NUMERO: 883

DATA: 12/03/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Marin

MATERIA: Fisica I

Prof. Scalerandi

FISICA 1

Docente: M. Scalerandi

MAIL : marco.scalerandi@infm.polito.it

Consulenze: Mercoledì ORE 11-13 (PRENOTARSI).

Qualità importante: Propr. di linguaggio

Esame: Scritto → solo esercizi:
- Termodinamica } FISSI
- Corpo Rigido
- Variabili
  - Cinematica
  - Punto
  - Urti
  - C. Rigido

Voto minimo per Accesso all'orale } 16/30

NB: Il Problema è considerato risolto già con le sole equazioni che svolte, Danno il Risultato

ORALE: Solo teoria (AL 90% dei casi) voto min 18/30 }
- Concetti
- Teoremi + DIMOSTRAZIONI

Voto FINALE : Media Scritto e Orale

Se la media è ≥ 18, si Aggiunge la Domanda sul laboratorio (± 2 PTI).

Lezione 1

GRANDEZZE FISICHE E MISURE.

• Una GRANDEZZA è una qualunque quantità MISURABILE ovvero ove gli sia POSSIBILE assegnare un numero/valore.

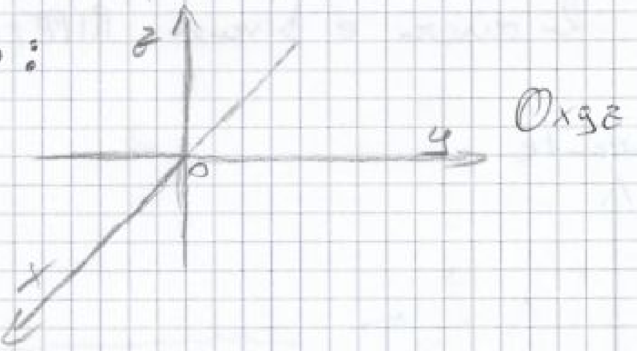
• Misura: Per misurare una grandezza dobbiamo differenziare fissare un'unità di misura.

UNITA' DI MISURA: grandezza base con cui confrontare la grandezza fisica da misurare

In secondo luogo abbiamo bisogno di un Sistema di Riferimento (SR): (Origine e Assi di riferimento)

SISTEMA INTERNAZIONALE:
- massa (kilogrammi);
- lunghezza (metri);
- tempo (secondi).

Sistema Cartesiano:



• CLASSIFICAZIONE:

1. Grandezze fondamentali: Tempo; massa; lunghezza; temperatura.

2. Grandezze Derivate: $V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

3. Significato: Scalari -> grandezze fisiche completamente caratterizzate dal suo valore numerico ($t = 5s$).

Vettori ->
- Modulo (valore numerico);
- Direzione;
- Verso.

DEVIAZIONE STANDARD

$$\sigma = \frac{\sum (x_i - \langle x \rangle)^2}{n-1}$$

1) Faccio n misure
2) Mi trovo $\langle x \rangle_n$
3) Faccio un'altra misura x_{n+1}
4) La misura $\langle x \rangle_{n+1} = \langle x \rangle_n$

La misura x_{n+1} si trova al 68% (di Probabilità)

$$\langle x \rangle - \sqrt{\sigma} < x_{n+1} < \langle x \rangle_n + \sqrt{\sigma}$$

Esempio

$\langle t \rangle = 1{,}023$ $\quad 1{,}003 < t_{n+1} < 1{,}043$

$\sqrt{\sigma} = 0{,}023$

t_{n+1} = Valore

NB: Più σ è piccolo, più la misura è precisa

$\sqrt{\sigma}$ → Errore CASUALE

In Sintesi:

Una misura Diretta va fatta da n misure e calcolando il valore medio che poi viene assunto come il valore della misura. Quindi:

$\langle x \rangle$ = valore misura e

$\sqrt{\sigma}$ = Errore casuale su misura

MISURA = (Valore Medio ± Errore casuale) + Unità di misura

Esempio Precedente = $(1{,}02 \pm 0{,}02)$ s

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 296

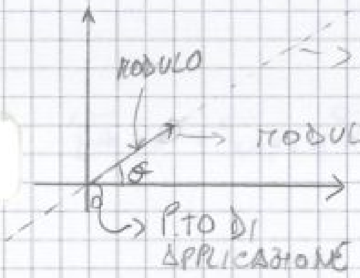
Lezione 2

Prima di parlare di CINEMATICA, è necessario introdurre il concetto di vettore.

→ Vettore: Grandezza fisica caratterizzata da:

- Modulo: Lunghezza del segmento, che esprime PARTE della MISURA;
- Direzione: Può essere definita solamente se abbiamo un sistema di riferimento o viene definita dall'angolo θ (con l'asse x);
- Verso.

GRAFICAMENTE



In fisica, il punto di applicazione è importante: due vettori uguali con $\neq$ p.ti di applicazione, sono 2 vettori diversi.

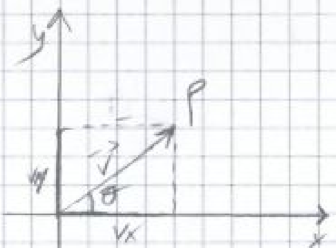
RAPPRESENTAZIONE

$$\vec{V} = (\underbrace{V}_{\text{MODULO}}, \underbrace{\theta}_{\text{DIREZIONE}})$$

Al modulo viene associato un valore.

Esempio: $\vec{V} = \underbrace{50\ Km/h}_{V}\ \underbrace{\text{verso Est}}_{\theta}$

Un vettore può anche essere espresso per componenti.



La forma del vettore scritto con le componenti, è qst → $\vec{V} = (V_x, V_y)$

NB: Le componenti non sono vettori

I moduli delle componenti, dalla trigonometria, valgono:

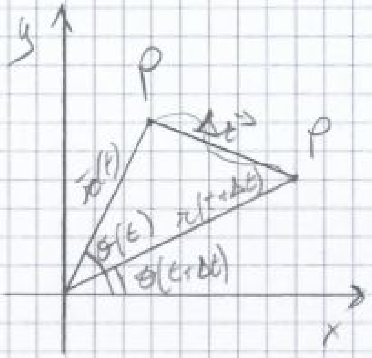
$V_x = V\cos\theta$ Quindi il modulo di V vale

$V_y = V\sin\theta$, $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$

L'angolo θ, ovvero la direzione del vettore si trova dalla relazione $tg\,\theta = \frac{V_y}{V_x}$ quindi $\theta = Arctg\left(\frac{V_y}{V_x}\right)$

CINEMATICA

STUDIO DEL MOTO - CAMBIAMENTO DI POSIZIONE AL VARIARE DEL TEMPO



Definiamo:

$\vec{r}$ come · VETTORE POSIZIONE
o
· RAGGIO VETTORE

$\vec{r}(t)$ = Posizione in funzione del tempo

NB: Scrivere $\vec{r} = r(t)$ è equivalente a scrivere $y = f(x)$

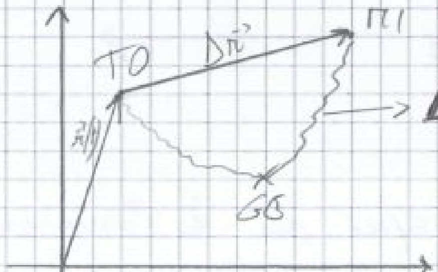
Quando varia t passando a $t+\Delta t$ (con Δt = variazione finita del tempo) variano anche $\vec{r} = r(t)$ e $\theta = \theta(t)$.

Introduciamo il vettore spostamento $\Delta\vec{r}$ definito come:

$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$

il modulo del vettore SPOSTAMENTO ($\|\Delta\vec{r}\|$) è diverso dallo SPAZIO PERCORSO DALL'OGGETTO.

Quest'ultimo viene definito dalla traiettoria e si denota con Δs



Δs = lunghezza della traiettoria

TRAIETTORIA => linea composta da tutti i punti in cui si trova l'oggetto P lungo il moto

$\vec{r} = (r, \theta)$ oppure $\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y$

Sono le componenti (che dipendono ovviamente dal tempo V_x e V_y)

In questa formula, dipendono dal tempo solamente le componenti x e y.

VELOCITÀ

Una Persona A va da TO a MI in 4 ore
Una Persona B va da TO a MI in 6 ore
} Chi è stato più veloce?

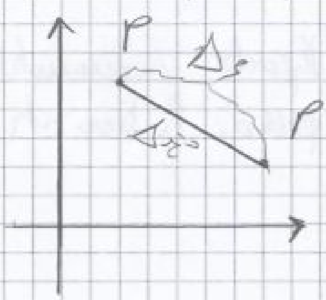
La Domanda è relativa, Perché Può Avere 2 significati:

Più veloce ⇒ Tempo minore

Più veloce ⇒ Velocità maggiore

Naturalmente Dipende dal percorso,
Se B ha fatto TO - ROMA - MI, è stato il + veloce.

PROVIAMO A CALCOLARE LA VELOCITÀ MEDIA.



1) V_M (SCALARE) $= \dfrac{\text{SPAZIO PERCORSO}}{\text{TEMPO IMPIEGATO}} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

2) V_M (VETTORE) $= \dfrac{\text{SPOSTAMENTO (VETTORE)}}{\text{TEMPO}} = \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$

$V_M(\text{SCALARE}) \neq |\vec{V}_M|$

In conclusione, la VELOCITÀ MEDIA non è interessa-

ESEMPIO

$\vec{r} = 3t\,\vec{u_x} + (1-t^2)\,\vec{u_y}$

$\vec{V} = 3\vec{u_x} - 2t\,\vec{u_y} \Rightarrow \begin{cases} V_x = 3 \\ V_y = -2t \end{cases}$

La velocità varia nel tempo,

Il MODULO $= \sqrt{(3)^2 + (-2t)^2} = \sqrt{9 + 4t^2}$

ACCELERAZIONE

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ Per Definizione Analoga alla velocità ist.

L'accelerazione Descrive la ~~diff~~ variazione di $\vec{v}$ nel tempo.

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ L'accelerazione è la Derivata 2ª del vettore Posizione

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(V_x\vec{u_x} + V_y\vec{u_y}\right)$ Se il sist. di Riferimento è fisso.

$\vec{a} = \frac{dV_x}{dt}\vec{u_x} + \frac{dV_y}{dt}\vec{u_y}$

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ POSSONO AVERE DUE VARIAZIONI

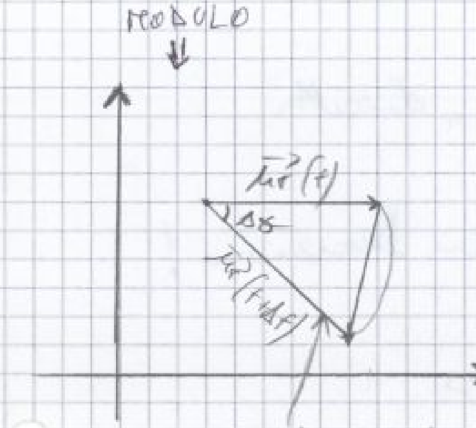
- $\vec{v}$ Varia in modulo
- $\vec{v}$ varia in Direzione

Quindi se $\vec{v}$ è costante in modulo, non è detto che $\vec{a}$ sia 0 xké A variare è la Direzione di $\vec{a}$ (0).

