



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 880

DATA: 12/03/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Golisano

MATERIA: Idraulica

Prof. Ridolfi

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

30-09-2013

- I fluidi e il loro movimento

Un fluido è un corpo materiale che può subire grandi variazioni di forma sotto l'azione di forze di minima entità, che tendono a diventare trascurabili quando la velocità con cui avviene la deformazione tende ad annullarsi. Da qui:

- meccanica dei solidi $\Rightarrow F \propto E$
- meccanica dei fluidi $\Rightarrow F \propto \frac{dE}{dt}$

I fluidi si distinguono in:

- liquidi: oppongono grande resistenza alle variazioni di volume
- gas: " poca o nulla " " " " " " "

In maniera sintetica si dice che i liquidi sono incompressibili e i gas sono facilmente comprimibili.

- I fluidi come sistemi continui

I fluidi sono composti da molecole poste a distanze molto grandi in relazione alle loro dimensioni. Per un pezzo di questo tipo, non ha dunque senso parlare del valore di una grandezza in un punto, poiché essa risulta variabile con discontinuità da punto a punto, da istante ad istante.

Per superare questo carattere di discontinuità occorre ragionare in termini di scala, ossia considerare come "mattoncino di base" dei fluidi, non la particella microscopica, ma una porzione di volume che contiene un insieme non troppo piccolo di molecole. In questo modo possiamo parlare di densità ρ , ossia del rapporto fra la massa delle molecole e il volume che le contiene.

$$\rho = \frac{m}{V} \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$$

Con questo "artificio logico" possiamo superare la limitazione di corpo discreto affidata ai fluidi e considerare anche questi come dei mezzi continui, il che ci consente di applicare tutti gli strumenti matematici a nostra disposizione (in primis dx).

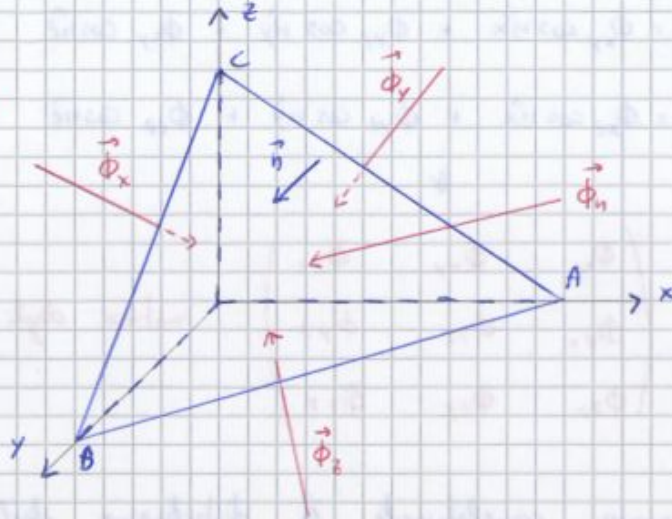
- Spazi nei sistemi continui

Nello studio dei sistemi continui conviene suddividere le forze in due tipologie:

- forze di massa: forze esterne che si esercitano a distanza su tutte le particelle del sistema, proporzionalmente alla loro massa.
ES: forza di gravità.

Vediamo ora come varia lo sforzo in funzione della giacitura.

Tetraedro di Cauchy



$\hat{n}_x; \hat{n}_y; \hat{n}_z$: angoli
che si formano con i
3 assi coordinati

Definendo la spinta come: $d\vec{\pi}_n = dA \vec{\Phi}_n$, in linea con lo schema otteniamo:

$$\begin{cases} \vec{\Phi}_x dA_x = \vec{\Phi}_x (-dA \cos \hat{n}_x) \\ \vec{\Phi}_y dA_y = \vec{\Phi}_y (-dA \cos \hat{n}_y) \\ \vec{\Phi}_z dA_z = \vec{\Phi}_z (-dA \cos \hat{n}_z) \end{cases} \quad (\text{segno - dovuto al fatto che gli angoli sono ottusi})$$

I primi 3 valori sono proporzionali alla superficie su cui agiscono e pertanto sono degli infinitesimi del secondo ordine. Il volume del tetraedro è invece un infinitesimo del terzo ordine e di conseguenza è dello stesso ordine anche la risultante delle forze di massa e di inerzia ad esso relative. Pertanto questa risultante può essere trascurata nei confronti delle possibili forze di superficie.

$d\pi$: primo ordine ($dx dy$)

dm : terzo ordine ($dx dy dz$)

Si ha così che la prima equazione cardinale dell'equilibrio del tetraedro è

$$\vec{\Phi}_n = \vec{\Phi}_x \cos \hat{n}_x + \vec{\Phi}_y \cos \hat{n}_y + \vec{\Phi}_z \cos \hat{n}_z$$

Utilizzando ora la seguente notazione: Φ_{ab} , dove - a: direzione della normale all'elemento su cui agisce lo sforzo.

- b: direzione secondo cui si proietta.

Quindi: Φ_{nx} , proiett secondo l'asse x dello sforzo $\vec{\Phi}_n$, otteniamo:

- Compressibilità

Consideriamo un volume W occupato da una massa liquida ed indichiamo con p la pressione nei punti della sua superficie di contatto. Se si dà a p un incremento dp , questo determina una diminuzione dW di volume, proporzionale a dp e al volume stesso, si ha cioè che:

$$dW = - \frac{W}{E} dp \quad \text{dove } E: \text{ modulo di elasticità a } \left[\frac{N}{m^2} \right] \text{ compressione cubica}$$

Per tutti i liquidi, il modulo E può ritenersi indipendente dalla pressione, mentre varia con la temperatura ($E = E(\theta)$). Visto che, nei casi pratici che affrontiamo, arriviamo a che fase con processi isotermini, l'equazione di stato dei liquidi si riduce alla semplice condizione

$$g = \text{cost} \Rightarrow \text{considereremo i liquidi incompressibili}$$

- Tensione superficiale

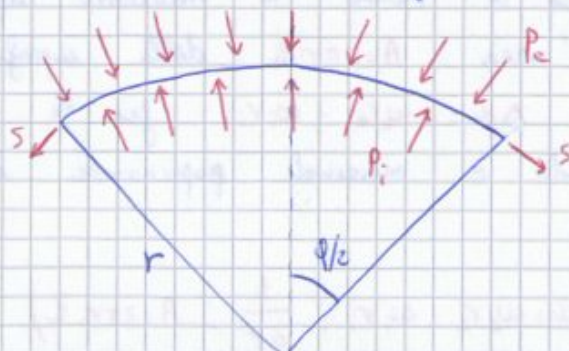
La superficie di contatto tra un liquido e un altro fluido non miscibile con esso si comporta, a causa delle forze di attrazione molecolare, come una membrana elastica in tensione, ecco perché tale proprietà prende il nome di **tensione superficiale**.

Immaginiamo di tagliare la superficie lungo un segmento di linea di lunghezza L , per mantenere a contatto fra loro i due labbi del taglio occorre esercitare su ciascuno di essi una forza F ; la tensione superficiale si misura come il rapporto tra F ed L :

$$s = \frac{F}{L} \left[\frac{N}{m} \right]$$

Se $\theta \uparrow \Rightarrow s \downarrow$

Essa mostra palesemente la sua esistenza solo se la superficie di separazione assume delle curvature marcate. Infatti, dato lo schema:



$p_i > p_e$ perché deve equilibrare la tensione superficiale s in quanto è presente una curvatura

Il tutto può essere scritto come

$$T = \mu A \frac{\Delta u}{\Delta r} \quad \text{oppure, essendo} \quad \tau = \frac{T}{A} \quad (\text{sforzo tangenziale})$$

$$\tau = \mu \frac{du}{dr} \quad \mu = \text{viscosità} \left[\frac{N \cdot s}{m^2} \right]$$

Il coeff di proporzionalità μ definisce la **viscosità** o **attrito interno**.
Tale relazione, se riferita a stati di spessore infinitesimo, prende il nome di **legge di Newton**

$$\tau = \mu \frac{du}{dr}$$

I fluidi per i quali μ si mantiene costante per date condizioni di θ si dicono **newtoniani**. La viscosità varia anche in funzione della pressione, ma di norma questa dipendenza viene trascurata.

Facendo il rapporto fra viscosità μ e densità ρ si ottiene la cosiddetta **viscosità cinematica ν**

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{m^2}{s} \right]$$

- **Fluidi non newtoniani**

Per i **fluidi newtoniani** μ è una grandezza caratteristica che non dipende dalla velocità di deformazione. (indipendente da sforzo tangenziale e normale).

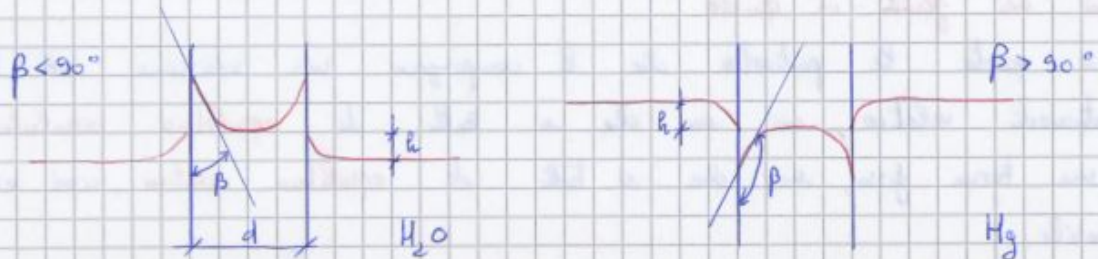
Esistono sostanze che, pur essendo fluidi, mostrano un comportamento diverso e perdono il nome di **fluidi non newtoniani**, questi, a loro volta si suddividono in:

- fluidi a comportamento indipendente dal tempo:
 - fluidi plastici alla Bingham;
 - fluidi pseudoplastici;
 - fluidi dilatanti;
- fluidi a comportamento dipendente dal tempo:
 - fluidi tixotropici: ($t \uparrow \Rightarrow \mu \downarrow$)
 - fluidi reopectici: ($t \uparrow \Rightarrow \mu \uparrow$)
- fluidi elasto-viscosi (un d. mezzo fra fluido e solido).

Risultato capillare

Quando un liquido viene a contatto con una superficie solida in presenza di un gas, per effetto delle forze di attrazione molecolare la superficie di separazione liquido-gas forma, con la superficie solida, un angolo β (con $0^\circ < \beta < 180^\circ$)

Si dice che: - il liquido **bagna** la parete se $\beta < 90^\circ$; \rightarrow prevale \vec{F} di adesione
 - il liquido **non bagna** la parete se $\beta > 90^\circ$. \rightarrow prevale \vec{F} di coesione



Tale comportamento, in combinazione alla legge di Laplace, spiega i fenomeni di **capillarità** immergendo dei tubi aperti di piccolo diametro all'interno di un liquido, si osserva che la superficie libera del liquido nel tubicino si incurva, formando quello che di norma prende il nome di **menisco** e nel contempo il liquido si alza o si abbassa a seconda della natura del liquido.

Attraverso la superficie del menisco si crea una forte differenza di pressione Δp tra liquido e gas: l'equilibrio si ottiene attraverso l'innalzamento/abbassamento del liquido a seconda che la pressione di questo sia inferiore/superiore alla pressione del gas. Tale diff. di pressione si calcola come:

$$\Delta p = \gamma h$$

h = dist. tra vertice del menisco e pelo libero del liquido

γ = peso specifico liquido

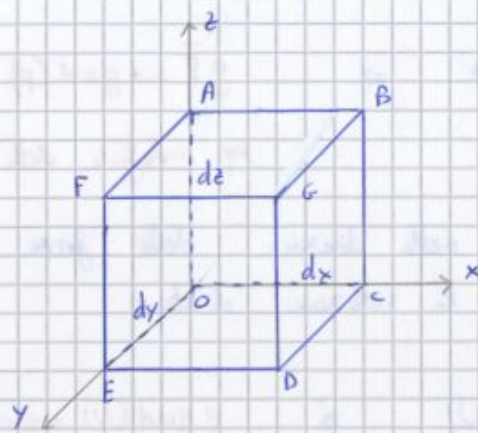
Assumendo il menisco come una calotta sferica di raggio $r = \frac{d}{2 \cos \beta}$ si ottiene

$$\begin{cases} \Delta p = \gamma h \\ \Delta p = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \sigma \cdot \frac{2}{r} \end{cases} \Rightarrow \Delta p = \frac{2 \sigma \cos \beta}{d} \Rightarrow h = \frac{2 \sigma \cos \beta}{\gamma d}$$

Legge di Jurin o Jurin

Scopriamo così che più il tubo è sottile più la risalita capillare è elevata (in

Consideriamo un volumetto infinitesimo di fluido $dV = dx dy dz$ dove la densità è ρ e la pressione è p .



$$dm = \rho dV = \rho dx dy dz$$

Su tale volumetto agiscono:

- forza di massa $\vec{F}_m = dm \vec{F} \Rightarrow \vec{F}_m = \rho \vec{F} dx dy dz$;

- forze superficiali, trattandosi di un fluido in quiete queste saranno dirette normalment alla superficie.

Sulla faccia ADEF avremo che lo sforzo agente varrà:

$$p dy dz \hat{i}$$

mentre sulla faccia BCDE lo sforzo vale

$$-\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dy dz \hat{i} \quad (- \text{dato il fatto che } \hat{i} \text{ è entrante})$$

La risultante delle due spinte è dunque

$$-\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz \hat{i}$$

Seguendo lo stesso ragionamento, sulle altre facce avremo:

$$-\frac{\partial p}{\partial y} dx dy dz \hat{j}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} dx dy dz \hat{k}$$

La risultante di tutte le forze superficiali è quindi:

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \hat{k}\right) dx dy dz$$

\Downarrow

$$-\text{grad}(p) dx dy dz$$

$$\vec{P} + \vec{F}_c = 0 \quad \text{eq. integrale dell'equilibrio statico}$$

Stipiamo così che le forze di massa agenti su un volume di fluido in quiete sono uguali ed opposte alla spinta agente sulla superficie di contorno Ω che lo delimita.

Statica dei fluidi pesanti incompressibili

Se ora applichiamo questi concetti ad un fluido incompressibile ($\rho = \text{cost}$) immerso nel solo campo gravitazionale (cosicché le sole forze di massa coincidono con la forza peso) e scriviamo: $\vec{F} = -g \text{grad}(z)$, otteniamo:

$$\rho \vec{F} = \text{grad}(p) \Rightarrow \vec{F} = \text{grad}\left(\frac{p}{\rho}\right) \Rightarrow -g \text{grad}(z) = \text{grad}\left(\frac{p}{\rho}\right) \Rightarrow$$

$$-\text{grad}(gz) = \text{grad}\left(\frac{p}{\rho}\right) \Rightarrow \text{grad}\left(\frac{p}{\rho} + gz\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{p}{\rho} + gz = \text{cost} \Rightarrow \frac{p}{\rho g} + z = \text{cost} \Rightarrow \frac{p}{\gamma} + z = \text{cost}$$

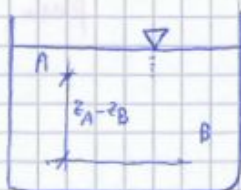
Legge di Stevin

Pertanto per i fluidi pesanti e incompressibili il valore $\frac{p}{\gamma} + z$ è un invariante.

