



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 887

DATA: 12/03/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Arlotta

MATERIA: Fisica II + Qiuz + Eserc.

Prof. Descrovi

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

RICHIAMI di CALCOLO VETTORIALE

Il sistema cartesiano è definito da

$$\vec{u}_i \quad \text{dove } i = 1, 2, 3$$

o dalle lettere $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

Sono mutualmente ortogonali:

$$\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = \delta_{ij} \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Il prodotto INTERNO si indica con \cdot e si calcola come

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{w} &= \\ &= v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z \end{aligned}$$

Il prodotto ESTERNO o VETTORIALE si indica con \wedge e si calcola come

$$\begin{aligned} \vec{v} \wedge \vec{w} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i}(v_y w_z - v_z w_y) + \vec{j}(v_x w_z - v_z w_x) + \vec{k}(v_x w_y - v_y w_x) \end{aligned}$$

OPERATORI VETTORIALI

- ∇ è un vettore con le tre componenti vettoriali definite dalle derivate parziali:

$$\nabla \equiv \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

Se ho $f(x, y, z)$ e gli applico ∇ , ottengo $\text{grad } f$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \quad (\text{ed è un vettore})$$

Se ho un campo vettoriale $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{v} &= \text{divergenza di } \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ &(\text{ed è uno scalare}) \end{aligned}$$

Quindi se ho un vettore \vec{v} con rotore del gradiente nullo e divergenza del rotore nullo soddisfa l'equazione di Laplace

$$\begin{cases} \vec{v} = \nabla f \\ \nabla \cdot \vec{v} = 0 \end{cases} \rightarrow \nabla^2 f = 0$$

1) Dato $f(x, y, z)$ e data una superficie di livello ($f(x, y, z) = \text{costante}$), se in essa considero un $d\vec{s} = \vec{i} dx + \vec{j} dy + \vec{k} dz$ allora la variazione della funzione

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

$$\nabla f \cdot d\vec{s} = 0$$

ovvero ∇f e \vec{s} sono ortogonali.

2) La circolazione è definita come

$$I = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

dove \vec{v} è un campo vettoriale nello spazio
me dato che

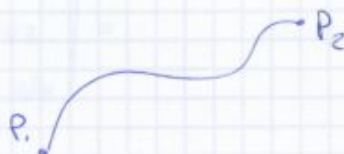
$$\vec{v} = \nabla f$$

$$\int_S \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_S \nabla f \cdot d\vec{s} = \int_{P_1}^{P_2} df = f(P_2) - f(P_1)$$

perciò il campo è conservativo

Se integro su una linea chiusa:

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0$$



Il teorema di Stokes dice che

$$\oint_S \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint_S (\nabla \wedge \vec{v}) \cdot \vec{n} \, dS$$

Permette il passaggio di dimensionalità nell'integrale.

FORZA ELETTRICA

La forza elettrica, a differenza di quella gravitazionale, può attrarre e respingere. Questa particolare caratteristica non è delle masse ma delle cariche.

Per certi materiali, lo strato più esterno delle cariche del materiale esterno, creando cariche indotte. Oppure cariche elettriche, caricando negativamente.

→ Elettrometro a foglie

È fatto isolato rispetto a terra.

Quando trasferisco delle cariche, le foglie iniziano a separarsi l'una dall'altra, proporzionalmente alla forza che interagisce tra esse.



Per separarle, posso anche non dare cariche ma indurre il solo uno spostamento di cariche. Avvicinando ad un polo un oggetto di tipo vetro carico \oplus . Le cariche dell'oggetto vicino viciniano all'interno e, per la presenza delle cariche \oplus , si raccolgono che accumulano di cariche per mantenere la neutralità.



→ \ominus sul polo

→ \oplus sulle foglie

Dato che le foglie hanno lo stesso eccesso di carica e si respingono. Questo fenomeno si chiama induzione elettrica.

Seguendo la fisica newtoniana per le masse, Coulomb ha scritto l'espressione per la forza elettrica.

Con le masse era comodo definire:

$$\rho = \frac{M}{V}$$

$$\text{e } M = \iiint_V \rho(x, y, z) dv$$

Allo stesso modo si tratta il concetto di cariche distribuite su un volume.

Se ho una carica Q in un volume V , posso definire

$$\rho = \frac{Q}{V} \quad \text{in termini finiti}$$

ma tale ρ non ha disomogeneità di cariche.

Allora

$$dq = \rho(x, y, z) dv$$

$$Q = \iiint_V \rho(x, y, z) dv$$

Suppongo di avere un oggetto fisico con carica Q e volume V elettricamente omogeneo.



Ne prendo un volumetto di qualunque a cui associo una carica dq .

Pongo una carica q_0 in $P(x, y, z)$.

La forza totale sarà

$$F(x, y, z) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \rho \frac{1}{r^2} dv$$

r è la distanza di ogni singolo volumetto rispetto a P .

Riferisco il volume a un sistema x', y', z' ; quindi r diventa

$$r = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}$$

e dv

$$dv = dx' dy' dz'$$

Definisco una grandezza E vettoriale:

CAMPO ELETROSTATICO

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \left[\frac{N}{C} \right]$$

Se dividiamo per q_0

$$\frac{W_{TOT}}{q_0} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

FORZA ELETTROSTATICA

Nel caso di campo elettrostatico,

$$\mathcal{E} = \phi$$

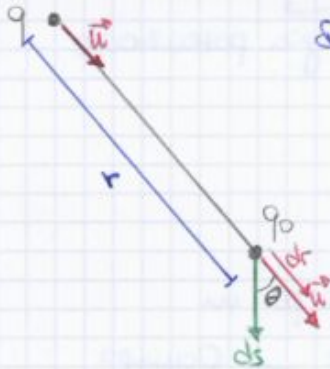
Il valore numerico del lavoro dipende anche dal segno della carica; ciò deriva dal fatto che la forza possa essere repulsiva o attrattiva.

CAMPO GENERATO da una CARICA PUNTFORTE

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}$$

Qual'è il lavoro del campo elettrico \vec{E} attuato per avere uno spostamento infinitesimo?

$$dW = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} \cdot d\vec{s}$$



Devo risolvere il prodotto scalare tra \vec{u} e $d\vec{s}$

Nota che $d\vec{s}$ può essere scomposta in una componente normale, che fa il lavoro non da contributo, e in una componente tangenziale cioè parallela ad \vec{u} , l'unica componente di $d\vec{s}$ che dà contributo al lavoro e la componente

parallela ad \vec{u} che corrisponde dire "ciò"

$$dW = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2}$$

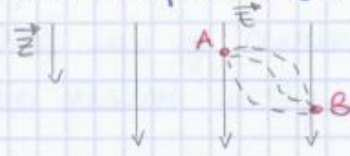
$$\int_A^B dW = \int_A^B \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{dr}{r^2}$$

l'unica dipendenza è la distanza r dalla carica sorgente perciò non mi interessa il punto iniziale o finale ma la distanza dalla carica sorgente quindi come estremi di integrazione prendo r_A e r_B

$$W = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

Perciò se passo da V piccolo a V grande, per avere la relazione costante passo da un campo elettrostatico ad alto potenziale verso un campo a basso potenziale.

Un caso particolare di campo elettrico uniforme è il parallelismo delle linee di campo



Il potenziale del campo, dati A e B, si calcola come:

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = \underline{E(z_B - z_A)}$$

essendo
uniforme
 $E = \text{costante}$

con z in quanto mi interessa la direzione delle linee del campo, identificate da z

! La differenza

di potenziale è univocamente determinata; il potenziale puntualmente:

$$V_A = -E \cdot z_A + \text{costante}$$

Una superficie di livello è il luogo geometrico dei punti che definisce una superficie perpendicolare al campo \vec{E} , quindi V è costante. Il lavoro è calcolabile come

$$q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = q \int_A^B dV$$

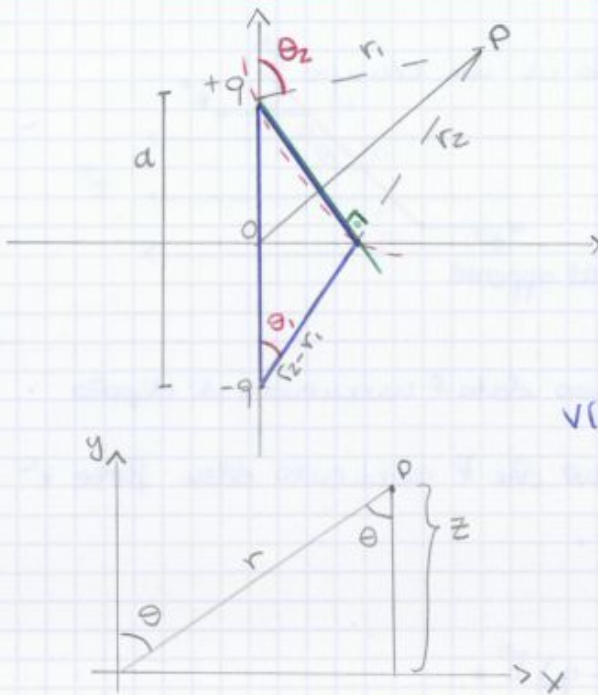
$$E = -\nabla V$$

ma dato che V è costante, il tutto è uguale a ϕ .



! Tutti i lavori volti per far muovere una carica su delle superfici equipotenziali sono tutti nulli.