NB: Un moto è Accelerato quando c'è variazione di $\vec{a}$ (o in modulo o in Direzione).

La Direzione del vettore differenza $\vec{u_T}(t+\Delta t) - \vec{u_T}(t)$ è parallelo a R. ALLORA

il versore $\vec{u_T}$ è $\perp$ a R quindi la Direzione del vettore $\vec{u_T}(t+\Delta t) - \vec{u_T}(t)$ è $\perp$ a $\vec{u_T}$



Circonferenza di Raggio 1

Se $\Delta t \to 0$ la corda $\underset{}{\overset{\text{Simile}}{\sim}}$ Arco

$$l'arco = \underset{1}{R} \times \Delta\theta = \Delta\theta$$

$$\frac{d\vec{u_T}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{u_T}(t+\Delta t) - \vec{u_T}(t)}{t} = \lim_{\Delta t \to 0} - \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\vec{u_N}$$

Verso — $\boxed{\text{è negativo xkè è diretto verso il centro}}$

Versore $\perp$ a $\vec{u_T}$

$$\frac{d\vec{u_T}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\left[-\frac{\Delta s}{R} \cdot \frac{\vec{u_N}}{\Delta t}\right] =$$

$$= -\frac{1\vec{u_N}}{R} \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}}_{\|\vec{v}\|} = -\frac{\|\vec{v}\|}{R}\vec{u_N}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \underline{\frac{dv}{dt}\vec{u_T}} - \underline{\frac{v^2}{R}\vec{u_N}}$$

$\vec{u_T}$ e $\vec{u_N}$ sono le coordinate INTRINSECHE e il Sistema di Riferimento non è fisso.

ACCELERAZIONE TANGENZIALE

ACCELERAZIONE NORMALE DIRETTA VERSO IL CENTRO

|PROBLEMA|

Nota $\vec{a} = \vec{a}(t)$ trovare la traiettoria o il moto $(\vec{r} = \vec{r}(t))$

1) $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow dv = a\,dt \Rightarrow dv = \vec{a}(t)\,dt$ integro Ambo i membri

$$\int dv = \int \vec{a}(t)\,dt \Rightarrow \int \vec{v}(t)\,dv = \int \vec{a}(t)\,dt + C_1$$

Come trovare C_1:

Applico le cond. iniziali (Problema di Cauchy)

$$V = \int \vec{a}(t) + \vec{C_1}$$

Vuol dire che conosco il valore della velocità in un certo istante di tempo!

$t \to t_0$ e $v \to v_0$

$$v = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \vec{r} = \int d\vec{r} = \int \vec{v}\,dt + \vec{C_2}$$

CONDIZIONE INIZIALE SULLA POSIZIONE

$t = t_0 \quad \vec{r} = \vec{r_0}$

ESEMPIO

$\vec{a} = 3t\vec{u_x} + 0\vec{u_y} \quad t = 1\,s \Rightarrow \vec{v} = \vec{u_x} + \vec{u_y}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\ \Rightarrow \vec{r} = 0\vec{u_x} + 0\vec{u_y}$

$$\vec{V} = \int a(t)\,dt + \vec{C_1} =$$

$$= \frac{3}{2}t^2\vec{u_x} + \vec{u_y} + C_{1x}\vec{u_x} + C_{1y}\vec{u_y}$$

$$\left(\frac{3}{2}t^2 + C_{1x}\right)\vec{u_x} + (1 + C_1)\vec{u_y}$$

$$v(t=1) = \left(\frac{3}{2} + C_{1x}\right)\vec{u_x} + (1 + C_{1y})\vec{u_y}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2} + C_1x = 1 \\ \cancel{1} + C_{1y} = \cancel{1} \end{cases} \quad \begin{cases} C_{1x} = -\frac{1}{2} \\ C_{1y} = 0 \end{cases}$$

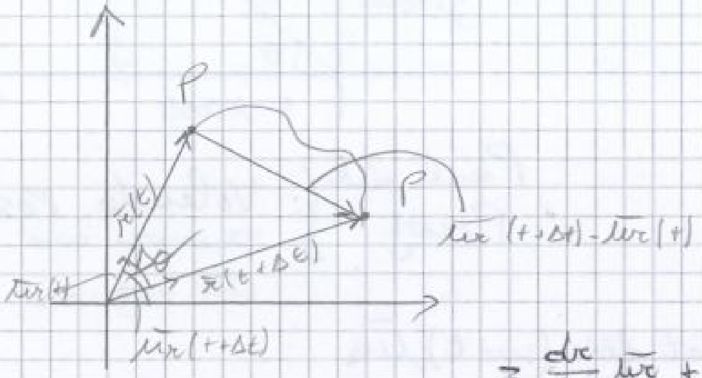
1) COORDINATE POLARI

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\,\bar{u}_r) = \frac{dr}{dt}\bar{u}_r + r\underbrace{\frac{d\bar{u}_r}{dt}}$$

$$\frac{d\bar{u}_r}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{u}_r(t+\Delta t) - \bar{u}_r(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\bar{u}_\theta =$$

$$= \frac{d\theta}{dt}\bar{u}_\theta$$



$$= \frac{dr}{dt}\bar{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\bar{u}_\theta$$

Quando $\Delta t \to 0$, il vettore $\bar{u}_r(t+\Delta t) + \bar{u}_r(t)$ tende a coincidere con l'arco di circonferenza, (in modulo), quando Corda ~ Arco = Raggio · Angolo, Dato che parliamo di versori = 1 (Raggio) e modulo $\Delta\theta$ - il modulo $= 1 \cdot \Delta\theta$

Infine la velocità $\bar{v} = \underbrace{\frac{dr}{dt}\bar{u}_r}_{\text{Variazione di } r \text{ in modulo}} + \underbrace{\cancel{r}\frac{d\theta}{dt}\bar{u}_\theta}_{\text{Variazione di Direzione di } \bar{r}}$

NB: 1) il SR qui ($\bar{v}$) è RADIALE e ANGOLARE, mentre nell'acc. il SR era Diverso, ovvero (intrinseco).

2) Nel SR POLARE, le rette di riferimento sono gli Assi $\bar{u}_r$ e $\bar{u}_\theta$.

ACC. in coordinate Polari

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left|\frac{dr}{dt}\bar{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\bar{u}_\theta\right| =$$

$$= \frac{d^2r}{dt^2}\bar{u}_r + \frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\bar{u}_r}{dt} + \frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt}\bar{u}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\bar{u}_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{d\bar{u}_\theta}{dt}$$

$$= \frac{d^2r}{dt^2}\bar{u}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\bar{u}_\theta + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\bar{u}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\bar{u}_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\left(-\frac{d\theta}{dt}\bar{u}_r\right)$$

$$= \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)\bar{u}_r + \left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\bar{u}_\theta$$

17

CONCLUSIONI

SISTEMA DI RIFERIMENTO :
1) CARTESIANO;
2) intrinseco ($\bar{u}_T$, $\bar{u}_n$);
3) POLARI ($\bar{u}_r$, $\bar{u}_\theta$);

~~VELOCITÀ~~

V. POSIZIONE

1) $\bar{r}(t) = x(t)\,\bar{u}_x + y(t)\,\bar{u}_y$

3) $\bar{r} = r\,\bar{u}_r$

VELOCITÀ

1) $\bar{V} = V_x\,\bar{u}_x + V_y\,\bar{u}_y$

2) $\bar{V} = V\,\bar{u}_T \rightarrow$ Direzione

3) $\bar{V} = \frac{dr}{dt}\,\bar{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\,\bar{u}_\theta \rightarrow$ Da il significato fisico del vettore

ACCELERAZIONE

1) $\bar{a} = a_x\,\bar{u}_x + a_y\,\bar{u}_y$

2) $\bar{a} = \frac{dv}{dt}\,\bar{u}_T - \frac{V^2}{R}\,\bar{u}_n$

3) $\bar{a} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)\bar{u}_r + \left(r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\,\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt}\right)\bar{u}_\theta$

$\boxed{\text{CASI PARTICOLARI}}$

1) Moto Rettilineo $\rightarrow$ Traiettoria = Retta

il versore $\bar{u}_r$ = costante

θ = "

$\bar{u}_T = \bar{u}_r$

$R = \infty$

$\bar{V} = \frac{dr}{dt}\,\bar{u}_r$ (Polare);

$= V\,\bar{u}_r$ (intrinseco)

coincidono in solo in qst caso

$\bar{a} = \frac{d^2r}{dt^2}\,\bar{u}_r$ (Polare);

$= \frac{dv}{dt}\,\bar{u}_T$ (intrinseco)

$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$ SOLO ED ESCLUSIVAMENTE IN QST CASO

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 296

Risoluzione 1

$\vec{v} = \int \bar{a}(t)\,dt$ + cond. iniz.

$\vec{r} = \int \vec{v}(t)\,dt$ + cond. iniz.

Risoluzione 2

$\bar{a} = f(\vec{r})$

$\vec{v} = \int \vec{a}\,dt = \int f(\vec{r})\,dt$

non so cos'è => NON POSSO fare l'integrale

Quindi prendiamo un'altra strada

$\vec{a} = \frac{d^2 r}{dt^2} = f(\vec{r})$ EQ. Differenziale

↓

Svolgo => trovo $\bar{r}(t)$

IL PROBLEMA FONDAMENTALE NEL PIANO

2 componenti (x, y)

$\vec{a} = a_x \bar{u}_x + a_y \bar{u}_y$

$\bar{v} = \underbrace{\int a_x\,dt\, \bar{u}_x + CI}_{v_x} + \underbrace{\int a_y\,dt\, \bar{u}_y + CI}_{v_y}$

$\bar{r} = \underbrace{\int v_x\,dt\, \bar{u}_x + CI}_{x} + \underbrace{\int v_y\,dt\, \bar{u}_y + CI}_{y}$

NB: Avrei ottenuto = risultato, lavorando sulle singole componenti - (PRINCIPIO DI COMPOSIZIONE DEI MOTI) -

Dir x => $v_x = \int a_x\,dt + CI$

$x = \int v_x\,dt + CI$

$\vec{r}(t) = x\,\bar{u}_x + y\,\bar{u}_y$

Dir y -> $v_y = \int a_y\,dt + CI$

$y = \int v_y\,dt + CI$

MOTI A 1 DIMENSIONE

Direzione → Fissa

Vettori → Scalari con Segno

Problema Fondamentale (casi particolari).

a) Moto Uniforme

$$a = 0 \quad + 2 \text{ CI} \begin{cases} t = t_0 \\ V = V_0 \\ x = x_0 \end{cases} \Rightarrow \quad v = v_0 \text{ costante}$$

$x = x_0 + v_0 (t - t_0)$ Generale

$x = x_0 + v_0 t$ Vera se $t_0 = 0$

b) Moto Uniformemente Accelerato

$$a = a_0 = \text{costante} + 2 \text{ CI} \begin{cases} t = t_0 \\ V = V_0 \\ x = x_0 \end{cases}$$

NB: verificare sempre le condiz. iniziali senza le quali tutto ciò che dite è una beata CAZZATA.

$$v = \int a_0 \, dt = at$$

$V = V_0 + a(t - t_0)$

$V = V_0 + at$ (Vera se $t_0 = 0$)

$x = x_0 + V_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} a (t - t_0)^2$

$x = x_0 + V_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ (vera se $t_0 = 0$)

II) $a = 6x$ $\quad$ eI $\left\{ \begin{array}{l} t = 0 \end{array} \right.$ $\quad$ $x = 0$, $\quad v = 0$

↑

NON è moto ARMONICO

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 6x \quad \text{Eq. Differenziale}$$

Risolviamola con un trucco fisico.