$\frac{p}{\gamma}$: altezza piezometrica

$z + \frac{p}{\gamma}$: quota piezometrica h

Ciò vuol dire che a tutti i punti che giacciono alla stessa quota piezometrica compete la stessa pressione. Questo concetto consente di semplificare molto i calcoli, in quanto nota la pressione in un punto di data quota è possibile tracciare la distribuzione della pressione in tutta la massa fluida, quindi conoscere la pressione in ogni altra parte del fluido.



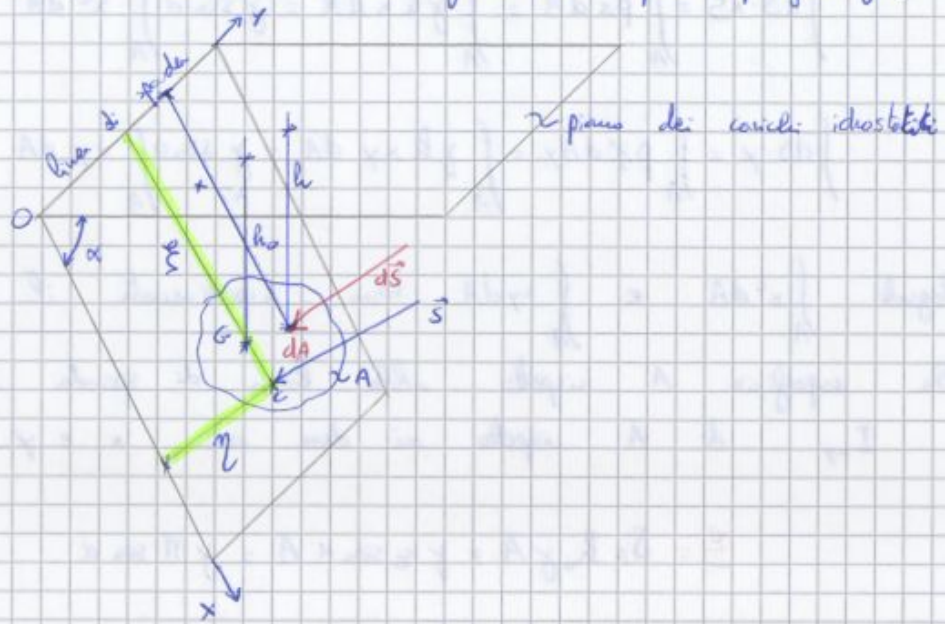
$$\frac{p_A}{\gamma} + z_A = \frac{p_B}{\gamma} + z_B \Rightarrow \frac{1}{\gamma}(p_A - p_B) = z_B - z_A$$

$$p_A = p_B + \gamma(z_B - z_A) \quad \text{e} \quad p_B = p_A + \gamma(z_A - z_B)$$

La pressione aumenta linearmente al diminuire della quota geodetica (fattore di proporzionalità γ).

Spinta su una superficie piana

Si consideri una qualsiasi superficie giacente su un piano inclinato di α rispetto all'orizzontale, a contatto con un fluido di peso specifico γ .



Le spinte elementari $d\vec{s}$ esercitate dal liquido su ogni elemento infinitesimo della superficie piana valgono

$$d\vec{s} = p\vec{n} dA = \gamma h \vec{n} dA$$

Esse sono \parallel parallele tra loro, pertanto anche la risultante \vec{S} è diretta normalmente alla superficie e in modulo vale

$$\vec{S} = \int_A \gamma h dA \quad \text{dato che } h = x \sin \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \int_A \gamma x \sin \alpha dA = \gamma \sin \alpha \int_A x dA = \gamma x_G A \sin \alpha \quad \text{ovvero } x_G \sin \alpha = h$$

momento statico della sp. rispetto alla linea di spinta = $x_G A$

$$\Rightarrow S = \gamma h_0 A \quad \Rightarrow \quad S = p_0 A \quad \text{dove } p_0 \text{ è la pressione sul baricentro}$$

Trovato il modulo e la direzione (il verso ovviamente è entrante) cerchiamo il punto di applicazione detto **centro di spinta**, espressa tramite le coordinate ξ e η (s.r. indicate in figura)

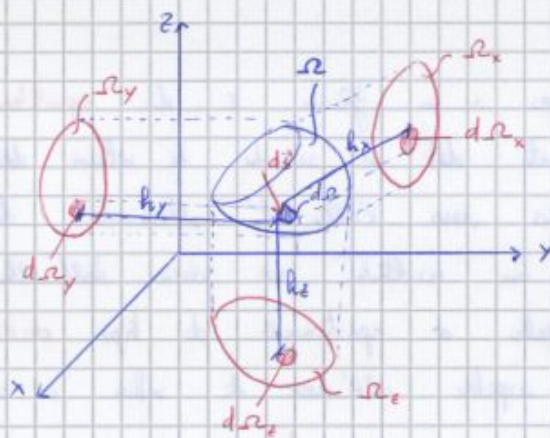
2-10-2013

Spinta su superfici curve (o gobbe)

Partiamo dal presupposto che la spinta infinitesima ds applicata su ogni elemento infinitesimo $d\Omega$ di una qualunque superficie curva, si calcola con le formule ottenute in precedenza, ossia: $ds = p \vec{n} d\Omega$.

La difficoltà sta nel trovare il valore della spinta totale S , quanto perché ogni elemento ds è orientato diversamente da punto a punto della superficie curva considerato, di conseguenza l'integrale risulta di difficile risoluzione.

Ragioniamo però in questo modo: prendiamo una superficie curva Ω immersa in un fluido e calcoliamo la spinta totale S che agisce su questa superficie scegliendo come sistema di riferimento un'terna xyz come quella in figura.



Scampingo così ds nelle 3 componenti spaziali e riscriviamo il tutto come

$$ds_x = p \cos \hat{n} \hat{x} d\Omega = p d\Omega_x$$

$$ds_y = p \cos \hat{n} \hat{y} d\Omega = p d\Omega_y$$

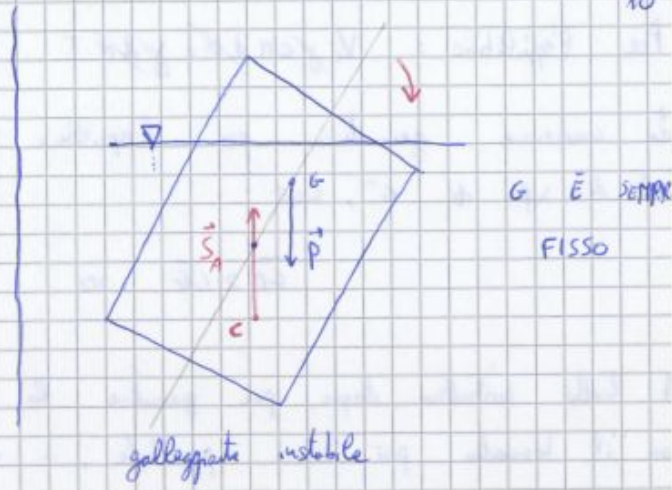
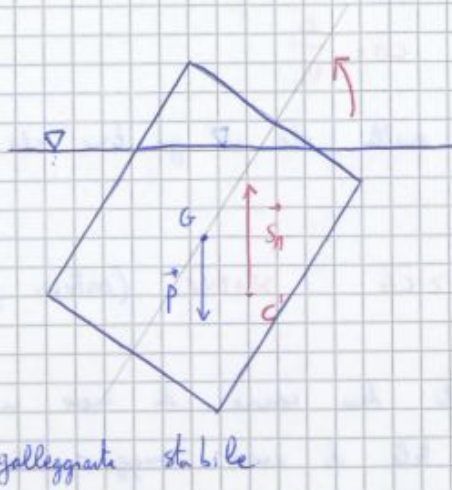
$$ds_z = p \cos \hat{n} \hat{z} d\Omega = p d\Omega_z$$

Le 3 espressioni precedenti rappresentano le proiezioni dell'area $d\Omega$ sui 3 piani orientati come normali rispettivamente gli assi x, y, z . Le spinte totali su queste superficie **piane** si calcoleranno come

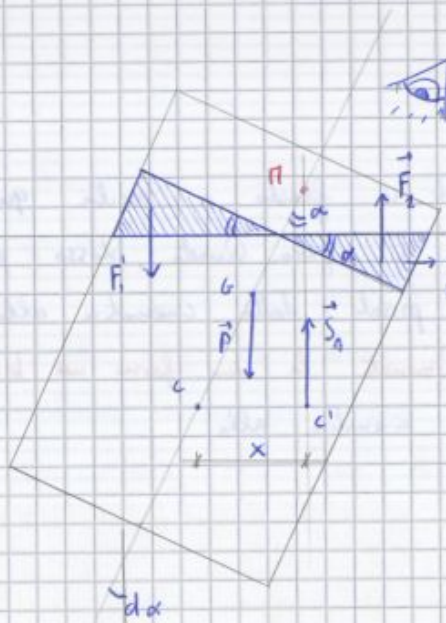
$$S_x = \int_{\Omega_x} p d\Omega_x = \gamma h_x \Omega_x$$

$$S_y = \int_{\Omega_y} p d\Omega_y = \gamma h_y \Omega_y$$

$$S_z = \int_{\Omega_z} p d\Omega_z = \gamma h_z \Omega_z = \gamma V$$



Cerchiamo una condizione geometrica che ci consenta di dire se un corpo è stabile o meno al galleggiamento.



$M = \text{metacentro del galleggiante}$

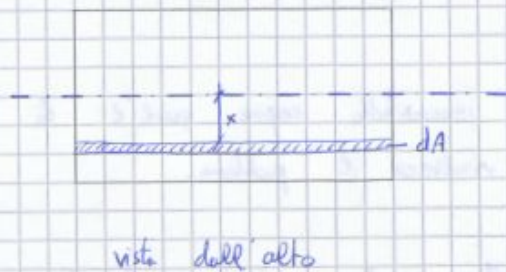
→ cono che prima era fuori ed ora, entrando in acqua di un punto dal basso verso l'alto F_2

si è originata una coppia $F_1 F_2$ la quale è spostata $C \rightarrow C'$

$$\vec{S}_A \cdot x = \text{Coppia } F_1 F_2 \quad (*)$$

$$V_{CG} \downarrow$$

$$CM \cdot \sin \alpha \approx CM \cdot d\alpha \quad (\alpha \text{ piccolo})$$



⇒ Volume elemento che è entrato dentro l'acqua
 $dV = dA \cdot x \cdot d\alpha$

$$\left. \begin{aligned} dS_A &= \gamma dV = \gamma x d\alpha dA \\ dS_A \cdot x &= \gamma dA x^2 d\alpha = dM \end{aligned} \right\} M = \gamma d\alpha I$$

$$M = \gamma d\alpha \int_A x^2 dA = \gamma d\alpha I$$

$M = \text{momento della spinta di Archimede}$

dove $I = \text{momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse di rotazione}$

Un approccio di questo tipo risulta molto semplice da un punto di vista concettuale, ¹¹ perché analogo a quello adottato per la descrizione della cinematica dei corpi rigidi, ma porta alla formulazione di equazioni particolarmente complesse.

- **approccio euleriano**: quello che studio non è come varia la velocità della singola particella nel tempo, ma come varia il campo di moto dell'intera massa fluida.

$$\begin{cases} u = u(x, y, z, t) \\ v = v(x, y, z, t) \\ w = w(x, y, z, t) \end{cases} \Rightarrow \vec{u} \quad (\text{descrivono le caratteristiche del campo delle velocità})$$

l'approccio risulta più complesso concettualmente, ma porta alla formulazione di equazioni più semplici.

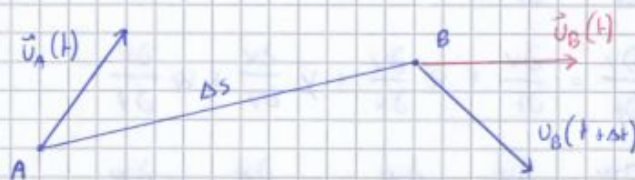
Per la tipologia di problemi che dovremo affrontare, l'approccio euleriano è quello che meglio ci consente di arrivare a dei risultati validi, pertanto, d'ora in poi la nostra trattazione si baserà sugli studi condotti da Eulero.

Quando dovremo trattare l'equilibrio dinamico della particella di massa, dovremo mettere in conto l'inerzia e pertanto l'accelerazione propria \vec{A} della particella stessa.

Ed ecco che incontriamo il primo problema: l'accelerazione \vec{A} non è data da $\frac{d\vec{u}}{dt}$ (così come verrebbe l'approccio lagrangiano), perché io non voglio conoscere

l'accelerazione della particella di fluido che si trova nel punto P, ma voglio conoscere la variazione di velocità del campo di moto del punto P (inteso come porzione spaziale) nel tempo.

Vediamo come risolvere questo problema. Consideriamo lo schema:



Dati: - $u_B(t + \Delta t)$: velocità della particella che si trova in A al tempo T ;

- $u_B(t)$: velocità della particella che ora è in B quando quella che sto osservando era in

Dall'approccio lagrangiano si ricava

$$\vec{A} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u_B(t + \Delta t) - u_A(t)}{\Delta t} \Rightarrow$$

Elementi caratteristici del moto

Il campo di moto di un fluido può essere visualizzato mediante \rightarrow famiglie di linee:

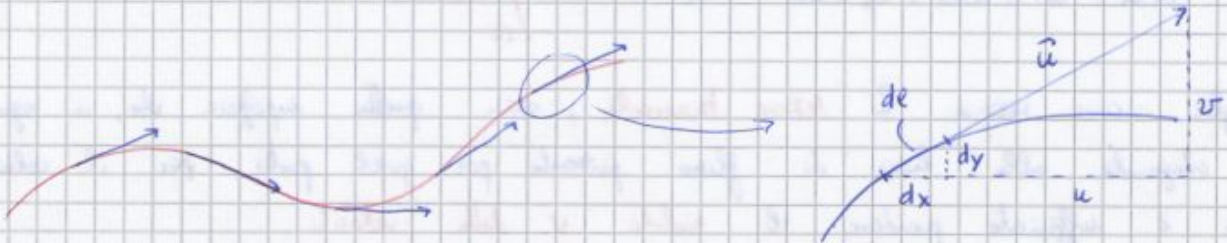
- **traiettorie**: luogo dei punti successivamente occupati dalle particelle del fluido in moto. Le equazioni delle traiettorie si ricavano scrivendo le componenti dello spostamento subito da una particella nel generico istante t :

$$dx = u(x, y, z, t) dt$$

$$dy = v(x, y, z, t) dt$$

$$dz = w(x, y, z, t) dt$$

- **linee di flusso**: curva tangente in ogni punto alle vettorie velocità, del campo di moto, passante per quel punto. Questo vuol dire che per ogni punto passa una sola linea di flusso



$$\frac{dx}{dy} = \frac{u}{v} \Rightarrow \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \Rightarrow \frac{dx}{u(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v(x, y, z, t)} = \frac{dz}{w(x, y, z, t)}$$

In generale: **traiettoria \neq linea di flusso** (sono uguali solo nel caso in cui il campo di moto è costante, quindi non varia nel tempo).

