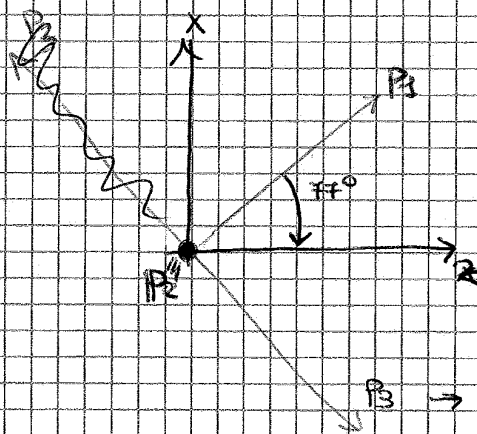
$\alpha = \alpha^* \Rightarrow$  allora la direzione principale è  $a \rightarrow P_1$   
 Altre direzioni principali  $a, y, z$  corrispondono

- $a \rightarrow P_1$
- $y \rightarrow P_2$
- $z \rightarrow P_3$

- $P_1 = P_a$
- $P_2 = y$
- $P_3 = P_b$

$-77^\circ$  è la rotazione che si deve far compiere attorno ad  $y$

Giudicamento



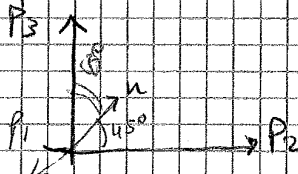
$\bullet$   $y$  uscente da piano

$P_3 \rightarrow$  a generare la terna destrorsa

Determinare  $\alpha$  e  $\tau$  se si conosca il fascio con asse  $P_1$  e normale  $n$

Determinare il deviatore  $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$

Il piano si ottiene per rotazione attorno a  $P_1$  tutti i piani sono ortogonali a  $P_1$  dunque



$\vec{n} \cdot P_1 = 0 \Rightarrow n_1 = 0$   
 prodotto scalare



Esempio 2

Dato il

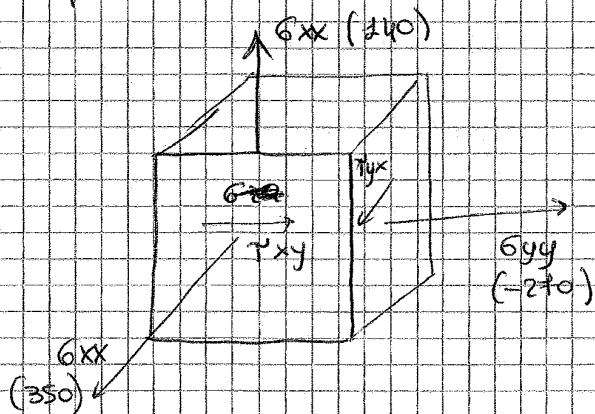
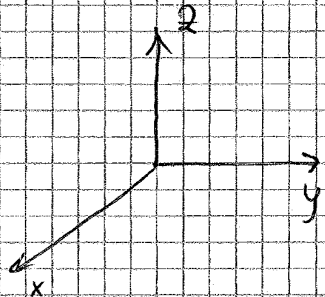
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 350 & 270 & 0 \\ 270 & -270 & 0 \\ 0 & 0 & 140 \end{bmatrix}$$

a) Determinare

- $\sigma_1$
- $\sigma_2$
- $\sigma_3$
- e angolo  $\alpha$

b) Determinare  $\sigma$  e  $\tau$  su un piano del fascio con asse  $P_2$  e normale  $n$  a  $60^\circ$  rispetto a  $P_1$