$a = 6x \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 6x$ $\quad$ Facciamo sparire il tempo

1) Moltiplico a DX e SX PER dx

$$dx \frac{dv}{dt} = 6x\, dx \Rightarrow \frac{dx}{dt} dv = 6x\, dx$$

$$\Rightarrow v\, dv = 6x\, dx \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ v = 0 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^v v\, dv = \int_0^x 6x\, dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{2} = 3x^2 \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{6}\, x}$$

Dato che $v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \sqrt{6}\, x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \sqrt{6}\, dt = \frac{dx}{x}$

$$\Rightarrow \int \sqrt{6}\, dt = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \sqrt{6}\, t \overset{+C_1}{=} \log x$$

$$\Rightarrow \sqrt{6}\, t + C_1 = \log x$$

CINEMATICA

Lezione 4

1) Combinazione di moti 1-D nello stesso tempo t.
(Moto in 2-D)

$x = x(t)$ Retta

$y = y(t)$ Retta($\perp x(t)$)

Si Risolve ogni moto indipendentemente dall'altro e ~~si~~ si ricava la traiettoria finale in componenti.

Esempio:

$a_x = 0 \quad \begin{cases} t = 0 & V_x = 0 \\ & X = 3 \end{cases}$ $\qquad a_y = 0 \quad \begin{cases} t = 0 & V_y = 3\ m/s \\ & Y = 0 \end{cases}$

2 moti PARTI: $a_x = a_y = 0$
$\Rightarrow$ I 2 moti sono Rettilinei uniformi.

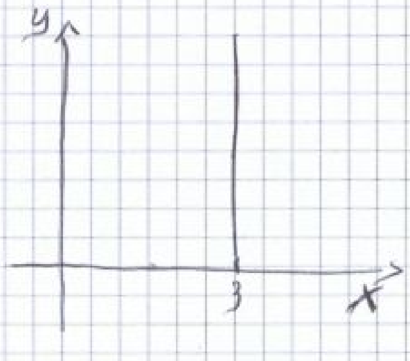
i) $x = x_0 + V_{0x}(t - t_0)$
$X = X_0 + V_x(t - t_0) \Rightarrow x_0 = \text{Fermo}$, $x_0 = 3$

ii) $y = y_0 + V_{0y}(t - t_0)$
$y = 0 + V_{0y} \cdot t$
$y = V_{0y} \cdot t$

Moto finale (composto)

$\vec{r} = X_0 \vec{u_x} + V_y t \vec{u_y}$

NB: La Sovrapposizione di 2 moti Rettilinei Uniformi da come risultato, un moto rettilineo uniforme.



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 296

3) Moto Armonico sia lungo x che lungo y –

Con la stessa ω (velocità Angolare)

$$a_x = -\omega^2 x \begin{cases} t=0 & x = A \\ & V_x = 0 \end{cases} \qquad a_y = -\omega^2 y \begin{cases} t=0 & y=0 \\ & V_y = A\omega \end{cases}$$

Pos. del moto Armonico generale

$$\left.\begin{aligned} x &= A\cos(\omega t+\varphi) \\ V_x &= -A\omega\,\text{sen}(\omega t+\varphi) \end{aligned}\right\}$$ le eq. Soddisfano le cI quando $\varphi = 0$

$$y = B\cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$V_y = -B\omega\cos(\omega t+\varphi_1)$$

Per $t=0$ $\begin{cases} y = B\cos(\varphi_1) = 0 \\ V_y = -B\omega\,\text{sen}(\varphi_1) = A\omega \end{cases} \longrightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ sostituendo a V_y si ottiene $\boxed{+B = -A}$

Conclusioni

$$x = A\cos\omega t$$

$$y = -A\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = A\,\text{sen}(\omega t)$$

Sovrapponendo

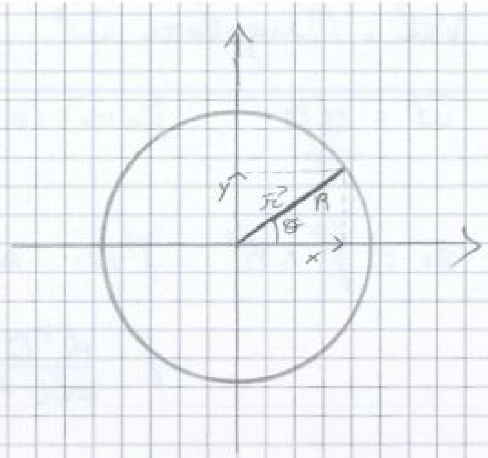
$$\vec{r}(t) = A\cos(\omega t)\,\vec{u}_x + A\,\text{sen}(\omega t)\,\vec{u}_y$$

$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t) \\ y = A\,\text{sen}(\omega t) \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2 = A^2\cos^2(\omega t) + A^2\text{sen}^2(\omega t) \Rightarrow$$

$$\boxed{x^2+y^2 = A^2}$$

Circonferenza di Raggio A e C(0,0) (l'origine) –

MOTO CIRCOLARE



→ Traiettoria = CIRCONFERENZA CENTRATA NELL' ORIGINE.

$\vec{r}(t) = x(t)\vec{u_x} + y(t)\vec{u_y} = (R;\theta)$

$x = R\cos\theta$

$y = R\,\text{sen}\,\theta$

i) $\vec{v} = v\vec{u_t} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} \cdot R = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{d\theta}{dt}$

ii) $\vec{a} = \vec{a_t}\vec{u_t} + a_n\vec{u_N}$

$\vec{a_n} = -\frac{v^2}{R} = -\frac{(\omega R)^2}{R} = -\omega R$

$\vec{a_t} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \gamma R$

OSSERVAZIONI

A) $\gamma = \frac{d^2\theta}{dt^2}$; $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ qst sono sufficienti a Descrivere il moto,

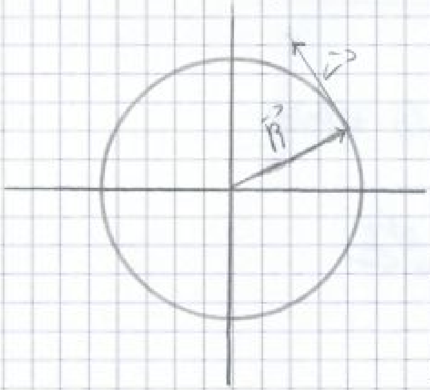
$\gamma R = a_T$; $\omega R = V_t$

γ = Acc. Angolare

ω = Vel. Angolare

Quindi

$\vec{V} = \omega R \cdot \vec{u_T} \Rightarrow \vec{V} = \vec{\omega} \wedge \vec{R}$ dove $\vec{\omega}$ = • Modulo di ω
• Direzione ⊥ Piano della circonferenza.



Immaginando $\vec{\omega}$ uscente dal foglio, per la Regola della mano Destra, il vettore $\vec{V}$, è = a quello tracciato sul grafico.

NB: MOTO ORARIO → $\vec{\omega}$ USCENTE

" ANTIORARIO → $\vec{\omega}$ ENTRANTE

Moto Armonico

→ Moto 1-D

→ $\boxed{a = -\omega^2 x}$ Unica Def. del moto Armonico.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

NB: la ω del moto Armonico

è DIVERSA dall'ω del moto circolare.

$x = A\cos(\omega t+\varphi)$ Dove A e φ Dipendono dalle C.I.

↓

$v = A\omega\,\text{sen}(\omega t+\varphi)$

$x = A_1\cos(\omega t) + A_2\,\text{sen}(\omega t)$ (Dalla relaz. $\cos(\alpha+\beta) = \cos()\cos() + \text{sen}()\,\text{sen}()$)

$= A\,\text{sen}(\omega t+\varphi_2)$ con $(\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2})$

Definiamo con A = Ampiezza

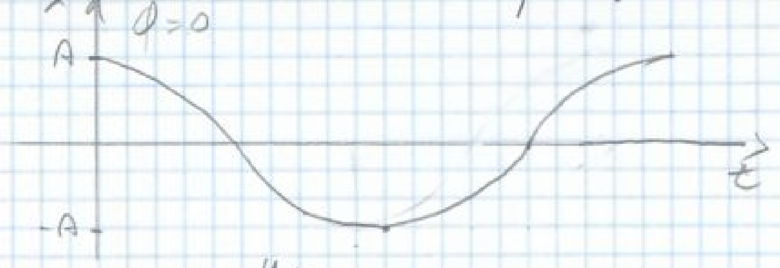
ω = Pulsazione ≠ Velocità Angolare

φ = fase

NB: il moto ARMONICO è un moto PERIODICO

quindi $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (Periodo)

$\nu = \frac{1}{T}$ (frequenza).



Grafico, Posizione di x in funz. del tempo

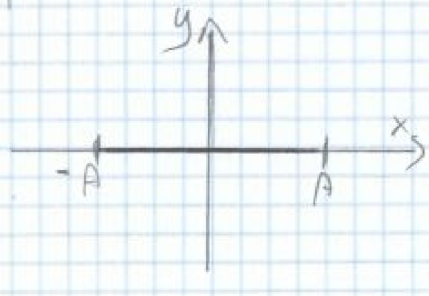


Grafico Traiettoria.

Dinamica del Punto

DEF. OGGETTI PUNTIFORMI:

- DIMENSIONI DELL'OGGETTO MOLTO PICCOLE (Rispetto agli spazi in gioco e al sistema di Riferimento).
- SE LE SUE ROTAZIONI SONO TRASCURABILI RISPETTO AL MOTO.

Esempi: - Un libro gira su se stesso (NON PUNTIFORME).
- Un treno in moto (PUNTIFORME).