- **linee di fermo**: curva luogo dei punti occupati al generico istante t_0 di tutte le particelle che sono passate per uno stesso punto P del campo di moto.

Le 3 linee coincidono solo in caso di moto permanente.

Consideriamo ora una qualunque linea chiusa ed immaginiamo di tracciare il complesso delle linee di corrente passanti per tutti i punti della linea chiusa: queste andranno a creare una superficie tubolare che gode di non essere attraversata dal fluido nell'istante considerato. Lo spazio delimitato da tale superficie prende il nome di **tubo di flusso**.

3) **Moto piano** ($\frac{\partial}{\partial z} = 0$): il vettore velocità resta parallelo ad un piano P, perché non dipende dalla 3^a coordinata spaziale, ossia dalla direzione normale a tale piano P.

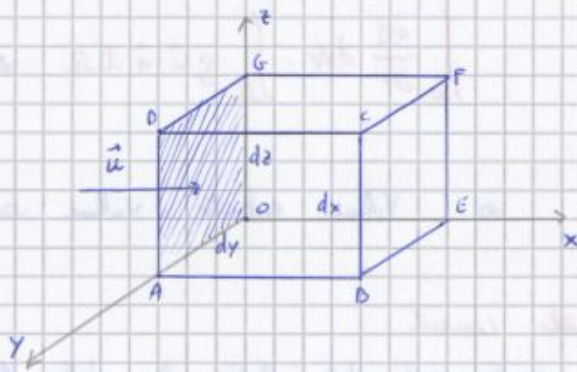
4) **Moto vario**: moto più generale possibile perché tutto può variare nello spazio e nel tempo

Equazione di continuità

Il principio di conservazione della massa, valido per una qualunque massa fluida in movimento, rappresenta il legame fra la **cinematica** e la **densità** di un fluido. A tale legame viene dato il nome di **equazione di continuità**.

Cerchiamo ora di incassare questa equazione.

Si consideri il volume infinitesimo dV di fluido di densità ρ :



Facciamo ora un bilancio tra la quantità di fluido entrante dalla faccia AOGD e di quella uscente dalla faccia parallela BCDE:

$$\underbrace{+ u dt dy dz \cdot \rho}_{\text{massa entrata}} - \underbrace{\left(\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx \right) dy dz dt}_{\text{massa uscente}} = \underbrace{- \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx dy dz dt}_{\text{variazione}}$$

In tutte le direzioni si ha:
$$- \left[\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right] dx dy dz dt = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt$$

↓
principio di conservazione della massa
*

$$\Rightarrow \underbrace{- \left[\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right] dx dy dz dt}_{\text{div}(\rho \vec{u})} = + \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt \Rightarrow \text{div}(\rho \vec{u}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

equazione di continuità dei fluidi

* massa entrata \neq massa uscente solo se ρ subisce delle variazioni temporali

In un intervallo di tempo dt attraverso la sezione iniziale entra la massa $gQ dt$ mentre dalla sezione 2 esce la massa $[gQ + \frac{\partial gQ}{\partial s} ds] dt$. La variazione sarà

$$-gQ dt + [gQ + \frac{\partial gQ}{\partial s} ds] dt = \frac{\partial gQ}{\partial s} ds dt$$

Principio di conservazione della massa: $\frac{\partial gQ}{\partial s} ds dt = - \frac{\partial gQ}{\partial t} dt ds$

↓

$$\frac{\partial gQ}{\partial s} + \frac{\partial gQ}{\partial t} = 0 \Rightarrow \text{equazione di continuità per le correnti}$$

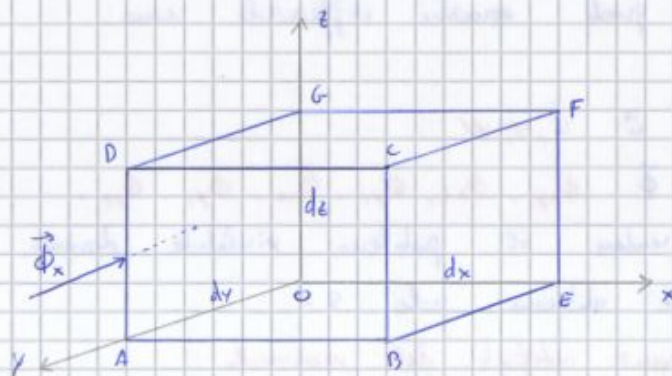
- Se $g = \text{cost} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial Q}{\partial t} = 0$

- Se moto permanente $\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial t} = 0 \Rightarrow Q = \text{cost}$ portata costante lungo tutta la linea di flusso, o che cioè nel tempo

8-10-2013

Equazione integrale del movimento

Consideriamo un volume di fluido dW come quello in figura e definiamo il valore delle spinte $\vec{\Phi}_x, \vec{\Phi}_y$ e $\vec{\Phi}_z$ che subisce ciascuna faccia del cubetto:



$$dm = \rho dx dy dz$$

Per tale volume deve valere la 1° eq. cardinale della dinamica $\Rightarrow d\vec{R} = dm \vec{A}$

\vec{R} è la risultante delle forze agenti ed è costituita da due termini:

- **forza di massa** $\vec{F} dm = \vec{F} \rho dx dy dz$. Se, come nella grande maggioranza dei casi, il moto del fluido avviene nel campo gravitazionale, la forza di massa si può scrivere come

$$\vec{F} = -g \cdot \rho dz \quad (z \text{ verso l'alto})$$

- **forze di superficie**, ossia le spinte che agiscono sulle facce del volume.

Se però noi limitiamo il nostro studio al caso dei **fluidi perfetti**, scopriamo che il problema si semplifica di molto. Infatti, per i fluidi perfetti, le **componenti tangenziali degli sforzi** ($\Phi_{xy}, \Phi_{xz}, \Phi_{yz}$) sono ovunque nulle, mentre le **componenti normali** ($\Phi_{xx}, \Phi_{yy}, \Phi_{zz}$) sono tutte uguali fra loro, tant'è vero che per quest'ultime si adotta la denominazione di **pressione p**.

In questo modo portiamo il numero di incognite da 10 a 5 e rendiamo **definito** il problema dinamico.

Ricordando che:

$$\vec{\Phi}_x = p\hat{i} \quad ; \quad \vec{\Phi}_y = p\hat{j} \quad ; \quad \vec{\Phi}_z = p\hat{k}$$

L'equazione indefinita si trasforma nella più nota **equazione di Eulero**:

$$\rho(\vec{F} - \vec{A}) = \frac{\partial p}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \hat{k} \quad \Rightarrow \quad \rho(\vec{F} - \vec{A}) = \text{grad}(p)$$

Per la risoluzione del singolo problema occorrerebbe assegnare anche le condizioni al contorno e, se il moto è vario, quelle iniziali, ma in ogni caso la risoluzione dell'equazione di Eulero risulterebbe comunque di **difficilissima risoluzione**. Il motivo di ciò è legato alla **non linearità dell'operatore differenziale di Eulero** $\frac{\partial}{\partial t}$: da questo, infatti, nasce sì il fascino del comportamento dei fluidi in moto (geometrie frattali, geometrie non euclidee, ...) ma anche la complessità matematica del problema.

Quel che noi ora cercheremo di fare sarà **definire delle ipotesi adeguate** che rendano il problema risolvibile e ci consentano di ottenere degli stimati matematici che sì, non risolvono il problema in maniera rigorosa, ma ci consentano di ottenere dei risultati molto prossimi a quelli reali.

Equazione globale dell'equilibrio dinamico

Integriamo ora l'equazione indefinita del momento rispetto all'intero volume V di fluido, così facendo otterremo un'espressione che vanti per un qualunque volume di fluido considerato.

$$\underbrace{\int_V \rho \vec{F} dV}_1 - \underbrace{\int_V \rho \vec{A} dV}_2 = \underbrace{\int_V \left(\frac{\partial \vec{\Phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\Phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\Phi}_z}{\partial z} \right) dV}_3$$

ma $v_n d\Omega = dQ \rightarrow \rho dQ =$ massa che transita nell'unità di tempo attraverso $d\Omega$

$\rho \vec{u} dQ =$ quantità di moto posseduta da detta massa \rightarrow

$\Rightarrow \int_{\Omega} v_n \rho \vec{u} d\Omega =$ quantità di moto di tutta la massa fluida che attraversa, nell'unità di tempo la superficie di contorno Ω e di volume $V \rightarrow \vec{\Pi}$ (quantità di moto)

$$\Rightarrow - \int_V \rho \vec{A} dV = + \vec{I} + \vec{\Pi}$$

2) $\int_V \rho \vec{F} dV =$ risultante delle forze di massa agenti sulle singole particelle che occupano il volume V considerato $\Rightarrow \vec{P}$ (se siamo solo in campo gravitazionale)

$$3) \int_V \left(\frac{\partial \vec{\Phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\Phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\Phi}_z}{\partial z} \right) dV = - \int_{\Omega} \left(\vec{\Phi}_x \cos n_x + \vec{\Phi}_y \cos n_y + \vec{\Phi}_z \cos n_z \right) d\Omega \rightarrow$$

\downarrow
 la nostra normale è $\vec{\Phi}_n$ per tetraedro di Cauchy
 esterne, un faccia di greco la vuole interne

$= - \int_{\Omega} \vec{\Phi}_n d\Omega =$ spinta totale che la superficie al contorno trasmette al fluido, cioè la risultante degli sforzi che vengono esercitati sul fluido attraverso la superficie al contorno $\rightarrow -\vec{F}_c$

Ritornando insieme il tutto si ottiene

$$\vec{P} + \vec{F}_c + \vec{I} + \vec{\Pi} = \vec{0}$$

Si tratta di una relazione vettoriale fra quantità che hanno le dimensioni di una forza. Le grandezze \vec{P} ed \vec{I} dipendono dai valori che le grandezze in gioco assumono nei punti all'interno del volume V , mentre \vec{F}_c ed $\vec{\Pi}$ dipendono unicamente dalle condizioni che si verificano alla superficie di contorno.

Pertanto: per qualunque volume finito V è nulla la risultante delle seguenti forze:

- forza di massa \vec{P} ;
- risultante \vec{I} delle inerzie locali;
- spinta \vec{F}_c esercitata dall'esterno sulla superficie di contorno;
- quantità di moto $\vec{\Pi}$ posseduta dall'intera massa fluida.

Teorema di Bernoulli

Ritornando al discorso fatto circa l'equazione di Eulero, ora scopriremo come, attraverso opportune ipotesi, l'equazione di Eulero porterà ad un risultato noto come **teorema di Bernoulli** che consentirà di risolvere molti problemi altrimenti di difficile analisi.

Innanzitutto cominciamo col dire che tale teorema vale solo sotto opportune ipotesi:

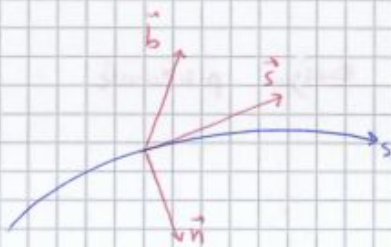
- 1) **fluido perfetto** $\Rightarrow \rho(\vec{F} - \vec{A}) = \text{grad}(p)$
- 2) **forza di massa = forza di gravità** $\Rightarrow \vec{F} = -g \text{grad } z$
- 3) **fluido incomprimibile** $\Rightarrow \rho = \text{cost}$
- 4) **moto permanente** $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = 0$

Componendo assieme queste 4 ipotesi otteniamo:

$$\rho \vec{F} - \rho \vec{A} = \text{grad}(p) \Rightarrow -\rho g \text{grad}(z) - \rho \vec{A} = \text{grad}(p) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\rho \frac{\vec{A}}{\rho} = \text{grad}\left(\frac{p}{\rho}\right) + g \text{grad}(z) \Rightarrow -\frac{\vec{A}}{g} = \text{grad}\left(z + \frac{p}{\rho}\right)$$

A questo punto scomponiamo l'accelerazione \vec{A} lungo le tre direzioni principali della traiettoria, ossia lungo la **tangente** s , la **normale** n e la **binormale** b :



$$\bullet \frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\rho} \right) = -\frac{1}{g} \cdot \frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial s} \right)$$

$$\bullet \frac{\partial}{\partial n} \left(z + \frac{p}{\rho} \right) = -\frac{1}{g} \cdot \frac{v^2}{r}$$

$$\bullet \frac{\partial}{\partial b} \left(z + \frac{p}{\rho} \right) = 0$$

Dalla prima equazione ricaviamo:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\rho} \right) = -\frac{1}{g} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{v}{g} \cdot \frac{\partial v}{\partial s} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\rho} \right) = -\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2g} \right) = -\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} \Rightarrow \text{costante nell'Hp di moto permanente} \Rightarrow$$

Per il principio di Archimede, le due forze applicate al volumetto, forza peso ρdV e spinta idrostatica dS , si fanno equilibrio. Se ora pensiamo di spostare questo volumetto fino al pelo libero del fluido, ovviamente **non compiamo lavoro**, perché stiamo agendo su un sistema a risultante nulla, d'altra parte ci rendiamo conto che l'energia potenziale è **aumentata** di h , passando a $\rho h dV$: questo vuol dire che un'altra forma di energia deve necessariamente essere diminuita.

Ora, analizzando la condizione del volumetto ci rendiamo conto che l'unico mutamento avvenuto riguarda la pressione, che è passata dal valore p al valore zero. Concludiamo dunque che **l'acquisto di energia potenziale è avvenuto a spese di una forma di energia legata alla pressione**, la quale deve essere diminuita, per unità di peso, proprio di $\frac{p}{\rho} = h$.

Perché il fattore $\frac{p}{\rho}$ assumersi il significato di **energia di pressione**.

9-10-2013

Applicazioni del Teorema di Bernoulli

Premessa: il Teorema di Bernoulli descrive la possibilità e la modalità con cui l'energia meccanica di un liquido si trasforma da una forma ad un'altra. Tale risultato, però, ha validità rigorosa solo per il liquido perfetto, tuttavia esso trova applicazione anche in molti problemi reali dell'idraulica: in particolare tutte le volte che le dissipazioni dovute alla viscosità siano trascurabili di fronte alle contemporanee trasformazioni di energia che esso pone in evidenza, allora noi possiamo considerare il nostro sistema reale come se fosse ideale.

Ovviamente i risultati ottenuti non saranno matematicamente rigorosi, ma approssimati: ecco dunque spiegato il motivo dell'introduzione, talvolta, di opportuni coefficienti correttivi.

