NUMERO: 891

DATA: 12/03/2014

A P P U N T I

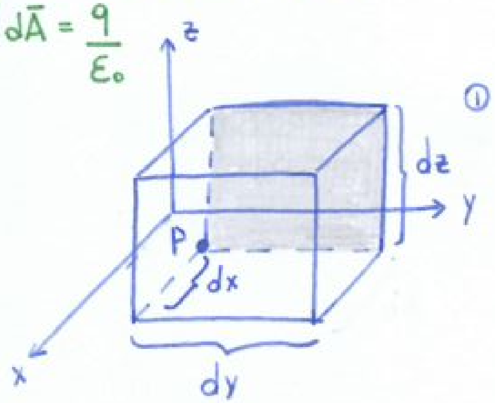
STUDENTE: Bodini

MATERIA: Fisica Moderna (meccanica quantistica) + Eserc.

Prof. Pirri_Giorgis_Ferrero

I LEGGE DI GAUSS PER E:

$\oint \bar{E} d\bar{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$



CALCOLO DEL FLUSSO DI $\bar{E}$

① PIANO $dydz$, $\perp$ ASSE X:

FACCIA POSTERIORE, DI SUPERFICIE $dA = -\hat{i}\,dydz$

HA FLUSSO $E(-\hat{i}\,dydz) = -E_x\,dydz$

FACCIA ANTERIORE, $+\hat{i}\,dydz$ RISENTE DI CAMPO

$\bar{E} + \underbrace{\frac{\partial \bar{E}}{\partial x} dx}_{\text{VARIAZIONE RISPETTO ALLA VARIAZIONE dx DI x}}$, QUINDI FLUSSO

$\left(\bar{E} + \frac{\partial \bar{E}}{\partial x} dx\right)(+\hat{i}\,dydz)$

IL FLUSSO ATTRAVERSO LE DUE FACCE E' $\bar{E}(-\hat{i}\,dydz) + \left(\bar{E} + \frac{\partial \bar{E}}{\partial x} dx\right)(+\hat{i}\,dydz) =$

$= \cancel{-E_x\,dydz} + \cancel{E_x\,dydz} + \frac{\partial E_x}{\partial x} dxdydz$

SI POSSONO ANALOGAMENTE RICAVARE I CONTRIBUTI DELLE ALTRE FACCE, QUINDI

IL FLUSSO TOTALE $\oint \bar{E} d\bar{A} = dxdxdz\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) = dV \cdot \bar{\nabla}\cdot\bar{E} = \frac{q}{\varepsilon_0}$

$q = \int \rho\, dV = (dxdydz)\rho$

① $\bar{\nabla}\bar{E} = \frac{\rho_{(x,y,z)}}{\varepsilon_0}$

LEGGE DI FARADAY - HENRY

(III) $\oint \bar{E} d\bar{s} = -\frac{d\phi_B}{dt}$ ——— ... ——▷ $\bar{\nabla}\times\bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$

ANALOGAMENTE ALLA IV EQ. DI MAXWELL

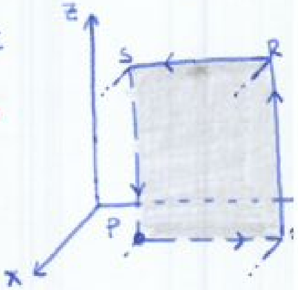
LEGGE DI GAUSS PER B:

(II) ANALOGAMENTE ALLA I EQ DI MAXWELL,

$\oint \bar{B} d\bar{A} = \phi$ ——— ... ——▶ $\bar{\nabla}\cdot\bar{B} = \phi$ (II)

(IV) LEGGE DI AMPERE - LAPLACE

$\oint \bar{B} d\bar{s} = \left(\varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} + j\right)\mu_0$



$\oint_{SPQR} \bar{B} d\bar{s} =$

PQ: $\bar{B}_m \overline{PQ}$ +

+ RS: $\left(\bar{B}_m + \frac{\partial B}{\partial z} dz\right)\overline{RS}$ +

+ QR: $\left(\bar{B} + \frac{\partial B}{\partial y} dy\right)\overline{QR}$ +

+ SP: $\bar{B}\,\overline{SP}$ =

$= B\hat{j}dy + \left(B + \frac{\partial B}{\partial y} dy\right)\hat{k}dz - \left(B + \frac{\partial B}{\partial z} dz\right)dy - B\hat{k}$

$= \frac{\partial B_z}{\partial y} dydz - \frac{\partial B_y}{\partial z} dydz =$

$= \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right) dydz$

$\oint_{PQSR} \bar{B} d\bar{s} = \mu_0 j_{cx} \cancel{dydz} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \cancel{dydz} = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\partial B_y}{\partial z}\right)$

$= \frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\partial B_y}{\partial z}$ E' LA COMPONENTE LUNGO X DI $\bar{\nabla}\times\bar{B}$

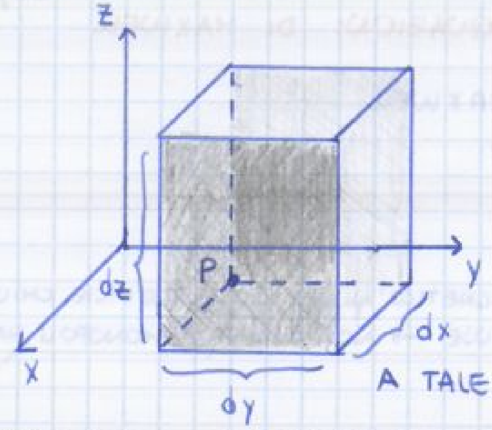
QUINDI, ANALOGAMENTE PER LE ALTRE 5 FACCE RICAVO LE COMPONENTI DEL ROTORE E, INFINE:

⇓

$\bar{\nabla}\times\bar{B} = \mu_0 i_c + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$ (IV)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 128

①



PARALLELEPIPEDO INFINITESIMO RELATIVO AL PUNTO P:

SPIGOLI DI LUNGHEZZA dx, dy, dz
VOLUME ϕ (E' UN PUNTO)

A TALE PARALLELEPIPEDO APPLICO I maxwell:

NELLO SPAZIO C'E' UN CAMPO ELETTRICO, NE CALCOLO IL FLUSSO ATTRAVERSO OGNI FACCIA:

$d\phi = E\, dA$

- $dy\,dz$: CONSIDERO LE FACCE // PIANO yz, CIOE' $\perp$ ASSE x

per la faccia posteriore : $\bar{E}\, d\bar{A} = \bar{E}(-\hat{i}\, dy\, dz) = -E_x\, dy\, dz$

per la faccia anteriore :

considero lo stesso flusso della posteriore, ma variato di una quantità infinitesima corrispondente a dx, cioè la distanza tra le due facce

$$\bar{E}\, d\bar{A} = \bar{E} + \frac{\partial \bar{E}}{\partial x} dx =$$

$$\bar{E} = \left(\bar{E} + \frac{\partial \bar{E}}{\partial x} dx\right)(\hat{i}\, dy\, dz) = E_x dy\, dz + \frac{\partial E_x}{\partial x} dy\, dz\, dx$$

il flusso attraverso le due facce è pari alla somma :

$$-\cancel{E_x\, dy\, dz} + \cancel{E_x\, dy\, dz} + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx\, dy\, dz$$ E' IL FLUSSO RISPETTO ALLE FACCE // yz

- $dx\,dz$
- $dx\,dy$

RICAVARE ANALOGAMENTE

IL FLUSSO TOTALE E' PARI ALLA SOMMA:

se è valida la prima eq., allora...

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} dx\, dy\, dz + \frac{\partial E_y}{\partial y} dx\, dy\, dz + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx\, dy\, dz = \oint_S \bar{E}\, d\bar{A}$$

$$\oint \bar{E}\, d\bar{A} = \underbrace{\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)}_{div\, \bar{E} = \bar{\nabla} \cdot \bar{E}} dx\, dy\, dz = \bar{\nabla}\bar{E} \underbrace{dx\, dy\, dz}_{dV} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho\, dV$$

IN COORDINATE CARTESIANE

$$\bar{\nabla}\bar{E}\, \cancel{dV} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho\, \cancel{dV}$$

$$\boxed{\bar{\nabla}\bar{E} = \frac{\rho_{(x,y,z)}}{\varepsilon_0}}$$

CHE' E' L'ESPRESSIONE DIFFERENZIALE DELLA I EQ. DI MAXWELL

$j_c \cdot \hat{i} = j_x$ se è vera la IV eq, dunque...

$$\oint_{PQRS} \bar{B} d\bar{s} = \mu_0 j_{c_x} \cancel{dydz} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \cancel{dydz} = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right) \cancel{dydz}$$

$$\mu_0 j_{c_x} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}}$$

COMPONENTE LUNGO X DEL ROTORE $\bar{\nabla} \times \bar{B}$

ANALOGAMENTE PER TUTTE LE ALTRE FACCE, QUINDI:

$$(\bar{\nabla} \times \bar{B})_x = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 j_{c_x} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

$$(\bar{\nabla} \times \bar{B})_y = \frac{\partial B}{\partial} \quad \dots \quad = \mu_0 j_{c_y} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

$$(\bar{\nabla} \times \bar{B})_z = \dots = \mu_0 j_{c_z} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

SCRITTURA SCALARE

SCRITTURA VETTORIALE

$$\boxed{\bar{\nabla} \times \bar{B} = \mu_0 j_c + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}}$$

CHE E' L'ESPRESSIONE DIFFERENZIALE DELLA IV EQ. DI MAXWELL

(II) ANALOGAMENTE,
$\bar{B}$ sostituito con $\bar{E}$, la corrente è 0 e $\mu_0 \cdot \varepsilon_0 = 1$,
quindi per simmetria

$$\text{rot}\,\bar{E} = \boxed{\bar{\nabla} \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}}$$

SONO LE ESPRESSIONI DIFFERENZIALI DELLE QUATTRO EQ DI MAXWELL, DA CUI POSSO PARTIRE PER SCRIVERE QUALSIASI CAMPO ELETTROMAGNETIC[O] NOTE LE SORGENTI.

$\boxed{\text{EFFETTO FOTOELETTRICO}}$ — Einstein 1905

NATURA QUANTISTICA DELLA LUCE

FENOMENO FISICO CARATTERIZZATO DALL'EMISSIONE DI ELETTRONI DA UNA SUPERFICIE DI UN MATERIALE COLPITO DA UN'ONDA E.M.
(= FOTONI CON UNA CERTA λ)

PARAMETRI SPERIMENTALI:

1. ENERGIA CINETICA E NUM. ELETTRONI EMESSI
2. TEMPO DI EMISSIONE
3. RELAZIONE EMISSIONE – FREQUENZA DELL'ONDA

AUMENTANDO L'INTENSITA' AUMENTA N, MA NON E_k

INTERPRETAZIONE CLASSICA:

1. E_k CRESCE ALL'AUMENTARE DELL'INTENSITA' I DELL'ONDA $\quad \uparrow I \rightarrow \uparrow E_k$
2. TEMPO EMISSIONE DECRESCE CON I $\quad \uparrow I \; \downarrow t$
3. L'EMISSIONE NON DIPENDE DALLA ν

RISULTATI SPERIMENTALI: $\quad \uparrow \nu \rightarrow \uparrow E_k$

1. E_k AUMENTA LINEARMENTE CON ν
$$E_k = \underset{\text{cost}}{A}\nu - \phi_0 \;\; \text{cost} \quad \text{e} \quad N_e \propto I \Rightarrow N_e \approx \frac{I}{h\nu}$$
3. $\nu > \nu_0$ EMISSIONE, $\nu < \nu_0$ NON C'E' EMISSIONE
2. ISTANTANEA

EINSTEIN IPOTIZZA CHE LA LUCE SIA COSTITUITA DA QUANTI CHE TRASPORTANO ENERGIA $h\nu$: URTANO CON GLI e^- E SONO ASSORBITI

↳ GLI e^- DI UN METALLO SONO LEGATI DA ENERGIA ϕ_0
SE ASSORBONO L'ENERGIA DI UN FOTONE $h\nu > \phi$ POSSONO USCIRE CON UNA CERTA E_k: OGNI FOTONE INTERAGISCE CON UN ELETTRONE

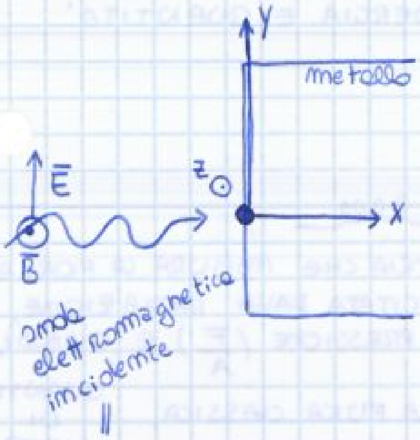
UN CAMPO E.M. SI PROPAGA TRASPORTANDO ENERGIA E ANCHE QDM

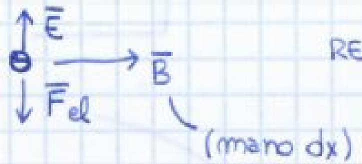
$$P = \frac{W}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

W: DENSITA' DI E DEL CAMPO

CAMPO E.M. QUANTIZZATO

3) PRESSIONE DI RADIAZIONE





RELAZIONE $|\overline{E}| = c\,|\overline{B}|$

EQUAZIONE DELL'ONDA: $\overline{E} = E_0 \sin(kx - \omega t) = \mathrm{Im}\left\{E_0\, e^{i(kx-\omega t)}\right\}$

COEFF. DELL'IMMAGINARIO

sotto una certa soglia non si origina effetto fotoelettrico

FORZA ELETTRICA F_{el}, ANTI // AL CAMPO $\overline{E}$, METTE IN OSCILLAZIONE GLI ELETTRONI DEL METALLO LUNGO L'ASSE y CON UNA CERTA $\overline{V} = b\overline{E}$:

$$\overline{F}_m = -e\,\overline{V} \times \overline{B}$$

$$|\overline{F}_m| = eVB = \frac{dp}{dt}$$

MODULO DELLA FORZA CHE PREME SUL METALLO: IL METALLO SUBISCE UNA VARIAZIONE DELLA QUANTITA' DI MOTO, PERCHE' SU DI ESSO AGISCE UNA FORZA (LEGGI DI NEWTON)

$$P_{elettrica} = F \cdot V = \text{LAVORO PER UNITA' DI TEMPO}$$

$$= \frac{d\mathcal{E}}{dt} = eEV$$

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= eVB \\ \frac{d\mathcal{E}}{dt} &= eEV\end{aligned}} \qquad \frac{dp}{d\mathcal{E}} = \frac{eVB}{eEV} = \frac{B}{E} = \frac{1}{c} \longrightarrow dp = \frac{d\mathcal{E}}{c}$$

UN'ONDA ELETTROMAGNETICA HA UNA QUANTITA' DI MOTO:

GLI ELETTRONI DEL METALLO RICEVONO ENERGIA, LAVORO, PERCHE' SI METTONO AD OSCILLARE → DA DOVE LA RICEVONO?

56

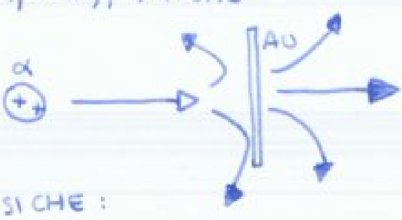
DAL CAMPO ELETTROMAGNETICO: OGNI UNITA' DI VOLUME DELL'ONDA, INCIDENDO SUL METALLO, GLI TRASFERISCE LA SUA ENERGIA $\frac{W}{c} = p$ CIOE' UGUALE ALLA QUANTITA' DI MOTO PER UNITA' DI VOLUME CHE IL METALLO RICEVE

MODELLO ATOMICO DI BOHR

1901 MODELLO "A PANETTONE" (Thompsom), FINCHE'

↓

ESPERIMENTO DI Rutherford



RISULTATO: UN CERTO NUM. DI PARTICELLE RIMBALZATO O DEVIATO CON ANGOLI VARIABILI

⇕ ?

ATTESE CLASSICHE:

α HA ENERGIA SUFFICIENTE ⟶ ATTRAVERSA LA LAMINA

ALTRIMENTI ↦ NE RESTA ALL' INTERNO

↓

MODELLO "A SISTEMA SOLARE" ($1/r$)

ma PROBLEMA INTERPRETAZIONI CLASSICHE: COLLASSO DI ELETTRONI SUL NUCLEO

1913 Bohr SPIEGA IL RISULTATO DI Rutherford SERVENDOSI DEI RISULTATI OTTENUTI DA Plank ED Eimsteim

⇓

IPOTESI AD HOC: ESISTONO ORBITE DISCRETIZZATE TALI PER CUI MAXWELL NON VALE: QUELLE PER CUI L E' MULTIPLO INTERO DI $\frac{h}{2\pi} = n\hbar$

$\hbar = \frac{h}{2\pi}$ $n = 1, 2, 3 \ldots$

$$L = \underbrace{\vec{r} \times m_e \vec{v}}_{\text{CLASSICA}} = n\frac{h}{2\pi}$$

ORBITE ELETTRONICHE STAZIONARIE

DALLA FISICA CLASSICA:

$$F_e = F_{centrip.} \Rightarrow \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

$$H = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

⟶ SE E' VERA, DEVE PERMETTERE DI RITROVARE I RISULTATI SPERIMENTALI PIU' RECENTI:

(1) DIM. ATOMO DEDOTTE DA Eimsteim DAL MOTO BROWNIANO $\sim 1\,Å$

(2) $\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$ $n < m = 1, 2$

↓

$R = 1{,}09 \cdot 10^7\, m^{-1}$ COSTANTE DI RYDBERG

⇓

$$v_n = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 n h}$$

$$r_n = \frac{\varepsilon_0 h^2}{m e^2 \pi} n^2$$ ⟶ SOSTITUENDO LE COSTANTI OTTENGO $\sim 0{,}45\,Å$ (1)

$$H_n = -\frac{1}{2} m \left(\frac{e^2}{2\varepsilon_0 n h}\right)^2$$

$$H_m - H_n = -\frac{1}{2}\frac{me^4}{4\varepsilon_0^2 m^2 h^2} + \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 n^2 h^2} = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$$

NELLA ZONA DI TRANSIZIONE VALE MAXWELL

↓

UN e^- CHE PERDE ENERGIA CADE SU UN'ORBITA INFERIORE: EMETTE UN'ONDA e.m.