- ↳ Per un punto passa una SUPERFICIE EQUIPOTENZIALE
- ↳ le LINEE di FORZA sono sempre PERPENDICOLARI alle superfici equipotenziali



• dal triangolo costruito noto che

$$r_2 - r_1 = a \cos \theta$$

dato che θ_1 e θ_2 sono simili tra loro e a θ .

perciò:

$$V(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{a \cos \theta}{r^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2}$$

$$= \frac{p \cdot z}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad \text{avendo ipotizzato } r \gg a$$

Ricavo ora le componenti del campo elettrico:

$$E_x = - \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3zx}{r^5}$$

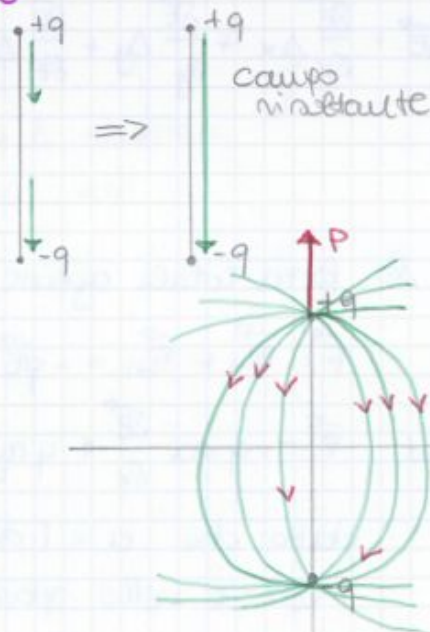
$$E_y = - \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3zy}{r^5}$$

$$E_z = - \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\cos^2\theta - 1}{r^3}$$

Linee di forza di un dipolo

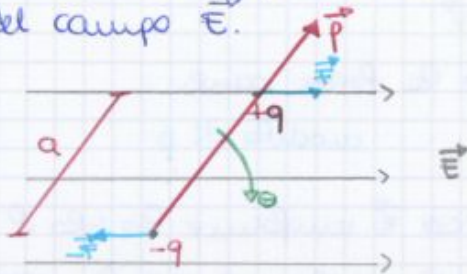
Dato da cariche

Se mi allontano dall'asse, il campo assume una caratteristica per andare da +q a -q



Quindi
$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E}$$

Quando un dipolo è inserito in un campo elettrico \vec{E} , il momento del dipolo tende a riportarlo parallelo alle linee del campo \vec{E} .



! Non c'è notazione né
 $\hookrightarrow \vec{p} \parallel$ al campo
 $\hookrightarrow \vec{p} \nparallel$ al campo

Si è anche detto che la forza totale agente su poteva esprimersi come nel dipolo

$$F = (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E}$$

È possibile semplificare tale espressione?

Il campo \vec{E} è esprimibile come gradiente essendo conservativo; perciò la forza è

$$\vec{F} = -q \nabla V = -\nabla U$$

Quanto vale l'energia potenziale delle due cariche del dipolo inserite nel campo?

Nella carica $-q$ $U = qV(x, y, z)$

+ q $U = qV(x+a_x, y+a_y, z+a_z)$

Se scrivessi l'ultima espressione come

$$V(x+a_x, y+a_y, z+a_z) = V(x, y, z) + \frac{\delta V}{\delta x} a_x + \frac{\delta V}{\delta y} a_y + \frac{\delta V}{\delta z} a_z$$

quindi la differenza di potenziale tra i due punti è

$$\Delta U = -q \Delta V = -q (V(b) - V(a))$$

LEGGE DI GAUSS (1° equazione di Maxwell)

Se calcolo il flusso di un campo elettrico attraverso una superficie chiusa, esso è uguale alla carica complessiva contenuta nella superficie S , diviso ϵ_0 :

$$\Phi_{\vec{E}} = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, ds = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

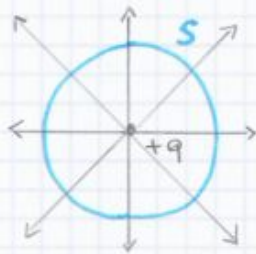
Nel caso di sorgente puntiforme:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \vec{U}_r$$

Immagino di calcolare il flusso su una superficie sferica di dato raggio r :

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(R^2)} \int_S ds = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cdot \underbrace{4\pi R^2}_{\text{superficie della sfera}} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

è costante in tutto la sfera, in ogni punto, data la stessa distanza dall'origine



In questo caso il flusso è sempre $\neq \emptyset$ in quanto tutte le linee di campo escono da S , quindi hanno un'origine interna

Se invece



il flusso sarebbe nullo

$$\Phi = \emptyset$$

Nel caso di un dipolo il flusso è nullo ma questo non implica che anche il campo lo sia.

Perché il Φ è nullo? In un dipolo vi sono due cariche quindi le linee di campo entrano e uscono. Il bilancio complessivo sarà nullo.

CONDUTTORI e DIELETRICI

Si definisce **ISOLANTE** un materiale in cui non vi è movimento di carica (vi viene caricata una carica q ed essa rimane isolata in una porzione di materiale)

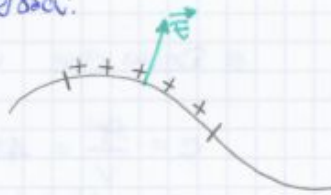
Si definisce **CONDUTTORE** un materiale dove la carica tende a distribuirsi sulla superficie.

Le cariche possono posizionarsi in superficie e non nel volume; infatti la carica netta all'interno di un volume è ϕ .

Di conseguenza, nei conduttori il campo interno è

$$\vec{E}_{int} = \phi$$

Se considero la superficie del conduttore, la posso approssimare ad una superficie piana se considero un elemento piccolo di essa:



Il campo è perpendicolare alla superficie (localmente piana)

La superficie del conduttore risulta essere EUPOTENZIALE con $V = \text{costante}$

Come nel caso della superficie sferica, la discontinuità del campo \vec{E} , attraversando una superficie, è anche nei conduttori

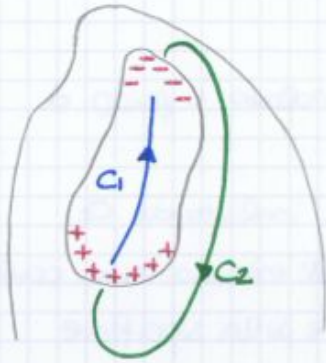
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_n$$



Il campo generato vicino alla superficie del conduttore è perpendicolare ad essa e vale $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$

Inoltre, data la geometria del conduttore, il campo generato sulle punte del pezzo conduttore è maggiore di quello generato sulla sua superficie piana, perché il raggio di curvatura della superficie è minore e σ è maggiore.

IL CAMPO \vec{E} È TANTO MAGGIORE QUANTO È PIÙ GRANDE σ .



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Per definizione di \vec{E}
come campo conservativo

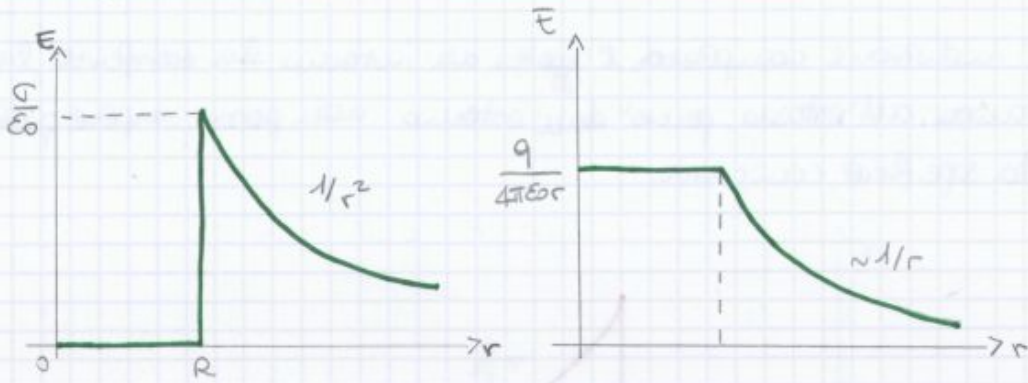
$$\int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{C_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Estrauriti i contributi dovuti essere nulli per rispettare la conservatività perciò l'ipotesi che sulle pareti della cavità (percorso C_1) possano esserci distribuzioni opposte di carica generanti un campo $\vec{E} \neq 0$ non avviene. Inoltre questo porterebbe ad una differenza di potenziale che invece, per le proprietà del conduttore, è nulla.

QUINDI, ANCHE IN PRESENZA DI CAVITÀ:

- 1) La carica si distribuisce sulla superficie e non sulle pareti della cavità;
- 2) Il campo $\vec{E} = 0$ all'interno; il potenziale è costante in ogni punto interno.

Conduttore cavo con altro conduttore interno



$$E = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$V = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

per $r < R$

$$\begin{cases} E = 0 \\ V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = \text{costante} \end{cases}$$

APPLICANDO ALLA SFERA

$0 < r \leq R_1$ $\vec{E} = 0$

$$V = V_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

$R_1 \leq r \leq R_2$ $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

$R_2 \leq r \leq R_3$ $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 0$

$$V = V_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

rimane all'interno del conduttore

$r \geq R_3$ $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

si vede solo la carica esterna

Il campo E

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ è il campo per un piano indefinito uniformemente carico.

Il potenziale V

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 E dx = E \cdot h$$

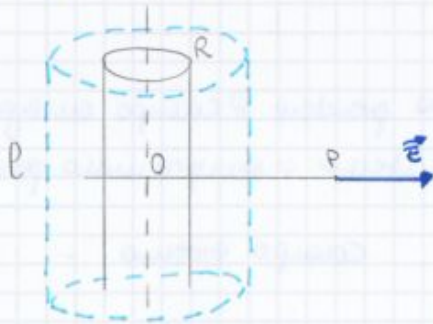
$$\Delta V = \frac{\sigma}{\epsilon_0} h = \frac{\sigma \Sigma}{\epsilon_0 \Sigma} h = \frac{q}{\epsilon_0 \Sigma} h$$

Dato che $\Delta V = \frac{q}{C}$ e $\Delta V = \frac{qh}{\epsilon_0 \Sigma}$

allora $\frac{1}{C} = \frac{h}{\Sigma \epsilon_0} \rightarrow C = \frac{\Sigma \epsilon_0}{h}$

C'è poi il caso del condensatore cilindrico. Si parte da una

distribuzione cilindrica di carica:

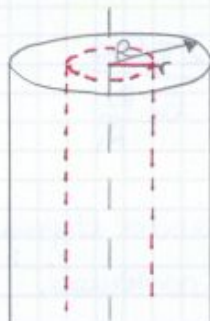


→ si applica Gauss ad una superficie cilindrica

$$\Phi(E) = r 2\pi l E = \frac{\lambda}{\epsilon_0} \quad \left(\lambda = \frac{q}{l} \right)$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} \vec{u}_r \quad \text{se } r > R$$

All'interno del cilindro ($r < R$); considero una superficie all'interno del condensatore



$$\Phi(E) = 2\pi r l E = \frac{q'}{\epsilon_0} \rightarrow \text{riferito alla carica di quella superficie}$$

$$\text{con } q' = \lambda \pi \frac{r^2}{R^2}$$

Se immaginiamo densità di carica volumica ρ :

$$q' = \rho \cdot \underbrace{\pi r^2 l}_{\text{volume superficie di Gauss}}$$

Sostituendo nel campo

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda r}{2\pi \epsilon_0 R^2} \vec{u}_r$$

questa approssimazione vale per armature poco distanti, ovvero se

$$R_2 \approx R_1 \approx R$$

$$R_1 - R_2 \ll R$$

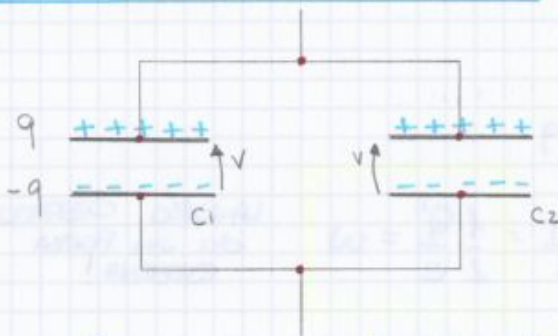
e definisco $R_1 - R_2 = h$ (distanza tra le armature)

allora

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 dR}{h} = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h}$$

perciò in queste condizioni il condensatore cilindrico è assimilabile al condensatore piano (in termini di capacità).