Processi di efflusso

Un foro aperto in una parete prende il nome di **lance**, mentre la cavità che ne ha origine viene detta **getto**. Nel nostro studio ci occuperemo solo di lance a **spigolo vivo**, cioè con una geometria tale da garantire il distacco netto del fluido dalla parete del recipiente.

$$\frac{u_B^2}{2g} = h \Rightarrow u_B = \sqrt{2gh} \quad (\text{vale per qualunque fenomeno io vada a scagli})$$

↓
Formula di Torricelli

Volendo tenere conto degli effetti dissipativi applichiamo un coefficiente correttivo C_v che definiamo **coefficiente di velocità**, dato dal rapporto tra la velocità di effluvio effettiva e quella Torricelliana

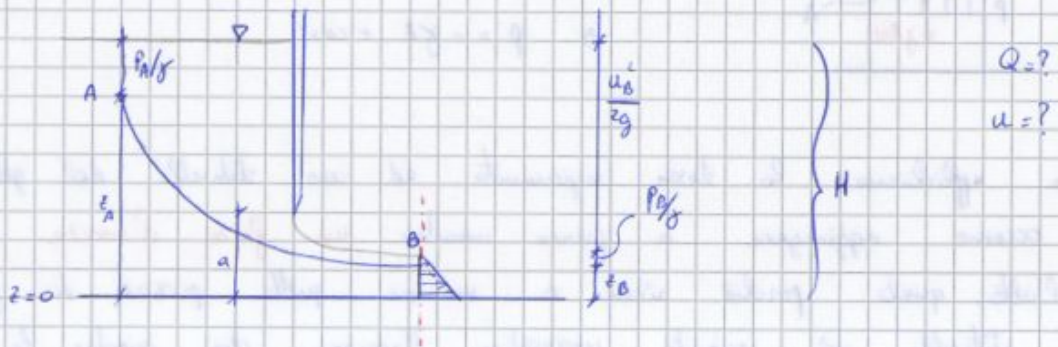
$$C_v = \frac{u_e}{u_T} \Rightarrow u_e = C_v \sqrt{2gh} \quad C_v \approx 0,98 \div 0,99$$

Per il calcolo della portata basta moltiplicare tale velocità per l'area della sezione contratta A_c , espressa come frazione della linea a meno di un **coefficiente di contrazione** C_c

$$C_c = \frac{A_c}{A} \Rightarrow Q = u \frac{\pi d^2}{4} C_c = \frac{\pi d^2}{4} \underbrace{C_c C_v}_{\mu \approx 0,6} \sqrt{2gh} = \mu \sqrt{2gh}$$

Dove μ è il **coefficiente di effluvio** e vale circa 0,6.

Problema 2



In questo caso la sezione contratta si trova in un piano verticale e poggia su un fondo solido, rappresentato dal fondo del canale.

In questo caso la distribuzione delle pressioni è triangolare e con valore nullo in corrispondenza del punto di contatto tra il getto e l'atmosfera.

Applichiamo Bernoulli

$$H_A = H_B \quad z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{u_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{u_B^2}{2g} \Rightarrow h_A = h_B + \frac{u_B^2}{2g} \Rightarrow$$

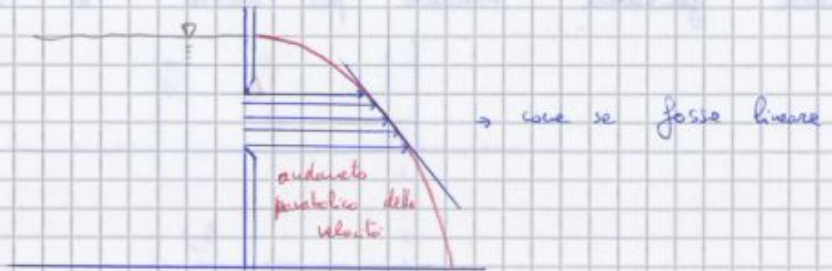
$$\Rightarrow h_B = C_c \cdot a \Rightarrow h_A - C_c a = \frac{u_B^2}{2g} \Rightarrow u_B = \sqrt{2g(h_A - C_c a)}$$

$$H_A = H_B \quad z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{v_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{v_B^2}{2g} \quad \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{2g(z_A - z_B)} \quad (5.16) \quad 20$$

La velocità cambia da punto a punto della sezione contratto secondo una legge di distribuzione **parabolica** data dalla (5.16).

Se la luce è soggetta ad un carico h_A molto elevata rispetto alla sua dimensione verticale possiamo sostituire l'arco della parabola con il segmento tangente. In questo modo $v_{media} = v_{contratto}$ e quindi la portata sarà:

$$Q = \mu A \sqrt{2g(z_A - z_B)}$$

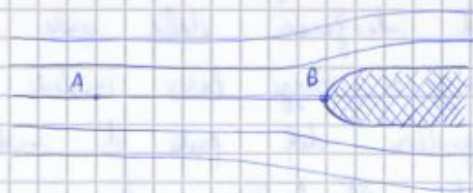


14-10-2013

Tubo di Pitot

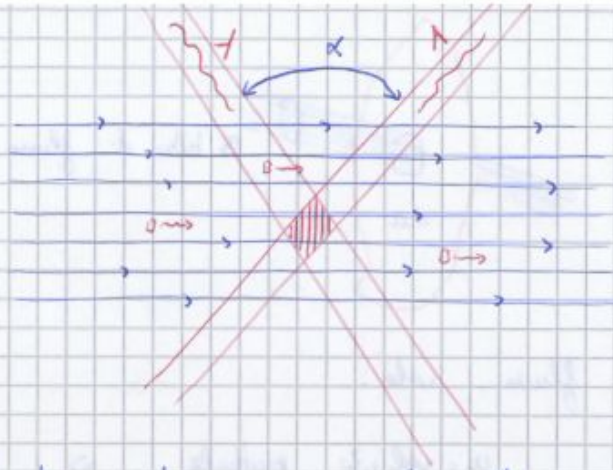
Il tubo di Pitot è uno strumento che consente di misurare la velocità puntuale di un fluido in moto.

Per spiegarne il principio di funzionamento, consideriamo una corrente che investe un ostacolo e che, a sufficiente distanza da questo, si caratterizza dall'aver traiettorie rettilinee e parallele tra loro. Avvicinandosi all'ostacolo le traiettorie divergono per poterlo aggirare, in particolare la **traiettoria AB**, disposta sul prolungamento dell'asse del corpo, dopo averlo investito nel punto B, si ridivide in **infinita** **traiettorie** che ne lambiscono la parete lungo le linee meridiane.



Nel punto B la deviazione è così brusca che noi, con buona approssimazione, possiamo considerare il **modulo della velocità nullo**, sicché il punto B viene detto d'arresto.

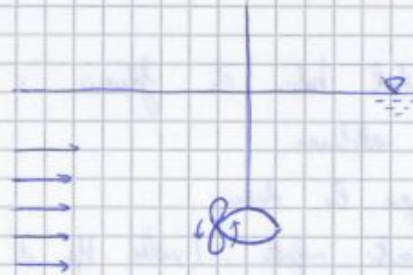
Se il punto A è sufficientemente lontano perché la corrente vi si possa ritenere indisturbata, il teorema di Bernoulli si può applicare nella sua forma nota alla traiettoria AB, dando il seguente risultato:



Questa tecnica di misurazione ha l'enorme vantaggio di non determinare perturbazioni nel campo di moto del fluido.

Misurazioni di velocità di grosse masse di fluido

Il metodo più comune consiste nel piazzare in corrispondenza del punto di misura uno strumento munito di elica e contagiri, il quale, inserito nel fluido, ruota a girare con velocità angolare proporzionale alla velocità di scorrimento del fluido. Tramite semplici calcoli si riesce così a risalire alla velocità del fluido.



Anche se un sistema di questo tipo determina grossi disturbi del campo delle velocità, ma spesso questi sono **minimi** se rapportati alle dimensioni del fluido misurato.

Potenza di una corrente in una sezione. Estensione del teorema di Bernoulli a un caso
 Per definire l'andamento delle velocità in un tubo di corrente non posso usare il teorema di Bernoulli così com'è, questo perché la sua validità è limitata ad una **lineetta** e non ad una sezione.

Quel che posso considerare è la velocità media $v = \frac{Q}{S}$, uguale cioè al rapporto tra la portata Q e l'area della sezione S .

Consideriamo ora un tubo di fluido di una porzione infinitesimale dS della superficie S , ottenuta come sezione trasversale di una corrente.

Il termine integrale rappresenta la potenza legata alla cinetica del fluido. Esso non può essere risolto perché non conosco la dipendenza di u da r . Se però introduco un coefficiente α di scaguglio definito come

coeff di Coriolis $\alpha = \frac{\int_r u^3 dr}{V^3 Q} = \frac{\int_r u^3 dr}{V^2 Q}$

→ variabili locali

→ variabili globali (V = velocità media della sezione)

Otteniamo così:

$$P = \gamma \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) Q + \gamma \frac{\alpha V^3}{2g} Q = \text{cost}(s)$$

⇓

$$\gamma Q \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha V^2}{2g} \right) = \text{cost}(s) \Rightarrow H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha V^2}{2g} = \text{cost}$$

Tale termine verrà designato ancora come carico totale e rappresenta l'energia specifica media del fluido che attraversa la sezione; infatti, al posto della velocità puntuale, inserisco la velocità media opportunamente moltiplicata con un fattore α .

Nel moto turbolento $\alpha \approx 1$ (profilo delle velocità piuttosto uniforme), mentre per il moto laminare α dipende dalla geometria della sezione ($\alpha \approx 2$ per sezioni circolari).

È possibile dimostrare un legame tra α e β : $(\alpha - 1) = 3(\beta - 1)$

Tubo di Venturi

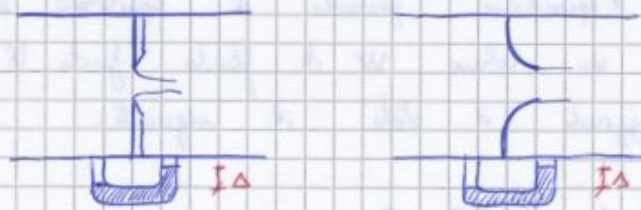
Consideriamo un tubo di diametro D seguito da un breve tronco convergente e quindi da un altro tubo di diametro $d < D$. Ammetteremo di poter trascurare le dissipazioni di energia nel convergente (per la sua brevità e per il fatto che nelle correnti accelerate le dissipazioni sono modeste) e che la corrente la si possa considerare lineare. In ogni sezione trasversale la quota piezometrica sarà costante; tale fatto ci consente di considerare un'unica linea piezometrica per l'intera corrente. Per convenzione scegliamo quella che corrisponde alla **traiettoria assiale**.

In ciascun tronco cilindrico la linea piezometrica si mantiene orizzontale, mentre nel convergente, dove la corrente accelera, la linea piezometrica si abbassa (perché aumenta la velocità).

l'errore che si commette nell'utilizzare questo strumento per misurare la portata è legato a due delle ipotesi di Bernoulli che, in alcuni casi, portano ad errori tali da non poter ottenere efficace l'utilizzo di questo strumento di misura. Innanzitutto, il fluido non è ideale, poi, in seconda battuta, non siamo in condizioni stazionarie, infatti, se per il tutto convergente gli effetti dissipativi sono modesti, essi non lo sono per nulla nel tratto divergente, dove la perdita di energia meccanica non è trascurabile. Per ridurre l'incidenza di ciò nella misurazione rendere il tratto divergente il più lungo possibile.

Inoltre il venturmetro non funziona bene se è preceduto da una curva, questa perché, in corrispondenza della stessa, le traiettorie si discostano molto dal rettilineo e pertanto il principio di funzionamento reale è diverso da quello teorico.

Esistono poi dispositivi meno ingombranti, come i **daifani** e i **borcagli** che hanno un principio di funzionamento analogo (aumentano altezza statica a spese della quota piezometrica).



Equazioni del moto dei fluidi reali

Esistono molti processi di moto in cui gli sforzi tangenziali hanno un'influenza molto alta e pertanto non possono essere trascurati. Il nostro problema, da, sarà dunque quello di trovare l'equazione differenziale che regola il moto di questa categoria di fluidi, caratterizzati da un certo valore di viscosità, indipendentemente dagli sforzi e dal moto.

L'equazione ricercata è quella di **Navier-Stokes**

$$\rho(\vec{R} - \vec{A}) = \text{grad}(p) - \mu \nabla^2 \vec{u} + \text{grad}(\text{div}(\vec{u}))$$

Analizziamo ora ciascun termine:

- $\text{grad}(\text{div}(\vec{u}))$: l'incidenza di questo valore è trascurabile se noi consideriamo il nostro fluido incomprimibile, infatti, in tali condizioni:

$$\text{div}(\vec{u}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{grad}(\text{div}(\vec{u})) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\rho(\vec{R} - \vec{A}) = \text{grad}(p) - \mu \nabla^2 \vec{u} \quad \text{se } \rho = \text{cost}$$

Tale termine (che assume questa forma solo se $\mu = \text{cost}$, cosa che in generale non è vera, ma lo possiamo assumere come tale) rappresenta la risultante della tensione tangenziale che agisce sull'elemento di superficie Δ e verrà indicato con la lettera \vec{T} . (vedi legge di Newton).

Per tale il termine \vec{F}_c generico sarà sostituito da $\vec{F}_c = \vec{T} - \vec{T}'$:

$$\vec{P} + (\vec{T}' - \vec{T}) + \vec{I} + \vec{T}_c - \vec{T}_a = 0$$

equazione globale di equilibrio di un fluido viscoso incomprimibile

Adimensionalizzazione

L'interpretazione dei risultati sperimentali risulta molto più semplice se effettuiamo una corretta analisi dimensionale, cioè costruiamo delle relazioni fra le grandezze che rispettano il principio di omogeneità dimensionale, in cui il primo membro abbia le stesse dimensioni fisiche del secondo membro dell'equazione.

In questo modo sono confrontabili problemi simili che si propagano su scale molto diverse.

