



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 879

DATA: 12/03/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Golisano

MATERIA: Fisica II + Eserc.

Prof. Gozzellino

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

Lezione 1 1-10-2012

Forza elettrica. Campo elettrostatico

Cariche elettriche. Isolanti e conduttori

Una delle interazioni fondamentali della materia è rappresentata da quella **elettromagnetica**. Un aspetto particolare di tale interazione è la **forza elettrica**, la cui proprietà osserviamo, da ora in poi, da noi affrontate.

È esperienza di tutti noi la forza elettrica, basta pensare a quel semplice esperimento in cui viene strofinata una bacchetta di ebanite, piuttosto che di ambra, la quale, in seguito a ciò, è in grado di attirare a sé piccoli corpi leggeri.

Tali materiali che presentano proprietà di questo tipo, cioè materiali in grado di **elettroizzarsi**, come la plastica, sono detti **isolanti**, in quanto capaci di trattenere la carica elettrica, mentre altri, come i metalli, non riescono a trattenere e pertanto sono detti **conduttori**.

Come sappiamo, gli isolanti non sono tutti uguali, anzi, infatti si elettroizzano in due maniere differenti. Ciò porta a dire che esistono **due diversi tipi di cariche elettriche**, due per convenzione sono dette **positiva** e **negativa**. Cariche di segno opposto si attraggono mentre cariche dello stesso segno si respingono. Questa proprietà rappresenta la principale differenza tra interazione gravitazionale ed interazione elettromagnetica: la prima determina solo una forza di tipo **attrattivo**, la seconda, come visto, la forza può anche essere **repulsiva**.

Struttura elettrica della materia

La materia è costituita da atomi, i quali sono formati da 3 tipologie di particelle: protoni p , neutroni n ed elettroni e .

La massa del protone è quella del neutrone sono pressoché identiche ($m_p \approx m_n \approx 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ Kg}$), mentre la massa dell'elettrone è molto più piccola ($m_e \approx 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ Kg}$).

Il diametro del protone e dell'neutrone è dell'ordine dei 10^{-13} m (femtometro o fm) mentre quello dell'elettrone è di circa 10^{-17} m .

L'elettrone e il protone sono dotati di carica elettrica, il neutrone, invece, è neutro.

La carica dell'elettrone è la più piccola osservabile sperimentalmente ed è pertanto chiamata **carica elementare** $-e$. La carica del protone è uguale in valore assoluto ma diversa in segno a quella dell'elettrone, indicata quindi con $+e$.

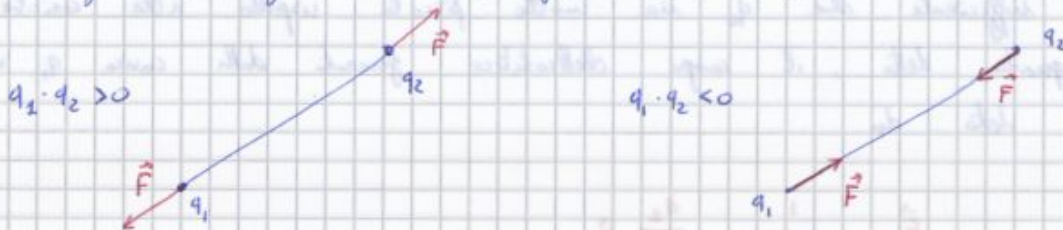
Tutte le particelle subatomiche osservate hanno una carica multipla a quella dell'elettrone (loggiamente in valore assoluto), questo vuol dire che la carica elettrica non può assumere tutti i valori che si vuole, ma questi devono sempre essere multipli della carica elementare. Tale condizione si traduce dicendo che la carica elettrica è una grandezza **quantizzata** il cui valore elementare è $1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ (carica di un e).

La legge di Coulomb

Tale legge specifica come varia la forza con cui interagiscono due cariche elettriche puntiformi in quiete.

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \hat{u}_r$$

Il segno della forza è legato al segno delle cariche q_1 e q_2 : se queste sono uguali il segno è positivo quindi la forza è repulsiva, se invece le cariche sono opposte il segno è negativo e la forza è attrattiva.