CONDENSATORI IN PARALLELO



Collego i due condensatori con materiale conduttore, quindi la differenza di potenziale è la stessa.

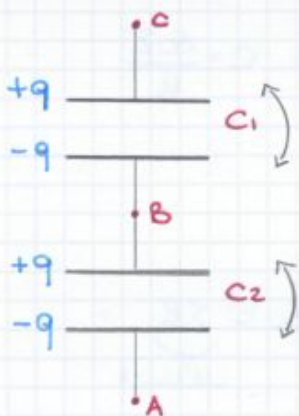
$$\begin{cases} V = \frac{q_1}{C_1} \\ V = \frac{q_2}{C_2} \end{cases}$$

La C_{eq} sarà la somma delle due capacità:

$$q_1 + q_2 = V(C_1 + C_2)$$

$$C_{eq} = \frac{q}{V} = C_1 + C_2$$

CONDENSATORI IN SERIE



In ogni condensatore rispetto l'induzione totale da parte B, deve rispettare la neutralità:

$$\begin{cases} V_C - V_B = q/C_1 \\ V_B - V_A = q/C_2 \end{cases}$$

Si vuole trovare la relazione tra V_C e V_A :

$$V_C - V_A = \frac{q}{C_1} + V_B + \frac{q}{C_2} - V_B$$

$$V_C - V_A = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2}$$

ed $u = \frac{U}{V} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ densità di energia elettrostatica

In forma differenziale

$$dU = u \cdot dV = \frac{1}{2} E^2 \epsilon_0 dV$$

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int E^2 dV$$

ESEMPIO

Calcolo dell'energia elettrostatica per una distribuzione sferica di cariche:

$$U = \frac{1}{2} qV$$

Il potenziale per una sfera è

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

perciò $U = \frac{1}{2} q \cdot \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$

Cosa avviene se la carica è puntiforme? Dato che U dipende inversamente da R, per una carica puntiforme (R → 0),

un wirebbe una U = ∞ → MA LA CARICA PUNTIFORME È UN' ASTRAZIONE!

Cosa avviene se la sfera è piena (carica distribuita anche all'esterno):

Campo Interno per $r \geq R$ $E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ $q = \underbrace{\frac{4}{3}\pi R^3}_{\text{superficie}} \rho$

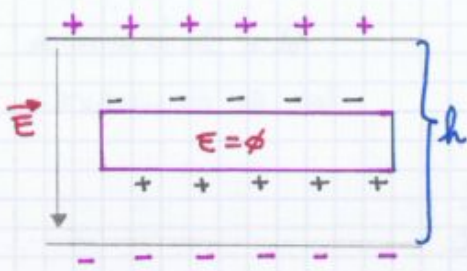
Applicando Gauss per $r < R$ $E(r) = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ $q' = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$

ovvero $E(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$

$$U = \int \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2(r) dV$$

Il campo non può essere considerato costante perché varia punto per punto

Si è già detto dei conduttori



CAMPO $E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

POTENZIALE $V_0 = E_0 \cdot h$

Se aggiungo una lamina

all'interno:

sulle facce della lamina $\leftarrow \vec{E} = \phi$ (all'interno)

si formano 2 distribuzioni di cariche che annullano il campo interno.

e il potenziale

$$V = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_0(h - s) < V_0$$

Il potenziale tra due armature è minore del potenziale esterno.

CASO DEI DIELETRICI (ISOLANTI)

Non c'è più induzione totale e separazione di cariche. Il campo interno non è più uguale.

Posso misurare un potenziale

$$V_k < V_0$$

V_k è il potenziale misurabile più basso, quando il materiale è pieno di isolante.

Costante Dielettrica Relativa

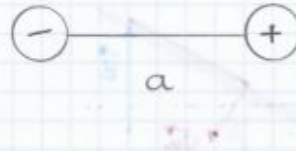
$$K = \frac{V_0}{V_k}$$

K è il rapporto tra il potenziale nel vuoto e con il dielettrico

$K > 1 \rightarrow$ caratterizza il comportamento elettrico del materiale
 anche ϵ_r \rightarrow dipende solo dal materiale

$$\langle \vec{p} \rangle = ze \cdot \vec{a}$$

momento
medio di
dipolo



PASSAGGIO da una DISTRIBUZIONE MICROSCOPICA A MACROSCOPICA:

Se per un volume dato ΔV avessi ΔN momenti di dipolo potrei scrivere

$$\Delta \vec{p} = \Delta N \cdot \langle \vec{p} \rangle$$

Sarebbe più conveniente dividere per volume

$$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta V} = \frac{\Delta N}{\Delta V} \cdot \langle \vec{p} \rangle = n \langle \vec{p} \rangle$$

momento di dipolo
per unità di volume

dove

$$\vec{p} = n \langle \vec{p} \rangle$$

vettore
POLARIZZAZIONE

$\left[\frac{C}{m^2} \right]$ che è una
densità
superficiale di
carica

perciò nel condensatore pieno di dielettrico
possa dire che si sviluppano cariche interne dando origine
ad un campo di polarizzazione. All'interno di ϵ_p la



carica media è nulla ma non
pelle netta.

CASO del CONDENSATORE PIANO con
DIELETTRICO ALL'INTERNO, POLARIZZATO
UNIFORMEMENTE

Il vettore polarizzazione è quindi costante in ogni punto.
Se considero un cilindretto del campo \vec{E}_p (campo di polariz-
zazione) con area $d\Sigma_0$ e distanza dh

$$d\vec{p} = \vec{P} \cdot dV = P \cdot d\Sigma_0 \cdot dh$$

$$d\vec{p} = dh \cdot dq_p = d\Sigma_0 \cdot P \cdot dh$$

$$\sigma_p = \frac{dq_p}{d\Sigma} = P \frac{d\Sigma_0}{d\Sigma} = P \cos \theta^*$$

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{u}_n$$

$$dq_p = P d\Sigma_0$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

Divergenza di \vec{D} equivale alle cariche libere ρ

La versione integrale del vettore è

$$\oint_{\Sigma} \vec{D} \cdot \vec{u}_n \, d\Sigma = q \rightarrow \text{sono solo le cariche in eccesso (no dielettrico)}$$

Il vettore \vec{D} ora va a contenere il vettore polarizzazione

Se $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ | relazione costitutiva
 e $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$ | del dielettrico

\downarrow
 $\vec{P} \propto \vec{E}$

Con un sistema d'equazioni

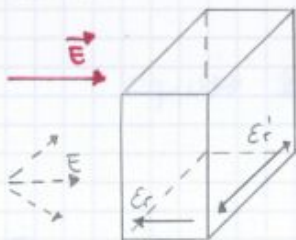
$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi \vec{E} \\ \vec{D} &= \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} \\ \vec{D} &= \epsilon_0 \kappa \vec{E} = \epsilon \vec{E} \end{aligned}$$

indicata a volte con ϵ_r

è un numero, essendo il fattore di abbattimento del potenziale per il dielettrico

Scopro che \vec{D} è parallelo ad \vec{E} nei dielettrici lineari. Tutto dipende da come immergo il dielettrico nel campo \vec{E} .

ESEMPIO



C'è una diversa polarizzabilità nel dielettrico.

A seconda del campo \vec{E} , la ϵ_r varia a seconda delle facce del materiale

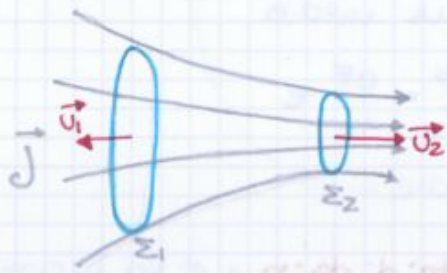
Questo corrisponde a

$$U = \frac{1}{2} \epsilon \vec{E}^2 \sum V$$

$$\mu = \frac{U}{\sum V} = \frac{1}{2} \epsilon \vec{E}^2 = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon}$$



CASO SPECIFICO PER L'EQUAZIONE DI CONTINUITA'



Caso di un campo vettoriale \vec{J} attraverso un conduttore con ingresso e uscita diverse. $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$

Assumendo la stazionarietà del sistema, il flusso in ingresso è uguale a quello in uscita.

$$\oint \vec{J} \cdot \vec{u} \, d\Sigma = \underbrace{\int_{\Sigma_1} \vec{J}_1 \cdot \vec{u}_1 \, d\Sigma_1}_{\text{flusso negativo INGRESSO}} + \underbrace{\int_{\Sigma_2} \vec{J}_2 \cdot \vec{u}_2 \, d\Sigma_2}_{\text{flusso positivo USCITA}} = - \frac{dq}{dt} = \phi \quad \text{per la stazionarietà}$$

Per le considerazioni precedenti tutto è uguale a $-i_1 + i_2 = \phi$

! Dato che \vec{J} è diretto come \rightarrow

$$\begin{cases} J_1 u_1 < 0 \\ J_2 u_2 > 0 \end{cases}$$

Quindi non importa la sezione del conduttore, la corrente in stazionarietà è la stessa

$$i_1 = i_2 \quad \text{! Condizione di stazionarietà}$$

Posso pensare ad un metallo come un gas d'elettroni.