SE EINSTEIN HA RAGIONE, L'ONDA HA ENERGIA $h\nu$ = DIFFERENZA TRA DUE LIVELLI ENERGETICI

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{me^4}{8\varepsilon^2 c h^3}\left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right] \longrightarrow R = 1{,}09 \cdot 10^7\, m^{-1} \quad (2)$$

1913

BOHR TENTA DI SPIEGARE IL RISULTATO DI RUTHERFORD SERVENDOSI DELLE NUOVE IDEE DI PLANK ED EINSTEIN

↓ CORPO NERO

↓ EFFETTO FOTOELETTRICO

(h) CIOE' SE LA COSTANTE CHE COMPARE IN ENTRAMBI GLI ESPERIMENTI FOSSE STATA DAVVERO UNIVERSALE ALLORA SAREBBE IN QUALCHE MODO COMPARSA

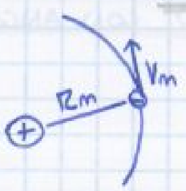
IN PIU' IN ENTRAMBI GLI ESPERIMENTI ERA STATA NECESSARIA UNA DISCRETIZZAZIONE

CI SONO ORBITE DISCRETIZZATE - PARTICOLARI - TALI PER CUI LE LEGGI DI EMISSIONI DI MAXWELL NON SONO VALIDE ?

↓

E SE E' COSI' : PER CHE VALORI DI R ?

TALI PER CUI IL MOMENTO ANGOLARE E' UN MULTIPLO INTERO DI h SU 2π, CIOE'



$$(L = r \times m_e V) \rightarrow \underbrace{\left(L = n \frac{h}{\lambda}\right)}_{\text{IPOTESI AD HOC}}$$

SE L'IPOTESI AD HOC E' VERA DOVREBBE PERMETTERE DI RITROVARE I RISULTATI SPERIMENTALI RISCONTRATI DI RECENTE

SUGLI ATOMI SI SAPEVA CHE:

1) DALLO STUDIO DEL MOTO BROWNIANO (...) EINSTEIN AVEVA DEDOTTO LE DIMENSIONI ATOMICHE, DELL'ORDINE DI $\sim 1\,\text{Å} = 10^{-10}\,m$

2) STRUTTURA PIU' SEMPLICE ⊕ ° CHE IN NATURA ESISTE COME H_2 :
CHIUSO IN UN BARATTOLO E SCALDATO, EMETTE SOLO SU ALCUNE LUNGHEZZE D'ONDA

$\rightarrow \lambda_{m,n}$ E SI TIENE CONTO DELLA SEGUENTE LEGGE EMPIRICA ALL'EPOCA DEDOTTA:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad m < n = 1,2\ldots$$

FORMULA FENOMENOLOGICA, OTTENUTA SPERIMENTALMENTE

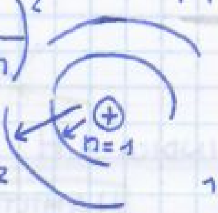
CIOE' CHE GLI ATOMI SCALDATI EMETTEVANO SU CERTE DEFINITE LUNGHEZZE D'ONDA, E IN PARTICOLARE H_2 SU LUNGHEZZE DESCRITTE DA TALE FORMULA

BOHR VUOLE SPIEGARE I DUE PUNTI O RITROVARE IN ESSI IL RISULTATO DI RUTHERFORD, A PARTIRE DALLE IPOTESI PRECEDENTI.

$$\begin{cases} v_n = \dfrac{e^2}{2\varepsilon_0 n h} \\ r_n = \dfrac{\varepsilon_0 h^2}{m e^2 \pi} n^2 \\ H_n = -\dfrac{1}{2} m \left(\dfrac{e^2}{2\varepsilon_0 n h}\right)^2 \end{cases}$$

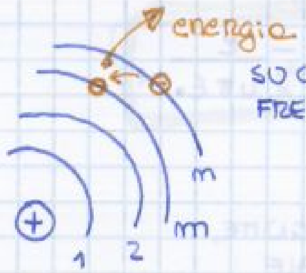
COSTANTE FORMULA PRECEDENTE
CALCOLATO PER H: → $R = 1{,}07 \cdot 10^7 \ m^{-1}$

↑r → ↑ORBITA → ↑ENERGIA CHE È DEVE AVERE PER ORBITARE QUI



SEGUE CHE:

1) L'ORBITA AD ENERGIA MINORE HA $n=1$ (POICHE' PER IPOTESI $n \in \mathbb{N}$) INTERO E POSITIVO
ED E' CALCOLABILE, PER ESEMPIO PER H, E SOSTITUENDO LE COSTANTI OTTENGO
$r \simeq 0{,}45$ Å → LA DIMENSIONE ATOMICA È ~ 1 Å, COME SI VOLEVA OTTENERE



con $n > m$
(AL CRESCERE DI r...)

2) UN e^- CHE E' SU n E PERDE ENERGIA CADE SU UN ORBITA INFERIORE m

NELLA ZONA DI TRANSIZIONE TRA n ED m SI TROVA IN UNO SPAZIO IN CUI MAXWELL VALE:
SCENDE → PERDE ENERGIA → EMETTE UN'ONDA ELETTROMAGNETICA
⇓
SE EINSTEIN HA RAGIONE EMETTE UN'ENERGIA PARI AD $h\nu$
CORRISPONDENTE ALLA DIFFERENZA ENERGETICA TRA I DUE LIVELLI: $H_n - H_m$

SI PUO' CALCOLARE:
$$H_n - H_m = -\frac{1}{2}\frac{m e^4}{4\varepsilon_0^2 n^2 h^2} + \frac{m e^4}{8\varepsilon_0^2 m^2 h^2}$$
$$H_n - H_m = \frac{m e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\left[\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right] = h\nu$$
↑ SE VALE EINSTEIN...

SAPENDO CHE $\lambda\nu = c \rightarrow h\nu = h\frac{c}{\lambda}$ POSSO SCRIVERE
$$\frac{1}{\lambda} = \frac{m e^4}{8\varepsilon_0^2 c h^3}\left[\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right]$$
↓ SONO COSTANTI UNIVERSALI
BOHR LA CALCOLA ED OTTIENE $R = 1{,}07 \cdot 10^7 \ m^{-1}$ / IL MODELLO DI BOHR E' CONFERMATO
OTTIENE LA PRECEDENTE FORMULA A PARTIRE DA UN MODELLO TEORICO

CALORE SPECIFICO

SISTEMA DI N ATOMI IN EQUILIBRIO TERMODINAMICO AD UNA CERTA T,
LEGAMI IDEALMENTE ELASTICI

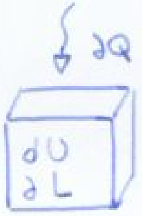
TERMODINAMICA CLASSICA (TEOREMA EQUIPARTIZIONE DI ENERGIA) →

ENERGIA MEDIA INTERNA

$$\langle U \rangle = \underbrace{3N}_{\text{NUM. ATOMI}} \left(\tfrac{1}{2}KT\right) + \underbrace{M}_{\text{NUM. OSCILLAZIONI}}\left(\tfrac{1}{2}KT\right)$$

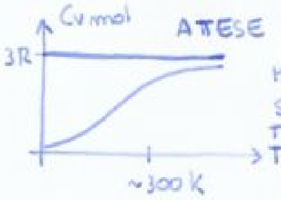
CAPACITA' TERMICA A VOL COSTANTE, C_V

$$C_V = \frac{d\langle U \rangle}{dT} = 3N\left(\tfrac{1}{2}K\right) + M\left(\tfrac{1}{2}K\right)$$



$$\partial Q = dU + \cancel{\partial L}$$ → CALORE SPECIFICO MOLARE $C_V = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{dU}{dT}$ ← TRASLAZIONE, ROTAZIONE, LEGAME (ELASTICO)

$$= \frac{d\,3RT}{dT} = 3R\frac{dT}{dT} = 3R$$



ATTESE CLASSICHE:

HA L'UNICO SISTEMA IN CUI SI RISCONTRA SPERIMENTALMENTE TALE ANDAMENTO E' IL GAS MONOATOMICO

IPOTESI: ENERGIA DELL' OSCILLATORE ARMONICO $E_{tot} = 3N_a \dfrac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$

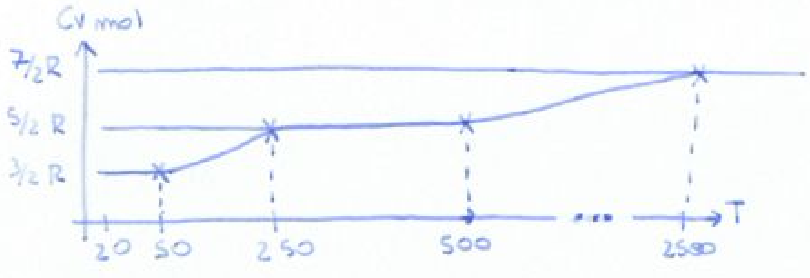
$$\frac{dE_{tot}}{dT} = \frac{d\mathcal{U}}{dT} = \dots = \frac{3N_a K_b\, e^{h\nu/K_bT}\left(\frac{h\nu}{K_bT}\right)}{\left(e^{h\nu/K_bT} - 1\right)^2}$$

$\to 0$ per $T \to 0$

$\to 3N_a K_b = 3R$ per $T \to \infty$

GAS: H_2 $\quad E_{tot} = N_a \cdot \overbrace{\tfrac{1}{2}k_bT \cdot m}^{\langle E \rangle \text{ MOLECOLA}} = N_a\left(\tfrac{7}{2}k_bT\right) = \mathcal{U}$ $\quad$ ($3+2+2$)

QUINDI $C_{V\,mol} = \dfrac{d\mathcal{U}}{dT} = \dfrac{d\left(N_a \frac{7}{2}k_bT\right)}{dT} = \frac{7}{2}k_bT N_a = \frac{7}{2}R$



HA ENERGIA SUFFICIENTE PER LA TRASLAZIONE

$\frac{1}{2}mv_{cm}^2$ $\quad n=3$

ROTAZIONE

$n = 3+2 = 5$

$\frac{1}{2}\frac{L^2}{I^2}$

VIBRAZIONE

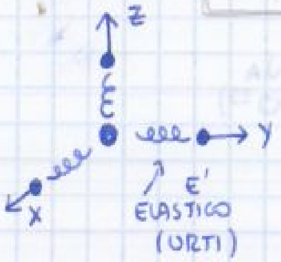
$n = 3+2+2 = 5$

$\ell h\nu$

"GRADI DI LIBERTA'": NUMERO DI TERMINI QUADRATICI CHE APPAIONO NELLA FORMULA DELL'EQ. DELL'ATOMO
(POSSIBILITA' DI UN ATOMO DI ESSERE ED AVERE ENERGIE)

$\Downarrow$

$$E_{ATOMO} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} K \Delta \ell^2 =$$



$$= \frac{1}{2} m \left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) + \frac{1}{2} K \left(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2\right)$$

I GRADI DI LIBERTA' DI UN ATOMO IN UN MATERIALE SOLIDO, BLOCCATO IN UN CRISTALLO SONO 6

AL CHE RISCRIVO LE FORMULE PRECEDENTI:

$$\boxed{\langle E \rangle_{ATOMO} = 6 \cdot \frac{1}{2} K_b T = 3 K_b T}$$

$$E_{TOT} = N_A \cdot \langle E \rangle_{ATOMO} = N_a \underbrace{3 K_b T}_{R}$$ PER UNA MOLE DI ATOMI

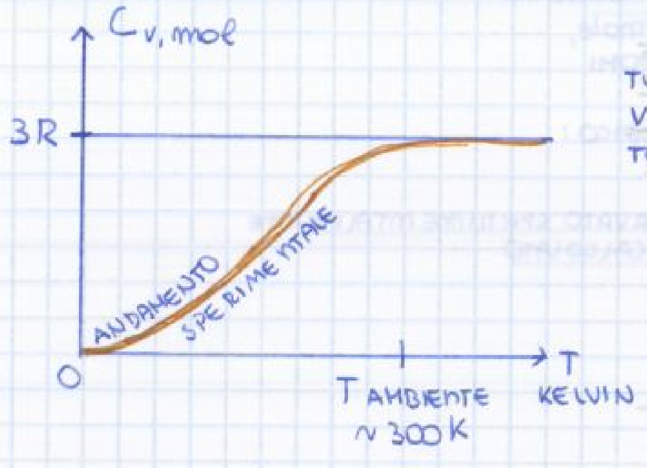
R DELLA LEGGE DEI GAS IDEALI

$U = 3RT$

SECONDO LA TEORIA CLASSICA

$$C_{v,mol} = \frac{dU}{dT} = \frac{d\,3RT}{dT} = 3R \frac{\cancel{dT}}{\cancel{dT}} = 3R$$

PER UNA MOLE



TUTTI GLI ATOMI DOVREBBERO AVERE LO STESSO VALORE DI C PER UNA QUALSIASI TEMPERATURA

$\Downarrow$

CIOE' DOVREBBERO RISPETTARE IL GRAFICO A SX (ANDAMENTO COSTANTE C = 3R)

MA

SPERIMENTALMENTE SI RISCONTRA BEN ALTRO, E SOLO PER ALTE T IL CALORE SPECIFICO DEI SOLIDI TENDE A 3R

L'UNICO SISTEMA IN CUI IL RISULTATO SPERIMENTALE COINCIDE CON QUELLO CLASSICO E' IL GAS MONOATOMICO

COME DETERMINARE TALE CURVA?

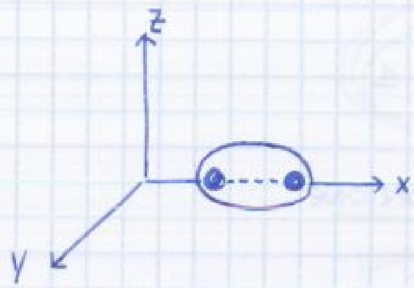
PER UN GAS:

$\{1\,mol\}$ H_2

TEORIA CLASSICA: E_{tot} DI 1 mol DI IDROGENO

$$E_{tot} = N_A \underbrace{\left(\frac{1}{2} K_b T \cdot m\right)}_{\langle E \rangle \text{ MOLECOLA}}$$

UNA MOLECOLA BIATOMICA (GAS) HA GRADI DI LIBERTA'



$$E = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_z \omega_z^2 + \frac{1}{2} I_y \omega_y^2 + \frac{1}{2} m V_{Rel}^2 + \frac{1}{2} K \Delta x^2$$

$v_{CM}^2 \rightarrow V_{CMx}^2 + V_{CMy}^2 + V_{CMz}^2$

AWICINAM / ALLONTANAM ATOMI TRA DI LORO

CI SONO 7 TERMINI ^2

PUO' TRASLARE 3
RUOTARE 2 ame y, z (non RISPETTO AD X, SI SUPPONE nullo IL MOMENTO DI INERZIA ESSENDO GLI ATOMI PUNTI FORMI) $I_x = 0$
VIBRARE 2

7

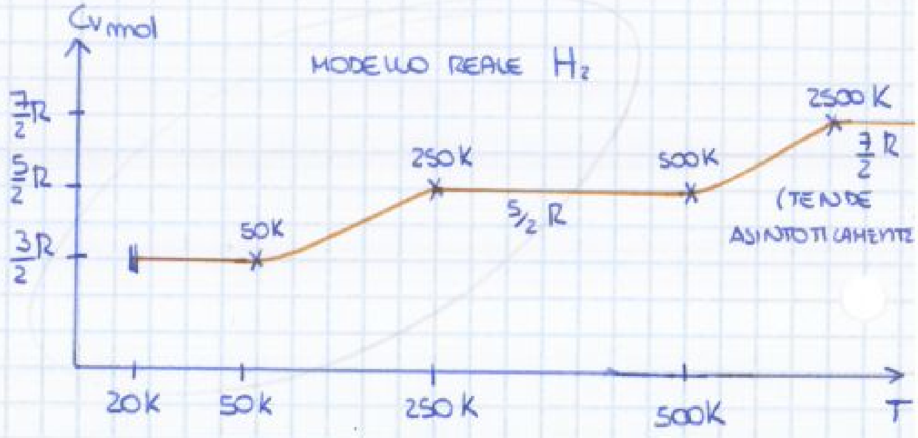
MOLECOLA RIGIDA → 5

MOLECOLA LIBERA DI OSCILLARE → 7

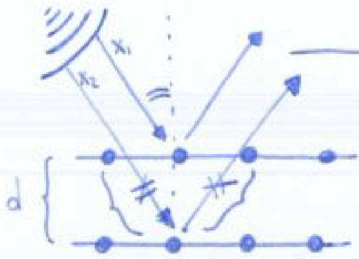
$$U = E_{tot} = N_A \left(\frac{7}{2} K_b T\right)$$

QUINDI $\left(C_{v,mol}\right)_{\text{CLASSICO}} = \frac{d\left(\frac{7}{2} K_b T N_A\right)}{dT} = \frac{7}{2} \underbrace{K_b N_A}_{R} = \frac{7}{2} R$