Il fattore di proporzionalità della formula dipende dal mezzo in cui avviene il fenomeno e la costante ϵ_0 è nota come **costante dielettrica del vuoto** e vale

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$$

L'unità di misura della carica elettrica è il Coulomb (C). Tale unità di misura, in elettrostatica, risulta fin troppo grande, in quanto sa ben oltre le possibilità sperimentali. Tuttavia vedremo come nei condensatori questa possa anche raggiungere il valore di $q_1 = 1 \text{ C}$.

Campo elettrostatico

Il concetto di forza può essere visto come l'influenza di un campo elettrostatico di una carica rispetto all'altra carica. Ciò si nota bene scrivendo la legge di Coulomb come:

$$\vec{F}_{q_0} = q_0 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \Rightarrow \frac{\vec{F}_{q_0}}{q_0} = \vec{E} \Rightarrow \text{campo elettrostatico}$$

Più precisamente: il campo elettrostatico \vec{E} generato in un punto dello spazio da un sistema di cariche ferme è definito come la forza elettrica risultante \vec{F} che agisce su una carica di prova q_0 positiva posta in quel punto, divisa per la carica q_0 stessa.

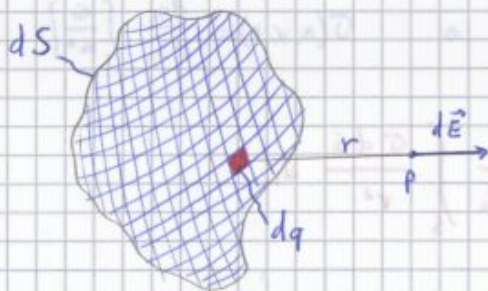
Nei casi concreti, la carica di prova q_0 può perturbare la distribuzione spaziale originale dell'altro o delle altre cariche, in quanto queste non può essere cariche esattamente puntiformi, cioè prive di struttura.

Campo elettrostatico prodotto da una distribuz. continua di carica

Nei problemi di nostro interesse, il numero di cariche presenti è molto elevato e quasi sempre queste non sono concentrate in un unico punto dello spazio, ma sono distribuite in maniera uniforme su una porzione di spazio, con una ben determinata geometria.

Tali distribuzioni spaziali sono per loro natura sorgenti di un campo elettrostatico che ora andiamo a vedere come calcolare.

Ipotezziamo di disporre di una superficie carica. Di tale superficie consideriamo una sua porzione infinitesimale, la quale però contiene un numero molto elevato di cariche. Calcoliamo il suo campo elettrostatico nel punto P.



$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{r^2} \hat{u}$$

Ciascuna delle cariche dq determina un campo $d\vec{E}$ nel punto P, pertanto il campo risultante sarà dato dalla somma algebrica dei singoli campi $d\vec{E}$ (in linea col principio di sovrapposizione), tuttavia, trattandosi di valori infinitesimali, la somma si traduce in un integrale:

$$\vec{E}_{\text{tot}}(P) = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{tot}} \frac{dq}{r^2}$$

Campo elettrostatico di un filo carico

Ipotezziamo ora che la nostra dS sia un filo carico, in cui è possibile definire una densità di carica per unità di lunghezza λ . In tal caso la carica dq può essere calcolata come

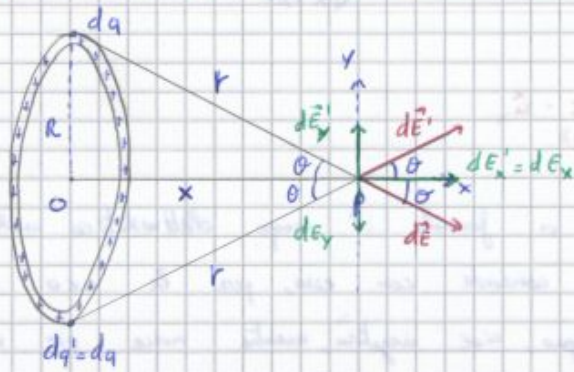
$$dq = \lambda \cdot dl \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{dq}{dl} \left[\frac{C}{m} \right]$$

Tale densità di carica, in generale, è funzione dello spazio, pertanto

$$\lambda(x, y, z) \neq \lambda(x', y', z')$$

Quanto vale finché il problema non dice che la distribuz. di carica è uniforme, quindi λ è costante e possiamo estrapolarlo dal segno di integrale

Campo elettrostatico di un anello carico (sull'asse puntato per il centro dell'anello)



$$\vec{E}(P) = ?$$

$q > 0 \Rightarrow d\vec{E}$ esce

Carica uniforme $\Rightarrow \lambda = \text{cost}$

$$dq = \lambda \cdot dl$$

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{r^2} \hat{u}_r$$

Per calcolare il campo elettrostatico nel punto P, considero, come sempre, un carica infinitesimale di tale corpo, determino il campo elettrostatico infinitesimale da essa generato e ne faccio l'integrale. In questo caso, però, l'integrale è un integrale di vettori \hat{u}_r tutti diversi tra loro (direzioni diverse).