ANDREMO a vedere:

1. FORZA;
2. ENERGIA;
3. QUANTITA' DI MOTO.

---

1. FORZA

i) TRE PRINCIPI;
ii) Leggi di NEWTON.

NB: PRINCIPIO = Affermazione non Dimostrata. (POSTULATO)

A) I Principio: Legge d'Inerzia.

"Un corpo, mantiene il suo stato di moto con velocità costante, a meno che non ~~venga~~ Avvengano delle cause (FORZE) a modificarlo".

PAROLE CHIAVI:

- CORPO: in gioco ci sarà una massa (m);
- MOTO: Non necessariamente fermo;
- V costante: $\vec{V}$ = costante in modulo e in Direzione.

SOMMA delle FORZE = 0 [modulo e Direz.]: V = costante

MA SE

V: = costante $\Rightarrow \Sigma \vec{F} = 0$

Se $\vec{V} = 0$, $\vec{V_x} = 0$, $\vec{V_y} = 0$ $\Rightarrow \Sigma \vec{F} = 0$

Se $\Sigma \vec{F} = 0 \not\Rightarrow \vec{V} = 0$ NON Implica

Se $\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{V}$ = costante Implica

B) II Principio: Legge di NEWTON_

"La somma delle forze è direttamente prop. all'accellerazione, la costante di proporzionalità è la massa"_

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

* Definiamo la:

massa: "grandezza che descrive la resistenza di un corpo (punto) al variare lo stato di moto"_

Se abbiamo 2 masse, m_1 e m_2:

i) $m_1 > m_2$, $\vec{a_1} = \vec{a_2}$ **se** $\vec{F_1} > \vec{F_2} = m_1\vec{a} > m_2\vec{a}$

ii) $m_1 = m_2$, $\vec{a_1} = \vec{a_2}$ se $\vec{F_1} = \vec{F_2} \Rightarrow m_1\vec{a} = m_2\vec{a}$

iii) $m_1 < m_2$, $\vec{a_1} = a_2$ se $\vec{F_1} < \vec{F_2} \Rightarrow m_1\vec{a} < m_2\vec{a}$

iv) $\vec{F_1} = \vec{F_2}$, $\vec{a_1} < \vec{a_2}$ se $m_1 > m_2$

COMPONENTI VETTORIALI

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{F} = F_x\vec{\mu_x} + F_y\vec{\mu_y} = ma_x\vec{\mu_x} + ma_y\vec{\mu_y}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} F_x = ma_x \\ F_y = ma_y \end{cases}$$

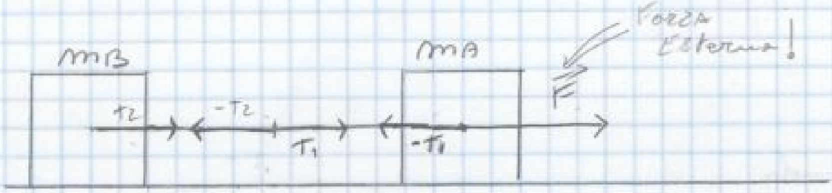
In presenza di molte forze, $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$$\sum \vec{F_x} = ma_x$$

$$\sum F_y = ma_y$$

$m_B \vec{a_B} = - m_A \vec{a_A} \Rightarrow \vec{a_B} \neq - \vec{a_A}$

TENSIONI



$\vec{T_1}$ = Azione di A su F(fune)

$-\vec{T_1}$ = Reazione di F su A

$\vec{T_2}$ = Azione della F(fune) su B.

$-\vec{T_2}$ = Reazione di B su F(fune).

II PRINCIPIO!

$\vec{F} - \vec{T_1} = m_A \vec{a_A}$ CORPO A

$\vec{T_1} - \vec{T_2} = m_F \vec{a_F}$ FUNE

$\vec{T_2} = m_B \vec{a_B}$ CORPO B

Esempio:

$\vec{F} = 3t\vec{u_x} + 2\vec{u_y}$

$t=0 \quad \vec{r}=0 \quad \vec{v}=0$

$m = 4kg$

$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{3}{4}t\vec{u_x} + \frac{1}{2}\vec{u_y}$

$\vec{v} = \frac{3}{8}t^2\vec{u_x} + \left(\frac{t}{2} + \underset{0}{c_2}\right)\vec{u_y}$

$+c_1 = 0$

$\vec{r} = \frac{t^3}{8}\vec{u_x} + t^2\vec{u_y}$

$c_1 = 0 \quad c_2 = 0$

$\forall t \Rightarrow \vec{F}$ so cos'è $\vec{a}$

$\hookrightarrow$ Descrive la traiettoria.

$\forall t \Rightarrow$ conosco $\vec{r}$ (Posizione).

$\vec{F} = m\vec{a}$

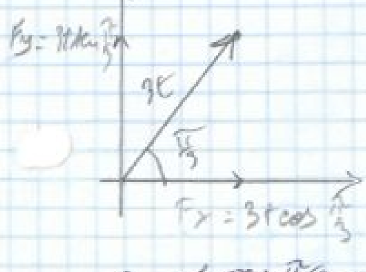
$\underbrace{F_x\vec{u_x} + F_y\vec{u_y} = ma_x\vec{u_x} + ma_y\vec{u_y}}$

$$\begin{cases} F_x = ma_x \\ F_y = ma_y \end{cases}$$

Scomposizione dei moti

Se $\vec{F} = \vec{F}(t) \Rightarrow$ Possiamo scomporre il moto nella sovrapp. dei moti unidimensionali, che avvengono nello stesso tempo. Lungo ogni direzione agiscono solo le componenti corrispondenti di $\vec{F}$.

esempio: $\vec{F} = (3t, \pi/3)$



LUNGO x:

$F_x = ma_x$

$a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{3t\cos\pi/3}{m}$

CI: $t=0 \quad \vec{r}=0 \quad \vec{v}=0$

$\vec{v_x} = \frac{\frac{3}{2}\cos\frac{\pi}{3}t^2}{m}$; $x = \frac{1}{2}\frac{\cos\frac{\pi}{3}t^3}{m}$

~~$\frac{\cos\pi/3\, t^3}{m}$~~

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 296

Osservazioni

1) $\vec{J} = \int \vec{F}\,dt = \Delta \vec{q}$

a) FORMA $\underline{\text{INFINITESIMA}}$

$$d\vec{J} = \underbrace{\vec{F}\,dt = d\vec{q}}$$

La F è la derivata della quantità di moto nel tempo

$\hookrightarrow$ $\vec{F} = \dfrac{d\vec{q}}{dt}$ NUOVA DEF. DI FORZA

• Se $\underline{m = \text{costante}}$ $\Rightarrow$ $\vec{F} = \dfrac{d}{dt}(m\vec{v})$ $\cancel{\dfrac{d\vec{v}}{dt}}$ $= \underline{m\vec{a}}$

$\downarrow$

Equivale alla II legge di Newton

• Se $\boxed{m}$ $\underline{\text{non}}$ è $\underline{\text{costante}}$ $\Rightarrow$ $\vec{F} = \underbrace{\dfrac{dm}{dt}}\vec{v} + m\dfrac{d\vec{v}}{dt}$

$\downarrow$

NON equivale alla II legge di Newton

$\downarrow$

Si applica ai MOTORI A REAZIONE = m diminuisce x l'espulso del GAS

$\Downarrow$

Si produce una forza $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{F} \neq 0}$

2) Se $\vec{F}$ = costante (CASO PARTICOLARE) -

$$\vec{J} = \int \vec{F}\,dt = \vec{F}\int dt = \vec{F}\Delta t$$

$\boxed{\vec{F} \cdot \Delta t = \Delta \vec{q}}$ solo se F è costante

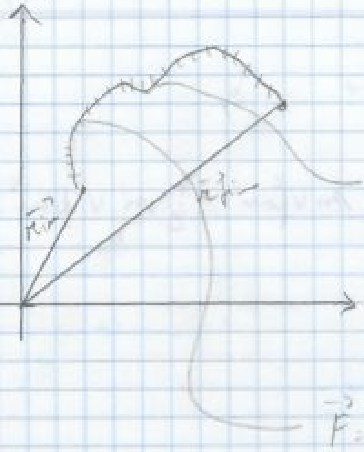
3) FORZA MEDIA

$$\vec{F}_{media} = \frac{\int \vec{F}\,dt}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{\vec{F}_{media} = \frac{\vec{J}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{q}}{\Delta t}}$$

NB: $\vec{F} \neq \dfrac{\Delta \vec{q}}{\Delta t}$ è sempre $\underline{\text{FALSA}}$,

vale $\Leftrightarrow$ CASO 2 - $\boxed{F = \text{costante}}$

5) EFFETTO DI UNA FORZA QUANDO VARIA LA POSIZIONE



Divido la traiettoria in intervalli infinitesimi.

$ds_j = d\vec{r}_j$ All'intervallo infinitesimo dello spostamento, corrisponde un intervallo infinitesimo di traiettoria.

$\vec{F} : \vec{F}_j$ Ad ogni intervallo infinitesimo corrisponde una forza $\vec{F}_j$

$\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ integrale di linea.

(vettore, pr. scalare, vettore)

$$\boxed{W = \int_f \vec{F} \cdot d\vec{r}} \rightarrow \text{Def. di Lavoro}$$

TEOREMA ENERGIA - LAVORO

$\vec{F} = F_x \vec{u}_x + F_y \vec{u}_y \qquad \cdot \qquad d\vec{r} = dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y$

$\vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx\,\vec{u}_x + F_y dy\,\vec{u}_y \Rightarrow W = \int_f (m a_x dx + m a_y dy) \Rightarrow$ (m = costante)

$$\Rightarrow m \int_f \left[\underbrace{\frac{dv_x}{dt}dx}_{v_x} + \underbrace{\frac{dv_y}{dt}dy}_{v_y} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \int_f [v_x dv_x + v_y dv_y] \Rightarrow m \left[\int_f v_x dv_x + \int_f v_y dv_y \right] =$$

$$\Rightarrow m \left[\frac{1}{2} v_x^2 + \frac{1}{2} v_y^2 \right] \Big|_{in}^{fin} \Rightarrow \frac{1}{2} m \left[v_x^2 + v_y^2 \right] \Big|_{in}^{fin} \Rightarrow \frac{1}{2} m \vec{v}^2 \Big|_{in}^{fin} \Rightarrow$$

$$W = \frac{1}{2} m \vec{v}_f^2 - \frac{1}{2} m \vec{v}_{in}^2 \Rightarrow \boxed{K = \frac{1}{2} m \vec{v}^2} \rightarrow \text{Energia Cinetica}$$

CONCLUSIONE TEOREMA

$\boxed{W = K_{fin} - K_{iniz}} = \Delta K \rightarrow$ Variazione di En. Cinetica

$\boxed{W = \Delta K} \rightarrow$ Corretto $\qquad \boxed{W = K} \rightarrow$ ERRATO

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 296

In sintesi, a parole:

"Il lavoro è la componente // della forza moltiplicata per lo spostamento".