LIQUEFAZIONE DELL' H



1) DIFFRAZIONE DI RAGGI X DA CRISTALLI

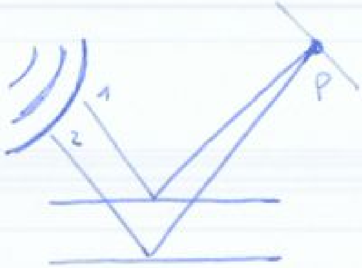


$x_2 - x_1 = 2d \sin\vartheta$

$\frac{\phi}{2} = \frac{k\, 2d \sin\vartheta}{2}$

→ POICHE' L'ONDA E' SFERICA I RAGGI NON SONO ESATTAMENTE //:

A GRANDE DISTANZA SI POSSONO INCONTRARE IN P



$$\bar{E}(P) = E_1(x_1, t) + E_2(x_2, P) =$$

$$= E_0 e^{i(kx_1 - \omega t)} + E_0 e^{i(kx_2 - \omega t)} =$$

RACCOLGO UNO DEI DUE

$$= E_0 e^{i(kx_1 - \omega t)} \left[1 + e^{ik(x_2 - x_1)}\right] =$$

$k(x_2 - x_1) = \phi$

$$= E_0 e^{i(kx_1 - \omega t)} \left(1 + e^{i\phi}\right) =$$

$$= E_0 e^{i(kx_1 - \omega t)} \left[\underbrace{e^{i\frac{\phi}{2}} e^{-i\frac{\phi}{2}}}_{=1} + e^{i\frac{\phi}{2}} e^{i\frac{\phi}{2}}\right] =$$

$$= E_0 e^{i(kx_1 - \omega t)} e^{i\frac{\phi}{2}} \left[\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \cancel{i\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)} + \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \cancel{i\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)}\right]$$

OTTENGO UN'ESPRESSIONE DEL CAMPO $\bar{E}$ IN P, IN NOTAZIONE COMPLESSA

$$\bar{E}(P) = 2E_0 \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cdot e^{i(kx_1 - \omega t) + \frac{\phi}{2}}$$

↓

ENERGIA IN P: $I(P) \propto \bar{E}^2 \cong \underbrace{4E_0^2 \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}\ \cancel{\sin^2\left(kx_1 - \omega t\right) + \frac{\phi}{2}}$

$$I(P) = 4E_0^2 \cos^2\left(\frac{k(x_2 - x_1)}{2}\right)$$

$$= 4E_0^2 \cos^2(kd\sin\vartheta)$$

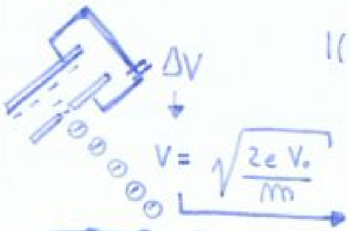
VARIA TRA 0 E 1

$I(P) = 0$, $\frac{2\pi}{\lambda} \sin\vartheta = (2m+1)\frac{\pi}{2}$ DISTR.

$I(P) = 1$, $\frac{2\pi}{\lambda} \sin\vartheta = m\pi$ CONTR.

⇓

$$\boxed{2d\sin\vartheta = m\lambda \quad m = 1, 2 \ldots}$$ LEGGE DI BRAGG



$V = \sqrt{\frac{2eV_0}{m}}$

$p = mv = m\sqrt{\frac{2eV}{m}}$

DOPO AVER STUDIATO L'INTERFERENZA DELLA LUCE, STUDIO QUELLA DI UN FASCIO DI ELETTRONI

2) $\boxed{\text{DIFFRAZIONE DI ELETTRONI}}$

RISULTATO CLASSICO ATTESO: L'ELETTRONE RIMBALZA E RAGGIUNGE LO SCHERMO, UNIFORMEMENTE IMPRESSIONATO AL VARIARE DI ϑ

RISULTATO SPERIMENTALE

INTERFERENZA IN ACCORDO CON LA LEGGE DI BRAGG

⇓

DA EVIDENZE SPERIMENTALI OTTENGO $p = \frac{h}{\lambda}$

$$= E_0 \, e^{i(kx_1 - \omega t)} \left[1 + e^{i\phi} \right] =$$

$$\|$$

TALE ESPRESSIONE $\left[\underbrace{e^{+i\frac{\phi}{2}} \, e^{-i\frac{\phi}{2}}}_{1} + e^{i\frac{\phi}{2}} e^{i\frac{\phi}{2}} \right]$

TALE ESPRESSIONE PERMETTE DI ISOLARE IL TERMINE $e^{i\phi/2}$ E SUCCESSIVAMENTE APPLICARE LA TRIGONOMETRIA

$$e^{i\frac{\phi}{2}} \left[e^{-i\frac{\phi}{2}} + e^{i\frac{\phi}{2}} \right] =$$

$$= e^{i\frac{\phi}{2}} \left[\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \cancel{i\sin\left(+\frac{\phi}{2}\right)} + \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \cancel{i\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)} \right]$$

$$= e^{i\phi/2} \left[\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \cos\frac{\phi}{2} \right]$$

$$\downarrow$$

$$E(P) = E_0 \, 2\cos\frac{\phi}{2} \left[e^{i(kx_1 - \omega t)} \cdot e^{i\frac{\phi}{2}} \right]$$ CAMPO ELETTRICO IN P, NOTAZIONE COMPLESSA

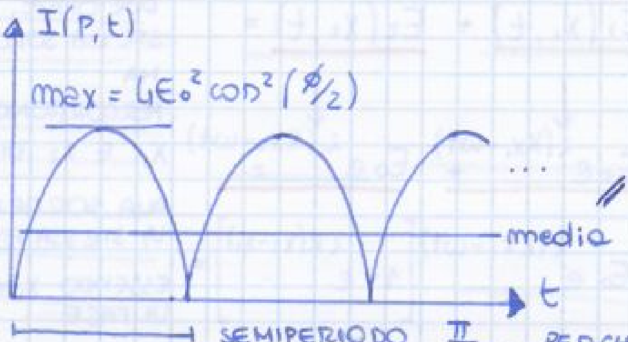
$$E(P) = 2E_0 \cos\frac{\phi}{2} \left(e^{i\left[(kx_1 - \omega t) + \frac{\phi}{2}\right]} \right)$$ CAMPO ELETTRICO IN P, NOTAZIONE REALE

$\downarrow$

qual è l'energia in P?

PER "QUANTIFICARE" UNA GRANDEZZA - UN'ONDA - NE VALUTO L'INTENSITA': L'INTENSITA' DELL'ONDA E' PROPORZIONALE AL QUADRATO DEL CAMPO ELETTRICO NEL PUNTO P:

$$I(P) \propto E^2 = 4E_0^2 \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \cdot \sin^2\left((kx_1 - \omega t) + \frac{\phi}{2}\right)$$



SI ACCENDE E SPEGNE AD INTERVALLI VELOCI, MOLTO PIU' DELLA VELOCITA' DI ACQUISIZIONE OTTICA → non si percepisce!
L'OCCHIO MISURA UNA MEDIA SU PIU' PERIODI: ANALITICAMENTE, E' LA MISURA DELLA MEDIA DELLA SINUSOIDE.

SEMIPERIODO $\frac{\pi}{\omega}$, PERCHE'

E' IL PERIODO DELL'ONDA

(IMMAGINARE IL GRAFICO DELLA FUNZIONE NON AL QUADRATO)

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \frac{T}{2} = \frac{\cancel{2}\pi}{\omega} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}$$

AL VARIARE DELL'ANGOLO DI INCIDENZA ϑ $\rightarrow$ $\cos^2(\ )$ VARIA TRA 0 ED 1

DUE ONDE IN FASE DANNO ORIGINE IN P AD UNA FIGURA DI INTERFERENZA CHE DIPENDE DALLO SPAZIO PERCORSO DA CIASCUNA ONDA $\rightarrow$ ZONE ILLUMINATE E FRANGE BUIE

BUIO: $I(P) = 0 \rightarrow \cos^2(\text{ARG}) = 0 \rightarrow \text{ARG}: \frac{2\pi}{\lambda} \sin\vartheta = (2n+1)$

VALE MULTIPLI DISPARI DI $\frac{\pi}{2}$

LUCE: $I(P) = \max \rightarrow \cos^2(\text{ARG}) = 1 \rightarrow \text{ARG} = \frac{2\pi}{\lambda} \sin\vartheta = n\pi$

VALE MULTIPLI INTERI DI π

ILLUMINATE = RAGGIUNTE DAL MASSIMO DELLA RADIAZIONE

MA

NON IMPLICA CHE SIA VISIBILE

$\frac{2\cancel{\pi}}{\lambda} \sin\vartheta = \cancel{\pi} n$ con $n = 0, 1, 2 \ldots \in \mathbb{N}$

QUINDI

FISSATI ONDA DI RADIAZIONE E MATERIALE:
(DISTANZA INTERATOMICA)

POSSO DETERMINARE λ DI UNA RADIAZIONE

$$\boxed{2d \sin\vartheta = n\lambda \quad n = 0, 1, 2 \ldots}$$

LEGGE DI BRAGG

TRA I CHIMICI E' USATA PER MISURARE LA DISTANZA TRA GLI ATOMI DI UN CRISTALLO

" E QUESTO DIMOSTRA CHE I CHIMICI NON HANNO MAI CAPITO LA FISICA "

$$\sin\vartheta = n \frac{\lambda}{d} \cdot \frac{1}{2}$$

AL VARIARE DI n, RITORNA SULLO SCHERMO LE ZONE ILLUMINATE

$\llcorner$ es. ≤ 1
per $n = 1$ $\lambda = 2d$

ELEMENTI DI PROBABILITÁ

DEF. VARIABILE CASUALE "RANDOM" : PARAMETRO IL CUI EVENTO (?) NON E' DESCRIVIBILE IN MODO CERTO

DEF. EVENTO : ESITO DELLA DETERMINAZIONE DI UNA VARIABILE CASUALE

⇓

IN FISICA : EVENTO = ESPERIMENTO ⟶ GRANDEZZA FISICA determinata sperimentalmente ≡ VARIABILE CASUALE

ESEMPIO : determinazione di una lunghezza (→ RIGHELLO)

SI FA UN NUMERO N DI MISURE "GRANDE"
$j = 1, 2 \dots N$

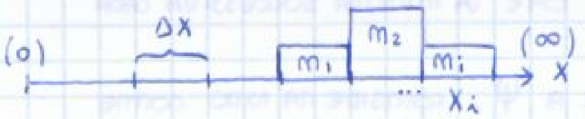
SI OTTIENE UN RISULTATO x_j AD OGNI MISURA FATTA,
E TALE MISURA E' DELL'ORDINE DI PRECISIONE DELLO STRUMENTO (→ millimetro)

come ottenere quello che i teorici chiamano valore atteso?
= VALOR MEDIO

DEF. VALORE ATTESO = VALOR MEDIO = $\boxed{\langle x \rangle = \sum_{j=1}^{N} \frac{x_j}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} x_j$

SOMMA DEL RISULTATO DI TUTTE LE MISURE FRATTO IL NUMERO DI MISURE COMPIUTE, N

TALE DEF. E' AFFINABILE, SEGUE LA DEF. DI MEDIA SPERIMENTALE :



TUTTE LE MISURE CADONO IN UNO DEGLI INTERVALLI DI MISURA Δx: CONSIDERO L'ESISTENZA DI UN MINIMO E DI UN MASSIMO.

Δx RAPPRESENTA LA MINIMA INCERTEZZA SPERIMENTALE CHE POSSO OTTENERE

OGNI TACCA Δx DOVREBBE SOMMA DEI TRE CONTRIBUTI ALL'INDETERMINAZIONE :

1) STRUMENTO DI MISURA

2) CASO

3) ERRORE SISTEMATICO

MA Δx RAPPRESENTA LA PRECISIONE IMPOSTA DAL SOLO STRUMENTO DI MISURA, PER SEMPLICITA', CIOE' L'ORDINE DI GRANDEZZA DELL'UNITA' DI MISURA DI X

SECONDO LA TEORIA APPENA SVILUPPATA:
POSIZIONE MEDIA DELLA PARTICELLA DESCRITTA DALLA FUNZIONE D'ONDA φ

$$\langle \bar{r} \rangle = \int_{\Omega} \bar{r}\, |\varphi|^2\, dV \qquad \int_{\Omega} |\varphi|^2 dV = 1$$

Ω VOLUME IN CUI E' CONFINATA LA PARTICELLA (stanza piena di particelle di gas)

E' L'EQUIVALENTE DI $f(x)\,dx$ INTEGRATA TRA I VALORI DI x_{min} E x_{max}

PROPRIETÀ DATE DALL'ESPRESSIONE PROBABILISTICA DELL'ONDA:

1) $\varphi(\bar{r}, t) \longrightarrow \int_{\Omega} |\varphi|^2\, dV = 1$ — DEVE ESSERE INTEGRABILE

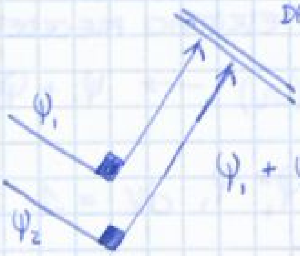
$r \in \Omega \rightarrow \varphi_{max}$

$r \notin \Omega \rightarrow \varphi = 0$ E' L'EVENTO IMPOSSIBILE

2) $\varphi \in \underbrace{\mathcal{L}^2(\Omega)}$

INSIEME DELLE FUNZIONI A QUADRATO SOMMABILI
||
LE FUNZIONI CHE HANNO TALE PROPRIETA' DANNO UN $\int$ FINITO SE INTEGRATE SUL VOLUME Ω

ESEMPI:



$\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi$

QUINDI: SE $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}^2(\Omega) \longrightarrow \varphi_1 + \varphi_2 \in \mathcal{L}^2(\Omega)$

3) $\int_{\Omega} |\varphi|^2\, dV = \int_{\Omega} \varphi^* \varphi\, dV = 1$

PROPRIETA' DEI $\mathbb{C}$:

SIA $a \in \mathbb{C} \mid a = a_1 + i a_2$;

a^* COMPLESSO CONIUGATO DI a SE $a^* = a_1 - i a_2$

$\downarrow$

PROPRIETA': $|a|^2 = a^* a$

QUINDI POSSO RISCRIVERE IL MODULO DI φ AL QUADRATO COME $\varphi^* \varphi$

AGGIUNGO CHE:

$\int \varphi_1^* \varphi_2\, dV$ NON E' PIÙ DETTO CHE RESTITUISCA UN REALE

SEGUE CHE POSSO DEFINIRE UNO SPAZIO VETTORIALE

09

Elementi di probabilità

Argomenti:
- Introduzione
- Elementi di teoria delle probabilità
  - Variabili deterministiche e casuali
  - Istogrammi
  - Funzione Distribuzione di probabilità
  - Funzione di Distribuzione cumulativa
  - Modello Gaussiano

AA 2011/12

Definizioni

DEF

Si è così arrivati alla definizione di ***Variabile casuale (Random variable)***: un parametro il cui evento non è descrivibile mediante modelli deterministici, quindi non direttamente prevedibile: un parametro che può essere previsto solo in forma statistica attraverso una ***distribuzione di probabilità***.

Le grandezze misurate sono considerate come *variabili casuali (random)*.

Matematicamente, una variabile random è una funzione valutata numericamente, mediante le tecniche probabilistiche, per una data popolazione elaborando le informazioni ottenute con una collezione di valutazioni (campione)

AA 2011/12

Introduzione

Caratteristiche di *casualità*, cioè di **assoluta imprevedibilità**, possono essere osservate praticamente in qualsiasi esperimento

Ripetizioni di misure di una grandezza possono fornire **risultati leggermente diversi,** anche quando immediate

Questa *"casualità"* è dovuta a **variabili ambientali non controllate** o **non controllabili**, oppure a una mancanza di precisione nel processo di misura (sempre riconducibili ad elementi non controllati/controllabili)

In alcune attività la casualità (meglio dire le variabili non controllate) sono dominanti e diventa difficile individuare con la semplice ispezione dei dati un andamento

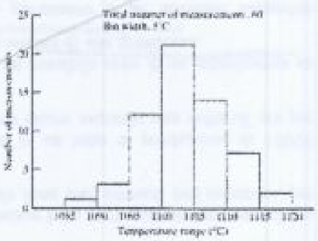
Probabilità e Statistica ci aiuteranno ad individuare questo andamento sommerso da dati confusi

La teoria delle probabilità ci permetterà di costruire modelli dei fenomeni casuali utili anche al di fuori della sperimentazione

AA 2011/12

TABLE 6.1 Results of 60 Temperature Measurements in a Duct

Number of readings	Temperature (°C)
1	1094
1	1092
2	1094
4	1095
8	1096
6	1100
12	1104
4	1105
5	1107
5	1108
4	1110
3	1112
2	1115



AA 2011/12

•1

•2

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 128

La deviazione standard delle misure è una valida indicazione di quanto disperse sono le misure rispetto al valore medio

$$\text{Misura} = \bar{x} \pm S_x$$

Viene utilizzato per descrivere la dispersione di una grandezza (in relazione con l'incertezza per le misure) tipicamente con l'associazione di una valutazione del livello di confidenza all'intervallo di variabilità che definisce.

Questa definizione ammette un significato probabilistico, quello di avere il 68% circa di probabilità che una successiva misura rientri nell'intervallo così definito

MA SOLO SE la grandezza di riferimento possiede alcune caratteristiche.

In generale (in assenza di errori sistematici) più misure vengono effettuate più accurata è la stima del valor medio.

Ma non è sufficiente effettuare più misure per essere certi di migliorare la qualità del dato: si riducono solo gli errori casuali

Occorre capire se e quando è conveniente aumentare il numero di misure piuttosto che intervenire su altri elementi della procedura di misura

Media e deviazione standard sono valori dipendenti dai dati misurati: diverse serie di misure daranno diversi valori medi e diverse deviazioni standard.