Devo dunque sfruttare la simmetria.

Osservo che: $dq' = dq$ e $d\vec{E}' = d\vec{E}$ ma

$$d\vec{E}_x = d\vec{E}'_x \Rightarrow \text{si sommano}$$

$$d\vec{E}_y = -d\vec{E}'_y \Rightarrow \text{si elidono}$$

Puntato

$$d\vec{E} + d\vec{E}' = d\vec{E}_x + d\vec{E}'_x + d\vec{E}_y + d\vec{E}'_y = d\vec{E}_x + d\vec{E}_x + \cancel{d\vec{E}_y} - \cancel{d\vec{E}_y} = 2d\vec{E}_x$$

$$d\vec{E} + d\vec{E}' = 2 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dl}{r^2} \right) \cdot \cos\theta \hat{u}_x$$

Passando all'integrale si ha

$$\vec{E} = \int (d\vec{E} + d\vec{E}') = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dl}{r^2} \cdot 2 \cdot \cos\theta \cdot \hat{u}_x = \frac{2 \cos\theta \lambda}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(\int_{-\pi R}^{\pi R} dl \right) \hat{u}_x =$$

Integro solo su metà anello, ma considero anche i punti diametralmente opposti.

$$= \frac{2 \cos\theta \lambda}{4\pi\epsilon_0 r^2} \pi R \hat{u}_x \quad \text{sapendo che} \quad \lambda = \frac{q}{l} = \frac{q}{2\pi R} \Rightarrow q = 2\pi R \lambda$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \cos\theta \hat{u}_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \cdot \frac{1}{x^2 + R^2} \cdot \hat{u}_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \cdot \hat{u}_x$$

La densità di carica superficiale $\bar{\sigma}$ è:

$$\bar{\sigma} = \frac{q}{\Sigma} \Rightarrow \bar{\sigma} = \frac{q}{\pi A^2}$$

La superficie infinitesima dS della corona circolare è:

$$dS = \pi R^2 - \pi (R+dR)^2 = \pi R^2 - \pi (R^2 + 2RdR + dR^2) = \cancel{\pi R^2} - \cancel{\pi R^2} - 2\pi R dR + \cancel{dR^2} \Rightarrow$$

$$dS = -2\pi R dR$$

Calcolo il campo elettrostatico infinitesimo $d\vec{E}$ di ciascuna corona

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq \cdot x}{(x^2+R^2)^{3/2}} \hat{u}_x, \text{ sapendo che } dq = \bar{\sigma} dS \text{ si ottiene}$$

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\bar{\sigma} dS \cdot x}{(x^2+R^2)^{3/2}} \hat{u}_x \Rightarrow d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\bar{\sigma} \cdot 2\pi R dR \cdot x}{(x^2+R^2)^{3/2}} \hat{u}_x \Rightarrow$$

$$\vec{E}(P) = \int_0^A \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\bar{\sigma} 2\pi R dR \cdot x}{(x^2+R^2)^{3/2}} \hat{u}_x \Rightarrow \vec{E}(P) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \bar{\sigma} x \left[\int_0^A \frac{R dR}{(x^2+R^2)^{3/2}} \right] \hat{u}_x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E}(P) = \frac{\bar{\sigma} x}{2\epsilon_0} \left(-\frac{1}{(x^2+R^2)^{1/2}} \right) \Big|_0^A \hat{u}_x \Rightarrow \vec{E}(P) = \frac{\bar{\sigma} x}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2+A^2}} \right) \hat{u}_x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E}(P) = \frac{\bar{\sigma}}{2\epsilon_0} \cdot \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+A^2}} \right) \hat{u}_x \Rightarrow \vec{E}(P) = \frac{\bar{\sigma}}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+A^2}} \right) \hat{u}_x$$

Questo è il campo elettrostatico calcolato su un punto dell'asse di un disco carico (distribuz. di carica uniforme). Valgono le stesse regole dei segni definite prima, pertanto, generalizzando la formula, si ha