È a un movimento elettronico con conseguenti urti, ogni particella percorre un percorso l e data la velocità v , calcolo il tempo tra un urto e l'altro:

$$\tau = \frac{l}{v} \quad l = \text{libro cammino medio}$$

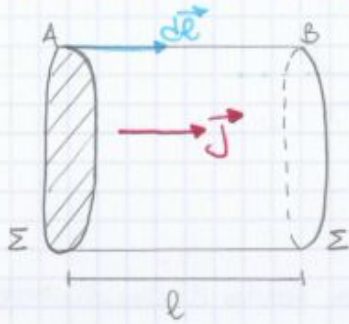
Applichiamo un campo elettrico; la velocità della particella dopo l'urto aumenterà in relazione al campo che sto applicando:

$$v_{i+1} = v_i - \frac{eE}{m} \tau \quad \text{! } \frac{eE}{m} = \frac{F}{m} = a$$

$v = a \cdot \tau$

↓
velocità assunta prima dell'urto successivo

Considerando il mondo macroscopico:



$$i = j \Sigma = \frac{\Sigma}{\rho} E \Rightarrow *E = i \frac{\rho}{\Sigma}$$

Se considero una parte dl

$$V = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = *E l$$

perciò

$$V = \frac{\rho l}{\Sigma} i$$

con

$$R = \frac{\rho l}{\Sigma}$$

quindi

$$V = R \cdot i$$

Se il filo è stretto, R aumenta; se il filo è largo, R diminuisce.

Ricapitolando:

$$\begin{aligned} \vec{j} &= \sigma \vec{E} \\ \vec{E} &= \rho \vec{j} \\ V &= R \cdot i \end{aligned}$$

relazione microscopica

relazione macroscopica

Dato un conduttore con resistività ρ , una stessa sezione Σ calcolo la R in tutto il conduttore come:

$$R = \int_A^B \frac{\rho}{\Sigma} dl = \frac{\rho}{\Sigma} l$$

e quindi posso dire $R = \frac{\rho}{\Sigma} l$

$$\text{ma } \rho = \frac{1}{\sigma} \rightarrow R = \frac{l}{\sigma \Sigma}$$

perciò

$$\sigma = \frac{l}{R \Sigma}$$

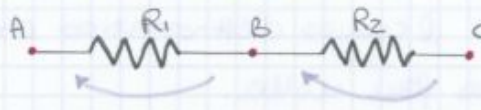
Questo è un buon risultato perché posso scoprire σ solo con grandezze macroscopiche.

Tornando al discorso energetico:

$$P_e = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

RESISTORI IN SERIE

Hanno un estremo in comune



Considero prima le differenze di potenziale e poi complessivamente si mantiene per la conservazione della carica

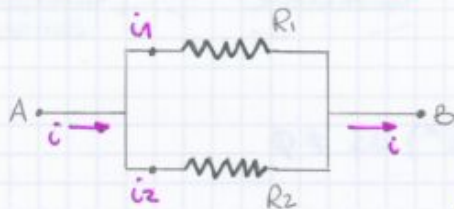
$$\begin{cases} V_A - V_B = R_1 \cdot i \\ V_B - V_C = R_2 \cdot i \end{cases}$$

$$(V_A - V_C) = i(R_1 + R_2) = R_{eq} i$$

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

$R_{eq} > R$ di ciascuna componente

RESISTORI IN PARALLELO



Hanno entrambi gli estremi in comune.

$$i = i_1 + i_2$$

V è la stessa

$$\begin{cases} V = V_A - V_B = R_1 i_1 \\ V = R_2 i_2 \end{cases}$$

per ogni conduttore

$$V = R_{eq} i = R_{eq} (i_1 + i_2) \neq$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}$$

$R_{eq} < R$ di ogni componente

C'è la necessità di uno strumento che la STESSA CORRENTE in un circuito:

GENERATORE di TENSIONE

Dato un potenziale in un conduttore

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = R i$$

Considerando una linea chiusa

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = R \cdot i$$

$\underbrace{\hspace{2cm}}_{f_{em}}$

Posso inoltre dire che la legge di Ohm è applicabile anche dentro il generatore essendo caratterizzato dalla fem e da una resistenza interna in cui scorre corrente.

Posso dire che

$$\int_B^A (\vec{E}_{el} + \vec{E}^*) ds = r i$$

con r = resistenza interna del generatore

In conclusione dato che

$$fem = \mathcal{E} = \int_B^A \vec{E}^* ds \neq 0$$

e sostituendo le precedenti relazioni:

$$\int_B^A \vec{E}_{el} ds + \int_B^A \vec{E}^* ds = r i$$

$$\parallel$$

$$-\int_A^B \vec{E}_{el} ds$$

forza elettromotrice esterna
al generatore

$$\parallel$$

$$-R i$$

OHM all'esterno

Quindi

$$\mathcal{E} = r i + R i = R i$$

$$R i = R i + r i$$

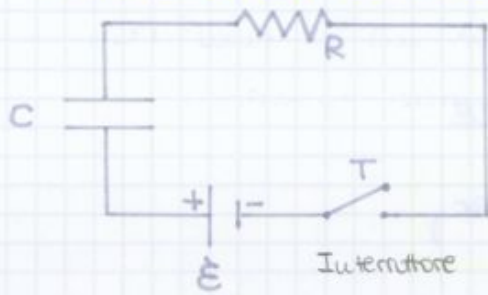
$$i = \frac{\mathcal{E}}{R+r}$$

perciò avendo una caduta di potenziale $V_A - V_B$, la differenza del potenziale ai capi della R esterna è

$$V_A - V_B = R i = \mathcal{E} - r i$$

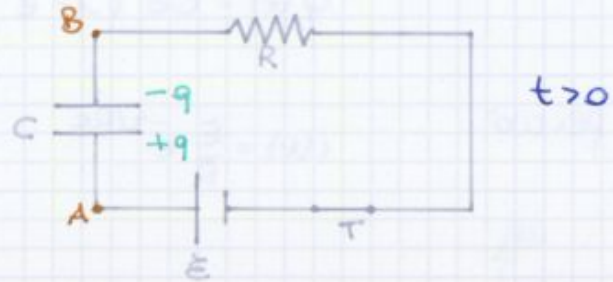
⚠ \mathcal{E} è anche la differenza di potenziale misurata ai capi del generatore nel caso di circuito aperto.

CARICA di un CONDENSATORE



Al tempo $t=0$, l'interruttore si chiude e le cariche si accumulano sul condensatore

A interruttore T aperto, non circola corrente, il condensatore è scarico!



Per ipotesi trascuriamo la resistenza interna del generatore ($r=0$) la differenza di potenziale che si crea ai capi di C è la stessa ai capi del generatore

$$V_A - V_B = \mathcal{E} \quad \text{con } q_0 = CE \quad \text{MASSIMA CARICA DEL GENERATORE}$$

In un istante generico calcolo \mathcal{E} con la 2° legge di Kirchhoff:

$$\mathcal{E} = V_R(t) + V_C(t) = R \cdot i(t) + \frac{q(t)}{C}$$

Dato che

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

$$R \frac{dq}{dt} = \mathcal{E} - \frac{q}{C} \rightarrow \frac{q}{q - CE} = - \frac{dt}{RC}$$

Integrando

$$\int_0^{q(t)} \frac{dq}{q - CE} = - \frac{1}{RC} \int_0^t dt$$

$$\ln \frac{q - CE}{-CE} = - \frac{t}{RC}$$

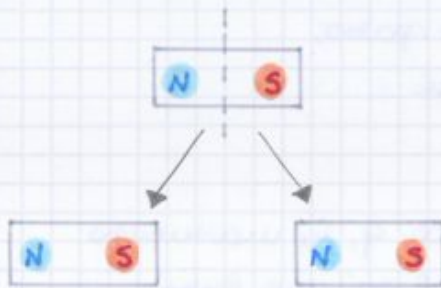
$$e^{\ln \frac{q - CE}{-CE}} = e^{-t/RC}$$

CAMPI MAGNETICI

Le FORZE MAGNETICHE influenzano le cariche solo se esse sono messe in movimento.

Sperimentalmente si è visto che sorgenti del campo magnetico non possono essere ridotte a sorgenti singole (punti fermi)

↳ si ricavano sempre al caso BIPOLARE



⚠ Non sono isolate le cariche
Spezzando il blocchetto otteniamo due blocchetti N e S, e così all'infinito.
Questo fa parte del modello della elettromagnetismo

Dato che la sorgente è bipolare, le linee di campo sono sempre chiuse, ha la sorgente all'inizio di un polo e alla fine dell'altro.



CONSEGUENZA: FLUSSO del CAMPO MAGNETICO \vec{B} su una SUPERFICIE Σ

$$\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{u}_n = 0$$

poiché le linee del campo entranti sono le stesse di quelle uscenti

oppure $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

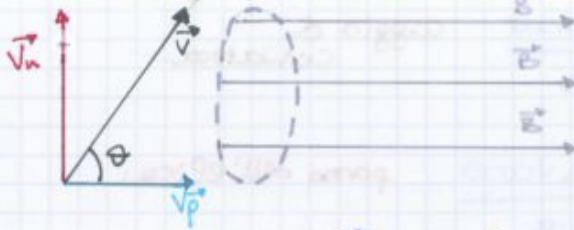
perciò il campo magnetico è un campo **solenoidale**

Se considero una linea chiusa immersa in un campo magnetico e considero il flusso del campo \vec{B}

$$\int_{\Sigma_1} \vec{B} \cdot \vec{u}_n d\Sigma_1 = \int_{\Sigma_2} \vec{B} \cdot \vec{u}_n d\Sigma_2$$

Quindi la forza modifica la velocità solo come direzione e non in modulo; devia una sua accelerazione.