I motivi di "differenze" non sono prevedibili: necessità di tecniche oggettive di analisi

Cominciamo da qualche elemento di ***probabilità***

Variabili Deterministiche e Casuali

Variabili Deterministiche (prevedibili) e Casuali (non prevedibili).

Una grandezza il cui valore è prevedibile e ripetibile, quindi descrivibile mediante modelli deterministici, viene classificata come variabile Deterministica

Una grandezza che non rientri in questa categoria viene classificata come Casuale ed è caratterizzabile in termini di comportamento piuttosto che di un valore

Le grandezze misurate sono considerate come *variabili casuali (random)*.

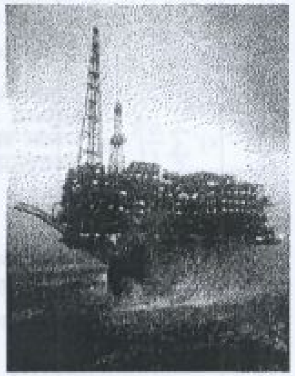
Una variabile casuale può essere continua (es. La vita di una lampadina o la misura della velocità) o discreta (es. i risultati di un lancio di dadi o l'esito positivo/negativo di un controllo di qualità

Come costruire le informazioni

Una variabile casuale non è prevedibile. Esempi tipici: intensità della turbolenza atmosferica, altezza delle onde

Ammettiamo di sapere come determinare le forze su di una struttura off-shore a seguito di ondate di altezza nota: come prevedere l'altezza in maniera ragionevole?

Ci servono modelli che forniscano dati "ragionevoli", cioè "probabili" anche se NON il valore specifico di un evento



"Misurare" e "Elaborare"

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 128

Gli istogrammi

Per costruire un istogramma:

- si osserva il fenomeno acquisendo l'informazione numerica
- si divide il campo di osservazione in intervalli
- per ognuno si contano le occorrenze/eventi (per segnali continui si misura il tempo di permanenza del segnale nell'intervallo)
- per ogni intervallo si traccia un segmento di lunghezza pari al numero di occorrenze (se si utilizza un rettangolo si deve ricordare che la base non ha significato, per es. non è pari all'intervallo)

Per la determinazione del numero di intervalli si può utilizzare la formula (N>40; N < 40 istogramma non significativo)

$$N_{Bins} = 1.87(N-1)^{0.40} + 1$$

Il numero di eventi in un intervallo deve essere significativo (≥ 5) altrimenti la distribuzione risulterebbe dipendente dai dati disponibili

In caso contrario è meglio diminuire il numero di intervalli

AA 2011/12

Gli istogrammi

Il numero di eventi per ogni intervallo non è particolarmente significativo

Normalizzando il numero di occorrenze con il numero di misure totali si esprimono i dati in termini di ***frequenza relativa***

$$p_i = \frac{n_i}{N}$$

n_i possibilità su N che un nuovo dato cada nell'intervallo i-esimo:

Definiamo la **probabilità** come **quantificazione numerica della possibilità di un evento**

L'istogramma coincide con la probabilità di effettuare una particolare osservazione $\quad P(x_i \le x \le x_{i+1}) = \frac{n_i}{N}$

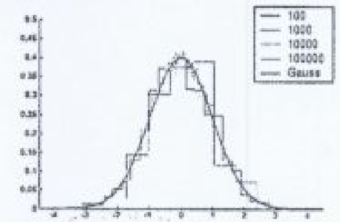
La somma delle frequenze relative fornisce la probabilità per un intervallo più ampio: $\quad P(x_i \le x \le x_{j+1}) = \sum_{k=i}^{j} \frac{n_k}{N}$

AA 2011/12

Gli istogrammi

All'aumentare del numero di dati è ragionevole aumentare il numero di intervalli risolvendo meglio il campo di variabilità

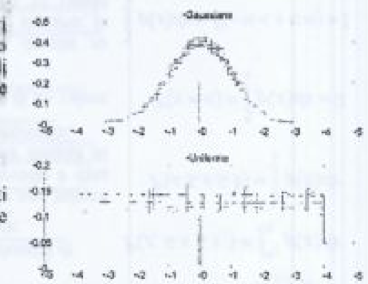
La rappresentazione migliora tendendo ad una funzione apparentemente continua



Rimane l'arbitrarietà legata al numero di valori e di intervalli

AA 2011/12

Un esperimento: ripetizione costruzione istogramma



Diverse serie di dati relativi allo stesso processo daranno distribuzioni di probabilità leggermente diversi

20 serie di 10000 dati

Per ciascuna riportati anche valore medio e deviazione standard

Osservazione: Media e DevStd della serie sono molto STABILI

Una funzione di questi dati consentirebbe di costruire un **modello matematico probabilistico** della grandezza casuale

AA 2011/12

·9 ·10

Definizione di probabilità: caso discreto

Probabilità (Probability). E' un valore numerico che esprime la stima della possibilità di occorrenza di un determinato evento, tra tutti quelli possibili espressi da un numero finito

Quindi è il numero che esprime la verosimiglianza dell'occorrenza di un evento relativamente a tutte le possibilità dello spazio relativo.

La probabilità (A) di un evento **discreto** è ottenuta dividendo il numero di evenienze del tipo di interesse (m), o esiti positivi, per il numero totale di soluzioni possibili (n), cioè dei possibili esiti.

Probabilità dell'evento A=m/n

Es. c'è il 50% di probabilità che il lancio di una moneta dia testa.

Es. se lanciamo due dadi la probabilità di ottenere un doppio 1 è 1/36 in quanto c'è una sola possibilità dell'esito voluto a fronte di 36 possibili eventi (6 indipendenti per ciascun dado)

Definizione di probabilità: caso continuo

Probabilità (Probability). E' un valore numerico che esprime la stima della possibilità di occorrenza di un valore della funzione compreso tra due estremi (l'evento è quindi espresso in relazione ad un intervallo)

Definizione di evento $(a \le x \le b)$

Quindi è il numero che esprime la verosimiglianza dell'occorrenza di un evento relativamente a tutte le possibilità dello spazio relativo ($\pm\infty$) cioè ad un valore unitario

$$\frac{P(a \le x \le b)}{P(-\infty \le x \le +\infty)} = \frac{P(a \le x \le b)}{1} = P(a \le x \le b)$$

La probabilità di una grandezza casuale continua è ottenuta integrando la sua densità di probabilità sull'intervallo di interesse:

Probabilità dell'evento $P(a \le x \le b) = \int_a^b p(x)dx$

Dalla Densità di probabilità a parametri sintetici

Attraverso la sua **funzione di densità di probabilità** possiamo **prevedere i valori di una grandezza**, non soltanto la probabilità che un certo evento avvenga

L'integrale della funzione di densità di probabilità $p(x)$ della grandezza x pesata per la grandezza stessa ne fornisce il ***valore atteso*** (*expected value*) (in alcuni casi coincide con il valore più probabile)

Momento di ordine 1 $E(x) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x\, p(x)\, dx$

Analogamente la sua varianza viene ottenuta integrando la densità di probabilità pesata per il quadrato della distanza tra la variabile x e il suo valore atteso:

Momento di ordine 2 $V = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2\, p(x)\, dx$

Scriviamo l'espressione del valore atteso utilizzando le approssimazioni e i dati utilizzati per costruire un istogramma, ricordando che:

- $p(x)$ costante in un intervallo $p(x) = p_i$ per $x_i \le x \le x_{i+1}$
- la definizione di frequenza relativa $p_i = \frac{f_i}{\Delta x} = \frac{n_i}{N \Delta x}$

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x\, p(x)\, dx \approx \sum_{i=1}^{M} \int_{x_i}^{x_{i+1}} x\, p_i\, dx = \sum_{i=1}^{M} p_i \left.\frac{x^2}{2}\right|_{x_i}^{x_{i+1}} = \sum_{i=1}^{M} p_i \frac{x_{i+1}^2 - x_i^2}{2} =$$

$$\sum_{i=1}^{M} p_i \frac{x_{i+1} + x_i}{2}(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=1}^{M} p_i \overline{x}_i \Delta x =$$

$$\sum_{i=1}^{M} f_i \overline{x}_i = \sum_{i=1}^{M} \frac{n_i}{N} \overline{x}_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} x_j = \overline{x}$$

Quindi il valor medio di una serie è un'approssimazione del valore atteso della grandezza casuale che ha prodotto i dati

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 128

SE NON CI SONO ERRORI NEI SEI ESPERIMENTI
SE LE INTERPRETAZIONI SONO CORRETTE

$\Downarrow$

PRINCIPIO DI DE BROGLIE 1924

ONDA $\longleftrightarrow$ PARTICELLA

$\nu \qquad \nu h = E$

$\lambda \qquad h/\lambda = p$

$\psi(\bar{r},t) \qquad \bar{r}(t)$

EQ. DIFFERENZIALE (?) — EQ. DIFFERENZIALE DI CUI $\bar{r}(t)$ É SOL

$\omega = 2\pi\nu$

$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \lambda\nu = v_F$

$\Downarrow$

DALL'ESPERIMENTO DI DIFFRAZIONE ONDE E.M. ED ELETTRONI HAN LA STESSA DESCRIZIONE MATEMATICA DAL PUNTO DI VISTA ONDULATO

$$\psi(r,t) = A_0 e^{i(kx - \omega t)}$$

DESCRIVE UN FASCIO DI ELETTRONI IN DIREZIONE X: E' SOL DELLA SEGUENTE EQ. DIFFERENZIALE

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v_F^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \overset{\downarrow}{=} \frac{1}{v_F^2}(-\omega^2\psi) = -\left(\frac{\omega^2}{v_F^2}\right)\psi =$$

SI SOSTITUISCE $\psi(\bar{r},t)$ NELL'EQ:

$\hookrightarrow \frac{\partial \psi}{\partial t} = (-i\omega) A_0 e^{i(kx-\omega t)} = -i\omega$

$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = (-i\omega)^2 \psi = -\omega^2\psi$

$$= -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \psi = -\left(\frac{2\pi}{h}\frac{h}{\lambda}\right)^2 \psi \overset{\downarrow}{=} -\frac{p^2}{\hbar^2}\psi =$$

$\hbar = \frac{h}{2\pi}$

$$= -\frac{m^2 v^2}{\hbar^2}\psi = -\frac{m}{\hbar^2}(mv^2)\psi = -\frac{2m}{\hbar^2}T\psi =$$

$p = mv$ PER MASSE NON PUNTIFORM (1

EN. CINETICA = EN. HAMILTONIANA − EPOT

$\left(\frac{1}{2}mv^2 =\right) T = H - V$

$\downarrow$ E

ESPLICITANDO: $E = \frac{p^2}{2m} + V$

VALE PER $v \ll c$ (2)

$$= -\frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\psi$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{2m}{\hbar^2}(E-V)\psi \longrightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V\psi = E\psi$$

SI CALCOLA $\frac{\partial \psi(\bar{r},t)}{\partial t} = -i\omega\psi = -i2\pi\nu\left(\frac{h}{h}\right)\psi = -i\left(\frac{2\pi}{h}\right)(\nu h)\psi = -\frac{i}{\hbar}E\psi$

DA CUI $E\psi = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi(\bar{r},t)}{\partial t} = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$ CHE SI SOSTITUISCE OTTENENDO

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(\bar{r},t)}{\partial x^2} + V(\bar{r})\psi(\bar{r},t) = i\hbar\frac{\partial\psi(\bar{r},t)}{\partial t}$$

SE m PUNTIFORME (1)
$\leftarrow$ SE $v \ll c$ (2)

$\|$

GENERALIZZABILE ALLE TRE DIMENSIONI

OPERATORE LAPLACIANO $\Delta = \bar{\nabla}\cdot\bar{\nabla}$

$\|$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) + V\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

EQUAZIONE DI SCHRODINGER 1925

LA PROBABILITA' NON E' UNA GRANDEZZA FISICA DIMENSIONATA CHE SI PROPAGA NELLO SPAZIO

RINUNCIA AL CONCETTO DI TRAIETTORIA CLASSICA: NOTE LE CONDIZIONI INIZIALI E LE FORZE AGENTI SUL SISTEMA, NON SEGUE CERTEZZA SULLA TRAIETTORIA

RINUNCIA AL DETERMINISMO CLASSICO

ONDA

• PARTICELLA PUNTIFORME

$\nu h = E$

$h/\lambda = p$

DE BROGLIE → SONO VERE SEMPRE:

PRINCIPIO DI DE BROGLIE

1924

$E = h\nu$

$p = h/\lambda$

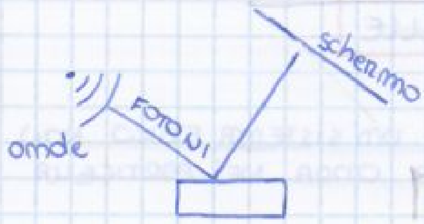
LA SCARSA CONOSCENZA DI ψ E DELL'EQ. DIFFERENZIALE, DIFFICILMENTE DESUMIBILI, BLOCCO' DE BROGLIE A TALE PRINCIPIO;

↓

EQUAZIONE DI SCHRODINGER

1926 Schrodinger

PARTENZA DA UN CASO PARTICOLARE E GENERALIZZAZIONE (COME LA IV DI MAXWELL)



DALL'ESPERIMENTO DI DIFFRAZIONE, IN CUI SOLO SCHERMO VERIFICO LA PRESENZA DI UN FENOMENO DI INTERFERENZA:

$$\boxed{\bar{E}(x,t) = \bar{E}_0\, e^{i(kx-\omega t)}}$$

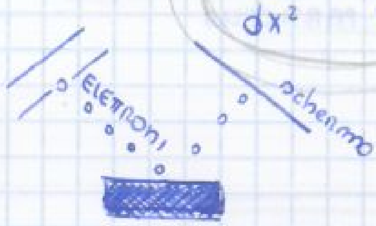
SI E' DATA UNA FORMA AD $\bar{E}$, COERENTE CON LE EQ. DI MAXWELL

TALE EQ. D'ONDA E' SOLUZIONE DI UN'EQ. DIFFERENZIALE:

$$\frac{dE^2}{dx^2} = \frac{1}{v^2}\frac{dE}{dt^2}$$

INTERFERENZA PRODOTTA DA RAGGI X QUANDO INCONTRANO UN CRISTALLO:

ESPERIMENTO DI CUI SONO NOTI I PUNTI DI PARTENZA E I RISULTATI



ANALOGAMENTE NEL CASO DEGLI ELETTRONI.

⇓

LA FORMA ANALITICA DELL'ONDA CHE RAPP. GLI e^- DEVE ESSERE LA STESSA DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO:

CIOE' NECESSARIAMENTE DEVE ESSERE $\psi(x,t) = A_0\, e^{i(kx-\omega t)}$

C'E' UNA GRANDE DIFFERENZA TRA ELETTRONE E CAMPO ELETTROMAGNETICO: (FOTONE)

SI ERA CONVINTI CHE IL FOTONE NON AVESSE MASSA

UN CAMPO ELETTRO-MAGNETICO HA VELOCITA' LIMITE C: UN FOTONE SI MUOVE COME IL CAMPO ELETTROMAGNETICO (RELATIVITA') ⇒ UN FOTONE NON PUO' FERMARSI

↓

UN FOTONE FERMO NON ESISTE: DA FERMO HA MASSA A RIPOSO NULLA

≠

GLI e^- HANNO MASSA, ANCHE A RIPOSO

SEGUONO PASSAGGI MATEMATICI:
CONSIDERO L'e^- UNA MASSA PUNTIFORME:

LA QDM E' LEGATA ALL'ENERGIA CINETICA $\longrightarrow$ $\boxed{T = \frac{p^2}{2m}}$

E DALLA MECCANICA en. tot = en. cinetica + en. potenziale

$$\boxed{\underset{H}{E} = T + V}$$

esplicitando

$$E = \frac{p^2}{2m} + V$$

DA CUI POSSO RICAVARE p^2, CHE VALE:

$$p^2 = 2m(E - V)$$

CHE SOSTITUISCO NELL'EQ CHE AVEVO OTTENUTO

$$\frac{h}{2\pi} = \hbar$$

$$-\left(\frac{2\pi}{h}\right)^2 p^2 \cdot \psi = \frac{d^2\psi}{dx^2}$$

$$-\frac{1}{\hbar^2} p^2 \psi = \boxed{\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{1}{\hbar} 2m(E-V)\,\psi}$$

E' LA CONCLUSIONE A CUI ARRIVA SCHROEDINGER.

VISTA COSÌ E' UNA FUNZIONE DI ONDA CHE DIPENDE DALLO SPAZIO E NON DAL TEMPO...