Procediamo dunque come segue:

- scala delle lunghezze $[l]$
 - scala delle velocità $[u_0]$
 - scala delle pressioni $[p u_0^2]$
- } \Rightarrow scala dei tempi $[\frac{l}{u_0}]$

A questo punto prendo le mie grandezze e le adimensionalizzo dividendole per la rispettiva scala

$$x' = \frac{x}{l} ; y' = \frac{y}{l} ; z' = \frac{z}{l}$$

$$u' = \frac{u}{u_0} ; v' = \frac{v}{u_0} ; w' = \frac{w}{u_0}$$

$$t' = \frac{t}{l/u_0} ; p' = \frac{p}{p u_0^2}$$

Consideriamo ora come risultante delle forze di massa la sola forza peso

$$\vec{R} = -g \cdot \text{grad}(h)$$



Prendiamo l'equazione di Navier-Stokes ed inseriamo i valori ottenuti:

$$\rho \left(-g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{D u}{D t} \right) = \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \nabla^2 u$$

16-10-2013

... continua su adimensionalizzazione

Analizziamo ora i due numeri tirati:

$$-Re = \frac{\rho u_0 l}{\mu} \Rightarrow \frac{\text{forze d'inerzia}}{\text{forze viscosi}} = \frac{m \cdot a}{\mu \frac{du}{dr} \cdot l} = \frac{\rho l^3 \frac{du}{dr}}{\mu \frac{du}{dr} l^2} = \frac{\rho u_0 l}{\mu}$$

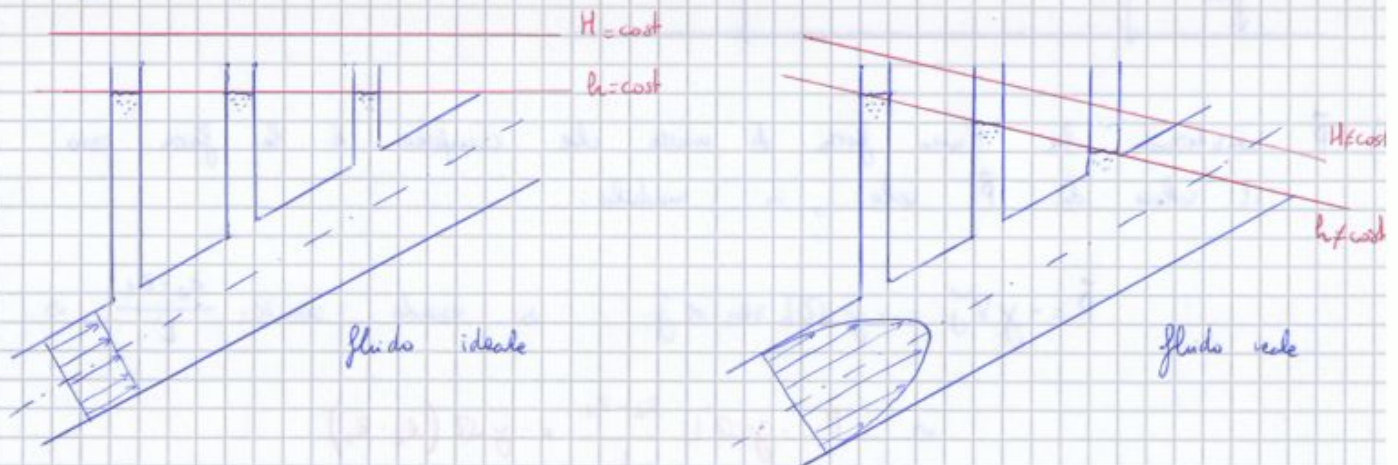
Quindi se il numero di Reynolds è grande allora vuol dire che le forze d'inerzia sono molto maggiori di quelle viscosi. Pertanto il fluido si comporta come un fluido perfetto. (Se $Re \rightarrow \infty \Rightarrow$ equazione di Eulero)

$$-Fr = \frac{u_0^2}{g l} \Rightarrow \frac{\text{energia cinetica}}{\text{energia potenziale}} = \frac{m \cdot v^2}{m g x} = \frac{\rho l^3 \cdot u_0^2}{\rho l^3 \cdot g \cdot l} = \frac{u_0^2}{g l}$$

Azione di trascinamento di una corrente

Quando un fluido viscoso si muove, sotto forma di corrente all'interno di un tubo rettilineo, si dice che "attacca", cioè i punti di contatto tra il fluido e la condotta hanno la stessa velocità e nel caso in cui la condotta sia ferma, allora anche il fluido è fermo.

Questo vuol dire che il fluido, per poter scivolare dedica parte dell'energia che possiede per vincere le forze tangenziali che si vengono a creare sulle pareti della tubatura. Questo porta ad una perdita di energia e quindi a una non conservazione del carico idrostatico H .



In realtà queste due espressioni fanno riferimento al valore della spinta esercitata da un fluido ideale su una parete piana. Nel nostro caso il fluido non è più ideale ma viscoso, quindi quel che ci chiediamo è: perché possiamo sfruttare la medesima espressione?

Il motivo può essere extrapolato dall'equazione di Navier-Stokes:

$$\rho(\vec{R} - \vec{A}) = \text{grad}(p) - \mu \nabla^2 \vec{u}$$

Il valore dell'accelerazione lungo la sezione normale 1 e 2 vale

$$A_n = \frac{D u_n}{D t} \quad \text{ma} \quad u_n = 0, \text{ perché, trattandosi di un condotto, le velocità sono tutte rettilinee e parallele tra loro, di conseguenza non hanno componenti normale.}$$

Quest'ultima osservazione porta a due cose:

$$1) \vec{A} = 0 \quad \text{e} \quad 2) \mu \nabla^2 \vec{u} = 0 \quad (\text{non c'è slancio lungo la sezione})$$

↓

$$\rho \vec{R} = \text{grad } p \Rightarrow \text{stessa equazione della statica}$$

Pertanto, trovandosi sotto le stesse ipotesi del problema sul calcolo della spinta su una parete piana (ma questa volta in condizioni dinamiche), posso sfruttare la stessa formula.

$$3) \vec{I} : \text{siamo in regime di moto permanente, quindi } \frac{\partial}{\partial t} = 0 :$$

$$\vec{I} = 0$$

4) $\vec{\Pi}_e - \vec{\Pi}_u$: la quantità di moto del fluido entrante è uguale alla quantità di moto del fluido uscente, questo vuol dire che la loro differenza è nulla:

$$\vec{\Pi}_e - \vec{\Pi}_u = 0$$

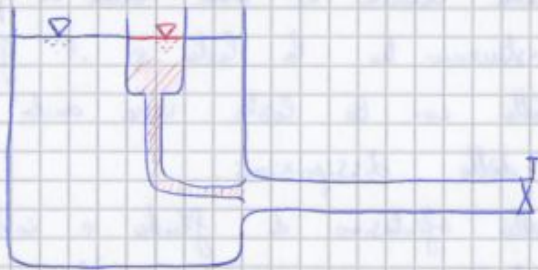
Mettiamo insieme tutte queste informazioni ed otteniamo:

$$T = -\gamma \Omega (z_2 - z_1) + \Omega p_1 - \Omega p_2 = \gamma \Omega \left(-z_2 + z_1 + \frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} \right) = \gamma \Omega \left(\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) \right)$$

Regimi di movimento

L'osservazione dei caratteri di numerosi processi di movimento di fluidi ha messo in evidenza l'esistenza di due diversi regimi di movimento, riconosciuti per la prima volta da Reynolds e messa in evidenza da una semplice esperienza che ora illustriamo.

Da un recipiente contenente un fluido in quiete, con superficie libera a quota costante, è derivato un tubo di vetro, alla cui estremità a valle è posto un rubinetto per la regolazione della quantità di fluido che defluisce dal tubo stesso. All'imboccatura del tubo è posto lo sbocco di un altro tubicino a mezzo del quale può essere iniettato lungo l'asse del tubo un liquido colorato dello stesso peso specifico del liquido in moto.



esperienza di Reynolds

Quando il rubinetto è **leggermente aperto** la velocità del fluido in moto è **piccola**, pertanto il liquido colorato iniettato dal luogo alla formazione di un **filetto** colorato che si estende, pressoché rettilineo, per tutta la lunghezza della tubazione, mantenendosi distinto dalla rimanente massa fluida. Tale comportamento indica che tutte le particelle che passano per uno stesso punto percorrono poi la medesima traiettoria senza subire alcun mescolamento con il fluido circostante. Questo regime di movimento prende il nome di **moto laminare**.

Il carattere principale di questo è la sua **stabilità** nei confronti delle perturbazioni: se una qualsiasi perturbazione viene introdotta in un punto del campo di moto, essa si attenua e scompare a valle del punto: si tratta cioè di un equilibrio stabile.

Se ora **apriamo progressivamente il rubinetto** le velocità del fluido tendono ad aumentare finché si raggiunge una condizione per cui il filetto colorato assume un **andamento fluttuante**: siamo in questo caso in una fase di transizione dal regime laminare.

Se **continuiamo ad aprire il rubinetto** osserveremo come il filetto colorato **sparisca**: questo è dovuto alla nascita di irregolari fluttuazioni di velocità delle singole particelle che portano ad un continuo scambio di massa

Ma perché il moto laminare è così ordinato? Il motivo è legato alle velocità e alle forze viscose che si originano, infatti, per velocità basse si hanno forze viscose basse, che possono essere agevolmente controllate dalle forze d'inerzia. Questo legame tra forze viscose e forze d'inerzia ci fa tornare in mente il **numero di Reynolds**, ottenuto come rapporto tra le due:

$$Re = \frac{\rho v L}{\mu} = \frac{f. \text{inerzia}}{f. \text{viscose}}$$

Questo vuol dire che il numero di Reynolds si può considerare come un **indice del grado di turbolenza cui è soggetto il fluido**, ossia se il valore di Re si tiene al di sotto di un $Re_{critico}$, allora il moto è laminare, se invece Re supera la soglia dell' $Re_{critico}$ allora il moto diventa turbolento.

Tale valore critico è stato ricavato per via sperimentale e vale circa

$$Re \approx 2000$$

In realtà è possibile ottenere moti laminari anche al di sopra di questo valore di Re , tuttavia, superando il valore critico, la più piccola perturbazione introdotta dall'esterno sul sistema innescava delle variazioni di moto tali da trasformare il moto da laminare a turbolento.

Ma se la maggior parte dei moti dei fluidi è turbolenta, perché si studiano i moti laminari? I motivi sono vari:

- 1) consente di comprendere meglio il moto turbolento perché esattamente opposto;
- 2) moto dei fluidi nei mezzi porosi;
- 3) moto del sangue nel sistema circolatorio (lontano dal cuore);
- 4) microfluidica (lab-on-chip)

Moti laminari per le correnti in sezioni circolari

Cerchiamo ora di ricavare una legge che ci dica come varia la velocità del fluido viscoso in regime di moto laminare all'interno di una condotta a sezione circolare. Il motivo per il quale è stata scelta una condotta circolare è legato alle semplificazioni che ne derivano; esse infatti consentono di risolvere il problema in termini finiti, vediamo come.

Consideriamo un tronco di fluido come quello in figura:

$$\int du = - \int \frac{\gamma_i}{2\mu} r dr \quad \Rightarrow \quad u = u(r) = - \frac{\gamma_i r^2}{4\mu} + \text{cost}$$

Fissiamo ora le condizioni al contorno per poter ricavare il valore della costante: abbiamo detto che sulle pareti dell'involucro la velocità del fluido è nulla, pertanto:

$$u = 0 \quad \text{in} \quad r = R = \frac{D}{2}$$

↓

$$- \frac{\gamma_i R^2}{4\mu} + \text{cost} = 0 \quad \text{cost} = c_2 = \frac{\gamma_i}{4\mu} \left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{\gamma_i D^2}{16\mu}$$

Pertanto la legge è:

$$u = u(r) = \frac{\gamma_i}{4\mu} \left(\frac{D^2}{4} - r^2 \right) \quad (\text{dimostra andamento parabolico delle velocità}) \quad *$$

Calcoliamo ora portata e velocità media nella sezione:

$$Q = \int_0^{D/2} 2\pi r \cdot u(r) dr \Rightarrow \quad Q = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{\gamma_i}{\mu} D^4 \quad (\text{formule di Poiseuille})$$

$$V_{\text{media}} = \frac{Q}{\pi \frac{D^2}{4}} \Rightarrow \quad V_{\text{media}} = \frac{1}{32} \cdot \frac{\gamma_i}{\mu} D^2$$

* v massima nella mezzetta

Vediamo ora un'altra situazione di moto laminare a cui si giunge ad una soluzione in termini finiti: si tratta del moto laminare di un fluido tra due facce piane parallele indefinite.

Tale moto lo si può considerare piano giacché quel che avviene in un piano parallelo al vettore velocità, e normale alle due facce di contorno, si riproduce sempre uguale su tutti gli altri piani paralleli.

Combiniamo il tutto ottenendo:

$$\frac{d}{dx} (p + \gamma z) = \mu \frac{d^2 u}{dy^2} \Rightarrow \gamma \frac{dh}{dx} = \mu \frac{d^2 u}{dy^2} \Rightarrow -\gamma i = \mu \frac{d^2 u}{dy^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 u}{dy^2} = -\frac{\gamma i}{\mu} \quad \text{condizioni al contorno} \begin{cases} \text{per } y=0 & \frac{du}{dy} = 0 \text{ (c'è un'assiale)} \\ \text{per } y=h & u=0 \text{ (vel. nulla sulla par.)} \end{cases}$$

soluzioni: $u = u(y) = \frac{\gamma i}{2\mu} (h^2 - y^2)$

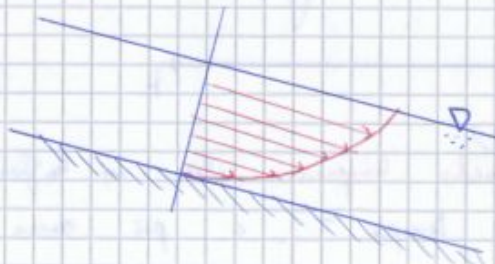
$$Q = 2 \int_0^h u(y) b dy = \frac{2}{3} \cdot \frac{\gamma i}{\mu} \cdot b h^3$$

$$V = \frac{Q}{2bh} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\gamma i}{\mu} h^2$$

In questo caso si osserva come la corrente presenti un piano di simmetria coincidente con il piano mediano; su tale piano la velocità è massima e la derivata prima della velocità è nulla, di conseguenza sono nulli anche gli sforzi tangenziali τ :

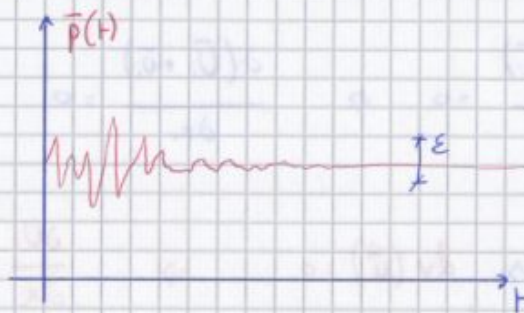
$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \Rightarrow \tau = 0 \quad (\text{su piano mediano})$$

Questo nel dire che se togliamo la metà superiore del campo del moto nulla cambia nei riguardi della metà inferiore. In questo modo abbiamo descritto anche il campo delle velocità del moto laminare di una corrente a pelo libero su un piano inclinato di pendenza i : è il caso del **moto uniforme di corrente**



$$\bar{\cdot} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \cdot(t) dt \quad \left[\text{lineare} \Rightarrow \frac{\partial \bar{\cdot}}{\partial x_i} = \frac{\partial \cdot}{\partial x_i} \right]$$

Questa operazione presenta però un difetto apparente che consiste nella scelta del periodo T : sono sicuro che esiste un tempo T entro il quale la grandezza oggetto di studio ha assunto tutte le configurazioni possibili? In generale la risposta è **no**, questo perché il fenomeno genera continuamente nuove configurazioni, quindi non riuscivamo mai ad apprezzare il fenomeno nella sua interezza se limito il mio studio ad una porzione finita di tempo. Tuttavia, da un punto di vista sperimentale, si riconosce che, superato un certo valore T dell'intervallo di integrazione, il valor medio si mantiene pressoché costante quando si aumenta ancora l'intervallo stesso. In termini matematici:



Limito sempre in certe zone ϵ trascurabile se considero opportuni valori di T

Quel che dunque faremo ora sarà chiederci se è possibile arrivare ad una descrizione valida del moto turbolento se, semplicemente, sostituiamo alle grandezze istantanee il loro valore medio temporale.