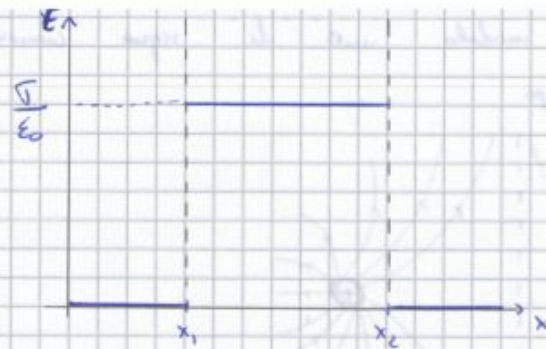
$$\vec{E}(P) = \pm \frac{\bar{\sigma}}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{|x|}{\sqrt{x^2+A^2}} \right) \hat{u}_x$$

+ se a dx
- se a sx

Come prima, se $x \gg A$ il disco si confonde con una carica puntiforme e l'esperienza è quella ben nota del campo elettrostatico di una carica puntiforme.

La cosa interessante accade nel centro del disco, cioè quando $x \rightarrow 0$.

In tal caso il limite destro e sinistro sono diversi, definendo così una **discontinuità** del campo, infatti



6

osservazioni:

negli esempi mostrati, i risultati ottenuti valgono per una distribuzione di cariche positive, se le cariche fossero negative cambierebbe soltanto il verso del campo, che diventerebbe entrante verso le cariche anziché uscente.

Inoltre si è sempre ipotizzata una distribuzione di carica uniforme, in quanto ciò ha semplificato la risoluzione degli integrali. Tale condizione, però, è molto difficile da realizzare nella realtà, se non con particolari geometrie.

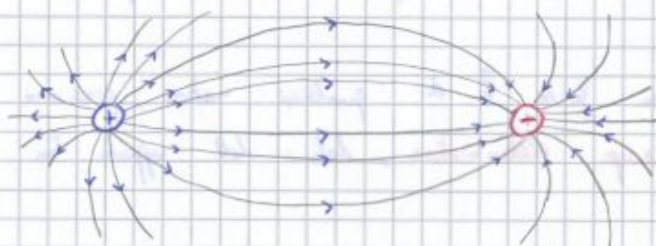
Linee di forza del campo elettrostatico

Il concetto stesso di campo elettrostatico ci dice che la presenza di una carica modifica lo spazio che la circonda, cioè inserendo una nuova carica in questo campo, essa riveste degli effetti della carica iniziale.

Per descrivere graficamente il campo elettrostatico generato da una o più cariche si usano le cosiddette **linee di forza** o **linee di campo**: esse hanno la caratteristica principale di essere tangenti al campo elettrostatico, in ogni punto, e il loro verso di percorrenza indica il verso del campo.

Nel caso di una carica puntiforme le linee di campo si distribuiscono secondo una geometria radiale, da parte della carica e si estende nello spazio linearmente. Come si può osservare, le linee di campo si infittiscono via via che si avvicina alla carica e ciò indica che l'intensità del campo è crescente.

Due cariche puntiformi, uguali in valore ma opposte in segno generano un campo di questo tipo.

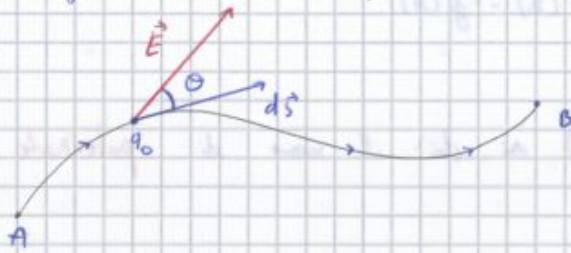


dipolo elettrico

Se tale forza produce uno spostamento, allora si compie un lavoro dato da:

$$dW = \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = q_0 E \cos \theta ds$$

dove θ è l'angolo che il campo elettrico forma con lo spostamento $d\vec{s}$.