SI RISCRIVE

$$E\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V\psi$$

SI STUDIAMO ELETTRONI CHE SI COMPORTANO COME ONDE;
SI ERA DERIVATA L'EQ:

$$\boxed{\frac{d\psi}{dt} = -i\omega\psi = -i\,2\pi\nu\frac{h}{h}}\,\psi =$$

MOLTIPLICO E DIVIDO PER h

$$= -i\frac{2\pi}{h}E\psi$$

SE E' VERA L'IPOTESI DI DE BROGLIE

DA CUI RICAVO $E\psi$ PER SOSTITUIRLA:

$$\frac{d\omega}{dt} = -i\frac{2\pi}{h}E\psi$$

$$E\psi = -\frac{d\psi}{dt}\frac{\hbar}{i}\left(\frac{i}{i}\right) = -\frac{d\psi}{dt}\hbar i$$

MOLTIPLICO E DIVIDO PER i PER SPOSTARE i DAL DEN:
$i^2 = 1$

$$\Rightarrow \frac{d^2\psi}{dx} = -\frac{2m}{\hbar}(E-V)\psi$$

EQ. DA AGGIUN-GERE ALLA TABELLA $\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V\psi = i\hbar\frac{d\psi}{dt}}$

GENERALIZZAZIONE DELL'EQ. NELLO SPAZIO:

$$-\frac{\hbar}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)+V\psi=i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

$$-\frac{\hbar}{2m}\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial z^2}\right)}_{\Delta}\psi+V\psi=i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

Δ OPERATORE LAPLACIANO

FORMALMENTE PUÒ ESSERE ESPRESSO COME $\overline{\nabla}\cdot\overline{\nabla}=\Delta$

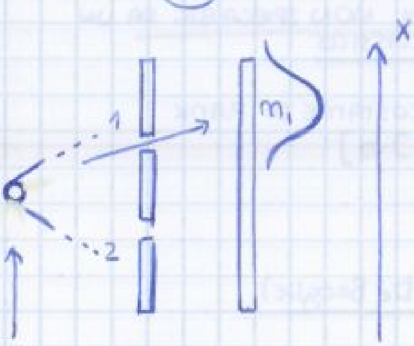
$$\boxed{-\frac{\hbar}{2m}\Delta\psi+V\psi=i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}}$$

PERCHE' ψ DIPENDE DA PIU' VARIABILI E QUINDI SI DERIVA PARZIALMENTE

SIGNIFICATO FISICO DELLA GRANDEZZA CHE SI PROPAGA NELLO SPAZIO: DELLA FUNZIONE ψ ?

↳ schroedinger non arriva a definirlo

1



MITRAGLIATRICE:

SPARA IN DIREZIONE DELLE FENDITURE (CON UN CERTO ANGOLO SOLIDO)

n_0 PROIETTILI/SECONDO

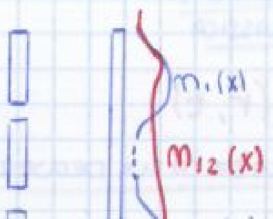
IPOTIZZA DI TAPPARE LA FENDITURA 2:

IMMAGINO COME RISULTATO UNA DISTRIBUZIONE A CAMPANA IN CORRISPONDENZA DELLA CONGIUNGENTE MITRAGLIATRICE - FENDITURA

IPOTIZZA DI TAPPARE SOLO LA 1:

RISULTATO SIMMETRICO ANALOGO, $n_2(x)$ PROIETTILI

LASCIANDO 1 E 2 APERTE:



SIGNIFICATO:

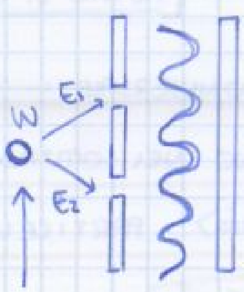
$\frac{n_1(x)}{n_0}$ $\frac{n_2(x)}{n_0}$ $\frac{n_1(x)+n_2(x)}{n_0}$ TALE RAPPORTO E' LA PROBABILITA' CHE UN PROIETTILE:

$\frac{n_1(x)}{N_0}$ PASSANDO DA 1 ARRIVI SULLO SCHERMO IN X

$\frac{n_2(x)}{N_0}$ PASSANDO DA 2 ARRIVI SULLO SCHERMO IN X

$\frac{n_1(x)+n_2(x)}{N_0}$ PASSANDO O DA 1 O DA 2 SULLO SCHERMO IN X

2



SORGENTE ONDE ELETTROMAGNETICHE

(ESPERIMENTO DI YOUNG PER DIM CHE LA LUCE E' UN'ONDA)

CON UNA SOLA FENDITURA LO SCHERMO E' COMPLETAMENTE ILLUMINATO

CON 1 E 2 APERTE:

SI SOMMANO: INTERFERENZA

MISURO UN'ENERGIA DI INTENSITA' PROPORZIONALE ALLA SOMMA DEI MODULI AL QUADRATO

- 0: ONDE IN CONTROFASE
- max: ONDE IN FASE

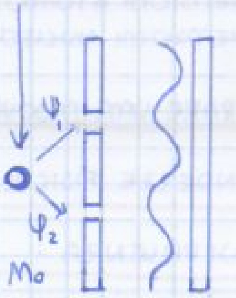
IMMAGINO DI SAPERE LA POTENZA DELLA SORGENTE

$\frac{I(x)}{W}$ — $I(x)$: INTENSITA' SULLO SCHERMO X; W: POTENZA

PROBABILITA' CHE UN'ONDA ARRIVI IN X DOPO ESSERE STATA EMESSA DALLA SORGENTE

3

SORGENTE DI ELETTRONI



ALTERNANZA DI PUNTI RAGGIUNTI E NON RAGGIUNTI DAGLI e^-:

ESATTAMENTE COME LE PALLINE/PROIETTILI

MA

URTANO LO SCHERMO CON UN RISULTATO AD INTENSITA' VARIABILE COME LE ONDE

n_0 ELETTRONI/SECONDO

$\frac{n_{12}(x)}{n_0}$ E' LA PROBABILIT[A'] CHE UN e^-, PU[O'] ESSERE STATO SPARATO DALLA SORGENTE, RAGGIUNGA LO SCHERMO PASSANDO IN 1 O IN 2

E IN PIU' DEVE VALERE UNA RELAZIONE DI PROPORZIONALITA' CON LA SOMMA DELLE ONDE ψ_1 E ψ_2

$$P = \frac{n_{12}(x)}{n_0} \propto |\psi_1 + \psi_2|^2$$

PER AVERE ALTERNANZE LUCE E BUIO POSSO SOLO IPOTIZZARE CHE LE ONDE SI SOVRAPPONGONO E CHE LA SOMMA DELLE ONDE AL QUADRATO SIA PROPORZIONALE AL NUM DI ELETTRONI CHE ARRIVANO SULLO SCHERMO

$\Psi(\bar{r},t)$ DESCRIVE UN SISTEMA FISICO $\longleftrightarrow$ CONTIENE TUTTE LE INFO FISICHE DEL SISTEMA

(1) DIMENSIONI ATOMICHE O SUBATOMICHE $\longrightarrow$ $m \sim$ PUNTIFORMI
(2) $V \sim 10^6 \, m/s \longrightarrow V \ll C$
(3) INTERAZIONE COULOMBIANA $\longrightarrow$ FORZE CONSERVATIVE

} L'EQ. DI SCHRODINGER E' ADATTA A DESCRIVERE IL SISTEMA

- FISICA CLASSICA: NOTA LA TRAIETTORIA $\bar{r}(t) \longrightarrow \forall \bar{F}(\bar{r},\bar{p},t)$
  POSSO DESUMERE OGNI GRANDEZZA FISICA CHE CARATTERIZZA IL SISTEMA
- FISICA QUANTISTICA:

NOTA LA FUNZIONE D'ONDA $\Psi(\bar{r},t) \longrightarrow ?\langle F \rangle$

VALORI MEDI O VALORI ATTESI

(LA PARTICELLA E' DESCRITTA DA UNA FUNZIONE STATISTICA DI DENSITA' DI PROBABILITA' : NO DETERMINISMO CLASSICO)

$\boxed{\text{POSIZIONE MEDIA}}$

VALOR MEDIO DEL VETTORE POSIZIONE $\quad \langle \bar{r} \rangle = \int_\Omega |\Psi|^2 \bar{r} \, d\bar{r} = \int_\Omega \Psi^* \hat{r} \Psi \, d\bar{r}$

VALOR MEDIO DEL VETTORE Q.D.M:

- VELOCITA' MEDIA $\langle \bar{V} \rangle = \dfrac{d\langle \bar{r} \rangle}{dt}$, PER SEMPLICITA' $\langle V_x \rangle = \dfrac{d\langle \bar{x} \rangle}{dt} = \dfrac{d}{dt}\int_\Omega |\Psi|^2 x \, dx = \int_\Omega \dfrac{\partial}{\partial t}(\Psi\Psi^*) x \, dx = \dots$

- MOLTIPLICO ENTRAMBI I MEMBRI DELL'EQ. DI SCHRODINGER PER IL COMPLESSO CONIUGATO Ψ^*

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(\Psi^*)\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + V\Psi(\Psi^*) = i\hbar(\Psi^*)\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

- NE FACCIO IL COMPLESSO CONIUGATO E POI SOTTRAGGO TERMINE A TERMINE LE DUE EQ.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(\Psi)\frac{\partial^2\Psi^*}{\partial x^2} + V(\Psi^*\Psi) = i\hbar(\Psi)\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}$$

SOSTITUISCO IL RIS. NELL' INTEGRALE

$$\rightarrow \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\right)\left(\frac{1}{i\hbar}\right)\left[\Psi\frac{\partial^2\Psi^*}{\partial x^2} + \cancel{V(\Psi\Psi^*)} - \Psi^*\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \cancel{V(\Psi\Psi^*)}\right] = \Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\Psi\Psi^*)$$

$$\dots = \int_\Omega \frac{\hbar}{2mi}\frac{d}{\cancel{dx}}\overbrace{\left(\Psi^*\frac{d\Psi}{dx} - \Psi\frac{d\Psi^*}{dx}\right)}^{V} x \cancel{dx} = \frac{\hbar}{2mi}\int_\Omega dV x \underset{\uparrow}{=} \frac{\hbar}{2mi}\left(\cancel{xV}\Big|_a^b - \int_\Omega V dx\right) =$$

INTEGRO PER PARTI

$$= \frac{\hbar}{2mi}\int_\Omega\left[\Psi^*\frac{d\Psi}{dx} - \Psi\frac{d\Psi^*}{dx}\right]dx =$$

CONDIZIONI A CONTORNO $\Psi(a) = \Psi(b) = \emptyset$

PER PARTI IL SECONDO INTEGRALE

$$= \frac{\hbar}{2mi}\left(\int_\Omega \Psi^*\frac{d\Psi}{\cancel{dx}}\cancel{dx} - \int_\Omega \Psi\frac{d\Psi^*}{\cancel{dx}}\cancel{dx}\right) = \frac{\hbar}{2mi}\left(\int_\Omega \Psi^* d\Psi - \left[\cancel{\Psi\Psi^*}\Big|_a^b - \int_\Omega \Psi^* d\Psi\right]\right) =$$

$$= \frac{\cancel{2}\hbar}{\cancel{2}mi}\left(\frac{i}{i}\right)\int_\Omega \Psi^* d\Psi = \int_\Omega \frac{i\hbar}{m}\Psi^* d\Psi = \int_\Omega \Psi^*\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)\Psi \, dx = \langle \bar{V}_m \rangle \cdot m = \langle \bar{p}_x \rangle$$

GENERALIZZANDO

$\boxed{\text{Q.D.M. MEDIA}}$ $\quad \langle \bar{p} \rangle = \int_\Omega \Psi^*\left(-i\hbar\bar{\nabla}\right)\Psi \, d\bar{r}$

FISICA CLASSICA:

MOTA $\bar{r}(t)$ TRAIETTORIA DI UNA PARTICELLA $\xrightarrow{\text{SONO IN GRADO DI DESUMERE}}$ $\forall F(\bar{r}, \bar{\mathcal{V}}, t)$ ($\bar{p}$)
OGNI GRANDEZZA FISICA CHE LA CARATTERIZZA SAPENDO CHE ESSA E' FUNZIONE DI POSIZIONE E VELOCITA'

↓

CONCETTO DA SOSTITUIRE CON LA Q.D.M.

MECCANICA QUANTISTICA:

MOTA $\psi(\bar{r}, t)$ FUNZIONE D'ONDA $\longrightarrow$? $\langle F \rangle$

C'E' UN MECCANISMO PER ESTRARRE DA ψ TUTTE LE CARATTERISTICHE FISICHE DEL SISTEMA

HO PERSO LA TRAIETTORIA $\bar{r}(t)$ ACCETTANDO CHE E' UN MOTO PROBABILISTICO

PARTICELLA DESCRITTA DA UNA FUNZIONE PROBABILISTICA: SARANNO ESTRATTI VALORI MEDI E VALORI ATTESI, NON GRANDEZZE CERTE

SISTEMA MICROSCOPICO (COSTITUITO DA PARTICELLA PUNTIFORME)

- HO RISOLTO L'EQ DI SCHROEDINGER OTTENENDO $\psi(\bar{r}, t)$

① LA POSIZIONE DELLA PARTICELLA E' UNA CONSEGUENZA DIRETTA DI $|\psi|^2$

$$\langle \bar{r} \rangle = \int_{\Omega} |\psi|^2 \, \bar{r} \, d\bar{r} \qquad \boxed{\text{POSIZIONE MEDIA}}$$

② LA DERIVATA DELLA POSIZIONE MEDIA DELLA PARTICELLA RISPETTO AL TEMPO E' LA VELOCITA' MEDIA

$$\langle \bar{V} \rangle = \frac{d \langle \bar{r} \rangle}{dt}$$

per semplicità considero inizialmente un sistema in una sola dimensione x:

- POSIZIONE MEDIA: $\langle \bar{x} \rangle = \int_{\Omega} |\psi|^2 \, x \, dx$
- VELOCITA' MEDIA: $\langle V_x \rangle = \dfrac{d \langle \bar{x} \rangle}{dt}$
- EQ.: $-\dfrac{\hbar^2}{2m} \dfrac{d^2 \psi}{dx^2} + V \psi = i\hbar \dfrac{\partial \psi}{\partial t}$

con $\psi(\bar{x}, t)$

$$= -\frac{\hbar}{2mi}\int_\Omega x\,dv = -\frac{\hbar}{2mi}\left[xv\Big|_a^b - \int_\Omega v\,dx \right] =$$

$\varphi(\bar{x},t)$

$\varphi(x)$ max $x \in \Omega$

$\varphi(x) = 0 \quad x \notin \Omega$

TALI CONDIZIONI, UNITE ALLA DERIVABILITA' FINO AL SECONDO GRADO, IMPLICANO:

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0$$

E QUINDI DEVE PER FORZA ESSERE

$$= -\frac{\hbar}{2mi}\left[\cancel{xv}\Big|_a^b - \int_\Omega v\,dx \right] = \frac{\hbar}{2mi}\int_\Omega v\,dx \underset{\uparrow}{=} \frac{\hbar}{2mi}\int_\Omega \left[\varphi^*\frac{d\varphi}{dx} - \varphi\frac{d\varphi^*}{dx} \right] dx$$

SOST A V LA SUA FORMA ESPLICITA

$$\underset{\uparrow}{=} \frac{\hbar}{2mi}\left[\int_\Omega \frac{\varphi^* d\varphi}{\cancel{dx}}\cancel{dx} - \int_\Omega \frac{\varphi\, d\varphi^*}{\cancel{dx}}\cancel{dx} \right] = \frac{\hbar}{2mi}\left[\int_\Omega \varphi^* d\varphi - \underbrace{\int \varphi\, d\varphi^*}_{} \right]$$

PROPRIETA' DEGLI INTEGRALI

PORTA ALLA SEMPLIFICAZIONE DEI dx

INTEGRO PER PARTI IL SECONDO DEI DUE INTEGRALI

$$= \frac{\hbar}{2mi}\left[\int_\Omega \varphi^* d\varphi - \left(\cancel{\varphi^*\varphi}\Big|_a^b - \int_\Omega \varphi^* d\varphi \right) \right] =$$

LA FUNZIONE D'ONDA SUGLI ESTREMI E' Ø

$$= \frac{\hbar}{\cancel{2}mi}\left[\cancel{2}\int_\Omega \varphi^* d\varphi \right] = \frac{-\hbar i}{m\, i^2}\left[\quad \right] = \int -\frac{i\hbar}{m}\varphi^* d\varphi = \langle V_m \rangle m = \langle p$$

MOLTIPLICO NUM E DEN PER i PER PORTARLO AL NUM; $i^2 = -1$

PORTO FUORI E A DX m, COSTANTE, OTTENENDO DALLA VELOCITA' MEDIA LA QUANTITA' DI MOTO

$$\langle p_x \rangle = \int_\Omega -i\hbar\, \varphi^* d\varphi \underset{\uparrow}{=} \int_\Omega \varphi^* \boxed{\left(-i\hbar\frac{d}{dx} \right)} \varphi\, dx$$

SI SCRIVE SEMPLICEMENTE IN MODO DIVERSO L'ESPRESSIONE DELLA QDM MEDIA IN DIREZIONE X

$$\langle x \rangle = \int_\Omega \varphi^* \boxed{x}\, \varphi\, dx$$

C'E' UNA CERTA SIMMETRIA TRA I DUE INTEGRALI, CHE RISPETTO ALLA PARTE EVIDENZIATA SONO FORMALMENTE UGUALI

TEORIA DELLA MISURA O PRINCIPIO DEL COLLASSO DI φ

SI BASA SULLE SEGUENTI ASSUNZIONI:

1. $\varphi(\bar{r},t)$ DESCRIVE UN SISTEMA FISICO E $|\varphi|^2 dV$ RESTITUISCE LA PROBABILITA' DI TROVARE TALE STATO FISICO IN UNO SPAZIO

2. $$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi(\bar{r},t) + V(\bar{r})\,\varphi(\bar{r},t) = i\hbar\frac{\partial\varphi(\bar{r},t)}{\partial t}$$

3. IN $\varphi(\bar{r},t)$ CI SONO TUTTE LE INFO FISICHE DEL SISTEMA

$$\langle\bar{r}\rangle = \int \varphi^* \hat{r}\, \varphi\, d\bar{r}$$

$$\langle\bar{p}\rangle = \int \varphi^* (-i\hbar\bar{\nabla})\, \varphi\, d\bar{r}$$

GENERICO $\langle\bar{F}\rangle = \int \varphi^* \hat{F}\, \varphi\, d\bar{r}$

OPERATORI QUANTISTICI (LINEARI)