• WBO elementare



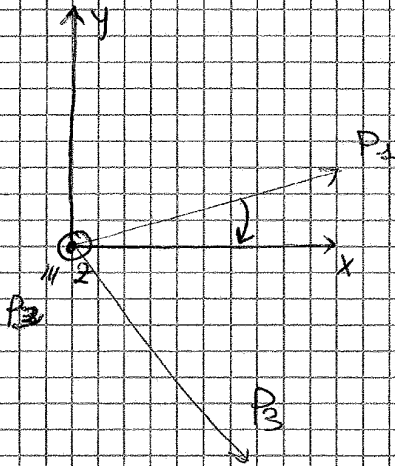
$\sigma_{zz} = 140 \text{ MPa}$  Princ

Calcolo

$$\sigma_{ab} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$\sigma_a = 420 \text{ MPa}$   
 $\sigma_b = -340 \text{ MPa}$

$\sigma_1 = \sigma_a = 420 \text{ MPa} \Rightarrow P_1 = P_0$   
 $\sigma_2 = \sigma_b = -340 \text{ MPa} \Rightarrow P_2 = P_2$   
 $\sigma_3 = -340 \text{ MPa} \Rightarrow P_3 = P_0$



da  $P_2$  vedo nel  
x ruotando il  
senso orario

→ me lo ha detto la  
tabella

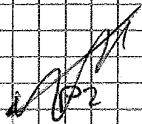
One deve calcolare  $a$  e  $T$  sul suo piano ottenuto da  
rotazione attorno a  $P_2$  e con  $n$  normale di  $60^\circ$  rispetto  $P_2$

→ si vede la  $px$  di  $det$  anche da  $n_x, n_y, n_z$

$$n = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ \\ 0 \\ \sin 60^\circ \end{pmatrix}$$

- Rotazione attorno a  $P_2$

$$n_2 = 0$$



- Rotazione di  $60^\circ$  da  $P_2$  → l'angolo tra  $P_2$  e  $n$  è  $60^\circ$

$$n_1 = \cos 60^\circ \rightarrow \text{dov'è dal prodotto scalare}$$

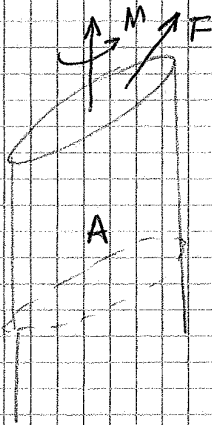
- Rotazione di  $30^\circ$  da  $P_2$

$$n_3 = \cos 30^\circ = \sin 60^\circ$$

$$n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

### In sintesi

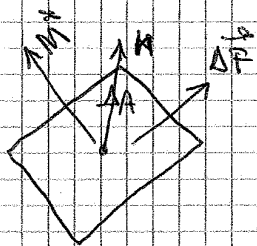
Se considero un oggetto soggetto ad azioni di forza e momento



queste sollecitazioni possono attraversare l'oggetto; si ha una trasmissione degli sforzi all'interno del materiale.

Questa trasmissione la interpretiamo con la statica e può essere vista come una sequenza di equilibri parziali.

$F$  ed  $M$  sono trasmessi attraverso  $A$ , se  $A$  che il materiale sta lo stesso posso riferirmi a un'area  $\Delta A$ .



Per eliminare la dipendenza da  $\Delta A$  dividiamo per  $\Delta A$  e facciamo tendere  $\Delta A$  a zero.

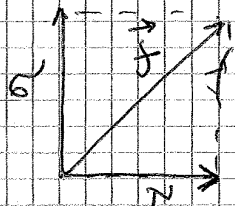
$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = f$$

rettore tensione

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta A} = \sigma$$

→ non teso e realizzato braccio

$f$  e



Per conoscere le componenti della tensione in un punto  $P$  è necessario conoscere

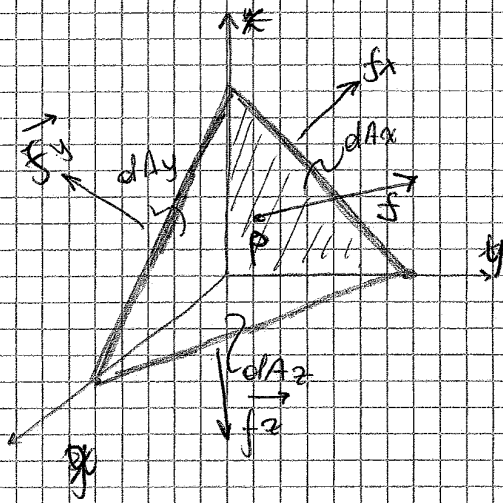
- l'orientazione della superficie ( $n$ ) → coseno direttore
- la direzione della  $f$