NB: Def. valida solo per qst caso particolare.

iii) ADDITIVITÀ DEI LAVORI

→ Se $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \ldots + \vec{F_m}$

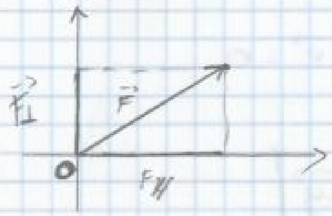
$$\Downarrow$$

$$W = \int \vec{F}\, d\vec{r} = \int \vec{F_1}\, d\vec{r} + \int \vec{F_2}\, d\vec{r} + \ldots + \int \vec{F_m}\, d\vec{r}$$

$$\Downarrow$$

$$W = W_1 + W_2 + \ldots + W_m$$

IMPORTANTE



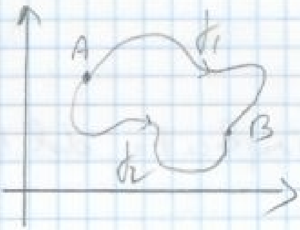
Quindi $\vec{F} = \vec{F_\perp} + \vec{F_{//}}$

$$W = \underbrace{W_\perp}_{=0 \text{ xhè } F_\perp \perp d\vec{r}} + W_{//} \Rightarrow W = W_{//}$$

$$W = \int \underbrace{F_{//} \cdot d\vec{r}}_{\|F_{//}\|\,\|d\vec{r}\|} \Rightarrow W = \int \|F_{//}\|\,\|d\vec{r}\|$$

Si toglie il prodotto scalare e diventa una semplice moltiplicazione

iv)



$W_{\gamma_1} \neq W_{\gamma_2}$

Il lavoro dipende dalla traiettoria.

CASO PARTICOLARE (DELLE $\vec{F}$ CONSERVATIVE).

$W_{\gamma_1} = W_{\gamma_2}$ = a qualsiasi altra traiettoria

NB: il lavoro non dipende dalla traiettoria.

3) $\Delta K = \int_{x=0}^{x=4} F\,dx \qquad \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_{in}^2 = \int_0^4 3e^x\,dx = 3e^x\Big|_0^4 =$

$= 3(e^4 - 1) \Rightarrow v = \frac{2}{m}\left[3e^x - 3 + \frac{1}{2}\right] ?$

Per un x generico

$3e^x\Big|_0^x = 3e^x - 3$

la più semplice è la 2ª procedura

$\Rightarrow \Delta \vec{q} = m(v_f - v_{in}) = m(3e^x - 3 - 1) = 5$

Torniamo al primo, applico

$\frac{dx}{dt} = \sqrt{- \;-}$ a variabili separabili

$\frac{dx}{\sqrt{- \;-}} = dt$

---

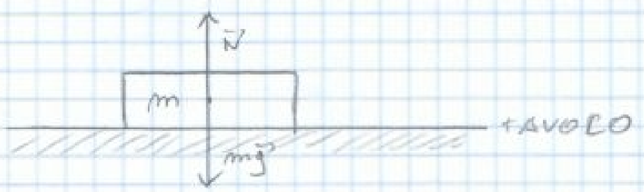
3) STATICA

$\Rightarrow$ CONDIZIONE DI EQUILIBRIO $(\vec{v} = 0) \Rightarrow \Sigma \vec{F} = 0$

$\Rightarrow$ Estensione a $\vec{v}$ = costante

CASO PARTICOLARE

$\Rightarrow$ Reazioni Vincolari



$\boxed{\vec{v} = 0}$

$\vec{N}$: Reaz. Vincolare

$\vec{N} + m\vec{g} = 0$

$\Downarrow$

Serve a realizzare l'equilibrio

FISICA

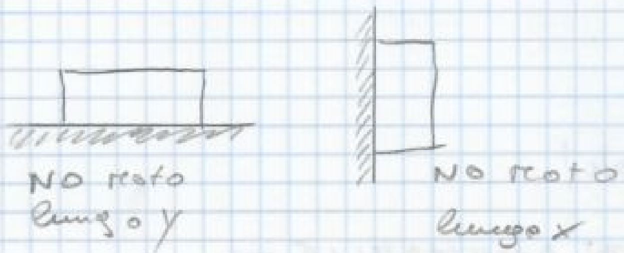
ELENCO DI FORZE

Premessa

Una forza deve avere queste caratteristiche:
- modulo
- direzione
- verso
- P.to di Applicazione
- Sorgente.

1) REAZIONE VINCOLARE

i) La Sorgente ha un vincolo -> ogg. che impedisce il moto in una Particolare Direzione



ii) $\vec{N}$ è un vettore, la sua Direzione è $\perp$ alla superficie vincolante

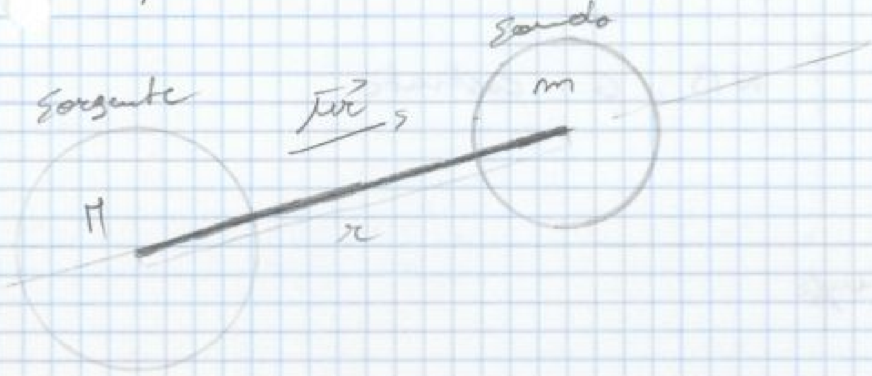
$\|\vec{N}\|$ = Somma delle Altre forze Perpendicolari alla superficie.

Verso = Uscente dalla superficie, altrimenti $\|\vec{N}\| = 0$

iii) P.to di Applicazione è un qualsiasi Punto sulla superficie di contatto

Forza Gravitazionale

i) Sorgente : $\forall$ massa M



ii) Direzione : Retta che congiunge i centri di M e m;

MODULO : Direttamente proporzionale al prodotto delle masse e inversamente propz al quadrato delle distanze.

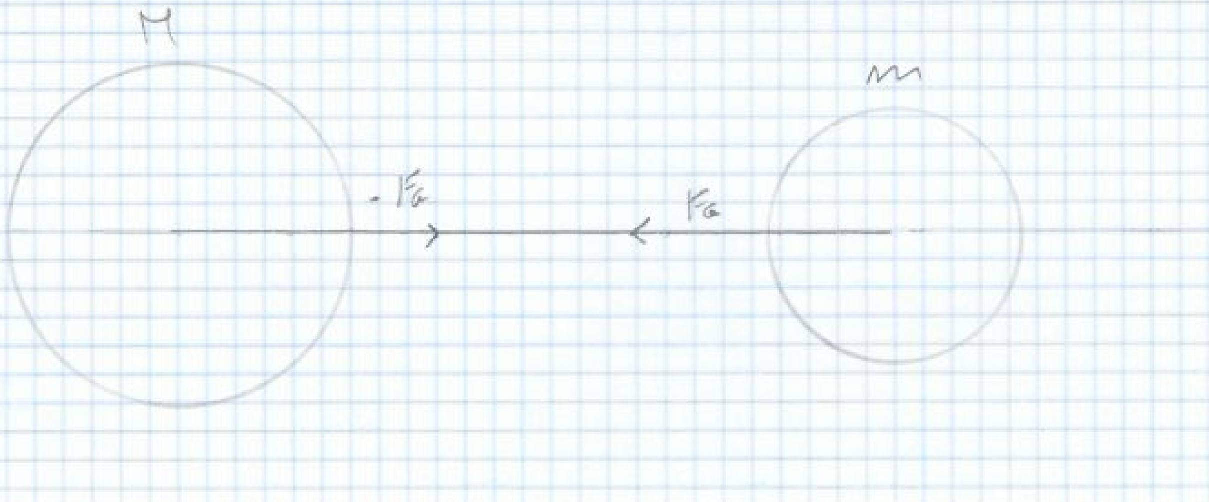
$$\|F_G\| = G \frac{m \cdot M}{r^2}$$

Verso = Attrattivo verso M

$$\vec{F_G} = -G \frac{mM}{r^2} \boxed{\vec{u_r}}$$

Ricorda che è attrattiva

versore // alla retta congiungente M e m.



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 296

Forza Attrito

i) Sorgente — forza attrito
↓
Vincolo

a) Vincolo + massa -> no velocità relativa
cioè m ferma rispetto al vincolo

Att. statico

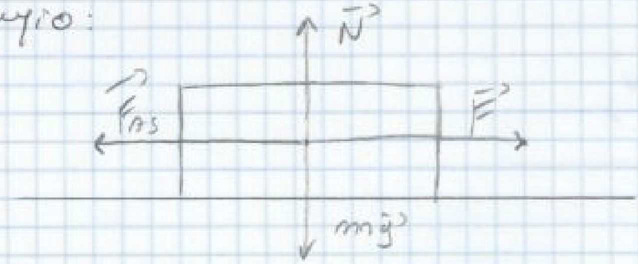
Forza di Attrito statico:

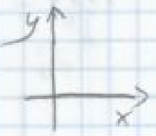
- modulo pari alla somma di tutte le $F_{//}$ al piano del vincolo al massimo deve valere $F_{AS}^{max} = \mu_s N$

Per essere moto

- Direzione // al piano del vincolo $\Sigma F_{//} > \mu_s N$
- Verso opposto alle ΣF parallele.

Esempio:





μ_s noto

lungo y $\longrightarrow$ $N - mg = 0$

lungo x $\longrightarrow$ $F - F_{AS} = ?$

IPOTESI $a_x = 0$ $\Rightarrow$ $F_{AS} = F$

Se $F_{AS} \leq \mu_s N$
ok!
$F \leq \mu_s mg$

b) Se $F > \mu_s mg$ $\Rightarrow$ $a_x \neq 0$ $\Rightarrow$ subentra Attr. Dinamico.

Esempio : $m = 1\,kg$ $\quad F = 18\,N$ $\quad \theta = 30°$

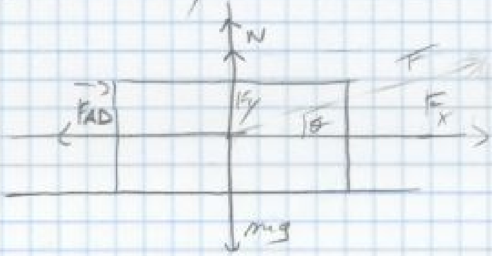
Ipotesi 1 $\rightarrow$ $\boxed{a_x = 0}$ $\Rightarrow$ $N = mg - F\sin\theta = 10 - 9 = 1\,N$

$$\left.\begin{array}{l} F_{AS} = F\cos\theta = 9\sqrt{3}\,N \\ F_{AS}^{MAX} = \mu_s N = 0{,}2\,N \end{array}\right\} \text{NON ACCETTABILE}$$

$\Downarrow$

IPOTESI 1 $\Rightarrow$ FALSA.