$\hat{r}$

$\hat{p} = -i\hbar\bar{\nabla}$

$\hat{F}$ E' UN GENERICO OPERATORE LINEARE CHE AGISCE SULLE FUNZIONI φ DI STATO DEL SISTEMA QUANTISTICO

$\varphi \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ $\left[\right.$ φ SONO FUNZIONI A VALORI IN $\mathbb{C}$ E **A QUADRATO SOMMABILI** NEL LORO DOMINIO DI DEFINIZIONE $\Omega \subseteq \mathbb{R}$

CIOE' $\hat{F}(a\varphi_1 + b\varphi_2) = a\hat{F}\varphi_1 + b\hat{F}\varphi_2 \in \mathcal{L}^2(\Omega)$

CON $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ E $a, b \in \mathbb{C}$

$$\langle\bar{F}\rangle = \int_\Omega \varphi^*(\bar{F}\varphi)\,d\bar{r} = \int_\Omega \varphi^*\phi\, dr = \langle\varphi|F|\phi\rangle$$

PERCHE' SIA POSSIBILE LA TRASPOSIZIONE DALLA TEORIA LOGICO-MATEMATICA ALLA REALTA' DELL'ESPERIMENTO:

$\downarrow$

$\langle\bar{F}\rangle \in \mathbb{R}$ O NON AVREBBE SIGNIFICATO FISICO: L'INTEGRALE RESTITUISCE UN NUMERO DIMENSIONATO, NELLE DIMENSIONI DELLA GRANDEZZA FISICA CALCOLATA

$\downarrow$

SI IMPONE QUINDI CHE $a \equiv a^*$

AFFINCHE' SIA NULLA LA PARTE IMMAGINARIA; $a \in \mathbb{R}$

CIOE'

$$\int_\Omega \varphi^* \hat{F} \varphi\, d\bar{r} = \left[\int_\Omega \varphi^* \hat{F}\varphi\, d\bar{r}\right]^* = \int_\Omega \varphi\, \hat{F}\, \varphi^*\, d\bar{r}$$

LA CONDIZIONE CIRCOSCRIVE LE POSSIBILI OPERAZIONI UTILIZZABILI PER TRASPORRE LE GRANDEZZE FISICHE DA CLASSICHE A QUANTISTICHE

$\uparrow$

OPERATORI CHE SODDISFANO TALE CONDIZIONE CIOE' OPERATORI LINEARI ASSOCIABILI A GRANDEZZE FISICHE, SONO DETTI $\boxed{\text{OPERATORI HERMITIANI O AUTOAGGIUNTI}}$

$\Downarrow$

LA GRANDEZZA FISICA VARIA NEL DISCRETO

AUTOVALORI DELL'OPERAZIONE RISPETTO ALL'OPERATORE QUANTISTICO CHE RAPP. LA GRANDEZZA CLASSICA

$\Downarrow$ **TEORIA DELLA MISURA** O PRINCIPIO DI COLLASSO DELLA FUNZIONE D'ONDA

MISURO UNA GENERICA $\hat{F}$ DI UN SISTEMA QUANTISTICO DESCRITTO DA ψ, SOL DELL' EQ. DI SCHRODINGER

$\rightarrow$ OTTENGO f_i, UNO DEGLI AUTOVALORI DI $\hat{F}$

$\rightarrow$ DOPO LA MISURA IL SISTEMA SI TROVA IN UNO STATO DESCRITTO DA ψ_i :

IL SISTEMA HA CAMBIATO DESCRIZIONE MATEMATICA

PER OGNI SUCCESSIVA MISURA SI OTTENGONO DISTINTI f_i $i = 1, 2 \dots n$

E LA PROBABILITA' DI OTTENERE f_i E' DATA DA $|a_i|^2 = |\langle \psi_i | \psi \rangle|^2$

MISURO CONTEMPORANEAMENTE PIÙ GRANDEZZE FISICHE F, G :

$$\bar{F} \longrightarrow \hat{F} \longrightarrow f_i \qquad \bar{G} \longrightarrow \hat{G} \longrightarrow g_i \qquad \begin{cases} \hat{F}\psi_i = f_i \psi_i \\ \hat{G}\phi_i = g_i \phi_i \end{cases}$$

AFFINCHE' SI POSSA ANNULLARE L'INDETERMINAZIONE DEL SISTEMA NELLO STATO ψ DEVE VALERE CONTEMPORANEAMENTE

$$\begin{cases} \hat{F}\cdot\psi = f\psi \\ \hat{G}\psi = g\psi \end{cases}$$

ψ E' AUTOFUNZIONE DI $\hat{F}$ E $\hat{G}$ CONTEMPORANEAMENTE:

ALTRIMENTI LA MISURA DI f_m PORTA IL SISTEMA IN ψ_m E ALLA MISURA DI g_m: NON E' ACCURATO

E SE $\begin{cases} \hat{F}\psi_m = f_m \psi_m \\ \hat{G}\psi_m = g_m \psi_m \end{cases}$ IL SISTEMA NELLO STATO ψ_m AVRA' VALORI : $\begin{cases} \langle F_m \rangle = f_m & \Delta F = 0 \\ \langle G_m \rangle = g_m & \Delta G = 0 \end{cases}$

$\Downarrow$

IN UN SISTEMA FISICO POSSO CONOSCERE DUE GRANDEZZE FISICHE CON INDETERMINAZIONE NULLA SE

$$\begin{cases} \hat{F}\psi_m = f_m \psi_m \\ \hat{G}\psi_m = g_m \psi_m \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{G}(\hat{F}\psi_m) = \hat{G}(f_m\psi_m) = f_m g_m \psi_m \\ \hat{F}(\hat{G}\cdot\psi_m) = \hat{F}(g_m\psi_m) = g_m f_m \psi_m \end{cases}$$

$\Downarrow$ SOTTRAENDO MEMBRO A MEMBRO: $\hat{F}(\hat{G}\psi_m) - \hat{G}(\hat{F}\psi_m) = \boxed{\hat{F}\hat{G} - \hat{G}\hat{F} = 0}$

DUE OPERATORI ASSOCIATI A DUE GRANDEZZE FISICHE POSSONO ESSERE CONOSCIUTI CONTEMPORANEAMENTE CON INDETERMINAZIONE NULLA SE $\hat{F}\hat{G} = \hat{G}\hat{F}$

$[\hat{F}, \hat{G}] = 0$ CIOE' SE GLI OPERATORI COMMUTANO.

GLI OPERATORI HANNO LE STESSE AUTOFUNZIONI

PRINCIPIO DI INDETERMINAZIONE

PRINCIPIO DI COMPLEMENTARIETÀ

LO STATO DI UN SISTEMA E' DETERMINATO DA UN NUMERO LIMITATO DI GRANDEZZE FISICHE CORRISPONDENTI AD OPERATORI MUTUAMENTE COMMUTANTI

TALI INSIEMI SONO MUTUAMENTE ESCLUSIVI MA TUTTI RAPPRESENTANO LA MASSIMA INFORMAZIONE

$$\langle F \rangle = \int_{\Omega} \psi^* (\hat{F}\psi)\, d\bar{r}$$

OPERATORE LINEARE CHE AGISCE SU ψ

INSIEME DI FUNZIONI A QUADRATO SOMMABILI NEL DOMINIO DI Ω

$\mathcal{L}^2(\Omega) \equiv$ SPAZIO VETTORIALE

$\psi \xrightarrow[\text{ENDOMORFISMO}]{\hat{F}\psi} \phi = \hat{F}\psi$ SPAZIO VETTORIALE

AGISCE SU ELEMENTI DI $\mathcal{L}^2(\Omega)$ (ψ) PER OTTENERE ALTRE FUNZIONI (ϕ)

$\boxed{\text{NOTAZIONE DI DIRAC}}$

$|\psi\rangle \xrightarrow{\hat{F}\psi} |\phi\rangle = F|\psi\rangle$

SIMBOLOGIA DI DIRAC PER INDICARE IL VETTORE

C'E' CORRISPONDENZA BIUNIVOCA TRA TUTTI GLI SPAZI VETTORIALI CON LA STESSA DIMENSIONE

$$\langle F \rangle = \int_{\Omega} \psi^* (\hat{F}\psi)\, d\bar{r} = \int_{\Omega} \psi^* \phi\, d\bar{r} \equiv \langle \psi | \phi \rangle$$

INDICA IL PRODOTTO SCALARE (SOTTOINTENDE $\int$)

$$= \langle \psi | F \psi \rangle$$

TALE NOTAZIONE RIMANDA ALLE REGOLE DELL'ALGEBRA LINEARE

L'INTEGRALE RESTITUISCE UN NUMERO DIMENSIONATO, E NELLE DIMENSIONI DELLA GRANDEZZA FISICA CALCOLATA

$\Downarrow$

$\langle F_q \rangle \in \mathbb{R}$ O NON SAREBBE POSSIBILE LA TRASPOSIZIONE DALLA TEORIA LOGICO-MATEMATICA ALLA REALTA' DELL'ESPERIMENTO

QUINDI SI IMPONE LA CONDIZIONE $a \equiv a^*$ PERCHE' FA SI CHE LA PARTE IMMAGINARIA DI a SIA NULLA ($a \in \mathbb{R}$)

$$\int_{\Omega} \psi^* (\hat{F}\psi)\, d\bar{r} = \left[\int_{\Omega} \psi^* (F\psi)\, d\bar{r} \right]^* \equiv \int_{\Omega} \psi (F\psi)^*\, d\bar{r}$$

AFFINCHE' L'OPERAZIONE ABBIA SIGNIFICATO FISICO DEVE VALERE TALE UGUAGLIANZA

$\downarrow$

LA CONDIZIONE CIRCOSCRIVE LE POSSIBILI OPERAZIONI UTILIZZABILI PER TRASPORRE GRANDEZZE DA CLASSICHE A QUANTISTICHE

OPERATORI CHE SODDISFANO LA CONDIZIONE SONO DETTI OPERATORI AUTOAGGIUNTI O HERMITIANI

L' INDETERMINAZIONE QUANTISTICA E' STIMABILE:

INDETERMINAZIONE CLASSICA IN FORMULE:

$$(\Delta F_{cl})^2 = \sum_{j=1}^{N} \frac{(F_i - \langle F_{sp} \rangle)^2}{N} = \langle (F - \langle F_{sp} \rangle)^2 \rangle$$

SINGOLA MISURA — MEDIA SPERIMENTALE

$\|$

SCARTO QUADRATICO MEDIO

= DISPERSIONE SINGOLA MISURA RISPETTO AL VALOR MEDIO

SI TRASPONE LA DEF. CLASSICA ALLA MECCANICA QUANTISTICA

(Heisenberg)

SI PRENDE PER ASSUNZIONE

$$\boxed{(\Delta F)^2_q = \int_\Omega \psi^* \left[(\hat{F} - \langle \hat{F}_q \rangle)^2 \psi \right] d\bar{r}} \equiv 0 \; ?$$

esistono situazioni in cui tale indeterminazione vada a 0? CIOE' SI CHIEDE SE E' POSSIBILE MISURARE UNA GRANDEZZA FISICA CON PRECISIONE INFINITA:

SI SVOLGE L'INTEGRALE

$$= \int_\Omega \psi^* \left[(\hat{F} - \langle \hat{F}_q \rangle)(F - \langle \hat{F}_q \rangle)\, \psi \right] d\bar{r} =$$

$$= \int_\Omega \psi^* \boxed{(\hat{F} - \langle \hat{F}_q \rangle)} \left[(\hat{F} - \langle \hat{F}_q \rangle)\psi \right] d\bar{r} =$$

DEVE RESTITUIRE UN $\mathbb{R}$ SODDISFANDO L'HERMITIANITA': SEGUE CHE

$$= \int_\Omega \left[(\hat{F} - \langle \hat{F}_q \rangle)\psi \right]^* \left[(\hat{F} - \langle \hat{F}_q \rangle)\psi \right] d\bar{r} =$$

*DEF. DI HERMITIANITA'

$$\int_\Omega \psi^* (F[\psi])\, d\bar{r} = \int_\Omega (\hat{F}\psi)^* [\psi]\, d\bar{r}$$

$$a \cdot a^* = |a|^2$$

$$= 0 = \int_\Omega |(F - \langle \hat{F} \rangle)\psi|^2 d\bar{r} \Rightarrow$$

AFFINCHE' L'INTEGRALE SIA NULLO:

$$\boxed{(\hat{F} - \langle \hat{F} \rangle)\psi = 0}$$

SI CERCANO I CASI IN CUI SIA NULLO

$$\boxed{(\Delta F)^2_q = 0 \quad \text{se} \quad \hat{F}\varphi_m = f_m \varphi_m}$$

PROPRIETA' AUTOVETTORI ORTONORMALI

PER COME SI E' DEF IL PRODOTTO SCALARE, IL PRODOTTO SCALARE DI DUE DI LORO E' $\varnothing$

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \int \varphi_i^* \varphi_j \, dr = \delta$$

con $\delta = \begin{cases} 0 & \text{se } \varphi_i = \varphi_j \\ 1 & \text{se } \varphi_i \neq \varphi_j \end{cases}$

QUALSIASI VETTORE DELLO SPAZIO VETTORIALE PUO' ESSERE SCRITTO COME SOMMA DI AUTOVALORI PER UNA QUALCHE COSTANTE

$$\forall \, |\varphi\rangle \in \mathcal{L}^2(\Omega) \qquad \boxed{|\varphi\rangle = \sum_i a_i |\varphi_i\rangle} ? \qquad a_i \in \mathbb{C}$$

$$\boxed{\langle \varphi_i | \varphi \rangle} = \int_\Omega \varphi_i^* \varphi \, d\bar{r} = \int_\Omega \varphi_i^* \sum_j a_j |\varphi_j\rangle \, d\bar{r} =$$

NOTAZ. DIRAC

cost.

$$= \boxed{\left(\sum_j a_j\right)} \int_\Omega \varphi_i^* \sum_j |\varphi_j\rangle \, dr = \sum_j^m a_j \int_\Omega \varphi_i^* \varphi_j \, dr = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ 1 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$$\boxed{a_i = \int \varphi_i^* \varphi \, dr}$$

$\langle F_q \rangle =$ CALCOLO IL VALOR MEDIO DI F SISTEMA RAPP. DA UNA GENERICA φ, SOL. DELL'EQ. DI SCHRODINGER.

CIOE' NEL CASO PIU' GENERALE

$$\boxed{\langle F_q \rangle = \int_\Omega \left(\sum_j a_j^* \varphi_j^*\right)^* \hat{F}\left(\sum_i a_i \varphi_i\right) d\bar{r}} =$$

$$= \left(\sum_i a_i \hat{F}\varphi_i\right) d\bar{r} =$$

$$= f_i \varphi_i \qquad \text{AUTOVALORE } i\text{-ESIMO } f$$

$$= \boxed{\sum_{ji} a_j^* a_i f_i} \underbrace{\int_\Omega \varphi_j^* \varphi_i \, d\bar{r}}_{\substack{=1, \text{ se } i=j \\ =0, \text{ se } i \neq j}} = \boxed{\sum_i a_i^* a_i f_i} \int_\Omega \varphi_i^* \varphi_i \, d\bar{r} =$$

IMPONGO $\langle F_q \rangle \neq 0 : i = j$

TEORIA = ESPERIMENTO

$$= \boxed{\sum_i |a_i|^2 f_i} = \langle \hat{F}_q \rangle = \langle F_{sperim} \rangle = \sum_{j=1}^N \frac{f_j}{N} = \sum_i \frac{m_i f_i}{N} = \boxed{\sum_i \frac{m_i}{N} f_i}$$

2

cosa accade se invece di misurare una sola grandezza ne misuro due contemporaneamente, F e G, nello stesso sistema fisico?

GRANDEZZA FISICA	OPERATORE QUANTISTICO		
F	$\hat{F}$	$f_i \Longrightarrow \varphi_i$	$\hat{F}\varphi_i = f_i \varphi_i$
G	$\hat{G}$	g_i	$\hat{G}\varphi_i = g_i \varphi_i$

$\Delta F = \Delta G = 0$ SE E' VALIDO IL SISTEMA PRECEDENTE

MA:

deve valere contemporaneam

$$\begin{cases} \hat{F}\varphi_i = f_i \varphi_i \\ \updownarrow \\ \hat{G}\phi_j = g_j \phi_j \end{cases}$$

CIOE' STESSO SISTEMA DI AUTOFUNZIONI

no PRECISIONE, $(\Delta G)^2$ o $(\Delta F)^2 > 0$

quando si verifica la condizione favorevole?

$$\begin{cases} \hat{G}\hat{F}\varphi_i = \hat{G} f_i \varphi_i = f_i(\hat{G}\varphi_i) = f_i \cdot g_i \varphi_i \\ \hat{F}\hat{G}\varphi_i = \hat{F} g_i \varphi_i = g_i(\hat{F}\varphi_i) = g_i f_i \varphi_i \end{cases}$$

sottrazione della 1° eq alla 2°:

$$\hat{F}\hat{G}\varphi_i - \hat{G}\hat{F}\varphi_i = \emptyset$$

$$\underbrace{(\hat{F}\hat{G} - \hat{G}\hat{F})}_{\text{matrice}} \underbrace{\varphi_i}_{\text{vettore}} = \emptyset \Longrightarrow$$

E' VERO SE E SOLO SE

CONDIZIONE

$$\boxed{\hat{F}\hat{G} - \hat{G}\hat{F} \equiv 0}$$

MATRICE IDENTICAMENTE NULLA

$\hat{F}\hat{G} = \hat{G}\hat{F}$ CIOE' QUANDO LE MATRICI COMMUTANO

SE GLI OPERATORI COMMUTANO HANNO LO STESSO "SET" DI AUTOVETTORI, $\boxed{\hat{F}\hat{G} - \hat{G}\hat{F} = 0}$

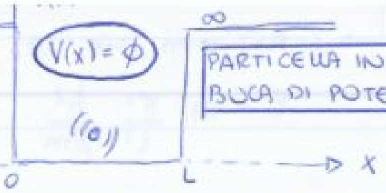
$\equiv$ (notazione)

PARENTESI DI COMMUTAZIONE $[\hat{F}, \hat{G}]$

QUANDO LE DUE GRANDEZZE COMMUTANO, POSSO MISURARLE CONTEMPORANEAMENTE

EQUAZIONE DI SCHRODINGER STAZIONARIA

(A)



PARTICELLA IN UNA BUCA DI POTENZIALE

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

EQUAZIONI DI QUESTO TIPO HANNO SOL IN CUI LE VARIABILI SPAZIALI E TEMPORALI SONO ISOLABILI ....