Se il volume è orientato secondo una generica direzione  $n$   
 dove  $n = (n_x, n_y, n_z)$

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$$

Per determinare le componenti di tensione sulle 3 facce + quella  
 sulla faccia generica considero il tetraedro di Cauchy  
 Posso così vedere come variano le componenti di tensione  
 al variare delle orientazione della faccia



tetraedro coesivo di volume  $dV$   
 con facce

$$\begin{aligned} dAx &= dA \cdot n_x \\ dAy &= dA \cdot n_y \\ dAz &= dA \cdot n_z \end{aligned} \quad \text{dove } n = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$$

coseni direttore

$$\begin{aligned} n_x &= \cos \hat{n}_x \\ n_y &= \cos \hat{n}_y \\ n_z &= \cos \hat{n}_z \end{aligned}$$

Scrivo gli equilibri

$$\vec{f} \cdot dA + \vec{f}_x \cdot dAx + \vec{f}_y \cdot dAy + \vec{f}_z \cdot dAz + \vec{g} \cdot dV = 0$$

$\vec{g} \cdot dV = 0$

~~Per ogni punto~~

f Dividendo  $\times dA$

$$\vec{f} + \vec{f}_x \cdot n_x + \vec{f}_y \cdot n_y + \vec{f}_z \cdot n_z = 0$$

In termini scalari

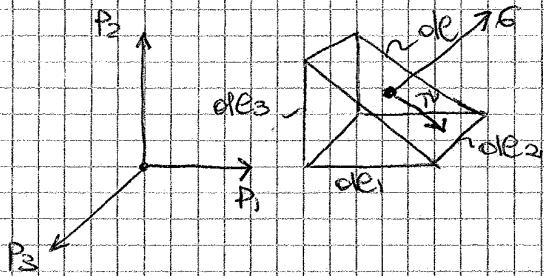
$$\begin{cases} f_x - \sigma_{xx} \cdot n_x - \tau_{xy} \cdot n_y - \tau_{xz} \cdot n_z = 0 \\ f_y - \tau_{xy} \cdot n_x - \sigma_{yy} \cdot n_y - \tau_{yz} \cdot n_z = 0 \\ f_z - \tau_{xz} \cdot n_x - \tau_{yz} \cdot n_y - \sigma_{zz} \cdot n_z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$$

Come sono legate  $\sigma$  e  $\tau$  dipende dall'orientazione della superficie lo dicono i cerchi di Mohr

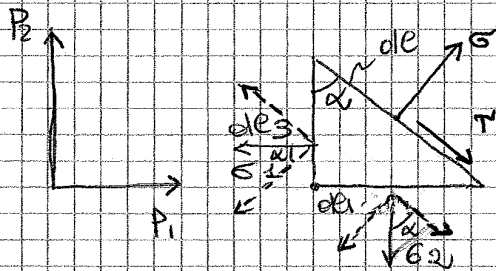
Per la determinazione delle relazioni  $\sigma$  e  $\tau$  si esegua lo studio su un elemento a cui  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  sono orientati

- 3 secondo le ~~super~~ direzioni principali
- 1 faccia obliqua retata di un angolo  $\alpha$  rispetto a  $P_2$



Ho 1 faccia come principale

Scivo l'equilibrio x  $\sigma$  e  $\tau$



$$dA_3 = dA \cos \alpha$$

$$dA_1 = dA \sin \alpha$$

$$\uparrow: \sigma dA \cdot dA_2 = \sigma_2 \cdot dA_1 \cdot dA_2 \cdot \sin \alpha - \sigma_1 \cdot dA_3 \cdot dA_2 \cdot \cos \alpha = 0$$

$$\sigma dA = \sigma_2 \cdot dA \sin^2 \alpha - \sigma_1 \cdot dA \cos^2 \alpha = 0$$

$$\sigma = \sigma_2 \sin^2 \alpha + \sigma_1 \cos^2 \alpha$$

$$\text{Per } \alpha = 0 \quad \sigma = \sigma_1 \quad \alpha = \frac{\pi}{2} \quad \sigma = \sigma_2$$