Dato una particella che si muove dentro \vec{B} :



per un angolo θ possiamo scomporre la \vec{v} nelle due componenti \vec{v}_n e \vec{v}_p :

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} = q(\vec{v}_p + \vec{v}_n) \wedge \vec{B} = q\vec{v}_n \wedge \vec{B}$$

* $\vec{v}_p \wedge \vec{B} = 0$
poiché sono vettori paralleli

$\vec{v}_p \parallel \vec{v}_n \Rightarrow v_p = v \cos \theta$ componente tangenziale

$\vec{v}_n \perp \vec{v}_p \Rightarrow v_n = v \sin \theta$ componente normale

DIFFERENZE IMPORTANTI tra campi \vec{E} e \vec{B} :

Campo \vec{E} :

- lavoro compiuto $\neq 0$
- $E_k \neq$ costante
- v varia in modulo e direzione
- $\vec{F}_{el} \parallel \vec{E}$

\rightarrow accelera la particella

Campo \vec{B} :

- lavoro nullo
- $E_k =$ costante
- v varia solo in direzione
- $\vec{F}_{or} \perp \vec{B}$

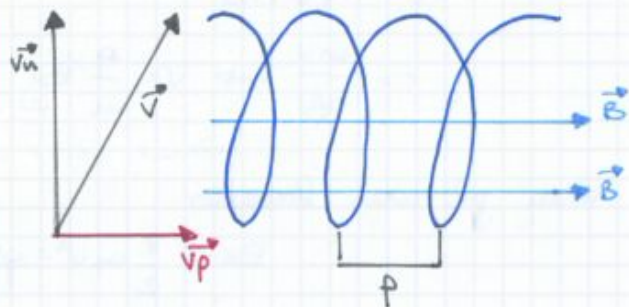
\rightarrow non accelera la particella.

- Se dimentichiamo la velocità v_p la particella inizierebbe a ruotare attorno alle linee di campo

Se considero anche la componente v_p la particella si sposta oltre a ruotare identificando il movimento dell'elica

\rightarrow MOTO RETTILINEO UNIFORME

L'UNIONE DEI DUE MOTI CREA UN MOTO ELICOIDALE UNIFORME lungo l'ASSE di B



Composizione del moto

$$\begin{cases} \vec{v}_n & \text{O} \\ \vec{v}_p & \text{—} \end{cases}$$

ma per il condensatore piano, l'energia cinetica di ogni ione è

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = q \Delta V$$

$$v^2 = \frac{2q}{m} \Delta V$$

unendo le due espressioni

$$\begin{cases} v^2 = \frac{2q}{m} \Delta V \\ v = \frac{q}{m} B r \quad \text{dal moto circolare} \end{cases}$$

$$\frac{q^2}{m^2} B^2 r^2 = \frac{2q}{m} \Delta V \rightarrow \frac{q}{m} = \frac{2 \Delta V}{B^2 r^2}$$

Il rapporto $\frac{q}{m}$ è determinato per ioni dalla misura di r , nota la ΔV (differenza di potenziale acceleratrice) e \vec{B} (campo magnetico).

FORZA MAGNETICA SU UN CONDUTTORE PERCORSO DA CORRENTE

Cosa succede se le cariche si muovono in conduttore immerso in un campo magnetico \vec{B} ?

La forza di Lorentz media le velocità:

$$\vec{F}_L = -e \vec{v} \wedge \vec{B} \quad (\text{per un singolo } e^-)$$

Perciò con un conduttore di superficie Σ , n portatori di carica, per una porzione di conduttore $d\vec{S}$

$$d\vec{F} = n \Sigma d\vec{S} (-e) \vec{v} \wedge \vec{B}$$

$$\text{ma } \vec{J} = n(-e) \vec{v}$$

$$d\vec{F} = \Sigma \vec{J} \wedge \vec{B} d\vec{S}$$

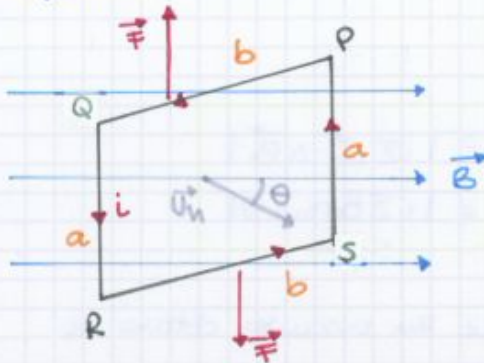
La densità di forza per unità di volume

$$\vec{F}_e = \vec{J} \wedge \vec{B}$$

diviso per il volume $\Sigma d\vec{S}$

MOMENTI MECCANICI SU CIRCUITI PIANI

Data una lastra conduttrice (spira) immersa in un campo \vec{B} uniforme:



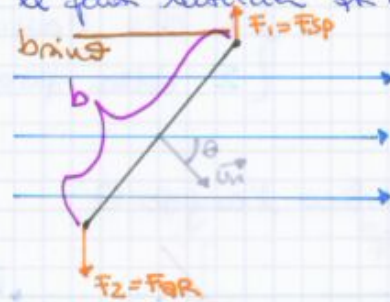
Tratto \overline{PQ}

la forza di Lorentz tira verso l'alto. È l'opposto del tratto RS.

Per il principio di azione e reazione

$$\vec{F}_{PQ} + \vec{F}_{RS} = 0$$

Per le parti laterali: QR e PS



quindi

$$F = iaB \sin \theta$$

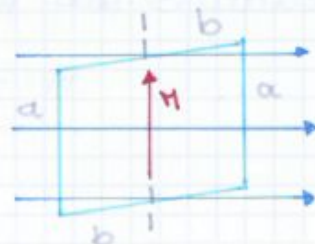
ma dato che $B \perp a$ ($\theta = \pi/2 \rightarrow \sin \theta = 1$)

$|\vec{F}_{sp}| = |\vec{F}_{sr}| = iaB$ le due forze sono uguali e opposte ma costituiscono una coppia di braccio $b \sin \theta$

Posso allora definire il **MOMENTO MECCANICO della COPPIA** come

$$M = b \sin \theta F = \underbrace{iab}_{\Sigma} B \sin \theta = i \Sigma B \sin \theta \quad \text{Modulo}$$

che risulta essere parallelo al piano della spira



Ma se noto che $\sum B_{cos\theta}$ è il flusso di \vec{B} posso generalizzare dicendo che

$$U_p = -i\phi(\vec{B})$$

- ha valenza generale
- vale anche se \vec{B} non è uniforme

Conoscendo inoltre la relazione

$$-U_p = +W = i\phi(\vec{B})$$

$$\text{allora } dW = i d\phi = i \nabla\phi \cdot d\vec{s} = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

moltiplico scalarmemente perché a sinistra devo ottenere uno scalare dW

perciò

$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = i \nabla\phi \cdot d\vec{s}$$

Con un oggetto immerso in un campo \vec{B} ho

$$\vec{F} = i \nabla\phi(\vec{B})$$

$$\vec{\pi} = i \frac{\partial\phi(\vec{B})}{\partial\theta}$$

essendo $\vec{\pi} = -\frac{d\phi}{d\theta}$ rispetto la derivata parziale allo rispetto a θ

COSA PU' GENERARE UN CAMPO MAGNETICO \vec{B} ?

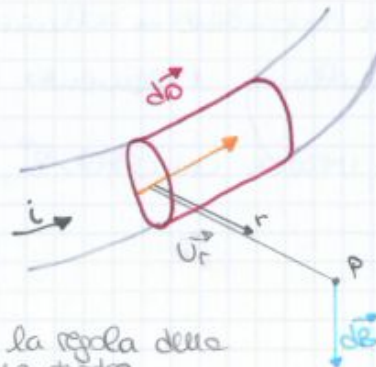
Si afferma che se un oggetto può subire una forza magnetica, allora può generare una forza magnetica.

I° LEGGE di LAPLACE

forma elementare

esprime il campo magnetico prodotto da un tratto infinitesimo del percorso da cui si parte in un punto P distante r dall'elemento di filo.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{s} \wedge \vec{r}}{r^2}$$



$$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \frac{Tm}{A}$$

$$10^{-7} \frac{Tm}{A}$$

con la regola della mano destra

Dato una singola carica

$$\vec{J} = nq \cdot \vec{v}$$

perciò posso esprimere \vec{B} come un campo finito

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{v} \wedge \vec{ur}}{r^2}$$

regime di carica singola

$$n \cdot d\tau = 1$$

$$\vec{J} = q\vec{v}$$

! A differenza della legge di Coulomb, qui vi è una sorgente di \vec{B} , la sorgente è il momento.

Inoltre va sempre ricordato che q produce anche un campo elettrico:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{\vec{ur}}{r^2}$$

In uno stesso punto potrei trovare entrambi i campi

$$\begin{cases} \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{v} \wedge \vec{ur}}{r^2} \\ \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{\vec{ur}}{r^2} \end{cases}$$

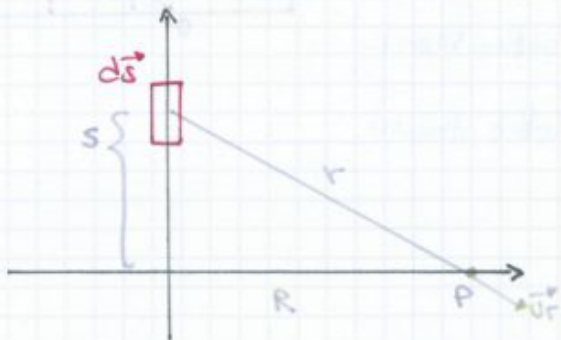
$$\vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \vec{v} \wedge \vec{E}$$

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

la costante che permette il passaggio da magnetico ad elettrico è una velocità!