IPOTESI 2 $\rightarrow$ $a_x \neq 0$ $\quad a_x > 0$



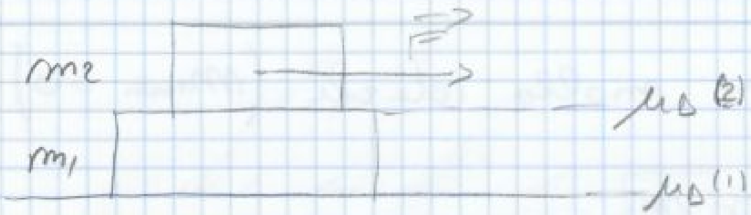
lungo y $\rightarrow$ $N = mg - F_y$

lungo x $\rightarrow$ $F_x - \mu_D N = m a_x$

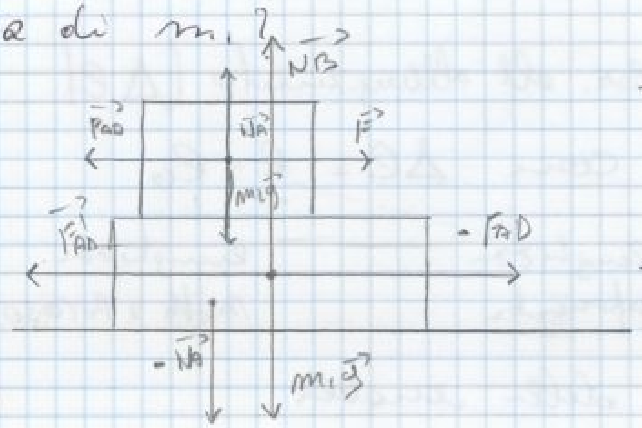
$F_{tot} = F_x - \mu_D N \rightarrow$ F costante

$\Delta q = F_T \Delta t$

$m v_f - \cancel{m v_i} = F_T \Delta t$



a di m_1?



- Vincolo su m_2 gliesto dovuto Da m_1
- Vincolo su m_1 dovuto al Piano

- m_1

lungo y $\rightarrow$ $N_B - m_1 g - N_A = 0$

lungo x $\rightarrow$ $F_{AD} - F'_{AD} = m_1 a_{1x}$

- m_2

lungo y $\rightarrow$ $N_A - m_2 g = 0$

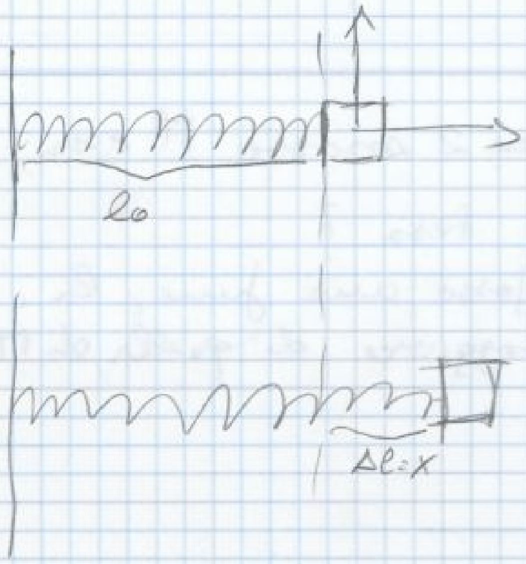
lungo x $\rightarrow$ $F - F_{AD} = m_2 a_{2x}$

Quindi

$N_A = m_2 g \qquad N_B = m_1 g + m_2 g = (m_1 + m_2) g$

$F_{AD} = \mu_D^{(2)} N_A \qquad F'_{AD} = \mu_D^{(1)} N_B$

$$\begin{cases} F - \mu_D^{(2)} m_2 g = m_2 a_{2x} \\ \\ \mu_D^{(2)} m_2 g - \mu_D^{(1)} (m_1 + m_2) g = m_1 a_{1x} \end{cases}$$



$F_{el} = \boxed{-} Kx$

Perchè è di Richiamo.

Se $x > 0 \Rightarrow \Delta l > 0$

F verso sinistra $\Rightarrow F < 0$

$F_{el} = ma$; $ma = -kx$

$-Kx = m \dfrac{d^2x}{dt^2}$ ~~dove~~

$-\dfrac{K\cancel{x}}{m} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ dove $\boxed{\dfrac{k}{m} = \omega^2}$

$\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \longrightarrow$ Moto Armonico

con

$T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{K}}$

Periodo di oscillazione.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 296

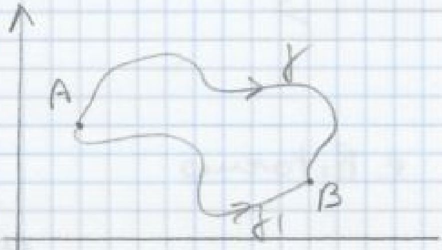
Effetto Forze

i) $\vec{F} = m\vec{a}$ $\qquad \vec{F} = \sum \vec{F_i}$

ii) $\Delta \vec{q} = \int \vec{F} dt$

$\vec{q} = m\vec{v}$ $\qquad$ Se $\vec{F}$ = costante $\Rightarrow \Delta \vec{q} = \vec{F} \Delta t$

iii) $\Delta k = \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$

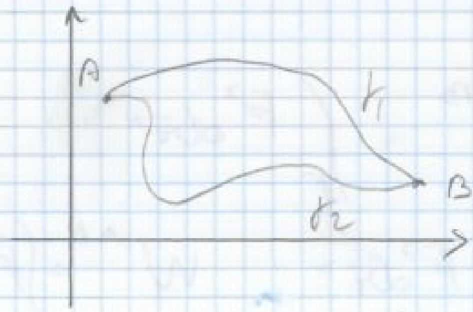


$K = \frac{1}{2} m v^2$

$W = \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ $\qquad$ in generale $\qquad W_\gamma \neq W_{\gamma'}$

→ FORZE CONSERVATIVE

Queste forze sono tali per cui il lavoro NON DIPENDE dalla traiettoria, ma dipende esclusivamente dagli stati iniziali e finali



$W_{\gamma_1}^{AB} = W_{\gamma_2}^{AB} \quad \forall \gamma$

Energia Potenziale

↳ W dipende solo dalle Pos. iniz. e fin.

La funzione Energia Potenziale Dipende solo dalla Pos.

$E = E(\vec{r}) = E(x, y, z)$

$\boxed{\Delta E_P \overset{def}{=} -W^{conservativo}}$; $E^B - E^A \overset{def}{=} -W^{conservativo}$

i) Definiremo ΔE $(\neq E)$ ->

E è definito a meno di una costante additivo arbitraria

$E = f(x, y, z)$ $\quad E' = f(x, y, z) + k$ $\quad$ NB: entrambe soddisfano la Definizione

cioè $\Delta E = -W$

$E_B - E_A = -W$

$(E'_B + k) - (E'_A + k) = -W$; $E'_B - E'_A = -W$

Per eliminare la K, fisso un sist. di rifer.
Per energie potenziali

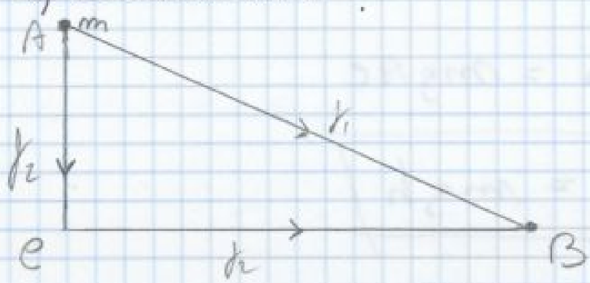
=> fissare una Pos. $\vec{r} = \vec{r_0}$ dove $E = 0$

$E(\vec{r} = \vec{r_0}) + k = 0 \Rightarrow k = -E(\vec{r} = \vec{r_0})$

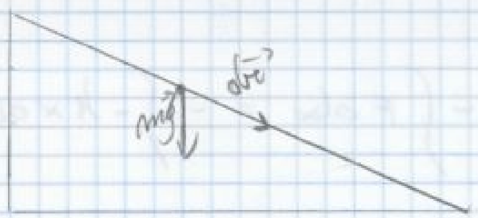
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 296

iii) Esempio: Forza Peso

a) conservativa?



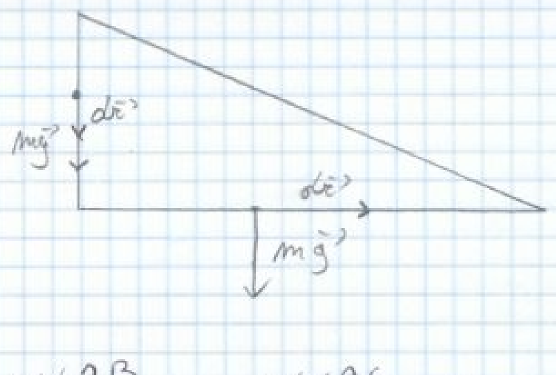
$$W_{\gamma_1}^{AB} = \int_{A\,\gamma_1}^{B} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_A^B mg\, d\vec{r} \cos\theta = mg\cos\theta \underbrace{\int_{A\,\gamma_1}^{B} d\vec{r}}_{\overline{AB}}$$



$$W_{\gamma_1}^{AB} = mg\,AB\cos\theta = mg\,AC$$

$$W_{\gamma_2}^{AB} = W_{\gamma_2}^{AC} + W_{\gamma_2}^{CB}$$

$$W_{\gamma_2}^{AB} = \int_{A\,\gamma_2}^{C} m\vec{g}\, d\vec{r} + \int_C^B m\vec{g}\, d\vec{r}$$



$$W_{\gamma_2}^{AB} = W_{\gamma_2}^{AC} = mg\int_A^C d\vec{r} = mg\,AC = W_{\gamma_1}^{AB}$$

TEOREMA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

Ipotesi $\longrightarrow$ $\boxed{W = \Delta k}$ $\forall$ Forza

Se ho forze conservative e NON (sia conservative che NON conservative).