Per fare ciò diamo una definizione di **grandezza istantanea**

$$\tilde{p} = \bar{p} + p'$$

\Downarrow

$$\tilde{p} = P + p$$

\tilde{p} = grandezza istantanea

\bar{p} = - maiuscolo = grandezza media

p' = - minuscolo = scostamento (= scarto)

La principale proprietà della grandezza scostamento è quella di avere **media nulla**:

$$p = \tilde{p} - P \quad \Rightarrow \quad \bar{p} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} (\tilde{p} - P) dt = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \tilde{p} dt - \frac{1}{T} \int_t^{t+T} P dt = P - P = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{p} = 0$$

$$\begin{aligned} \textcircled{c} \quad \overline{u_i} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} &\Rightarrow \overline{(u_i + u_i')} \frac{\partial (u_i + u_i')}{\partial x_j} = \overline{u_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \overline{u_i'} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \overline{u_i} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \overline{u_i'} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} = \\ &= \overline{u_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \overline{u_i'} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \overline{u_i} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \overline{u_i'} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} = \\ &= \overline{u_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \underbrace{\overline{u_i'}}_{\rightarrow 0} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \overline{u_i} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_i u_i'}}{\partial x_j} - \overline{u_i} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \underset{\rightarrow 0}{=} \text{(eq. calcolata)} \\ &\Rightarrow \overline{u_i} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \Rightarrow \overline{u_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial (\overline{u_i u_i'})}{\partial x_j} \end{aligned}$$

A causa della non linearità non sono riuscite a separare la turbolenza dal moto semplice *²

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_j}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + g \delta_{i3} \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \end{cases} \quad \text{equazioni di Navier-Stokes per moto medio}$$

La risoluzione di questo sistema differenziale non solo è complessa, ma è anche inevitabile ad un numero ∞ di soluzioni, per la semplice ragione che il numero delle incognite (5) è superiore al numero delle equazioni (4). Per rendere il problema determinabile devo esprimere almeno una grandezza in funzione delle altre:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\overline{u_i u_j})}{\partial x_j} &= f(u_i, p) \\ &\Downarrow \text{MA} \\ \frac{\partial (\overline{u_i u_j})}{\partial x_j} &= f(u_i, p, \overline{u_i u_j u_k}) \Rightarrow \text{problem della chiusura della turbolenza} \end{aligned}$$

Ogni volta che provo ad esprimere u_i, u_j in funzione di u_i e p compare una nuova variabile che mantiene indeterminato il sistema.

28-10-2013

Interpretazione dell'equazione di Navier-Stokes mediate alla Reynolds

Applicando l'operatore media a ciascuna delle grandezze in gioco nell'equazione di Navier-Stokes, siamo giunti alla seguente espressione:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_j}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} + g \delta_{i3}$$

Cerchiamo ora di estrapolare nuove informazioni sul moto turbolento proprio da questa equazione differenziale.

Tenendo conto della seguente osservazione:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \frac{D U_i}{D t}$$

e raccogliendo al secondo membro le derivate parziali in x_j , l'equazione può essere riscritta come:

$$\frac{D U_i}{D t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \overline{u_i u_j} \right) + g \delta_{i3} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{D U_i}{D t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\tau_{ij}} + g \delta_{i3}$$

$$\text{dove } \overline{\tau_{ij}} = -\rho \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \rho \overline{u_i u_j}$$

Il termine a primo membro mi dice come cambia la velocità media se mi muovo a cavallo di una particella di fluido, mentre il termine $\overline{\tau_{ij}}$ rappresenta i gradienti spaziali di uno sforzo.

Se il primo membro fosse uguale a zero, vorrebbe dire che la velocità è costante, essendo diverso da zero intuivamo che ci sono dei fattori che cambiano la velocità. Uno di questi fattori è la gravità, che compare nella formula sottoforma del termine $+g \delta_{i3}$.

Gli altri fattori sono quelli nascosti nel termine $\overline{\tau_{ij}}$:

① indica un gradiente di pressione: se esiste allora la U_i cambia.

② il termine tra parentesi indica una variazione di velocità nello spazio e

Cascate di vortici (Landau)

Vediamo ora una interpretazione concettuale particolare formulata dal fisico russo Landau. Essa prende il nome di "cascate di vortici" e vede la turbolenza come un insieme di moti vorticosi innestati gli uni negli altri.

Ciascun vortice non è in grado di mantenere la sua energia e pertanto la cede di volta in volta al vortice più piccolo sotto di lui. Il processo continua così su scale diverse, via via più piccole, finché viene raggiunta la cosiddetta scala viscosa, cioè la scala più grande al di sotto della quale il fluido si accorge dell'esistenza della viscosità, pertanto, da questo punto in poi, iniziano le dissipazioni.

Seguendo questo ragionamento capiamo che i vortici più piccoli non perdono l'energia direttamente da quelli più grandi, questo perché sono caratterizzati da scale troppo diverse. Questa vuol dire che solo le scale più grandi, che sono le più energetiche, perdono energia, dal moto medio, proprio perché le due scale che le caratterizzano sono simili.

Inoltre, il flusso di energia dalle scale più grandi a quelle più piccole non determina dissipazioni, quanto perché, finché non vengono raggiunte le scale della viscosità, il processo continua senza che il fluido si renda conto della viscosità stessa (questo a causa del moto turbolento che "maschera" le forze viscose).

Fino ad ora abbiamo parlato di scale, ma non ci siamo mai soffermati a chiederci quanto valgono. In generale le scale grandi dipendono dalle condizioni al contorno, di conseguenza variano a seconda del problema idrodinamico considerato. Invece le scale intermedie sono universali e sono sufficientemente grandi da non vedere le viscosità e sufficientemente piccole da non risentire delle condizioni al contorno.