$\Downarrow$

IPOTESI DI BASE $\psi(\bar{r},t) = R(\bar{r})\,T(t)$

LO SOSTITUISCO NELL'EQ. PER VERIFICARE CHE POSSA ESSERE SOL

$$-\frac{\hbar^2}{2m}T\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \overset{0}{\cancel{VRT}} = i\hbar R\frac{\partial T}{\partial t} \longrightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} = i\hbar\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial t} = E$$

DUE FUNZIONI IN VARIABILI DIVERSE SONO UGUALI SE SONO UGUALI A COSTANTE

$$+i\hbar\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial t} = E \longrightarrow \frac{\partial T}{T} = -i\frac{E}{\hbar}dt \longrightarrow \ln T = \int -i\frac{E}{\hbar}dt \longrightarrow \ln T = -i\frac{E}{\hbar}t \longrightarrow T(t) = A_0 e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$$

$$+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + ER = \emptyset \longrightarrow \underset{\text{EQ. CARATTERISTICA}}{\frac{\hbar^2}{2m}\lambda^2 + E\lambda^0 = \emptyset} \longrightarrow \underset{\text{CON RADICI}}{\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{2mE}{\hbar^2}} = \pm i\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} = \pm i\alpha}$$

QUINDI $R(\bar{x}) = A_1 e^{+i\alpha x} + Be^{-i\alpha x}$ $\quad A_1\cdot A_0 = A$ E $A_0 B = B$

$$\psi(\bar{r},t) = R(\bar{x})\,T(t) = \left(A_1 e^{i\alpha x} + Be^{-i\alpha x}\right)\left(A_0 e^{-i\frac{E}{\hbar}t}\right) = \underbrace{Ae^{i\alpha x}e^{-i\frac{E}{\hbar}t}}_{\text{ONDA PROGRESSIVA}} + \underbrace{Be^{-i\alpha x}e^{-i\frac{E}{\hbar}t}}_{\text{ONDA REGRESSIVA}}$$

$\longrightarrow$ IMPONGO LE CONDIZIONI A CONTORNO PER DET. LE COSTANTI

$$\psi(\emptyset,t) = \emptyset = A\underbrace{e^{i\alpha 0}}_{1}\cancel{e^{-i\frac{E}{\hbar}t}} + B\underbrace{e^{-i\alpha 0}}_{1}\cancel{e^{-i\frac{E}{\hbar}t}} = A + B \longrightarrow A = -B$$

$$\psi(L,t) = \emptyset = Ae^{i\alpha L}\cancel{e^{-i\frac{E}{\hbar}t}} + Be^{-i\alpha L}\cancel{e^{-i\frac{E}{\hbar}t}} = A\left(e^{i\alpha L} - e^{-i\alpha L}\right) =$$

CIOE' IMPONGO CHE LA PARTICELLA NON POSSA USCIRE DALLA BUCA

$$= A\left(\cancel{\cos(\alpha L)} + i\sin(\alpha L) - \cancel{\cos(\alpha L)} + i\sin(\alpha L)\right) = 2Ai\sin(\alpha L)$$

$$\cancel{2Ai}\sin(\alpha L) = 0 \longrightarrow \alpha L = \pi n \quad \text{E' VERO PER MULTIPLI INTERI DI } \pi$$

$A \mid A\cdot 2i = 1$ $\qquad$ $n = 1, 2 \ldots$

$$\left(\frac{2mE}{\hbar^2}\right)L^2 = \pi^2 n^2 \quad \text{DA CUI RICAVO} \quad E = n^2\frac{\pi^2}{L^2}\frac{\hbar^2}{2m}$$

$$\int_0^L |\psi|^2 dR = 1 \longrightarrow \ldots B = \ldots$$

NORMALIZZAZIONE

L'ENERGIA DEL SISTEMA E' TUTTA CINETICA, $V = \emptyset$

SUL SIGNIFICATO FISICO DI E : $\hat{H} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} \longrightarrow \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$

CON $\hat{H}$ POSSO CALCOLARE IL VALOR MEDIO DELL'ENERGIA DEL SISTEMA:

$$\langle H\rangle = \int_\Omega \psi^*\left(\hat{H}\right)\psi\,dx = \int_\Omega\left[\quad\right]^*\hat{H}\left[\quad\right]dx =$$

SVOLGO IL COMPLESSO CONIU. RACCOLGO LE COSTANTI E DERIVO RISPETTO AD X

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\int_\Omega\left[A^*e^{-i\alpha x}e^{i\frac{E}{\hbar}t} + Be^{i\alpha x}e^{+i\frac{E}{\hbar}t}\right]\left[(i\alpha)^2 Ae^{i\alpha x}e^{-i\frac{E}{\hbar}t} - (-i\alpha)^2 Be^{-i\alpha x}e^{-i\frac{E}{\hbar}t}\right]dx =$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\alpha^2\int_\Omega\psi^*\psi\,dx = -\frac{\hbar^2}{2m}\alpha^2\int_\Omega|\psi|^2dx = -\frac{\hbar^2}{2m}\alpha^2 = -\frac{\cancel{\hbar^2}}{\cancel{2m}}\frac{\cancel{2m}E}{\cancel{\hbar^2}} = E \quad \boxed{\langle H\rangle = E}$$

E L'INDETERMINAZIONE DI $\langle H\rangle$ VALE $\Delta H = \int_\Omega \psi^*\left(\hat{H} - \langle\hat{H}\rangle\right)\psi\,dx = \emptyset$

POICHE' $\hat{H}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx}\left(Ae^{+i\alpha x}e^{-i\frac{E}{\hbar}t} + Be^{-i\alpha x}e^{-i\frac{E}{\hbar}t}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\alpha^2\psi = E$

$\hat{H}\psi = E\psi = \langle H\rangle\psi$ $\quad$ L'OPERATORE H APPLICATO A ψ RESTITUISCE ψ PER UNA COSTANTE PARI AL VALOR MEDIO DI ENERGIA DEL SISTEMA

17/12/2013

- Principio di corrispondenza
- nuova costante universale h $\quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$
- grandezze fisiche variano nel discreto
- equivalenza ONDA $\longleftrightarrow$ PARTICELLA

ONDA
$\downarrow$
$\psi(\vec{r}, t)$
$\downarrow$
$|\psi|^2 \, d\vec{r}$

FORMULAZIONE DI SCHRODINGER

NOTAZIONE DI DIRAC $|\psi\rangle$

qualche sia la notazione, ci sono tutte le info fisiche

- interpretazione operatoriale delle grandezze fisiche
- Principio del collasso di ψ (o teoria della misura)
- Principio di indeterminazione
- Principio di complementarietà

$$\left[x, -i\hbar\frac{d}{dx}\right]$$

$$x\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right) - \left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)x =$$

$$= -i\hbar\frac{d}{dx}x + i\hbar\frac{d}{dx}x + i\hbar\frac{dx}{dx} = i\hbar + 0$$

$$E = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2R}{dx^2}\cdot\frac{1}{R}}_{f(x)} = \underbrace{\frac{i\hbar}{T}\frac{dT}{dt}}_{g(x)}$$

DIPENDE DALLO SPAZIO — DIPENDE DAL TEMPO

E POSSO RISCRIVERLO COME UN SISTEMA IN DUE EQ.; RISOLVO;

$$\begin{cases} \dfrac{i\hbar}{T}\dfrac{dT}{dt} = E & ① \\ -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2R}{dx^2}\dfrac{1}{R} = E & ② \end{cases}$$

① $\dfrac{dT}{T} = E\cdot\dfrac{dt}{i\hbar} \rightarrow \int \dfrac{dT}{T} = \int -i\dfrac{E}{\hbar}\,dt \rightarrow \ln T = -i\dfrac{E}{\hbar}t$

QUINDI $\boxed{T(t) = A e^{-i\frac{E}{\hbar}t}}$ è la parte di soluzione in dipendenza temporale.

② $+\dfrac{\hbar}{2m}\dfrac{d^2R}{dx^2} + ER = \phi$ E' UN EQ. DIFFERENZIALE DI SECONDO ORDINE A COEFFICIENTI COSTANTI:

NE SCRIVO L'EQ. ALGEBRICA CARATTERISTICA: $\dfrac{\hbar^2}{2m}\lambda^2 + E\underbrace{\lambda^0}_{1} = \phi$ $\quad \dfrac{\hbar^2}{2m}\lambda^2 + E = \phi$

E TROVO LE RADICI DELL' EQUAZIONE CARATTERISTICA:

$$\lambda = \pm\sqrt{-\frac{2mE}{\hbar^2}} = \pm i \underbrace{\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}}_{\alpha} = \pm i\alpha$$

LE SOL DELL' EQ. DIFFERENZIALE HANNO FORMA $R(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$; SOSTITUISCO LE RADICI CALCOLATE

$\boxed{R(x) = Ae^{i\alpha x} + Be^{-i\alpha x}}$ con $\alpha = \sqrt{\dfrac{2mE}{\hbar^2}}$

è la parte di soluzione in dipendenza spaziale.

⇓

$$\overbrace{R(x)}^{R}\overbrace{T(t)}^{T} = \left(Ae^{i\alpha x} + Be^{-i\alpha x}\right)Ae^{-i\frac{E}{\hbar}t} =$$

LE COSTANTI ARBITRARIE CONSENTONO $A \cdot A = A$, $B \cdot A = B$

$$= \underbrace{Ae^{i\alpha x}e^{-i\frac{E}{\hbar}t}}_{\text{ONDA PROGRESSIVA}} + \underbrace{Be^{-i\alpha x}e^{-i\frac{E}{\hbar}t}}_{\text{ONDA REGRESSIVA}} =$$

SUL SIGNIFICATO FISICO DI E :

quanto vale l'energia hamiltoniana classica H delle particelle nella buca di potenziale?

$$\boxed{H = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m}}$$

GRANDEZZA CLASSICA $\Longrightarrow$ OPERATORE QUANTISTICO

$\bar{r}$ $\quad\quad$ $\hat{r}$

$\bar{p}$ $\quad\quad$ $\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$

$$H \longrightarrow \hat{H} = \frac{1}{2m}\left(-i\hbar \frac{d}{dx}\right)\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right) = \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$$

L'ENERGIA MEDIA DEL SISTEMA E' $\langle H \rangle$, CALCOLABILE COME

$$\langle H \rangle = \int_0^L \varphi^* \hat{H} \varphi \, dx = \int_0^L \varphi^* \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\right)\varphi \, dx =$$

SOSTITUISCO L'ESPRESSIONE DELLA FUNZIONE D'ONDA

$$= \int_0^L [\varphi]^* \hat{H} \, \varphi \, dx =$$

$$= \int_0^L \left[A e^{i\alpha x} e^{-i\frac{E}{\hbar}t} - A e^{-i\alpha x} e^{-i\frac{E}{\hbar}t}\right]^* \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\right)\left[A e^{i\alpha x} e^{-i\frac{E}{\hbar}t} - A e^{-i\alpha x} e^{-i\frac{E}{\hbar}t}\right] dx =$$

SVOLGO IL COMPLESSO CONIUGATO, ESTRAGGO LE COSTANTI, DERIVATA" RISPETTO AD X:

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\int_0^L \left[A^* e^{-i\alpha x} e^{i\frac{E}{\hbar}t} - A^* e^{i\alpha x} e^{i\frac{E}{\hbar}t}\right]\left[\underbrace{(i\alpha)^2}_{=-\alpha^2} A e^{i\alpha x} e^{-i\frac{E}{\hbar}t} - \underbrace{(-i\alpha)^2}_{=-(-\alpha^2)=\alpha^2} A e^{-i\alpha x} e^{-i\frac{E}{\hbar}t}\right] dx =$$

RACCOLGO $(-\alpha^2)$, COSTANTE, LO PORTO FUORI DALL'INTEGRALE

$$= -\frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m}\underbrace{\int_0^L [\varphi^*][\varphi]\, dx}_{=1} = \frac{-\cancel{\hbar^2}}{\cancel{2m}} \, \frac{\cancel{2m} E}{\cancel{\hbar^2}} = E$$

CIOE' $\boxed{\langle H \rangle = E}$ LA COSTANTE ARBITRARIA E' L'ENERGIA MEDIA DEL SISTEMA

■ CALCOLO DI ΔV PER N, AZOTO DATO UN CONTENITORE DI LATO 1dm ($\sim\infty$)

↓

HA NUMERO DI MASSA 28 → $m_N \simeq 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,Kg \cdot 28$

$$\Delta V_{N_2} = \frac{\pi}{L}\,\frac{\hbar}{2m} \sim \underbrace{10^{-7}\,m/s}$$

DISCRETIZZAZIONE NE' PERCEPIBILE NE' MISURABILE

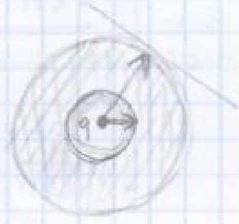
QUINDI

LA VARIAZIONE NEL DISCRETO E' APPROSSIMABILE A VARIAZIONE NEL CONTINUO

■ CALCOLO ΔV PER UN ELETTRONE NELLO STESSO CONTENITORE

↓

$m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,Kg$



$$\Delta V_{e^-} = \dots \sim \underbrace{10^{-2}\,m/s}$$

MISURABILE → E' VALIDO IL PRINCIPIO DI CORRISPONDENZA

$$E = \sum_i \frac{F_i}{q_i} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\sum \frac{q_i}{r_i^2\,\cancel{q_0}}$$

CAMPO IN SUP DELLA SFERA A DIELETTRICO

⇓

CONSIDERATA COME SFERA CARICA ALL'EST.

SE SI CONSIDERASSE UN ELETTRONE, MA CONFINATO NELL'ORBITA DELL'ATOMO ($L = 10^{-10}\,m$)

ΔV_{e^-} SAREBBE DELL'ORDINE DI $10^6\,m/s$: ORBITE QUANTIZZATE

tale problema è generalizzabile?

! SEMPRE SE L'ENERGIA POTENZIALE NON E' FUNZIONE DEL TEMPO

$$\psi(\bar{r},t) = \boxed{R(\bar{r})\; e^{-i\frac{E}{\hbar}t}}$$

VALE SOTTO TALI IPOTESI

1. n punti forme
2. $v \ll c$
3. $V(\bar{r}, \cancel{t})$

DIPENDENZA SPAZIALE

DIPENDENZA TEMPORALE

QUESTA PARTE NON VARIA

LA MATERIA DELL'UNIVERSO E' LEGATA ALLA FORZA ELETTROSTATICA:
L'INTERAZIONE FONDAMENTALE E' LA FORZA DI COULOMB, STATICA

L'ENERGIA POTENZIALE NON DIPENDE DAL TEMPO

MA

PER ONDE ELETTROMAGNETICHE CHE INTERAGISCONO CON LA MATERIA NON POSSO CONSIDERARE STATICO IL POTENZIALE

DUNQUE LE SOL DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE SI OTTENGONO COME:

$$\varphi_{II}(x) = Ge^{\gamma_+ x} + Fe^{\gamma_- x} = Ge^{\gamma x} + Fe^{-\gamma x}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$\begin{cases} \varphi_I(x) = Ae^{i\alpha x} + Be^{-i\alpha x} & x < 0 \\ \varphi_{II}(x) = Ge^{\gamma x} + Fe^{-\gamma x} & 0 \le x \le L \\ \varphi_{III}(x) = Ce^{i\alpha x} + De^{-i\alpha x} & x > L \end{cases}$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{(V_0 - E)2m}{\hbar^2}}$$

CI SONO SEI INCOGNITE ...