$$W = W^{NC} + W^{cons}$$

$$\Rightarrow \; W^{NC} \underbrace{- \Delta E}_{E_i - E_f} = k_f - k_i$$

$$K_i + E_i + W^{NC} = K_F + E_f$$

W^{NC} → Energia Dissipata

$E_{meccanica} = K + E$

E → legata a posizione

K → legata a velocità

$$W^{NC} = \int_f \vec{F} \, d\vec{r}$$

Se $\vec{F}$ ha lo stesso verso di $d\vec{r}$ $\boxed{W_{NC} > 0}$

TEORIA DELLA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA

$$E_i^{mecc} + W^{NC} = E_F^{mecc}$$

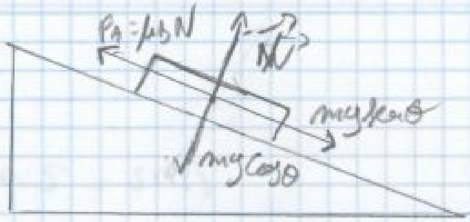
Se $W^{NC} > 0 \Rightarrow E_F^{mecc} > E_i^{mecc}$

Se $W^{NC} < 0 \Rightarrow E_F^{mecc} < E_i^{mecc}$

Se $W^{NC} = 0 \Rightarrow E_F^{mecc} = E_i^{mecc}$

Per gli esempi gira Pag :) →

2) Stesso Problema + Attrito Dinamico μ_D



— Approccio 1

F_{AD} = cost e // a $d\vec{r}$

ma verso opposto a $d\vec{r} \Rightarrow W^{NC} = -\mu_D N L$

— Approccio 2

lungo x $\rightarrow$ $F_x = mg\sin\theta - \mu_D N = m a_x$

~~lungo y~~ $\rightarrow$ $L = \frac{1}{2} a_x t_f^2$ $\quad v_f = a_x t_f$

lungo y $\rightarrow$ $N - mg\cos\theta = 0$; $N = mg\cos\theta$

Approfondisco Approccio 1

$$E_i + W^{NC} = E_f$$

$$mgh + \underset{0}{K} - \mu_D N L = \frac{1}{2} m v_f^2 + \underset{0}{U_f}$$

Spostamento TOTALE

$$\boxed{mgh - \mu_D N L = \frac{1}{2} m v_f^2}$$

- Approccio 1

Conservazione dell'energia

$m_1 \Rightarrow F_{NC} = T \parallel$ a $d\vec{r}$ e costante

T e $d\vec{r}$ stesso verso $\Rightarrow$ segno concorde

$W^{NC} = T \cdot h$

$m_2 \Rightarrow F_{NC} = T \parallel$ a $d\vec{r}$ e costante

ma T e $d\vec{r}$ verso opposto $\Rightarrow$ segno Discorde

$W^{NC} = -T \cdot h$

$$E_i + k_i + W^{NC} = E_f + K_f$$

$$m_1)\quad \cancel{m_1 g l} + 0 + T \cdot h = \underbrace{\cancel{m_1 g l} + m_1 g h}_{m_1 g (l+h)} + \frac{1}{2} m_1 v_1^2$$

$$m_2)\quad m_2 g h + 0 - T \cdot h = 0 + \frac{1}{2} m_2 v_1^2$$

- Approccio 2 $\quad \Sigma F = ma$ (II Princ. Dinamica)

$m_1)\quad F_x = m_1 g - T = m_1 a_x$

$$a_x = g - \frac{T}{m_1} \quad \text{costante}$$

$$-h = 0 + 0 + \frac{1}{2} a_x t_1^2 \qquad v_1 = 0 + a_x t$$

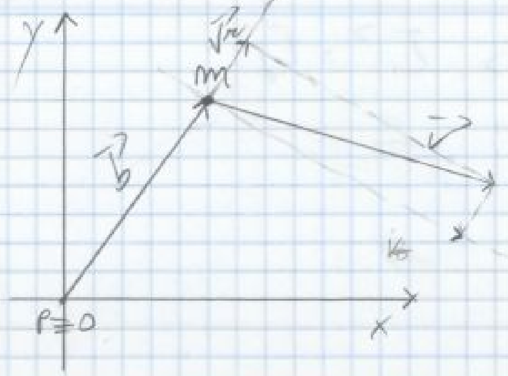
$m_2)\quad F_x = T - m_2 g = m_2 a_x$

$$a_x = \frac{T}{m_2} - g$$

$$\left.\begin{array}{l} -h = \frac{1}{2} a_x t_1^2 \\ v_1 = a_x t_1 \end{array}\right\} \text{non servono perché già presenti in } m_1$$

77

1) Polo $\equiv O$



$\vec{b} = \vec{r}$ (Vettore Posizione della Particella)

$\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$

a) Coordinate Polari

$\vec{v} = \vec{v_r} + \vec{v_\theta}$

Radiale $\parallel \vec{r}$ — normale $\perp$ a $\vec{r}$

$\vec{v_\theta} = r \frac{d\theta}{dt} \vec{u_\theta}$

$\vec{L} = \vec{r} \wedge m(\underbrace{\vec{v_r} + \vec{v_\theta}}_{\vec{v}}) = \vec{r} \wedge m\vec{v_r} + \vec{r} \wedge m\vec{v_\theta}$

$= 0$ xké $\vec{r} \parallel \vec{v_r}$

$\|\vec{L}\| = mrv_\theta = mr^2 \frac{d\theta}{dt}$

b) $\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$

DERIVO

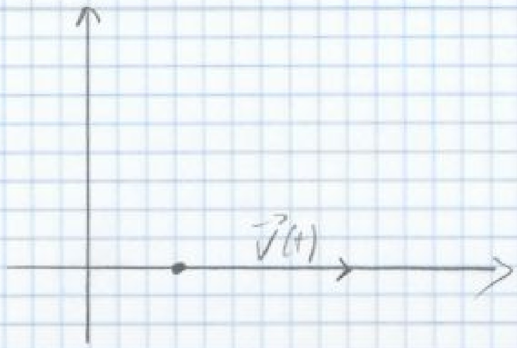
$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge m\vec{v} + \vec{r} \wedge \frac{d(m\vec{v})}{dt}$

$\frac{dL}{dt} = \underbrace{\vec{v} \wedge m\vec{v}}_{=0 \text{ xké } \vec{v} \parallel \vec{v}} + \vec{r} \wedge \underbrace{\frac{d\vec{q}}{dt}}_{\vec{F}} = \vec{r} \wedge \vec{F}$

$\boxed{\frac{dL}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{M}}$ (MOMENTO DELLA FORZA)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 296

Esempio:



$\vec{v}(t) = 3t\,\vec{u_x}$

$x=0$ $t=0$ $y=0$

$\vec{a} = 3\,\vec{u_x}$

$\vec{r} = \frac{3}{2}t^2\,\vec{u_x} + 0\,\vec{u_y}$

$F = \frac{3}{m}\vec{u_x}$ $\quad \vec{q} = 3mt\,\vec{u_x}$

moto che $\vec{v} \parallel \vec{r} \Rightarrow \vec{L} = 0$

$\vec{F} \parallel \vec{r} \Rightarrow \vec{M} = 0$

75

CASO PARTICOLARE (limite di piccole oscillazioni)

$\Downarrow$

θ piccolo $\rightarrow \sin\theta \sim \theta$
$(0<\theta<1°)$

$$-g\frac{1}{l}\theta = \frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad \left(\text{Moto Armonico (similare)} \quad -\omega^2 x = \frac{d^2x}{dt}\right)$$

NB: il pendolo oscilla di moto armonico

con $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

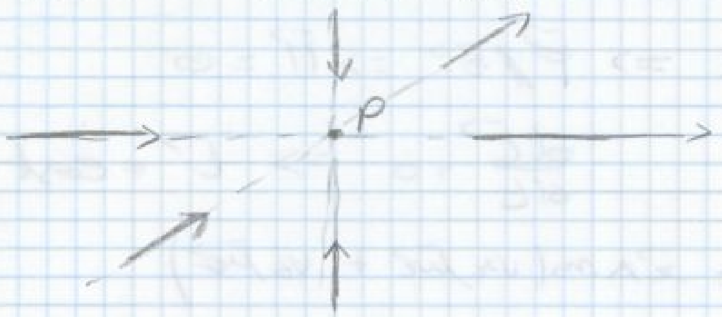
$\theta = A\cos(\omega t + \varphi)$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Periodo

2) FORZE CENTRALI

a) Def: le rette di azione delle forze si incontrano tutte in un punto.



Se prendo m in un campo di forze centrali allora $\vec{F}$ avrà direzione lungo la retta congiungente m con P

77

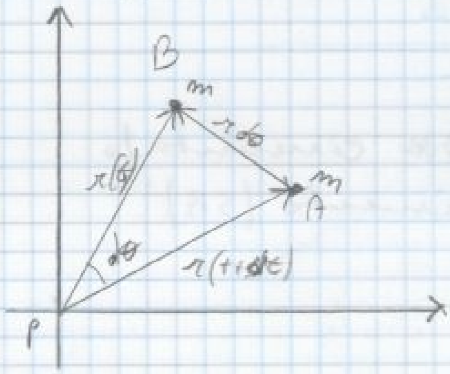
d) Leggi di Keplero => $\vec{L}$ = cost

i) $\vec{L}$ cost in Direzione => $\vec{r}$ e $\vec{v}$ individuano un piano ($\perp \vec{L}$) che non cambia orientazione

⇓

I L. di Keplero ⟶ moto sul piano a 2 Dimensioni

ii) $\vec{L}$ cost in modulo => $L = mr^2 \frac{d\theta}{dt}$ = cost



P_{AB} ~ Triangolo rettangolo

Area = $dA = \frac{PA \cdot PB}{2} = \frac{1}{2} r^2 d\theta$

$L = m \cdot \frac{dA}{dt}$; $\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$ ⟶ velocità Areolare

velocità Areolare è costante

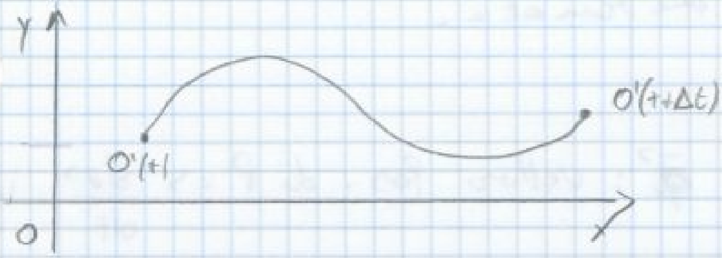
⇓

Durante il moto di m, r spazza aree uguali in tempi uguali

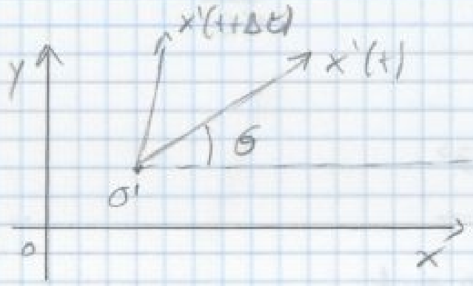
⇑

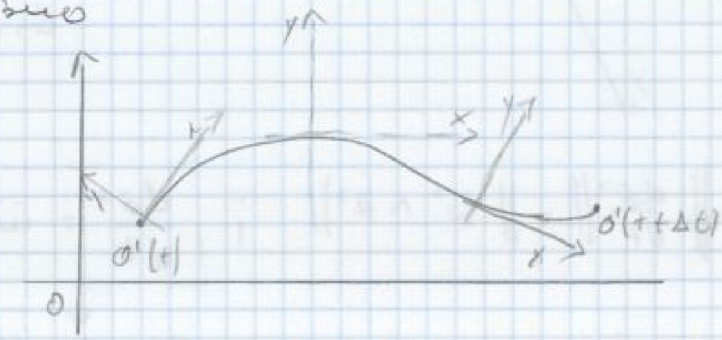
II legge di Keplero!