APPLICAZIONI della 1° LEGGE DI LAPLACE

Dato il caso di un filo percorso da corrente immerso in \vec{B} , si vuole calcolare \vec{B}



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{ds \wedge \vec{ur}}{r^2}$$

Non posso fare le stesse semplificazioni del campo \vec{E} fatto lo dei contributi che si sommano

Quindi ricaviamo la legge di Biot-Savart come

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \vec{U}_\phi$$

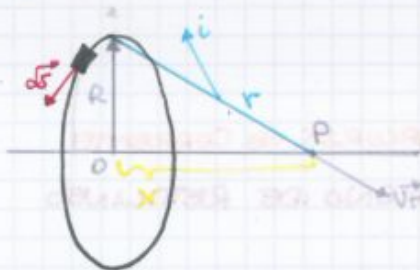
$$\vec{U}_\phi = \vec{U} \wedge \vec{N}$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}$$

Il campo magnetico di un filo rettilineo indefinito dipende solo dalla distanza dal filo in modo inversamente proporzionale

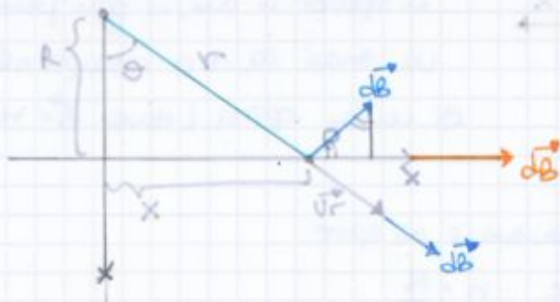
Le linee di \vec{B} sono circonferenze concentriche e risultano quindi concatenate alla corrente sorgente del campo.

CASO di una SPIRA CIRCOLARE ATTRAVERSA da i (senso antiorario)



L'asse della spira è il luogo di punti privilegiato per il calcolo di \vec{B}

Visione laterale



A causa della simmetria del sistema l'unica componente che sopravvive è quella orientata lungo x . Infatti le componenti trasversali di $d\vec{B}$ si elidono a vicenda.

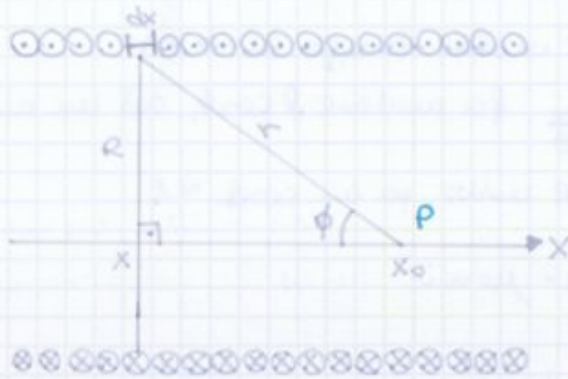
Calcolando il campo in funzione generato:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \left| \frac{d\vec{s} \wedge \vec{r}}{r^2} \right| = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{ds}{r^2}$$

Dato che l'unica componente è su x :

$$dB_x = \frac{\mu_0 i ds}{4\pi r^2} \cos\theta$$

$$B = \oint \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2} \cos\theta ds = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2} \cos\theta \underbrace{2\pi R}_{ds}$$



Traente l'introduzione di d arco di ricorrenza dx per poi integrare

$$\begin{cases} r \cdot \sin \phi = R & 1) \\ x - x_0 = R \frac{\cos \phi}{\sin \phi} & 2) \end{cases}$$

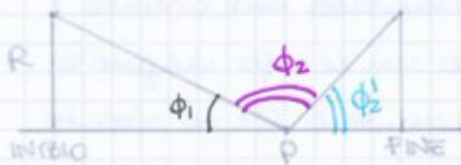
Derivando rispetto a ϕ

$$dx = \frac{R}{\sin^2 \phi} d\phi = \frac{r \sin \phi}{\sin^2 \phi} d\phi$$

Sostituendo 1) e 2) in dB:

$$dB = \frac{\mu_0 i n}{2} \sin \phi d\phi$$

Campo infinitesimo generato dalla spirale ad una distanza $x - x_0$ dal punto P



! $\phi_2 = \pi + \phi_1'$
 $-\cos \phi_2 = \cos \phi_1'$

Considero la lunghezza del solenoide e integro tra ϕ_1 e ϕ_2 :

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 i n}{2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sin \phi d\phi = \\ &= \frac{\mu_0 i n}{2} (\cos \phi_1 - \cos \phi_2) \end{aligned}$$

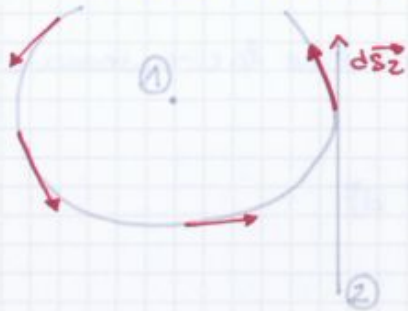
Quindi:

- le spire contribuiscono in modo additivo;
- agli estremi del solenoide, il campo \vec{B} sarà nullo, diretto dal centro del solenoide;
- al centro il campo \vec{B} ha un gradiente molto piccolo perciò $\phi_1 = \phi_1'$. Ma ϕ_1' e ϕ_2 sono uguali, allora il campo al centro è

$$B_0 = \mu_0 i n \cos \phi_1$$

$$\cos \phi_1 = d / \sqrt{d^2 + 4R^2}$$

Se i due fili sono tra di loro perpendicolari, la forza che esercitano tra loro è nulla.



Il campo magnetico generato lungo il filo non ha variazioni a seconda della sezione del filo ed è lo stesso su tutta la linea (circonferenza)

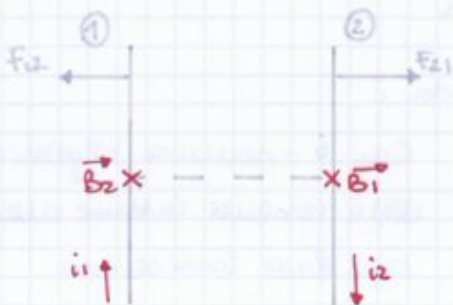
Pensando che il campo sia parallelo al filo, la forza totale sarà nulla.

CASO di FILI tra LORO PARALLELI e sullo STESSO PIANO



Il circuito ① genera un campo orientato verso l'interno pagina
② vede una forza F_{21}

Se i_2 fosse discorde ad i_1



Se le i sono concordi, la forza è attrattiva e i campi sono discordi.

Se le i sono discorde, la forza è repulsiva e i campi sono concordi.

$$F = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi r} l$$

alc. coefficienti mancanti?

Posso estendere l'interazione magnetica anche alle spire, dati due circuiti percorsi da corrente.



Per calcolare il flusso su 2 generato da 1

$$\Phi_{1,2} = \int_{\Sigma_2} \left(\oint_{\Sigma_1} \frac{\mu_0 i_1}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{\sigma}_1 \wedge \vec{r}}{r^2} \right) \cdot \vec{u}_2 d\Sigma_2 =$$

$$= M_{1,2} \cdot i_1$$

Su 1 da 2:

$$\Phi_{2,1} = M_{2,1} \cdot i_2$$

M è il coefficiente di mutua induzione

$$M_{1,2} = M_{2,1} = M$$

Se le superfici fossero uguali e lo fossero anche le correnti, il flusso una è uguale una è

$$\Phi = L \cdot i$$

dove L è il coefficiente di autoinduzione

Dimensionalmente:

$$[M] = [L] = \frac{[\Phi]}{[i]} = \frac{[B] \cdot [\Sigma]}{[i]} = \frac{N}{\cancel{S} \cdot m} \cdot \frac{m^2}{c/d} = T \cdot \frac{m^2}{A} =$$

$$= \frac{Wb}{A} = H$$

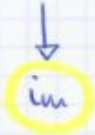
↳ SOLENOIDI INTERNI tra loro

i_2, u_2 e i_1, u_1

Calcolo il flusso generato dal solenoide 1 nel solenoide 2

Tagliando il cilindro in sezione vedo delle spire percorse da corrente i in cui si genera un momento magnetico. Le porzioni di materia non hanno gli stessi momenti magnetici:

$\pi \cdot l \cdot S$ è un momento magnetico
 $(\pi \cdot l) \cdot S$ è ancora un momento magnetico
 perciò $\pi \cdot l$ è una corrente



Corrente di magnetizzazione associata al vettore magnetizzazione

perciò $M = \frac{i_m}{l} = J_{s,m}$ DENSITA' LINEARE DI CORRENTE

! $J_{s,m} \neq J$
 vettore a perpendicolo

quindi
 $i_m = \pi \cdot l$
 $i_m = \int_0^l H dl$

Posso pensare la corrente i_m come una corrente che scorre lateralmente al cilindro come se esso fosse considerato un'unica grande spira per cui

$i_m \perp \vec{u}$
 $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l}$ componente tangenziale
 $\oint \vec{H} \cdot \vec{u} dl$ componente normale

In presenza di un vettore \vec{H} costante, la corrente di magnetizzazione dipende dalla lunghezza l .

→ Solenoide



Cosa succede se integro \vec{H} su un circuito chiuso?

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \underbrace{\mu_0 i}_{\text{campo magnetico nel vuoto } B_0} + \underbrace{\mu_0 i_m}_{\int \vec{M} d\tau} = \mu_0 i + \mu_0 \oint \vec{H} \cdot d\vec{s}$$

campo magnetico nel vuoto B_0

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i + \mu_0 \oint \vec{H} \cdot d\vec{s} \quad (a)$$

$$\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \nabla \wedge \vec{H} \quad (b)$$

$$\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \nabla \wedge \vec{H}$$

$$\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \nabla \wedge \vec{H}$$

Si introduce

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} \oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = i & \text{dividendo per } \mu_0 \text{ in (a) ottergo } \vec{H} \\ \nabla \wedge \vec{H} = \vec{j} & \text{dividendo per } \mu_0 \text{ in (b) ottergo } \vec{H} \end{cases}$$

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad \text{relazione costitutiva del suo materiale}$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 \kappa_m \vec{H} = \mu \vec{H} = \vec{B}$$

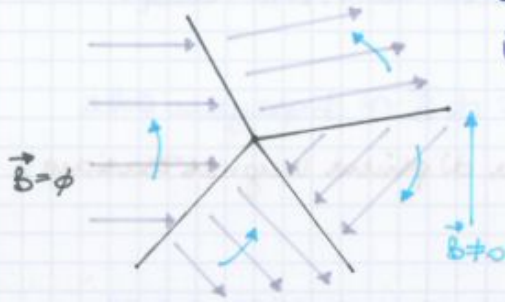
CONTRIBUTO TOTALE DEL CAMPO \vec{B}

nel contributo del mezzo magnetizzato la costante non è di conduzione ma di origine atomica (i AMPERIANI)

- DIAMAGNETISMO:**
- tutti i materiali sono diamagnetici ma in molti casi tale componente è trascurabile rispetto alle altre;
 - ogni porzione di materia non è ricadabile a una spira (non c'è momento di dipolo magnetico intrinseco)

FERROMAGNETISMO :

- materiali: mono/pol: cristallini
- domini con momenti magnetici orientati in maniera disordinata



I momenti magnetici sono già orientati in modo casuale quando il campo è nullo: l'applicazione di un $\vec{B} \neq \phi$ fa orientare tutti i dipoli magnetici nella direzione dello stesso.