passaggio di E alle scale più piccole



~~~~~ = zona in cui non usata delle viscosità

A questo punto decido di voler includere una nuova **terza di grandezze fondamentali**  $Q_1, Q_2, Q_3$  (in modo che  $Q_3 \neq$  piano  $Q_1, Q_2$ ), in questo modo LTI non sono più delle grandezze fondamentali ma derivate:

es:  $[L] = [Q_1^{\epsilon_1} Q_2^{\delta_2} Q_3^{\omega_3}]$  dove  $\epsilon_1, \delta_2, \omega_3$  sono gli exp che danno origine a  $Q_1, Q_2, Q_3$  affinché sia valida la relazione

Immaginiamo ora di cambiare le unità di misura LTI rispettivamente di un fattore  $\lambda, \tau, \mu$ . Quello che si ottiene è una nuova terza di grandezze  $q_1, q_2, q_3$  legate ad LTI dalle relazioni:

$$\left. \begin{aligned} [Q_1] &= [L^{\alpha_1} T^{\beta_1} \Pi^{\gamma_1}] = q_1 = \lambda^{\alpha_1} \tau^{\beta_1} \mu^{\gamma_1} \\ [Q_2] &= [L^{\alpha_2} T^{\beta_2} \Pi^{\gamma_2}] = q_2 = \lambda^{\alpha_2} \tau^{\beta_2} \mu^{\gamma_2} \\ [Q_3] &= [L^{\alpha_3} T^{\beta_3} \Pi^{\gamma_3}] = q_3 = \lambda^{\alpha_3} \tau^{\beta_3} \mu^{\gamma_3} \end{aligned} \right\} \text{modo in cui sono abituato a pensare:} \quad (1)$$

LTI: fondamentali /  $Q_1, Q_2, Q_3$ : derivate

Ragioniamo ora in termini opposti, invertendo grandezze fondamentali e grandezze derivate:

$$\left. \begin{aligned} [L] &= [Q_1^{\epsilon_1} Q_2^{\delta_2} Q_3^{\omega_3}] = \lambda = q_1^{\epsilon_1} q_2^{\delta_2} q_3^{\omega_3} \\ [T] &= [Q_1^{\epsilon_2} Q_2^{\delta_2} Q_3^{\omega_2}] = \tau = q_1^{\epsilon_2} q_2^{\delta_2} q_3^{\omega_2} \\ [\Pi] &= [Q_1^{\epsilon_3} Q_2^{\delta_3} Q_3^{\omega_3}] = \mu = q_1^{\epsilon_3} q_2^{\delta_3} q_3^{\omega_3} \end{aligned} \right\} \text{modo di pensare diverso:} \quad (2)$$

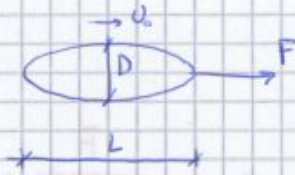
LTI: derivate /  $Q_1, Q_2, Q_3$ : fondamentali

Risolviamo ora le relazioni (1) e (2) come segue

$$\begin{aligned} \ln q_1 &= \alpha_1 \ln \lambda + \beta_1 \ln \tau + \gamma_1 \ln \mu & \ln \lambda &= \epsilon_1 \ln q_1 + \delta_1 \ln q_2 + \omega_1 \ln q_3 \\ \ln q_2 &= \alpha_2 \ln \lambda + \beta_2 \ln \tau + \gamma_2 \ln \mu & \ln \tau &= \epsilon_2 \ln q_1 + \delta_2 \ln q_2 + \omega_2 \ln q_3 \\ \ln q_3 &= \alpha_3 \ln \lambda + \beta_3 \ln \tau + \gamma_3 \ln \mu & \ln \mu &= \epsilon_3 \ln q_1 + \delta_3 \ln q_2 + \omega_3 \ln q_3 \end{aligned}$$

quando posso effettuare questo passaggio tra grandezze di riferimento?  $\Rightarrow \det(\text{coeff}) \neq 0 \Rightarrow *$

Es:



Calcolare la forza  $F$  con cui posso muovere il corpo immerso nel fluido.

$F = f(\rho, \mu, U, D, L)$   $\Rightarrow$  per avere  $f$  sperimentale devo, di volta in volta, tenere costanti tutte le variabili e modificare il valore di una.  $\Rightarrow$  COSTOSO

$\Downarrow$

Applica teorema pi. Greco  $\Rightarrow [F] = [N] = [Kg \frac{m}{s^2}] = [L^1 \pi^1 T^{-2}]$   
 $\Downarrow$   
 3 grandezze fondamentali

Selgo 3 delle variabili in gioco:  $\rho, U, D$  (vanno bene xke rispettano Hp  $\star$ )

Afimentionalizzo:

$\rho = [\frac{Kg}{m^3}] = [L^{-3} T^0 \pi^1]$  ;  $U = [\frac{m}{s}] = [L^1 T^{-1} \pi^0]$

$D = [m] = [L^1 T^0 \pi^0]$

|                                 |                 |          |                               |
|---------------------------------|-----------------|----------|-------------------------------|
| $[F] = [L^1 \pi^1 T^{-2}]$      | $\Rightarrow$ ① | adimens. | $\frac{F}{\rho U^2 D^{-4}}$   |
| $[\mu] = [L^{-1} \pi^1 T^{-1}]$ | $\Rightarrow$ ② | adimens. | $\frac{\mu}{\rho U^{-1} D^3}$ |
| $[L] = [L^1 \pi^0 T^0]$         | $\Rightarrow$ ③ | adimens. | $\frac{L}{D}$                 |

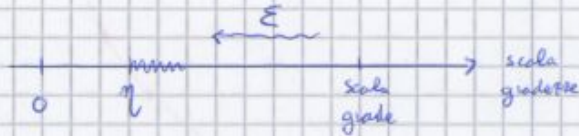
$[\rho^\alpha U^\beta D^\gamma] = [L^{-3\alpha} \pi^\alpha L^\beta T^{-\beta} L^\gamma] = [L^{-3\alpha+\beta+\gamma} \pi^\alpha T^{-\beta}]$

①  $\begin{cases} -3\alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \alpha = 1 \\ \beta = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 - 2 + \gamma = 1 \\ / \\ / \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -2 \\ \gamma = -4 \end{cases}$

②  $\begin{cases} -3\alpha + \beta + \gamma = -1 \\ \alpha = 1 \\ \beta = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 - 2 + \gamma = -1 \\ / \\ / \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -2 \\ \gamma = 3 \end{cases}$

Esempio: **microscala di Kolmogorov**

Ripetendo il grafico sfruttato per spiegare il flusso energetico nella turbolenza visto come cascate di vortici, osserviamo che esiste una scala della microscala di Kolmogorov al di sotto della quale "viva" senza accorgersi dell'esistenza della turbolenza che si manifesta solo su scale più grandi:



Tale scala è funzione di due sole grandezze: la viscosità cinematica  $\nu$  e il flusso di energia  $E$ . Applichiamo il teorema pi greco:

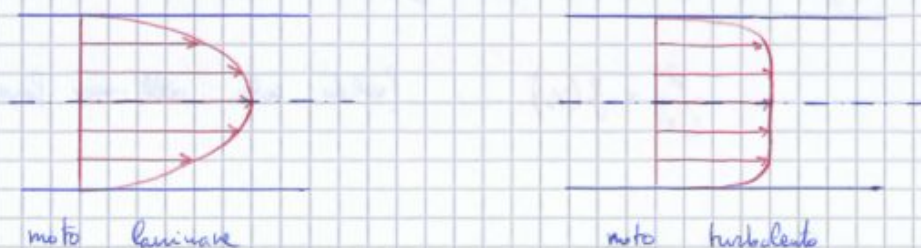
$$\eta = f(\nu, E) \quad \text{grandezze principali: } L, T \quad \Rightarrow \quad \frac{\eta}{\nu^\alpha E^\beta} = \text{cost} \quad \begin{cases} \alpha = -\frac{3}{4} \\ \beta = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \eta = A \sqrt[4]{\frac{\nu^3}{E}} \quad \text{dove } A \approx 1 \text{ (per ve. spazimabili)}$$

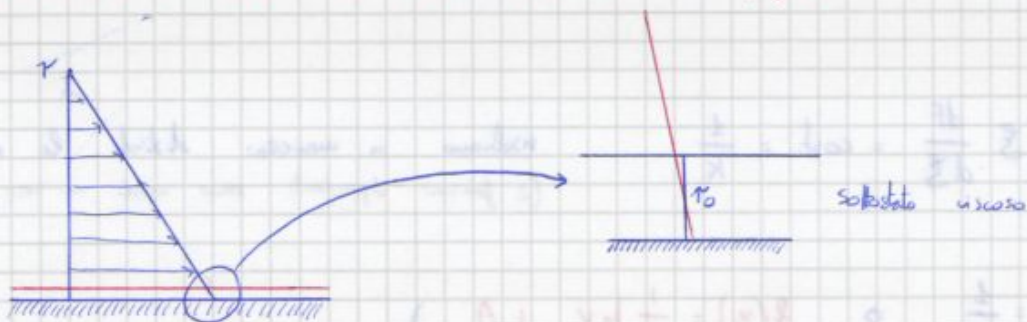
30-10-2013

**Profilo delle velocità nel moto turbolento**

Cerchiamo ora di capire come è fatto il profilo di velocità di un fluido in moto turbolento in una condotta. Prima di scrivere l'espressione analitica ragioniamo su quel che succede e cerchiamo di capire qualitativamente come sarà fatto il profilo. Il fatto che ci sia la turbolenza porta il vettore velocità ad avere 3 componenti spaziali diverse punto per punto, e non più una unica come nel caso di moto laminare. La componente parallela alla direzione dell'asse del tubo è quella responsabile del trasporto di fluido nella turbolenza, mentre le altre due rimescolano continuamente il fluido. Questo vuol dire che in corrispondenza delle pareti avviene dei forti gradienti, mentre l'andamento sarà pressoché costante nelle altre parti del tubo.



Supponiamo ora di trovarci nel cosiddetto **sottostato viscoso**, ossia uno stato ancora più sottile e più vicino alla parete, interno all'inner layer. In questo tratto possiamo approssimare l'andamento delle tensioni tangenziali  $\tau_0$  ad un tratto **costante**, anche se in realtà, come abbiamo già visto, l'andamento è lineare. Come sappiamo, quando il moto è turbolento le forze d'inerzia prevalgono su quelle viscosi, pertanto tutto funziona come se la viscosità fosse nulla. Nel sottostato viscoso, però, l'influenza della viscosità  $\mu$  è notevole, tanto che, in prossimità della parete, le componenti trasversali della velocità vengono a mancare e rimane solo la componente viscosa che costringe la velocità a mantenersi parallela alla parete. Tutto questo per dire quindi come **nel sottostato viscoso il moto turbolento si spegne**.



$$\Rightarrow \tau = \mu \frac{du}{dy} = \tau_0 \Rightarrow \begin{cases} u(y) = \frac{\tau_0 y}{\mu} + \text{cost} \\ v(y=0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{cost} = 0$$

$$\Rightarrow u(y) = \frac{\tau_0 y}{\mu} \quad [\text{nel sottostato viscoso il profilo delle velocità è lineare}]$$

Ora mi trovo nell' **outlayer**. In tali condizioni rientra molto della turbolenza e quindi la viscosità è praticamente inesistente (sono lontano dalla parete). La  $U$  in questo caso è definita come

$$U = U_{\infty} - U = f(\rho, \delta, y, \tau_0)$$

dove  $U_{\infty}$  è la velocità in un punto così distante dalla parete da non risentire della presenza della stessa.

↓ T.  $\pi$

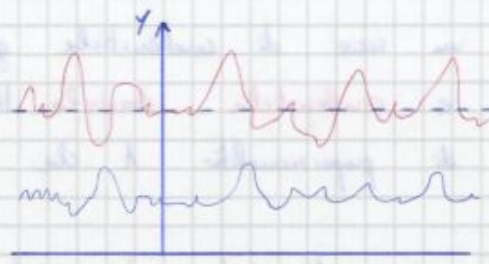
$$\frac{U_{\infty} - U}{U_*} = F\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

dallo  $\xi = \frac{y}{\delta} \Rightarrow$

$$\frac{U_{\infty} - U}{U_*} = F(\xi)$$



In precedenza abbiamo parlato di **parete liscia** senza spiegare nel dettaglio ciò che intendiamo dire con questo termine. In linea con il ragionamento fatto finora possiamo dire che una **parete è liscia** quando le asperità si trovano al di sotto del **substrato viscoso**.

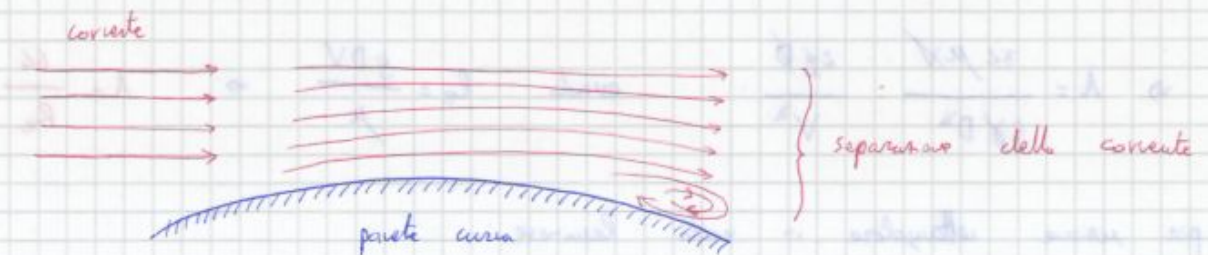


$\mu/\rho =$  parete liscia  
 $\mu/\rho =$  parete scabra  
 (in termini idraulici)

Facendo riferimento alle grandezze fisiche in gioco, e quindi esprimendo il tutto in termini matematici, possiamo dire che la parete è liscia finché è valida la seguente disuguaglianza:

$$\frac{y u_*}{\nu} \leq 5 \quad \text{ossia} \quad y_+ \leq 5$$

Non solo l'ipotesi di parete liscia è importante, ma anche quella di **parete piana**: infatti, qualora comparsero delle curvature, prenderebbe forma il fenomeno di **separazione della corrente**, il quale porterebbe alla formazione di turbolenze anche in assenza di asperità.



4-11-2013

### Formule e grafici per la progettazione di tubature

Quando non le equazioni di Navier-Stokes né la relazione integrale sono in grado di fornire gli strumenti necessari alla progettazione pratica di tubature e condotte idriche, allora devo necessariamente fare riferimento a **leggi empiriche**, ottenute a mezzo di numerosi esperimenti con interpolazione dei dati da esse ricavati. Il tutto viene realizzato facendo riferimento a grandezze assolute ricavate tramite il teorema P. Graess.

$$V = \frac{\gamma i R^2}{3\mu} \Rightarrow i = \frac{3\mu V}{\gamma R^2}$$

Sostituendo  $i$  nell'espressione di  $\lambda$  si ottiene

$$\lambda = \frac{3\mu V}{\gamma R^2} \cdot \frac{2\gamma R}{V^2} \quad \text{ovvero} \quad \lambda = \frac{6\mu R}{\gamma R^2 V} \Rightarrow \lambda = \frac{3\mu}{Re}$$

La sezione circolare e la sezione rettangolare lunga rappresentano i due casi limite: infatti la sezione circolare è quella che a parità di perimetro mi dà l'area maggiore, mentre quella rettangolare è la sezione che, a parità di perimetro mi dà l'area minore.

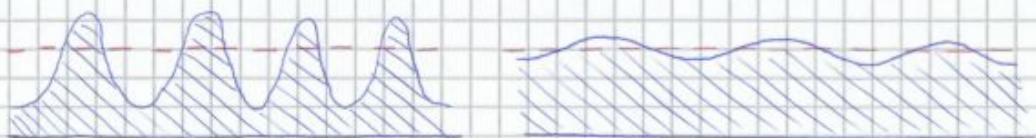
Questo vuol dire che, per quanto riguarda il **modo laminare**, sono in grado di dare a priori entro questi valori i valori di  $\lambda$  per sezioni diverse da quelle analizzate.

Il problema della ricerca di  $\lambda$  per moti con  $Re < 2000 \div 2500$  è dunque esaurito. Tralasciando lo studio di moti con  $Re$  compresi tra  $2500 \div 4000$  (in quanto pochi rilevanti in ingegneria a causa della loro "pericolosità", dato il fatto che proprio in questa zona si originano le turbolenze), occupiamoci ora della **ricerca di  $\lambda$  per  $Re > 4000$** , ossia in moti turbolenti puri.

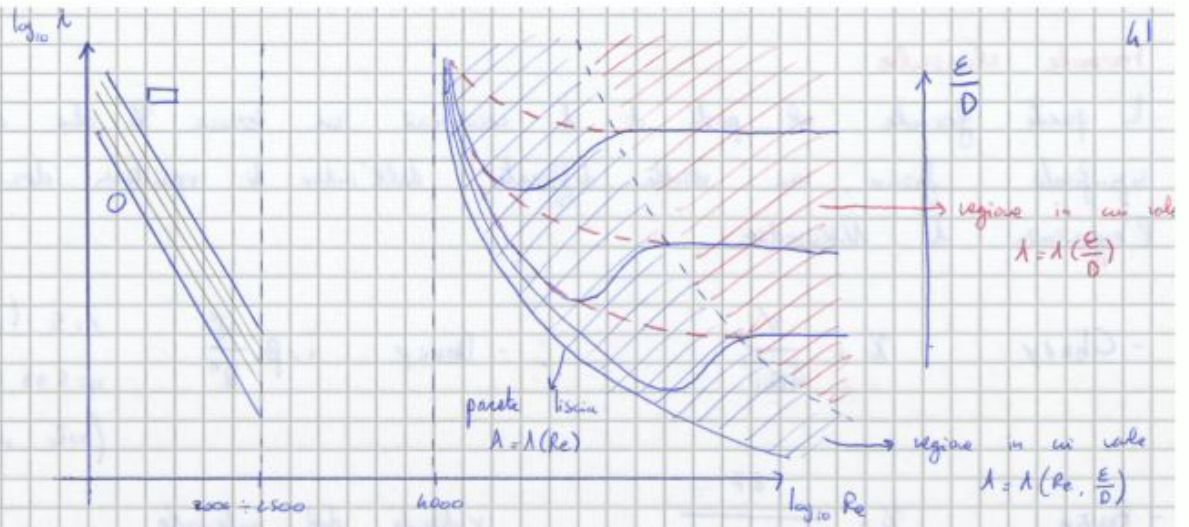
Il primo ad occuparsi di questo problema fu **N. Kovalev** il quale, come prima cosa, cercò di individuare tutte le variabili da cui dipende il valore di  $\lambda$ .

$$\lambda = \lambda(v, V, D, \text{scabrezza})$$

Fu così che incontrò il primo intoppo, che consisteva nella difficoltà di descrivere il parametro della scabrezza. Essa è una proprietà geometrica, dunque le sue dimensioni dovrebbero essere quelle di una lunghezza, ma si vede ben presto come di come tale descrizione non sia affatto esauriente: non può infatti bastare la sola **altezza massima** o **altezza media** delle protuberanze che nel loro complesso determinano la scabrezza della parete, ma è necessario descrivere anche la forma e la distribuzione di queste



stessa  $\lambda$  media ma con parametri diversi.



### Tubi commerciali

Per i tubi commerciali il diagramma è leggermente diverso, nel senso che le curve che si ottengono con tubature scabre hanno un andamento marcatamente decrescente che poi tende a diventare costante, questo avviene perché la natura della rugosità non avviene più improvvisamente come nelle tubature ideali di Nikuradse, ma è graduale (vedi battaggio ---). Il diagramma che si ottiene prende il nome di Diagramma di Moody.

### Espressioni empiriche per il calcolo di $\lambda$

- Tubo liscio  $\lambda = \lambda(Re)$  : - Blasius  $\lambda = \frac{0,316}{Re^{1/4}} \quad (Re \leq 10^5)$

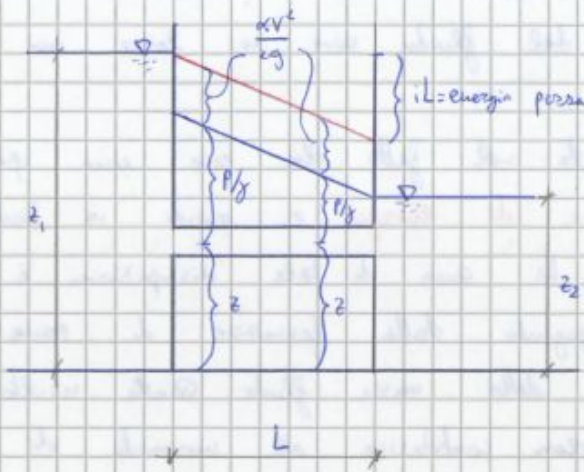
- Nikuradse  $\lambda = \frac{0,221}{Re^{0,227}} + 0,0032 \quad (Re \geq 10^5)$

$$\frac{1}{\lambda^{1/2}} = 2 \log_{10} \left( \frac{2,5}{Re \sqrt{\lambda}} \right)$$