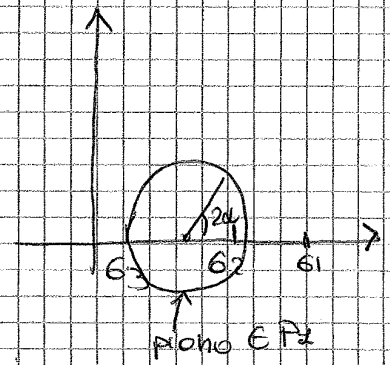
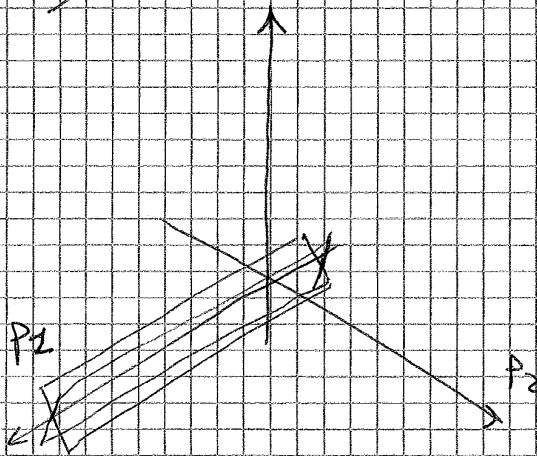
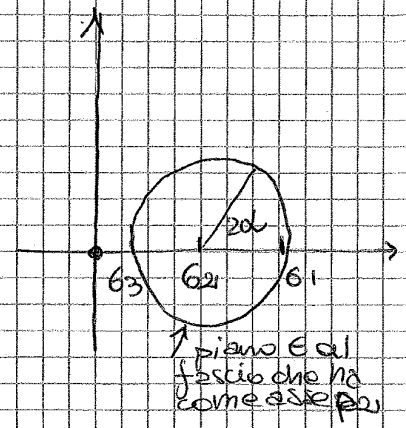
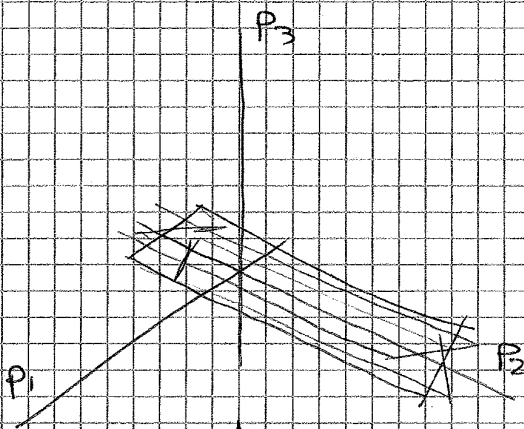
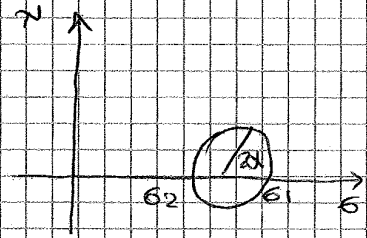
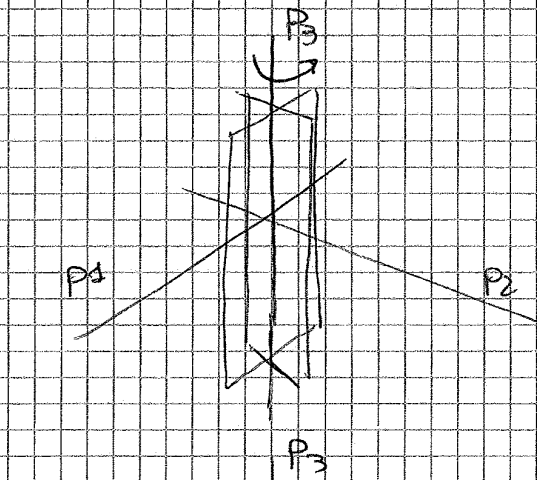
$$\downarrow: \tau \cdot dA_2 \cdot dA + \sigma_2 \cdot dA_1 \cdot dA_2 \cdot \cos \alpha - \sigma_1 \cdot dA_3 \cdot dA_2 \cdot \sin \alpha = 0$$