Applicando un campo \vec{B} i momenti si orientano secondo \vec{B} .

L'effetto NON è REVERSIBILE (isteresi). I valori di χ_m e K_m dipendono dal valore del campo magnetico applicato ed anche da come esso viene raggiunto.

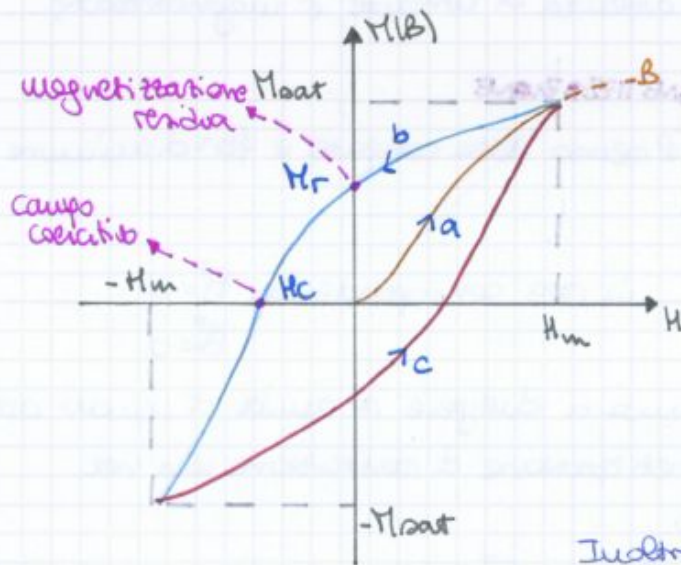
$$\chi_m \sim 10^3 \div 10^4$$

$$\chi_m \gg 0$$

$$K_m \gg 1$$

$$\vec{B} \gg \vec{B}_0$$

COMPORTAMENTO dei FERROMAGNETICI - CICLO di ISTERESI



Posso trovare una relazione tra \vec{B} ed \vec{H} partendo da un rettile: se ho una variazione di i :

$$H = ni$$

ottenendo una misura di \vec{B} .

Inoltre posso calcolare la magnetizzazione

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad \rightarrow \quad \vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H}$$

Conclusione: il ciclo di isteresi e quindi il comportamento di un materiale ferromagnetico dipendono dal valore di H .

Finora abbiamo visto che

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

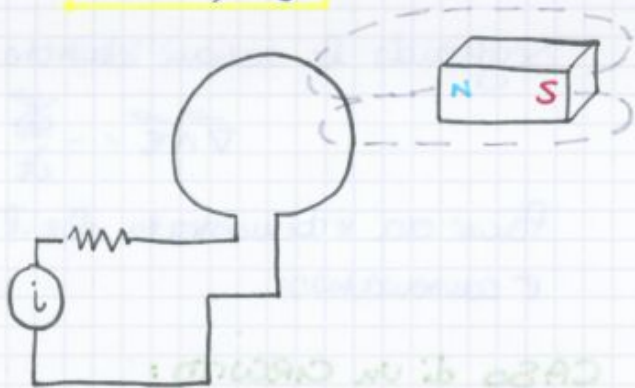
$$\nabla \wedge \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Esperimento fondamentale:

Circuito chiuso sospeso da un campo magnetico. Muovendo la sorgente in prossimità del campo magnetico vedo che si genera corrente. Questo effetto finisce quando il magnete si ferma.



Però, se muovo un campo \vec{B} , crea una corrente. Ma la corrente creata da \vec{E} . Però per i , c'è una relazione tra \vec{B} ed \vec{E} .

$$-\frac{d\phi(\vec{B})}{dt} = \mathcal{E}_i$$

LEGGE di FARADAY

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\phi}{dt}$$

$$i = \frac{\mathcal{E}_i}{R}$$

$$\phi = \int \vec{B} \cdot \vec{u}_n d\Sigma$$

La forza elettromotrice è

$$\mathcal{E}_i = \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{s} \neq \phi$$

EFFETTI SUI CIRCUITI

Ammettendo che il circuito non si deformi ma la corrente vari, avrò:

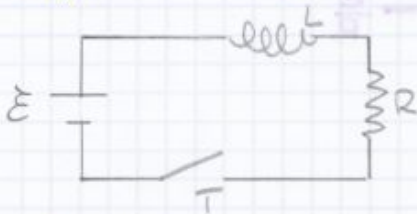
$$\phi = L i(t) = \phi(t)$$

avrò quindi una forza elettromotrice indotta.

Per faraday, \mathcal{E}_i vale

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i &= - \frac{d\phi(t)}{dt} \\ &= -L \frac{di(t)}{dt} \end{aligned}$$

Supponiamo di avere:



dove L tiene conto di tutte le induttanze dei circuiti

Posso dire che:

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_L = Ri$$

legata al fenomeno dell'auto-induzione
che rispetta la legge di Ohm

$$\mathcal{E} = L \frac{di}{dt} + Ri$$

se integro, trovo l'andamento della corrente nel tempo

$$\frac{di}{\mathcal{E} - Ri} = \frac{dt}{L}$$

$$\log(\mathcal{E} - Ri) = -\frac{R}{L}t + \text{costante}$$

$$\mathcal{E} - Ri = e^{-R/Lt} \cdot e^{\text{costante}}$$

$$\mathcal{E} - Ri(t) = A e^{-R/Lt} = A e^{-t/\tau}$$

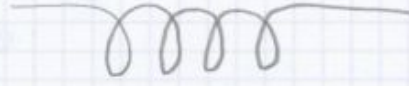
$$\text{dove } \tau = \frac{L}{R}$$

Istante per istante non rispetta la legge di Ohm perché ha l'effetto di opposizione di induzione.
 Quindi il generatore deve lavorare di più.

Dove va l'energia spesa?

Prendiamo un solenoide:

$$B = \mu \frac{N}{l} i$$



con N, l, S

$$\begin{aligned} \Phi &= N S B = \\ &= \mu \frac{N^2 S}{l} i = L \cdot i \end{aligned}$$

Quindi il coefficiente d'autoinduzione è

$$L = \mu \frac{N^2 S}{l}$$

Nel circuito avremo

$$\mathcal{E} = R i + L \frac{di}{dt}$$

Se moltiplico tutto per i , ho una potenza

$$\mathcal{E} i = R i^2 + L i \frac{di}{dt}$$

\swarrow rappresenta una potenza
 \downarrow una parte si dissipa in R
 \searrow e una va a costruire l'induttore

$$\mathcal{E} i dt = R i^2 dt + L i di = dW$$

Facciamo un bilancio energetico

$$W_L = \int_0^i L i di = \frac{1}{2} L i^2$$

la presenza dell'induttore fa perdere effettivamente dell'energia!

Se poi vale L :

$$W_L = \frac{1}{2} \left(\mu \frac{N^2 S}{l} \right) i^2$$

$$\textcircled{1} \quad \mathcal{E}(t) - L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} = R_1 i_1$$

$$\textcircled{2} \quad -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} = R_2 i_2$$

accoppia
due circuiti

Si genera un sistema di equazioni differenziali accoppiate

L'energia complessiva, che spendo per alimentare in condizione stazionaria entrambi i circuiti, è:

$$U_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

è un doppio contributo!

Più sono accoppiati, più spendo energia!

MAXWELL

Dalla legge di Ampère

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i$$

$$\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad \text{solo se } \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

dove

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\delta \rho}{\delta t} \quad \text{solo condizione stazionaria!}$$

Ricordo che

$$\begin{aligned} \frac{\delta \rho}{\delta t} &= \epsilon_0 \frac{\delta}{\delta t} (\nabla \cdot \vec{E}) \quad \rightarrow \text{ho applicato la legge di Gauss} \\ &= \epsilon_0 \nabla \cdot \frac{\delta \vec{E}}{\delta t} \end{aligned}$$

e mescolando l'equazione di continuità:

$$\nabla \cdot \vec{J} + \epsilon_0 \nabla \cdot \frac{\delta \vec{E}}{\delta t} = 0$$

$$\nabla \cdot \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\delta \vec{E}}{\delta t} \right) = 0$$

ONDE ELETTROMAGNETICHE

Si può arrivare a definirle manipolando le equazioni di Maxwell

$$\begin{aligned}\nabla \wedge \nabla \wedge \vec{E} &= \nabla \nabla \cdot \vec{E} - \nabla^2 \vec{E} \\ &= -\nabla \wedge \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \wedge \vec{B}\end{aligned}$$

ovvero

$$\nabla \nabla \cdot \vec{E} - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \wedge \vec{B}$$

Ma $\nabla \wedge \vec{E} = 0$?

$$\text{perciò } -\nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\text{perciò: } \nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Considerando una generica funzione, posso definire l'**EQUAZIONE di D'ALEMBERT**:

$$\nabla^2 f - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

con $f = E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$

$$\square f = 0$$

con

$$\square = \nabla^2 - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

Inoltre definendo

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

posso dire che

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Il campo \vec{E} ha una dipendenza da spazio e tempo $\vec{E}(\vec{r}, t)$

Δ Si può pensare
re dall'esistenza di
una sorgente

1) può essere e creare
un campo variabile
nel vuoto;

2) può non essere
considerata;

3) può essere l'autosoluzione
e perturbare campi
nel vuoto.

La funzione seno risolve l'equazione di D'Alembert?