- Tubo scabro  $\lambda = \lambda\left(\frac{\epsilon}{D}\right)$  :  $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2,0 \log_{10} \left( \frac{3,71 \cdot D}{\epsilon} \right)$

- Tubo scabro  $\lambda = \lambda\left(Re, \frac{\epsilon}{D}\right)$  : - Colebrook e White  $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left( \frac{\epsilon}{3,71 D} + \frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} \right)$

### Tracciamento della linea dei carichi totali e parametri



$$\left. \begin{array}{l} i.c. + H \\ l.c. + h \end{array} \right\} H - h = \alpha \frac{v^2}{2g}$$

La perdita di carico indotta si traduce in semplice perdita in termini di energia potenziale  $\left(\frac{P}{g}\right)$   
 $\downarrow$   
 perdita di carico continua

Effettuiamo ora un bilancio energetico:

$$E_i - E_f = iL \quad \Rightarrow \quad z_1 - \left(z_2 + \frac{\alpha v^2}{2g}\right) = iL \quad (\text{dimetta la turbolenza, la quale la trasforma in calore})$$

$$\Rightarrow \Delta z = z_1 - z_2 = iL + \frac{\alpha v^2}{2g}$$

Nell'ipotesi di parete scabra si ha  $i = \beta \frac{Q^2}{D^5}$ , quindi:

$$\Delta z = iL + \frac{\alpha v^2}{2g} = \beta \frac{Q^2}{D^5} L + \alpha \frac{v^2}{2g} \quad (\text{formula di progetto, da cui posso ricavare } D, Q, L, \beta \text{ noti gli altri parametri})$$

Nel caso in cui la condotta dovesse restringersi, quel che cambia è l'energia cinetica, quanto perché:

$$V = \frac{Q}{\Omega} \quad \left\{ \begin{array}{l} Q = \text{cost} \\ \Omega = \text{riduce} \end{array} \right. \Rightarrow V \text{ aumenta} \Rightarrow E_c \text{ aumenta (a dispetto di } \frac{P}{g})$$

Inoltre la pendenza delle condotte non è influente ai fini dei carichi, infatti cambia solo come si scambiano i termini energetici. **IPPO!!!**

## Brisco allargamento

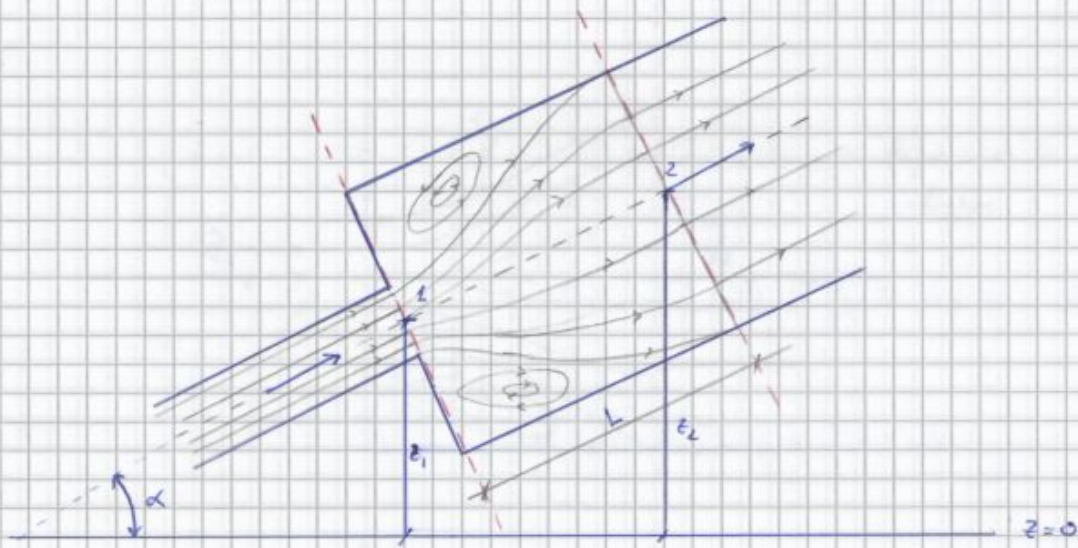
Lo studio dettagliato di questo caso è di notevole importanza teorica, in quanto molte altre situazioni idrauliche di perdite di carico localizzate possono essere ricondotte al caso in questione.

Colui che per primo si occupò di questo problema fu Borda, il quale arrivò alla formulazione di una formula tutt'ora inascoltata valida.

L'analisi di dettaglio di questi fatti avviene nei punti in prossimità dello sbocco risulta complessa ed inutile, infatti, quel che a noi importa è la conoscenza della **perdita di carico complessiva**.

Per arrivare a questo risultato è sufficiente limitare lo studio alle sole zone in cui si verifica **l'espansione di vena** (in pratica nelle due sezioni estreme del tratto di condotto considerato), senza dunque considerare ciò che si verifica all'interno del campo stesso.

La situazione che si presenta è la seguente:



Applichiamo l'equazione globale della dinamica al flusso di corrente compressa tra la sezione 1 e la sezione 2, posta ad una distanza,  $L$  proporzionale al diametro della tubatura, tale per cui la traiettoria, dopo l'espansione, si sia ripartita **parallela tra loro e alla direzione dell'asse del tubo** (corrente lineare). Nel passaggio dalla sezione 1 alla sezione 2 si può dire con sicurezza che:

- 1)  $H$  **diminuisce**;
- 2)  $R$  **aumenta** (dove che  $p$  aumenta/diminuisce è sbagliato, perché dipende dalla perdita della tubatura come  $p$  e  $z$  si scambiano i valori).

Per poter risolvere il problema, Borda fa due ipotesi:

$$\Delta H = \frac{2V_2(V_2 - V_1) + V_1^2 - V_2^2}{2g} = \frac{2V_2^2 - 2V_1V_2 + V_1^2 - V_2^2}{2g} = \frac{V_1^2 - 2V_1V_2 + V_2^2}{2g} \rightarrow$$

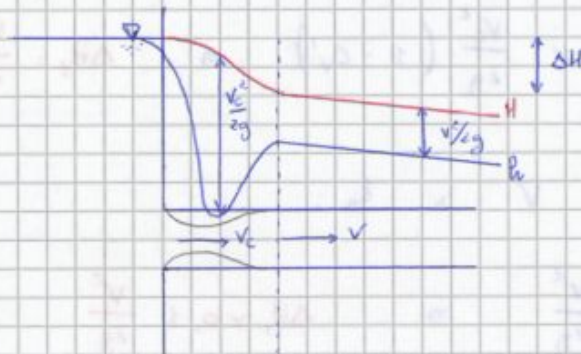
$$\Rightarrow \Delta H = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}$$

Quella ottenuta è la **formula di Borda** che i risultati sperimentali hanno confermato, giustificando così le due ipotesi fatte. Essa viene interpretata dicendo che le perdite di carico per un brusco allargamento sono pari all'altezza cinetica della **velocità perduta**.

Tale quantità di energia non è che viene persa, ma consente di alimentare il moto turbolento il quale poi, a causa della viscosità, la dissipa sotto forma di calore.

### Brusco restringimento

Analizziamo ora la situazione che si presenta all'imbocco di una condotta da un serbatoio, quando l'imbocco sia realizzato a spigolo vivo.



L'esperienza ha mostrato che i coefficienti di contrazione e di velocità di questo problema sono gli stessi che si hanno per il problema analizzato qualche lezione fa, in cui si analizzava la fuoriuscita di fluido da una luce a spigolo vivo praticata sulla parete del recipiente.

Altresì alla sezione contratta si ha una zona occupata da liquido animato da moto vorticoso, che praticamente non partecipa al moto di trasporto, ma assorbe solo energia.

Nel restringimento, la velocità del fluido passa da  $V_c$  (nella sezione contratta) a  $V$  (della sezione piena). Anche in questo caso possiamo applicare la formula di Borda:

## Vasca mediate sifone

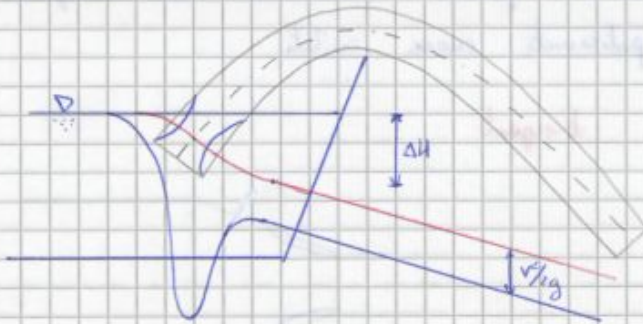
In questo caso abbiamo una vasca riempita con del fluido nel quale è immerso un sifone. A causa della maggiore densazione che deriva subito da transizione fluida, si ha una contrazione più accentratà e quindi un  $C_c$  più piccolo.

Applicando le stesse formule trovate prima, ma sostituendo al valore di  $C_c$  il numero 0,5 si ottiene:

$$\Delta H_1 = \frac{v^2}{2g} \left( \frac{1}{0,5} - 1 \right)^2 = \frac{v^2}{2g}$$

$$\Delta H_2 = \frac{v^2}{2g} \frac{1 - C_c^2}{C_c^2} = 0,16 \frac{v^2}{2g}$$

$$\Rightarrow \Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 = 1,16 \frac{v^2}{2g}$$



In corrispondenza della sezione contratta si ha un notevole incremento della velocità e quindi un brusco abbassamento della piezometrica. Ciò può portare ad avere in corrispondenza di tale sezione, una forte depressione.

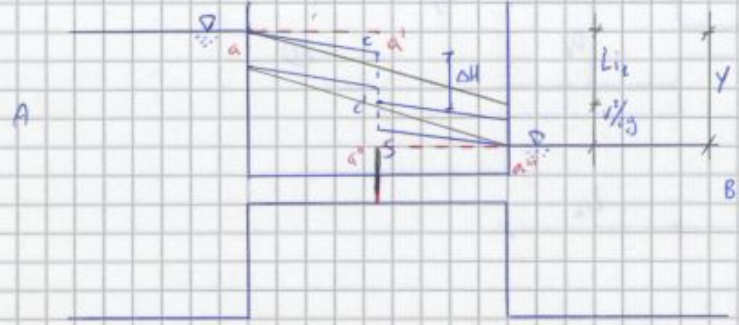
Se si calcola la portata senza tenere conto di questo fatto e, in sede di verifica si scopre che nella sezione contratta il valore della depressione è superiore, in valore assoluto, al valore massimo  $P_a^*$  finemente ammissibile ( $\frac{P_a^*}{\rho} \approx 10,33 \text{ m}$ ), bisogna concludere che la portata calcolata non può effettivamente passare.

## Convergenti e divergenti

2) Convergenti: i canali di condotta gradualmente convergenti non danno luogo a possibilità di crollo particolarmente accentrate grazie al fatto che, nelle correnti accelerate, si ha un'attenuazione dei moti turbolenti e dunque minori perdite energetiche.

Vediamo ora quali sono le geometrie migliori da mettere in atto in caso di raccordi convergenti:

Consideriamo ora due serbatoi A e B collegati da una condotta L, la quale sia munita di una saracinesca S in una certa sezione. Indichiamo con Y la differenza di quota tra i due pel liberi del fluido.



Quando la saracinesca chiude completamente la condotta, la linea dei carichi totali e la piezometrica, dei due serbatoi, coincidono: per il serbatoio A esse saranno rappresentate dalla retta a-a', mentre per il serbatoio B la retta è a-a'''.

Quando la saracinesca è completamente aperta non si hanno perdite di carico localizzate, pertanto la linea dei carichi totali è una retta con pendenza costante  $i_2$ , mentre la linea dei carichi piezometrici è una retta a questa parallela e shiftata di  $\frac{v^2}{2g}$ , infatti:

$$Y = L i_2 + \frac{v^2}{2g}$$

Per una qualsiasi apertura intermedia in corrispondenza della sezione in cui si ha la saracinesca, si ha una perdita di carico localizzata  $\Delta H = c \cdot v^2$ .

In tal caso la caduta avrà una pendenza  $i_2 < i_2'$ .

In questo caso si ha:

$$Y = L i_2 + \frac{v^2}{2g} + \Delta H$$

Bilancio di una condotta con perdita di carico localizzate e continue

Tracciamo ora la linea dei carichi totali e la linea dei carichi piezometrici del seguente sistema idraulico, costituito da due vasche collegate da un tubo caratterizzato da due diametri diversi raccordati in modo brusco.



Una situazione di notevole importanza per le applicazioni pratiche è quella che può presentarsi alla sezione di imbocco di una pompa alimentata da un serbatoio a mezzo di una condotta di aspirazione. In dipendenza dalla portata sollevata e dall'andamento altimetrico dell'impianto, la piezometrica può **tagliare l'asse della condotta**, portandosi al di sotto di questa: questo porterà ad avere in alcuni tratti della condotta delle depressioni, le quali riducono l'efficienza della pompa e, in alcuni casi, ne inficiano l'utilizzo.

Per evitare che questo problema si crei è dunque necessario posizionare la pompa il **più vicino possibile alla vasca di rifornimento**.

### Lunghe condotte

Spesso si ha a che fare con condotte in pressione di lunghezza rilevante rispetto al diametro. In questo caso si parlerà di **lunghe condotte**, caratterizzate dall'avere perdite di carico localizzate trascurabili rispetto a quelle continue dovute alla resistenza delle pareti. Inoltre, le moderate velocità di scorrimento rendono leda trascurabilità dell'altezza cinetica rispetto ai dislivelli piezometrici, questo vuol dire che per le lunghe condotte non c'è distinzione tra linea dei carichi totali e linea dei carichi piezometrici (si parlerà di **piezometrica**).

Veriamo ora cosa si intende per "lunghezza rilevante rispetto al diametro".

Assumendo che l'altezza piezometrica sia pari al 4% del  $\Delta H$  si ottiene

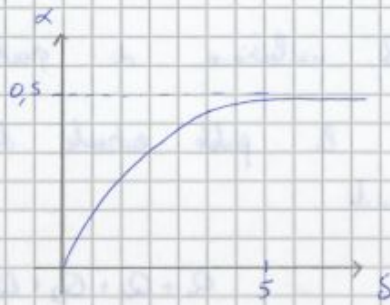
$$\frac{v^2}{2g} = 0,04 \cdot L_i \quad \Rightarrow \quad \frac{v^2}{2g} = 0,04 \cdot L \cdot \frac{1 \cdot v^4}{g D^5} \quad 1 = 0,04 \cdot n^2 \cdot \frac{L}{D} \quad \Rightarrow \quad L = n D$$

$$\Rightarrow \quad n = \frac{1}{0,04 \cdot \lambda} \quad \text{con } \lambda = 0,025 \text{ (classico)} \quad \Rightarrow \quad n = 1000 \quad \Rightarrow \quad L = 1000 D$$

Questo vuol dire che se la lunghezza è almeno pari a 1000 volte il diametro, allora si può dire che la condotta sia lunga.

I problemi con cui avremo a che fare riguarderanno reti idriche di centri abitati. In questi sistemi le perdite di carico localizzate hanno un valore complessivo non del tutto trascurabile, queste perdite sono numerose: i punti di prelievo dalle condotte principali. Nella pratica, però, ci si accadrà di pressioni basse, perdite è ancora lento tener conto delle sole perdite di carico continue ed, eventualmente, considerando le **perdite localizzate come se fossero uniformemente ripartite lungo la condotta**.  
(Vedi ancora pag. 262-263)

Tale relazione è rappresentata dal seguente grafico dal quale si deduce che per  $S \geq 5$   $\alpha$  si può intendere costante e pari a 0,5.



13-11-2013

**Problemi sulle lunghe condotte**

I problemi che fondamentalmente possono interessare le reti di lunghe condotte sono sostanzialmente di due tipi:

- **verifica**, cioè la verifica del funzionamento di una rete esistente, che consiste nella determinazione della portata che cambierebbe ciascun ramo della rete;
- **progetto**, cioè il dimensionamento del diametro che occorre assegnare ai vari rami per ottenere la portata voluta.

Per ogni problema avremo dei dati noti e dei valori incogniti da determinare

|                | Verifica                                                   | Progetto                                                   |
|----------------|------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|
| Dati noti      | $D_i \Rightarrow m$ rami                                   | $Q_i \Rightarrow m$ rami<br>$H_i = h_i \Rightarrow n$ nodi |
| Dati incogniti | $Q_i \Rightarrow m$ rami<br>$H_i = h_i \Rightarrow n$ nodi | $D_i \Rightarrow m$ rami                                   |

**Problemi di verifica**

Consideriamo un problema in cui sono noti i seguenti valori:

- **quote** dei poli liberi dei serbatoi che alimentano il sistema o sono da esso alimentati;
- le **lunghezze**  $L_i$ , i **diametri**  $D_i$  e le **scabrezza** (valori di  $\beta$  ed  $n$  dell'equazione di Darcy) degli  $m$  rami che compongono il sistema;
- le **portate**  $Q_j$  erogate dagli  $n$  nodi, dove per nodo si intende il punto in cui confluiscono 3 o più rami, oppure dove cambia il diametro, o ancora dove