$$\tau dA + \sigma_2 \cdot dA \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_1 \cdot dA \cos \alpha \sin \alpha = 0$$

$$\tau = (\sigma_1 - \sigma_2) \cos \alpha \sin \alpha$$

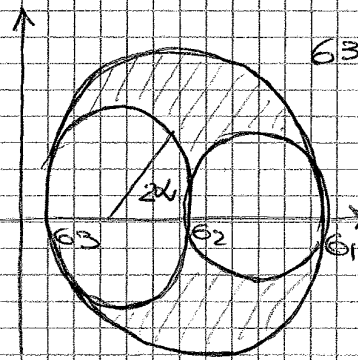
$$\text{Per } \alpha = 0 \quad \tau = 0 \quad \alpha = \frac{\pi}{2} \quad \tau = 0$$

Ripetendo l'operazione x le altre coppie di piani si tracciano i cerchi di Mohr



È sempre un piano ad inclinazione variabile. Al variare dell'inclinazione  $\alpha$  e  $\gamma$  stanno tra loro secondo le relazioni grafiche del diagramma di Mohr.

Se il piano generico non fa parte dei piani  $P_1, P_2, P_3$  allora  $\sigma$  e  $\tau$  stanno dentro il cerchio maggiore e fuori dai cerchi minori.



$$\sigma_3 \leq \sigma \leq \sigma_1$$

$$\tau \leq \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

26/10/17

Fondamenti di  
meccanica  
strutturale

MICHELA  
DIANA

## STATO DI DEFORMAZIONE

INTRO

~~Il concetto di stato di deformazione~~

→ È l'equivalente logico agli spostamenti

reazioni

↓  
statico

deformazione

↓  
cinematico

Per oggetti non puntiformi ha senso parlare di rotazione

Il movimento

- cinematico + moto rigido
- deformativo

Si definiscono componenti di deformazione e reazioni della deformazione; si possono intrinsecamente vedere come si relazionano tra reazioni e deformazioni

## Spostamenti e deformazione

Sotto l'azione di una struttura cambia la propria forma

~~(che anche per i meccanismi)~~

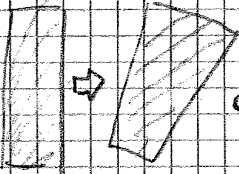
- moto rigido (meccanismi) → sono costruiti a cambiare forma ma non si deformano esattamente
- moto deformativo (strutture) → Si nota + nei corpi che non sono progettati come meccanismi

I 2 moti si sono entrambi e si mescolano

Non abbiamo perfino il comportamento della struttura ma solo i valori di resistenza ma anche di rigidezza devono essere sufficientemente rigidi.

Il moto rigido perché proprio  $\vec{v}$  è solidale con la parte che si è deformata (ha solo moto rigido)

Nell'altra parte invece NON HO SOLO MOTO DEFORMATO  
Si mette in evidenza una fetta



dovrebbe essere un parallelepipedo

Nel moto rigido o comunque forma!  
Questo influenza la fetta da studiare e quella ad è influenzata da quella da studiare e muove

Però ~~la~~ fetta ~~risente~~

- ~~da~~ ~~si~~ ~~sta~~ di deformazione propria ~~o~~ ~~deformazione~~
- di moto rigido che dipende da ciò che si muove  $\rightarrow$  spostamento