infatti $\vec{r}_{O'}(t)$ (r funzione del tempo) => O' si muove lungo una traiettoria

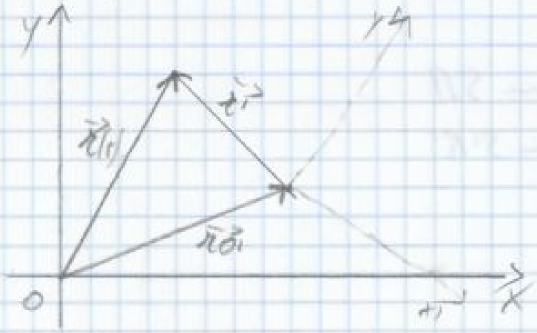


• $\theta'(t)$ => Assi che Ruotano





Trasformazione di $\vec{r}$



$$\vec{r} = \vec{r}_{O'} + \vec{r}'$$

$$\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y$$

$$\vec{r}' = x'\vec{u}_{x'} + y'\vec{u}_{y'}$$

$\vec{r}$ = retta Posizione in SR

$\vec{r}'$ = retta Posizione in S'R'

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 296

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge (\underbrace{x'\vec{u}_{x'} + y'\vec{u}_{y'} + z'\vec{u}_{z'}}_{r'})$$

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{v}' + \underline{\vec{\omega} \wedge \vec{r}'}$$

$\vec{v}$: Velocità particella in SR

$\vec{v}'$: Velocità particella in SR'

$\vec{v}_{O'}$: Velocità di O' in SR

$\vec{\omega} \wedge \vec{r}'$: Termine correttivo ($\vec{\omega}$: velocità con cui ruotano gli assi di SR' rispetto SR ?)

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'$$

$\vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}' \Rightarrow$ velocità di trascinamento.

4) Trasformazione accelerazioni

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{u}_y + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{u}_z$$

$$\vec{a}' = \frac{d^2x'}{dt}\vec{u}_{x'} + \frac{d^2y'}{dt}\vec{u}_{y'} + \frac{d^2z'}{dt}\vec{u}_{z'}$$

DIMOSTRAZIONE

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_{O'} + \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'\right) =$$

$$= \frac{d\vec{v}_{O'}}{dt} + \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}' + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

$$\frac{d\vec{v}_{O'}}{dt} = \vec{a}_{O'} \qquad \frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{a}' + \vec{\omega} \wedge \vec{v}'$$

Quindi

$$\vec{a} = \vec{a}_{O'} + \vec{a}' + \vec{\omega} \wedge \vec{v}' + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}')$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{O'} + \vec{a}' + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}' + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}' + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 296

B) $\vec{r}_{O'} = 0 \Rightarrow O' \equiv O$

Assi ruotano con $\vec{\omega} = cost$

i) Rotazioni in 3D

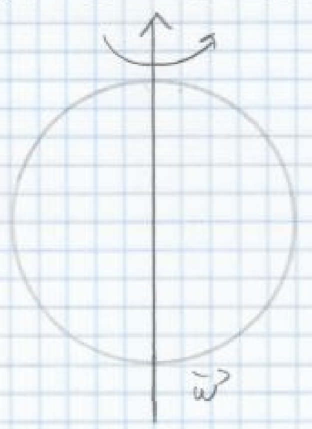
$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'$; $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}' + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'$

$\vec{a}_{centrifuga} = \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}'$

$\|\vec{a}\| = \omega^2 r'$ = acc. centripeta

direzione $\parallel \vec{r}'$, verso opposto.

e) rotazione della terra.



$O' = O$

$\frac{d\omega}{dt} = 0$

effetti su g

- Osservatore esterno

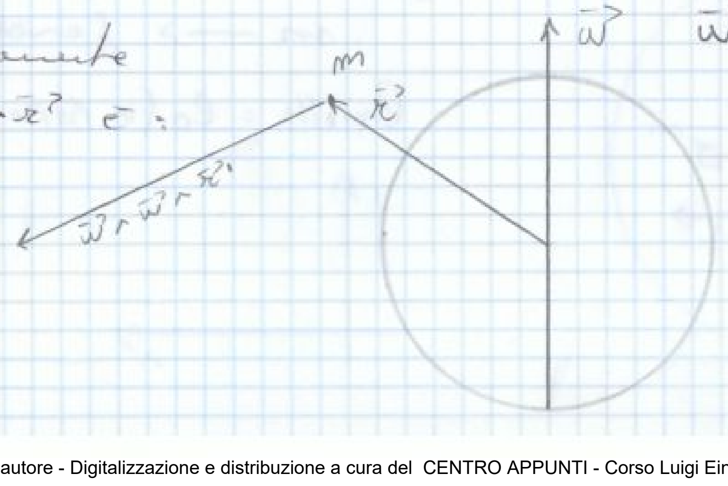
  $\vec{g}$ diretta verso il ~~...~~ centro della terra

  $\|\vec{g}\| = 9{,}81\ m/s^2$

- osservatore sulla terra

  $\vec{g}' \neq \vec{g}$ $\quad \vec{g}' = \vec{g} - \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}' - 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'$

Graficamente $-\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}'$ è:

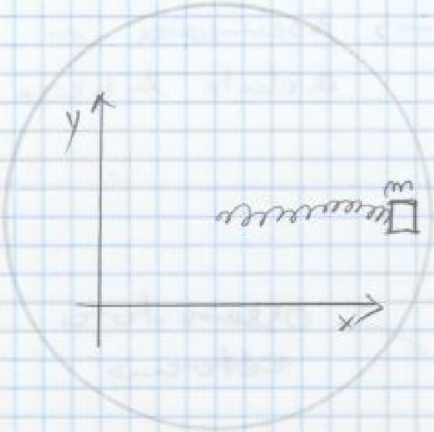


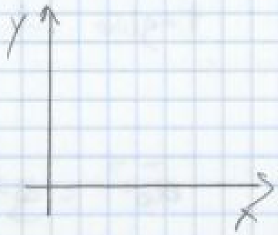
$\vec{\omega} \wedge \vec{r}' \perp$ al foglio e uscente.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 296

Giostra ruota con ω = costante

$l_{molla} > l_0$





$SR \Rightarrow \exists\ F_{elastica} = -k\Delta l$

cinematico $\Rightarrow$ m ha moto circolare uniforme

$\Downarrow$

$\vec{a}_{centripeta} = -\omega^2 R$; $\underbrace{F_{el} = -m\omega^2 R}_{\vec{F} = m\vec{a}}$

$\rightarrow$ osservatore interno

$S'R' \Rightarrow \exists\ F_{el} = -k\Delta l$

cinematico $\Rightarrow$ m ferma $\Rightarrow a' = 0$

$F = ma \Rightarrow F = 0$ NO!

Allora osservatore "inventa" una F apparente

$\vec{F}_{el} + \vec{F}_{app} = m a' = 0$

$F_{APP} = -F_{el} = \boxed{m\omega^2 R \Rightarrow \text{Forza centrifuga}}$

ii) $\vec{a} \neq \vec{a'} \Rightarrow S'R'$ NON INERZIALE

$$\vec{F} \neq m\vec{a'}$$

$$\vec{F'} = \vec{F} + F_{APP} = m\vec{a'}$$

$$\vec{F}_{APP} = m\vec{a'} - \vec{F}$$

$\hookrightarrow$ Forze fisiche

$$\vec{F}_{APP} = m\vec{a'} - m\vec{a} = m\left(\vec{a'} - \vec{a}\right) =$$

$$= m\left(\vec{a}_0' + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r'} + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v'}\right)$$

Ascensore $\Rightarrow \vec{\omega} = 0 \qquad \vec{F}_{APP} = -m\vec{a}_0'$

Giostra $\Rightarrow \vec{a}_0' = 0 \qquad \vec{\omega} = cost \qquad \vec{v'} = 0$

$$\vec{F}_{APP} = -m\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r'} \Rightarrow \text{Forza centripeta}$$

$$\boxed{-m\omega^2 r}$$

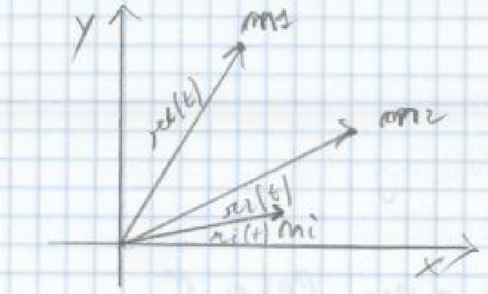
Forza apparente utile

$$\boxed{\vec{F}_{centrifuga} = -m\omega^2 R}$$

in SR $F_{APP} = 0$

<u>in S'R' non inerziale</u> $\Rightarrow$ uso le F apparenti

1) Def: Un sistema di Punti è un sistema di N Particelle con massa $m_i (i = 1, \dots, N)$ e Distanza tra loro Variabile



$$\Delta \vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = f(t)$$

Gradi di Libertà → n° di coordinate indipendenti.

↓

Per ogni Particella, 3 coordinate quindi Per N Particelle occorrono 3N coordinate

⇒ Abbiamo 3N equazioni

⇓

$$\left.\begin{aligned} m_1 \vec{a}_1 &= \vec{F}_1 \\ m_2 \vec{a}_2 &= \vec{F}_2 \\ &\vdots \\ m_n \vec{a}_n &= \vec{F}_n \end{aligned}\right\}$$

NB: 3N ~~equaz.~~ Può essere molto grande

Esempio $N = 1000 \Rightarrow 3000$ eq. DA Risolvere

BARICENTRO

Def: P.to che ~~A~~ fisicamente (solo teoricamente) ma che Aiuta (Di molto) a Risolvere il Problema

Richiamo Matematico

SOMMATORIA: $\sum_{i=1}^{N} a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$; $\sum_{i=1}^{N} b a_i = b \sum_{i=1}^{N} a_i$

SOMMATORIA DOPPIA: $\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} a_{ij} = \sum_{i=1}^{N} (a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{iN}) =$

$(a_{11} + a_{21} + \dots + a_{N1} +$
$a_{12} + a_{22} + \dots + a_{N2} +$
$\dots\dots\dots a_{NN})$.

92