① φ DEVE ESSERE CONTINUA E DERIVABILE SIA IN O CHE IN L:

→ IN O:

$$\varphi_I(0) = \varphi_{II}(0) \quad \text{CONTINUITA'} \rightarrow A + B = G + F$$

$$\left.\frac{d\varphi_I}{dx}\right|_0 = \left.\frac{d\varphi_{II}}{dx}\right|_0 \quad \text{DERIVABILITA'} \rightarrow Ai\alpha - Bi\alpha = G\gamma - F\gamma$$

→ IN L:

$$\varphi_{II}(L) = \varphi_{III}(L) \rightarrow Ce^{i\alpha L} + \cancel{D}e^{-i\alpha L} = Ge^{\gamma L} + Fe^{-\gamma L}$$

$$\left.\frac{d\varphi_{II}}{dx}\right|_L = \left.\frac{d\varphi_{III}}{dx}\right|_L \rightarrow i\alpha Ce^{i\alpha L} = G\gamma e^{\gamma L} - F\gamma e^{-\gamma L}$$

② LE SOLUZIONI DI I E II, MOLTIPLICATE PER LA PARTE TEMPORALE, RITORNEREBBERO ONDA PROGRESSIVA E ONDA REGRESSIVA

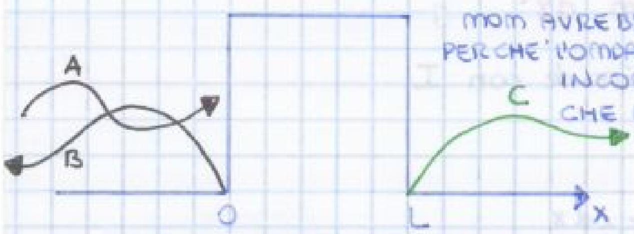
MA

IN III NON C'E' ONDA REGRESSIVA: IMPONGO TALE CONDIZIONE

$$\cancel{D}e^{-i\alpha x} = 0$$

ANNULLANDO IL COEFFICIENTE DELL'ONDA REGRESSIVA

NON AVREBBE SENSO FISICO, PERCHE' L'ONDA NON PUO' PIU' INCONTRARE OSTACOLI CHE LA RIFLETTEREBBERO



LE FUNZIONI COMPLESSE NON SAREBBERO DISEGNABILI SU UN PIANO REALE

QUATTRO EQ. IN CINQUE INCOGNITE ... POSSO ANCORA IMPORRE:

③ $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3|^2 dx = 1$ CONDIZIONE DI NORMALIZZAZIONE DI φ, CON SIGNIFICATO PROBABILISTICO SU TUTTO IL DOMINIO

$|B|^2 + |C|^2 = 1$ E' VERO? VERIFICARE E GIUSTIFICARE

PROBABILITA' DI TRASMISSIONE $|C|^2 = \left| A \dfrac{4 i \alpha \gamma e^{(\gamma - i\alpha)L}}{(\gamma + i\alpha)^2 - (\gamma - i\alpha)^2 e^{2\gamma L}} \right|^2$

E' LA PROVA CHE L'EFFETTO TUNNEL NON E' UNO SCARTO MATEMATICO, MA SPIEGA L'ESISTENZA DI NUCLEI INSTABILI

RADIO
- NUM. DI MASSA 226
- NUM. ATOMICO 88

ERA NOTO CHE TALVOLTA I NUCLEI DI Ra EMETTEVANO NUCLEI DI ELIO = PARTICELLE α

$(\;) \to 222, \; 86$

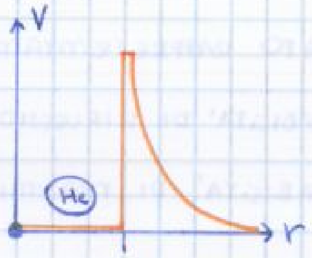
α

ERA ANCHE NOTO CHE 1g DI RADIO EMETTE $3{,}7 \cdot 10^{-10}$ PARTICELLE α AL SECONDO

$$\frac{6{,}022 \cdot 10^{23}}{226} = 2{,}6 \cdot 10^{21} \text{ ATOMI DI RADIO IN 1g}$$

come è possibile? tramite che legge è giustificabile?

SI SUPPONE



raggio ATOMO DI RADIO: $5 \cdot 10^{-18}$ m

E' LA DISTANZA A CUI SI TROVA IL NUCLEO DI He, CIOE' FUORI DAL RAGGIO ATOMICO

IL RADIO E' CARICO, $86e^-$, MENTRE α E' $2e^-$: C'E' INTERAZIONE COULOMBIANA

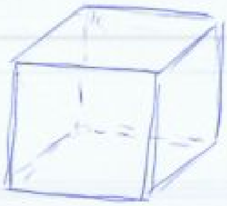
$$V(r) = \frac{(86e^-)(2e^-)}{4\pi\varepsilon_0 \, r_{Ra}} \cong 100 \text{ eV}$$

SI PENSO' CHE ALL'INTERNO DEL NUCLEO CI POTESSE ESSERE UNA BUCA DI POTENZIALE, A POTENZIALE NULLO

SUPERANDO TALE BARRIERA SI IPOTIZZO' UN CROLLO DEL POTENZIALE $\frac{1}{r}$, ANDANDO INVERSAMENTE PROPORZIONALE ALLA DISTANZA

quanto vale la barriera?

1) ΔV ? PER L'AZOTO



$L = 1\,dm \sim \infty$

AZOTO(N) $\longrightarrow$ NUM. DI MASSA 28

$m_N \cong (1{,}67 \cdot 10^{-27}\ Kg) \cdot 28$

$$\Delta V_N = \frac{\pi}{L}\frac{\hbar}{2m} = \frac{\pi}{10^{-1}}\frac{1{,}05 \cdot 10^{-34}}{2 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}} \sim 10^{-7}\ m/s$$

APPROSSIMABILE A VARIAZIONE NEL CONTINUO

VALE IL PRINCIPIO DI CORRISPONDEN[ZA]

2) ΔV? PER UN ELETTRONE LIBERO

$L = 1\,dm$

$m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ Kg$

$$\Delta V_e = \frac{\pi}{L}\frac{\hbar}{2m} = \frac{\pi}{10^{-1}}\frac{1{,}05 \cdot 10^{-34}}{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}} \sim 10^{-2}\ m/s$$

MISURABILE

3) ELETTRONE IN UN ATOMO: $L \simeq 10^{-10}\ m$

$$\Delta V = \frac{\pi}{L}\frac{\hbar}{m} \sim 10^{\cancel{-10}\,-6}\ m \Rightarrow \text{ORBITE QUANTIZZATE}$$

4) RADIO $\rightarrow$ NUM DI MASSA 226

NUM ATOMICO 86 $\rightarrow$ Ra E' CARICO $+86e^-$

1g DI Ra EMETTE $3{,}7 \cdot 10^{-10}$ PARTICELLE α ($-2e^-$) AL SECONDO

$$\frac{6{,}022 \cdot 10^{23}}{228} = 2{,}6 \cdot 10^{21}\ \text{ATOMI}$$

$r_{ATOMO} = 5 \cdot 10^{-18}\ m$

SI IPOTIZZA UN CROLLO DEL POTENZIALE $\sim \frac{1}{r}$

$$V(r) = \frac{(86e^-)(2e^-)}{4\pi\varepsilon_0\, r_{RA}^{8}} \cong 100\ eV$$

PROBABILITA' DI USCITA DI α DALL'ATOMO:

$$\frac{\text{NUM URTI}}{\text{UNITA' DI TEMPO}}\,|C|^2 \cdot (\text{NUM ATOMI IN } 1g) = 3{,}7 \cdot 10^{10}\ \alpha/s$$

07/01/2014

MOMENTO ANGOLARE

$\bar{L} = \bar{r} \times \bar{p} = I\omega$

$I \rightarrow mr^2$

SOSTITUISCO POSIZIONE E QDM CLASSICI CON I CORRISPONDENTI OPERATORI QUANTISTICI

$$\boxed{\hat{L} = \bar{r} \times (-i\hbar\bar{\nabla})} = -i\hbar \begin{pmatrix} y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y} \\ z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z} \\ x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}$$

$$\hat{L}\cdot\hat{L} = \hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$$

ES. 1 ⇟ PARENTESI DI COMMUTAZIONE ≠ 0 SIGNIFICA CHE NON POSSO CONOSCERLE CONTEMPORANEAMENTE:

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] \neq 0$$
$$[\hat{L}_x, \hat{L}_z] \neq 0$$
$$[\hat{L}_y, \hat{L}_z] \neq 0$$

NOTA UNA DELLE TRE, PERDO INFORMAZIONI SULLE ALTRE DUE:

QUINDI $L_x \quad L_y \quad L_z \rightarrow$ CONVENZIONALMENTE SI SCEGLIE $\hat{L}_z$, E LE ALTRE DUE RIVESTONO MINOR IMPORTANZA

$$\hat{L}_z = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

ES. 2 ⇟ $[\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0$

IL QUADRATO DI UN VETTORE PERDE MEMORIA DI DIREZIONE E VERSO: RESTA IL (QUADRATO DEL) MODULO

POSSO CONOSCERE IL MODULO E IL MOM. ANGOLARE SU Z

$$\hat{L}^2 = \underbrace{(-i\hbar)^2\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)}_{L_x^2} + \underbrace{(-i\hbar)^2\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)}_{L_y^2} + \underbrace{(-i\hbar)^2\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)}_{L_z^2}$$

$$\begin{cases} \hat{L}_z\,\varphi(\bar{r}) = l_z\,\varphi(\bar{r}) & ① \\ \hat{L}^2\,\varphi(\bar{r}) = \lambda\,\varphi(\bar{r}) & ② \end{cases}$$

POICHE' COMMUTANO, SEGUE LA RISOLUZIONE DI TALE SISTEMA DIFFERENZIALE

① $-i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(\bar{r}) = l_z\,\varphi(x,y,z)$

NON SI RISOLVE ANALITICAMENTE ↓ RISOLUZIONE NUMERICA

TALE EQ, OPPORTUNAMENTE MODIFICATA, SI PUO' RISOLVERE ANALITICAMENTE:

NON SI RISOLVE IN COORDINATE CARTESIANE, MA LO E' IN COORDINATE POLARI: (INTUITIVAMENTE)

$$-i\hbar \frac{d\Psi}{d\varphi} = l_z \Psi$$

SI ISOLA Ψ: $\quad \dfrac{d\Psi}{\Psi} = \dfrac{l_z}{-i\hbar}\, d\varphi$

RICAVO $\ln \Psi = i \dfrac{l_z}{\hbar}\varphi + \text{cost}$

QUINDI

$$\boxed{\Psi = A e^{i\frac{l_z}{\hbar}\varphi}}$$

SI DETERMINA LA COSTANTE A:

$$\int |\Psi|^2 dr = 1$$

$$\int_0^{2\pi} \underbrace{\left|A e^{i\frac{l_z}{\hbar}\varphi}\right|^2}_{\text{POICHE'}\ |e^{i\alpha}|=1\ \text{SEMPRE}} d\varphi = 1$$

$$\int_0^{2\pi} |A|^2 d\varphi = 1 \rightarrow A^2 = \frac{1}{\int_0^{2\pi} d\varphi}$$

$$A^2\, 2\pi = 1 \rightarrow A = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}$$

SI DETERMINA φ:

QUALUNQUE FUNZIONE IN φ DEVE ESSERE PERIODICA DI 2π

DOPO UN GIRO TORNA ALLO STESSO PUNTO, CIOE'

$$\Psi(\varphi) = \Psi(\varphi + 2\pi)$$

E SI AGGIUNGE L'INFORMAZIONE:

$$\Psi = \cancel{A e^{i\frac{l_z}{\hbar}\varphi}} = A e^{i\frac{l_z}{\hbar}(\varphi+2\pi)} = \cancel{A e^{i\frac{l_z}{\hbar}\varphi}} \cdot e^{i\frac{l_z}{\hbar}2\pi}$$

PROPRIETA' DEGLI ESPONENZIALI CHE PERMETTE DI SEMPLIFICARE COME SEGUE:

$$1 = e^{i\frac{l_z}{\hbar}2\pi}$$

$$1 = \cos\left(\frac{l_z}{\hbar}2\pi\right) + i \sin\left(\frac{l_z}{\hbar}2\pi\right)$$

CHE E' EQUIVALENTE ALLA FORMA

$$\begin{cases} 1 = \cos\left(\frac{l_z}{\hbar}2\pi\right) & \text{Re} \\ 0 = \sin\left(\frac{l_z}{\hbar}2\pi\right) & \text{Im} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{l_z}{\hbar}\cancel{2\pi} = m\cancel{2\pi} & \text{con } m \in \mathbb{Z}, \text{ INTERO} \\ \frac{l_z}{\hbar}\cancel{2\pi} = m\cancel{2\pi} & \dots \end{cases}$$

DA CUI SEGUE CHE

$$l_z = m\hbar$$

TALE AUTOVALORE DEVE VALERE UN NUMERO INTERO DI VOLTE $\hbar$

E' RISOLTO IL PROBLEMA AGLI AUTOVALORI PER LA COMPONENTE DEL MOMENTO ANGOLARE LUNGO L'ASSE z. #

RIASSUMENDO:

SISTEMA IN ROTAZIONE INTORNO A POLO FISSO O:
RIGIDO

$\hat{L}^2 \psi = \lambda \psi \qquad \lambda = l(l+1)\hbar^2$

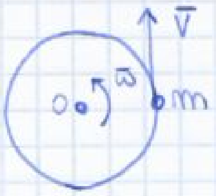
$L_z \psi = l_z \psi \qquad l_z = m\hbar$

$\downarrow$

$l = 0, 1, 2 \dots$

$m = -l, -l+1, \dots 0, \dots l-1, l$

ENERGIA CINETICA DEL SISTEMA ROTANTE



ESPRESSA IN FUNZIONE DI V (QUINDI p)

$$H = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m}$$

$$H = \frac{1}{2} m (r\omega)^2 = \left(\frac{1}{2} m r^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 \cdot \frac{I}{I} =$$

ESPRESSA IN FUNZIONE DI ω

$$= \frac{1}{2} \frac{I^2 \omega^2}{I} = \frac{L^2}{2I}$$

L'ENERGIA CLASSICA E' $H = \dfrac{L^2}{2I}$

E

L'ESPRESSIONE OPERATORE HAMILTONIANO DELL'ENERGIA SI OTTIENE SOSTITUENDO GLI OPERATORI COINVOLTI:

$$\hat{H} = \frac{\hat{L}^2}{2I}$$

$\Downarrow$

$$\hat{L}^2 = 2 \hat{H} I$$

L'ENERGIA E' QUALCOSA DI PROPORZIONALE AL QUADRATO DEL MOMENTO ANGOLARE

$\downarrow$

LE ENERGIE AMMISSIBILI PER UN SISTEMA SONO (AUTOVALORI DELL'OPERATORE $\hat{H}$):

$$E = 2I\lambda = 2I\, l(l+1)\hbar^2$$

CONDIZIONI DI VALIDITA'

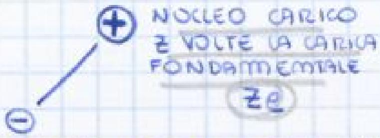
A PATTO CHE IL SISTEMA SIA RIGIDO:
LA DISTANZA TRA m E L'ASSE DI ROTAZIONE NON VARIA

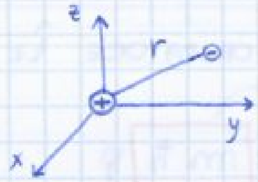
18 EQ. STAZIONARIA DI SCHRÖDINGER PER H
NUMERI QUANTICI n ℓ m
PRINCIPIO DI PAULI
SPIN

Atomo

COME CONSEGUENZA DELL'EQ. DI SCHRÖDINGER SI DOVREBBERO OTTENERE LE IPOTESI DI BOHR, QUI RICAVATE E NON PIÙ POSTE COME PRINCIPI.

① VISUALIZZAZIONE CLASSICA ATOMO





SI INIZIA AD ASSOCIARE UN ELETTRONE, IL PRIMO DEGLI Z RICHIESTI PER NEUTRALITÀ
E L'ELETTRONE E' POSTO AD UNA CERTA DISTANZA r

E' DETTO ATOMO IDROGENOIDE: SI COMPORTA COME L'ATOMO DI H, MA HA UN SUPERIORE NUMERO ATOMICO Z

SI PASSA DALLA VISUALIZZAZIONE CLASSICA A QUELLA QUANTISTICA

② SCRIVO L'ENERGIA DEL SISTEMA:

CINETICA POTENZIALE

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{Zee}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{p^2}{2m} - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

E' L'ENERGIA DI UN SINGOLO ELETTRONE IN UN ATOMO DI NUMERO ATOMICO Z | ATOMO IDROGENOIDE

③ TRASFORMAZIONE IN OPERATORE QUANTISTICO

$$\hat{H} = \frac{(-i\hbar\bar{\nabla})^2}{2m} - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - \frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

RAPPRESENTA UN OPERATORE LA CUI EQ. AGLI AUTOVALORI RAPPRESENTA L'EQ. DI SCHRÖDINGER STAZIONARIA

L'OPERATORE $\hat{H}$ APPLICATO ALLA FUNZIONE D'ONDA E': ④ $\hat{H}\,\psi(\bar{r}) = E\psi$

EQ. DI SCHRÖDINGER PER L'OPERATORE H

ESPLICITANDO:
EQUAZIONE DIFFERENZIALE CHE RESTITUISCE LA FORMA ONDULATORIA PER L'ELETTRONE DI UN ATOMO IDROGENOIDE
E' L'EQ. DI SCHRÖDINGER STAZIONARIA:

EQ. CHE DERIVA DIRETTAMENTE DAI PRINCIPI DELLA MECCANICA QUANTISTICA

⑤ $$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(r) - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\psi(r) = E\psi(r)}$$

CINQUE CONSEGUENZE INTRINSECHE ALLA SOL DELL'EQ. DIFFERENZIALE:

RISOLVO (⑥ LO FECE LAGUERRE; SE NE PRENDE ATTO E VA BENE COSÌ, SI TRAGGONO LE CONSEGUENZE)

- $\psi(r,\vartheta,\varphi) = R_{n,\ell}(r)\; P_{m,\ell}(\cos\vartheta)\; e^{im\varphi}$

TALE EQ. SI RISOLVE IN UNA FORMA CHE DIPENDE DA DUE INTERI m ED ℓ E DALLA DISTANZA e^-- NUCLEO E CON DIPENDENZA DA ϑ E φ IDENTICO ALLA TERZA COMPONENTE DEL MOMENTO ANGOLARE;

LAGUERRE DEDUCE CHE:

- $n = 1, 2, 3, \ldots$
- $\ell = 0, 1, 2 \ldots, n-1$

E IN PIÙ • $E_n = -\dfrac{m Z^2 e^4}{n^2 (4\pi\varepsilon_0)^2\, 2\hbar^2}$

n E' L'UNICO INTERO CHE CONDIZIONA L'ENERGIA DELL'ELETTRONE

- $m = -\ell, -\ell+1, \ldots\, 0$