### QUANTIFICARE LA DEFORMAZIONE

- $\Rightarrow$  Mi serve introdurre delle grandezze puntuali
  - $\Rightarrow$  definire la deformazione in modo quantitativo
- Spostamento e posizione

- Definisco la posizione delle particelle attraverso le

- coordinate  $(x, y, z)$  in un istante  $t$
- coordinate  $(x', y', z')$  in un istante  $t'$

~~Variazioni~~  $\rightarrow$  le

$\rightarrow$  spostamento del suo punto  $\rightarrow$  variazione delle coordinate tra  $t$  e  $t'$

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \\ z' - z \end{pmatrix}$$

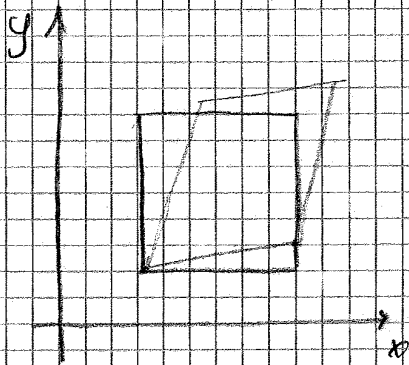
non si va ad eccezioni e deviate ma quando  $z$



La loro direzione

→ ha l'aspetto di essere un nuovo oggetto angolare

- scottatura \*

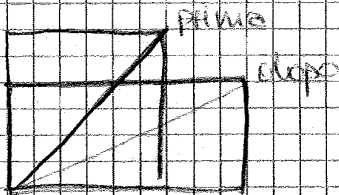


Per questo dallo stato  
 ellittico si vede che  
 in certe <sup>estensione</sup> direzioni  
 la propria <sup>estensione</sup> direzione  
 una certa sua <sup>estensione</sup> aspetto  
 all'altro

nb: dilatazione non va bene perché

- funziona sul contorno

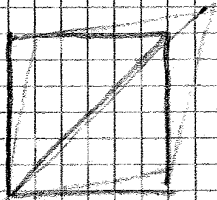
- non funziona su altri segmenti → ad esempio la  
 diagonale cambia direzione e di lunghezza



⊗

↓  
 per la diagonale  
 non ha solo dilatazione

Nel secondo caso invece non ho notazione della  
 diagonale: cresce in lunghezza e non cambia  
 la sua direzione



\* A meno le definizioni date non sono bene

nb  $[J]$  è quadrata dove posso fare scelte particolari

$$[J] = [\Omega] + [E]$$

ho diviso  $J$  in 2 contributi con un significato fisico geometrico

$$[\Omega] = \frac{1}{2}[J] - \frac{1}{2}[J]^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 0 \end{bmatrix}$$

DIM

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$J^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$[\Omega] = \frac{1}{2} ([J] - [J]^T) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 0 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$   $[\Omega]$  antisimmetrica e corrisponde alle rotazioni rigide

$$[E] = \frac{1}{2}[J] + \frac{1}{2}[J]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] & \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right] \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right] \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right] & \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right] & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$   $[E]$  simmetrica (i termini fuori diagonale sono identici) e

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

I coefficienti diversi sono 6, come le tensioni

Nella diagonale sono espresse l'effetto longitudinale  
 I termini fuori diagonale corrispondono ad un effetto  
 trasversale → distorsione

In sintesi:

La variazione di spostamenti  $\{du\}$  tra inizio e fine di  $\{dx\}$  complessivamente è legata a  $\epsilon$ , e viene causata solo e solo dalla deformazione (rotazione rigida esclusa) allora

$$\{du\} = [\epsilon] \{dx\}$$

parte di  
spostamenti  
debite solo  
alle deformazioni

### DIREZIONI PRINCIPALI DI DEFORMAZIONE

Anche per le deformazioni esiste una terna privilegiata di assi  $P_1, P_2, P_3$  tale che, esprimendo le componenti secondo esse (invece degli assi  $x, y, z$ ) le tensioni diventino diagonali