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = kA \cos[k(x-vt)]$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -k^2 A \sin[k(x-vt)] = -k^2 \psi$$

⚠ Devo verificare se attraverso la funzione seno vale ancora l'equazione di D'Alembert

$$\left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \right]$$

mentre nel tempo

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -Akv \cos[k(x-vt)]$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -k^2 v^2 A \sin[k(x-vt)] = -k^2 v^2 \psi$$

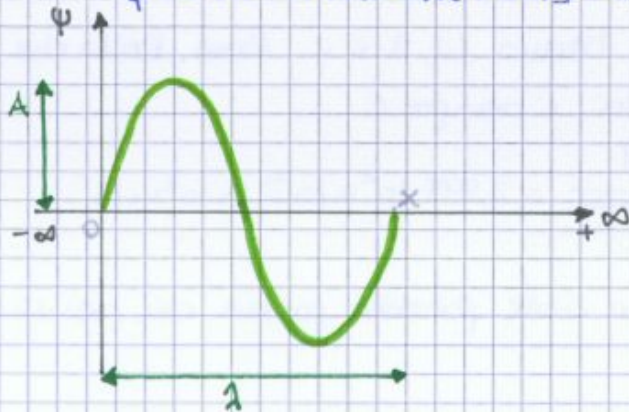
Scrivendo l'equazione, ritrovo l'equazione delle onde

$$-k^2 \psi + \frac{k^2}{v^2} v^2 \psi = 0$$

Perciò la funzione seno soddisfa l'equazione di D'Alembert, così come il coseno.

Significato Fisico - ragionamento nel tempo

$$\psi(x, t) = A \sin[k(x-vt)] = A \sin(kx) \quad \text{a } t=0$$



Perciò λ è la lunghezza d'onda

$$k \cdot \lambda = 2\pi$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{numero d'onda}$$

$$\omega = kv \quad \text{pulso dell'onda}$$

Si verifica così che il campo \vec{E} è perpendicolare alla direzione di propagazione x .

- ragionamento nello spazio

Considerando ora $x=0$

La condizione necessaria per CONSERVARE l'ENERGIA è che la propagazione sia isotropa e dipenda solo dalla distanza dal punto d'origine.

$$\psi(\vec{r}, t) = A \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

onda nello spazio (piano 3D)

vettore d'onda

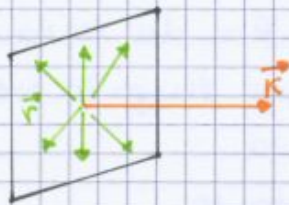
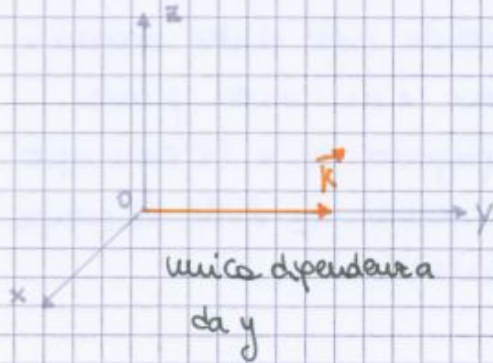
è un numero che mi serve per avere il corretto argomento del seno (in termini dimensionali)

$$|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$$

indica la propagazione dell'onda

$$k_x \cdot x + k_y \cdot y + k_z \cdot z$$

EFFETTO DEL VETTORE D'ONDA



Se il prodotto scalare $\vec{k} \cdot \vec{r} = 0$

(ovvero r si sposta perpendicolarmente a k), noto che l'onda non assume alcuna variazione/oscillazione. Perciò tutti i punti in un

piano perpendicolare a k danno un argomento del seno nullo.

OVVERO: TUTTI I PUNTI IN UN PIANO

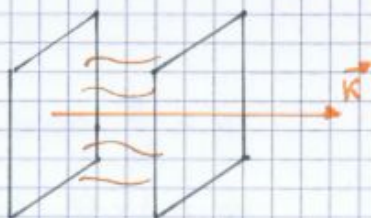
PERPENDICOLARE A k HANNO LA STESSA

FASE.

Dal punto di vista fisico, i punti con la stessa fase oscillano tutti insieme; l'insieme di questi punti costituisce il FRONTE D'ONDA.

Dato la propagazione su piani paralleli ortogonali a \vec{k} posso classificarne come ONDA PIANA un'equazione del tipo

$$A \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$



Moltiplicando tutto per x

$$\frac{d}{dt} (\vec{v}_x \cdot \vec{B}) = 0 \quad \text{perché } B \text{ nel tempo non varia}$$

ottengo quindi che

B_x è costante nel tempo

Dall'equazione analoga per E_x , posso ricavare che

E_x è costante nel tempo

Dato che le componenti x di \vec{E} e \vec{B} non variano né nel tempo né nello spazio, questo **NON** rappresenta un'onda.

Se invece le componenti di \vec{E} e \vec{B} fossero perpendicolari rispetto alle direzione di propagazione ci sarebbe un'onda: questa condizione è detta di **TRASVERSALITÀ**

Considerando due campi: **DIMOSTRAZIONE**

della TRASVERSALITÀ

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{u}_y E_y(x-vt) + \vec{u}_z E_z(x-vt) \\ \vec{B} &= \vec{u}_y B_y(x-vt) + \vec{u}_z B_z(x-vt) \quad * \end{aligned}$$



Dato che la componente x è costante, la quarta

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dE}{dx} \vec{u}_y + \frac{dE_z}{dx} \vec{u}_z &= -\frac{dB_y}{dt} \vec{u}_y - \frac{dB_z}{dt} \vec{u}_z \quad (1) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{dB_z}{dx} \vec{u}_y + \frac{dB_y}{dx} \vec{u}_z &= \frac{1}{c^2} \frac{dE_y}{dt} \vec{u}_y + \frac{1}{c^2} \frac{dE_z}{dt} \vec{u}_z \quad (2) \end{aligned} \right.$$

* il campo elettrico \vec{E} e il campo magnetico \vec{B} hanno componente x nulla, ovvero sono **TRASVERSALI** rispetto alla direzione di propagazione.

Moltiplicando (1) per \vec{u}_z e (2) per \vec{u}_y , ottengo

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dE_y}{dx} &= -\frac{dB_z}{dt} \\ -\frac{dB_z}{dx} &= \frac{1}{c^2} \frac{dE_y}{dt} \end{aligned} \right.$$

$$E = E_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$S = \epsilon_0 c E^2 = \epsilon_0 c E_0^2 \sin^2(kx - \omega t) \rightarrow \text{oscilla}$$

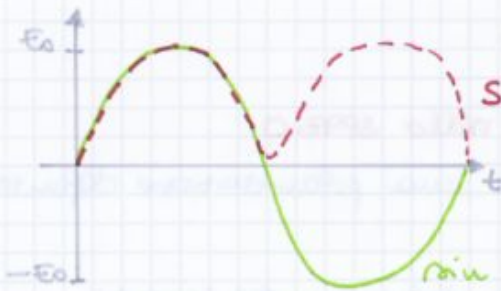
La ω (frequenza cui oscilla) è tipicamente altissima. Non vedo queste oscillazioni

Ogni istante vedo una quantità di energia diversa perché il vettore di Poynting oscilla

$$\langle S \rangle = S_{\text{m}} = \frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt$$

$$= \epsilon_0 c \frac{1}{T} \int_0^T E_0^2 \sin^2(kx - \omega t) dt$$

$$= \epsilon_0 c \frac{E_0^2 T}{T 2T} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 = \epsilon_0 c E_{\text{eff}}^2$$



campo costante
equivalente
al campo oscillante

$\langle S \rangle$ è l'**INTENSITA'** I
dell'onda elettromagnetica,
è una quantità scalare **Q**

di energia trasportata nel tempo.

Posso avere un accumulo di energia per il tempo che passa anche se la P è costante.

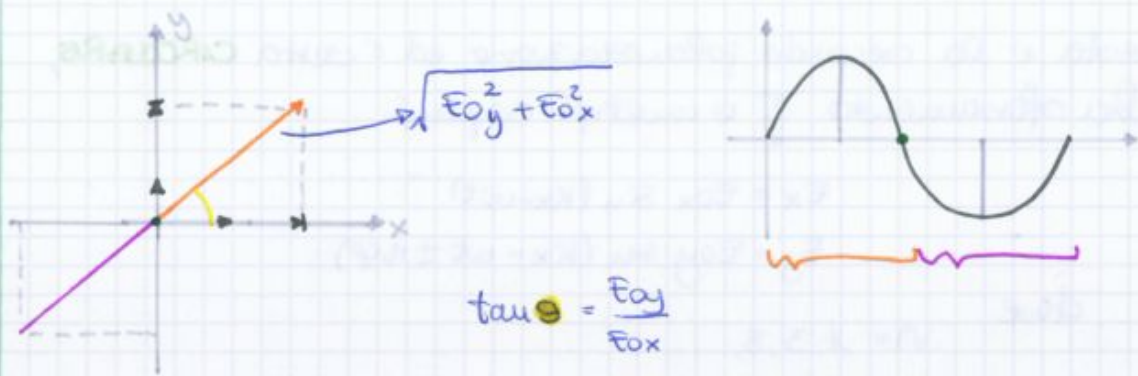
Se calcolo I per

$$\varphi = \frac{A'}{r} \sin(kx - \omega t)$$

onda sferica

trovo un'intensità proporzionale a $\frac{1}{r^2}$

L'intensità per unità di tempo diminuisce come $\frac{1}{r^2}$: la densità diminuisce ma la quantità di materia è costante.



lo sfasamento $E_{ox} - E_{oy}$ deve essere 0 o π .
 Punto che ferisce in un punto e grande come varia il campo elettrico nel tempo. Si muove \perp al foglio. E' orientato lungo una certa direzione. Essendo armonico, ha valori MAX che coincidono alla massima elongazione. Arriva ad un MAX poi torna indietro come il seno, arriva all'altro massimo e poi cresce. VA SU E GIU' lungo la retta

Situazione particolare:



Se fossero sfasate di $\pi/2$, una sarebbe un sin e l'altra un cos; grande esse e' armonico, l'altra e' armonica:

$$E_x = E_{ox} \cos(kx - \omega t)$$

$$E_y = E_{oy} \sin(kx - \omega t)$$