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & & \\ & \epsilon_2 & \\ & & \epsilon_3 \end{bmatrix}$$

Se un segmento è allineato su uno degli assi principali allora esso si deforma non ruota per sottrazione, non si allunga



## Relazioni tensioni deformazioni

Tensioni e deformazioni sono legati tra di loro

→ risposta del materiale alla sollecitazione

Ogni materiale sollecitato si deforma in misura + o meno elevata. Il comportamento viene classificato in alcune categorie

- **Elastico** → reversibile: se viene rimossa la tensione la deformazione si annulla  
di tipo  
- lineare (tra causa e effetto c'è una relazione lineare); es. l'esempio è dei metalli  
- non lineare (c'è elasticità ma la relazione causa effetto è + complessa); es. esempio della gomma

- **Anelastico** → irreversibile: la deformazione permane anche se si rimuove la tensione  
- plastico, deformazione istantanea che resta in maniera permanente  
- viscoso, ha una deformazione lenta e progressiva (ad esempio metalli ad alta temperatura)

noi ci limitiamo ad analizzare e considerare il caso del comportamento elastico lineare

## Isotropia omogeneità

Le proprietà della materiale dipendono spesso anche dalle direzioni

- **omogeneità** → le proprietà sono identiche in tutti i punti del materiale
- **disomogeneo** → le proprietà variano da punto a punto

di Young e tra le dimensioni fisiche di una tensione.

DIM

Nelle definizioni usate fino ad ora il numero delle deformazioni che sono adimensionali

$$\frac{du}{dx}$$

è un numero adimensionale e  $\sigma$  è una tensione che

è lo stesso dimensionale della tensione (MPa = N/mm<sup>2</sup>)

18/10/18

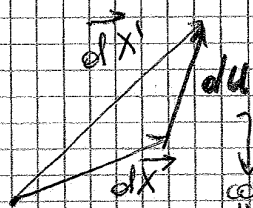
Stipando affrontando l'argomento del tensore deformazione

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{yx}/2 & \epsilon_{yy} & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{zx}/2 & \gamma_{zy}/2 & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

consente di determinare lo spostamento differenziale

$$\{du\} = [\epsilon] \{dx\}$$

di un segmento dell'elemento  $\rightarrow$  considero solo l'effetto del moto deformativo



contiene l'effetto esclusivo dell'effetto tensione

l'evoluzione di  $dx \rightarrow dx'$  può essere scritta

Elasticità lineare

Tensioni  $\sigma_{xx}$

$\tau_{xy}$

tra applicate

Sotto l'azione di  $\sigma_{xx}$  nasce anche una dilatazione in direzione trasversale.

perché è un fenomeno di contrazione

$$\sigma_{xx} \rightarrow \epsilon_{yy} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{xx}$$

Es: l'elastico si assottiglia fenomeno di ~~contrazione~~ contrazione

è proporzionale a  $\sigma_{xx}$  e la costante di proporzionalità è  $\frac{\nu}{E}$  coefficiente di contrazione trasversale = coefficiente di Poisson

$\nu$  è una sensibilità in codice tra assi

$\nu \leq 0,5$  (per i metalli  $\approx 0,3$  valore caratteristico)

Lo stesso fenomeno si osserva anche su z

$$\sigma_{xx} \rightarrow \epsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{xx}$$

si vede che il materiale è isotropo

Sempre sotto l'azione di  $\sigma_{xx}$  di trazione

$$\sigma_{xx} \rightarrow \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

le componenti di scorrimento sono nulle

⇒ LA FORMA IN QUESTO SENSO NON

CAMBIA → si mantiene le stesse dimensioni delle facce di un rettangolo

↓  
non si ha distorsione

Se si applica  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$  (avrebbe l'asse in cui si fa agire la trazione principale) i fenomeni sono identici sempre perché il materiale è isotropo (valeo caratteristici solo i pedici) → il comportamento fisico è lo stesso





**LEGAMI TRA LE  $\kappa$  ELASTICHE**

I coefficienti introdotti sono le costanti elastiche

$E, \nu, G$  costanti elastiche

e sono tra loro dipendenti

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

→ x un materiale sottoposto a danno a cost e la terza si ricava

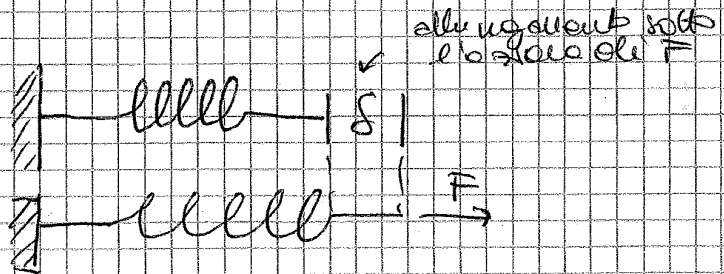
In queste formule è molto facile vedere il significato fisico

**ENERGIA ASSOCIATA AL PROCESSO DI DEFORMAZIONE**

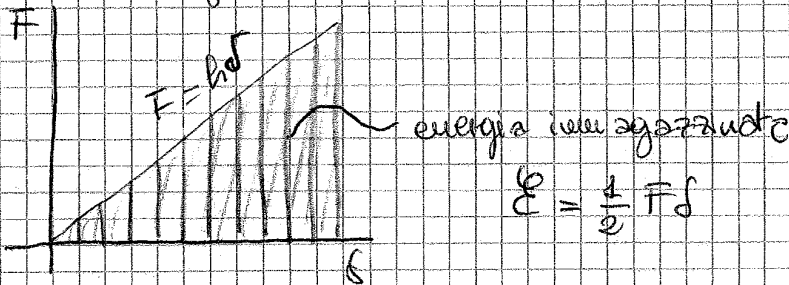
È una energia di tipo potenziale elastico

→ applicare uno stato di tensione corrispondente e scegliere un lavoro che viene immagazzinato nel materiale

ES x analogia =



Ripetendo il grafico di



Si consideri il

Materiale

con dimensioni  $dx, dy, dz$

tensione normale (1)

tensione tagliata (2)

considero

forze: 2 effetti

proporzionale all'area della tensione normale e tagliata

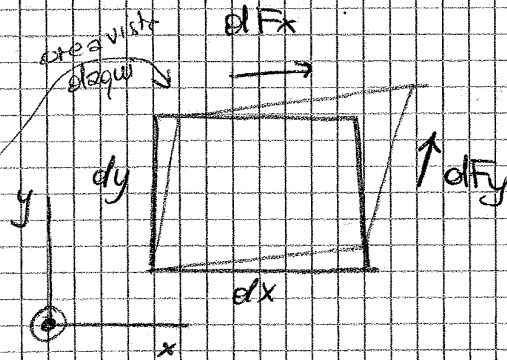


② se applico  $\tau_{xy}$

ho 2 forze che propongono  
lasciare

$$dF_x = \tau_{xy} \cdot dx \cdot dz$$

$$dF_y = \tau_{xy} \cdot dy \cdot dz$$



Queste forze elementari danno una spostamento

$$\{du\} = [\epsilon] \{dx\}$$

dove  $\epsilon = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\gamma_{xy}}{2} & 0 \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$du = \frac{1}{2} \gamma_{xy} dy$$

$$dv = \frac{1}{2} \gamma_{xy} dx$$

$$dx = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$

$$du = \begin{bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{bmatrix}$$

~~Il lavoro~~ l'energia

$$dE = \frac{1}{2} dF_x du + \frac{1}{2} dF_y dv$$

$$= \frac{1}{2} [dF_x du + dF_y dv]$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \tau_{xy} \cdot \tau_{xy} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \right] \quad dw$$

L'energia specifica per unità di volume

$$\frac{dE}{dV} = \eta = \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy}$$

Se agiscono simmetricamente + componenti ci sono  
interazioni? NO