Il lavoro che si compie nello spostamento della carica da A a B è dato dalla somma di tutti gli infinitesimi contributi, quindi:

$$W_{AB} = \int_A^B \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \int_A^B \langle q_0 \vec{E}, d\vec{s} \rangle = q_0 \int_A^B \langle \vec{E}, d\vec{s} \rangle$$

In generale il lavoro dipende dal percorso fatto. Tale integrale definisce la **tensione elettrica** tra due punti A e B relativa al percorso γ .

$$T = \int_A^B \langle \vec{E}, d\vec{s} \rangle$$

Se si considera un altro cammino γ_2 , in generale si trova un diverso valore della tensione elettrica. Osserviamo così che se il cammino è chiuso, il lavoro è in generale diverso da zero, pertanto, per una forza generica:

$$W_\gamma = \oint_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = q_0 \oint_\gamma \langle \vec{E}, d\vec{s} \rangle = q_0 \cdot \mathcal{E}$$

Tale integrale esprime il rapporto tra il lavoro compiuto e la carica e prende il nome di **forza elettromotrice** (in realtà non si tratta di una forza)

$$\mathcal{E} = \oint_\gamma \langle \vec{E}, d\vec{s} \rangle$$

Come sappiamo, però, esiste una particolare tipologia di forze, dette **conservative**, per le quali il lavoro compiuto nello spostamento di un punto da A a B non dipende dal cammino fatto ma solo dalle condizioni finali ed iniziali. Ad appartenere a questa categoria di forze è la **forza elettrostatica**, in quanto questa è un classico esempio di forza centrale.

Calcolo dell'energia potenziale elettrostatica e del potenziale elettrostatico

Iniziamo con il caso più semplice rappresentato da una carica puntiforme. Calcoliamo il lavoro infinitesimo fatto da tale carica:

$$dW = \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \langle q_0 \vec{E}, d\vec{s} \rangle = q_0 \langle \vec{E}, d\vec{s} \rangle \Rightarrow W_{AB} = q_0 \int_A^B \langle \vec{E}, d\vec{s} \rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_{AB} = q_0 \int_A^B \left\langle \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \hat{u}_r, d\vec{s} \right\rangle \Rightarrow W_{AB} = q_0 \int_A^B \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \langle \hat{u}_r, d\vec{s} \rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_{AB} = q_0 \int_A^B \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \Rightarrow W_{AB} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot q q_0 \int_A^B \frac{1}{r^2} dr \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_{AB} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_A^B \Rightarrow W_{AB} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) = U_A - U_B$$

Pertanto:

$$U_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_0 q}{r} + \text{cost} \quad \text{e, sapendo che: } V = \frac{U_0}{q_0}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r} + \text{cost}$$

Tali formule esprimono l'energia potenziale della carica q_0 a distanza r dalla carica q e il potenziale in un punto distante r dalla carica q .

Dalle espressioni posso ipotizzare che a grande distanza ($r \rightarrow \infty$) sia il potenziale che l'energia potenziale siano nulli. Dalle due espressioni si usava che

$$V(\infty) = A \quad \text{e} \quad U_0(\infty) = B \Rightarrow A = B = 0$$

Pertanto:

$$\int_r^\infty \langle \vec{E}, d\vec{s} \rangle = V(r) - V(\infty) = V(r)$$

Otteniamo così un secondo modo per esprimere U_0 e V :

$$V(P) = \int_P^\infty \langle \vec{E}, d\vec{s} \rangle = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r} \Rightarrow \text{lavoro necessario per spostare la carica unitaria dal punto } P \text{ all'infinito}$$

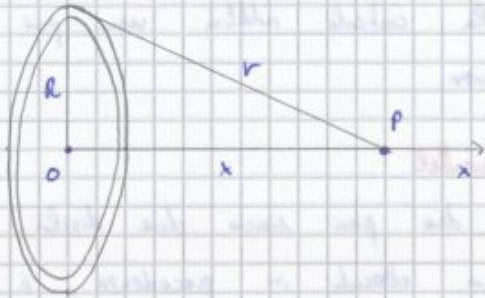
$$U_0(P) = q_0 \int_P^\infty \langle \vec{E}, d\vec{s} \rangle = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot q_0}{r} \Rightarrow \text{lavoro necessario per spostare la carica } q_0 \text{ dal punto } P \text{ all'infinito}$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad ; \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad ; \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Debo in termini + sintetica

$$\vec{E} = -\nabla V = -\text{grad}(V) \quad \text{dove} \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Calcolo del \vec{E} e del V di un anello carico



$$\lambda = \frac{q}{2\pi R} \Rightarrow dq = \lambda z \pi R = \lambda dl$$

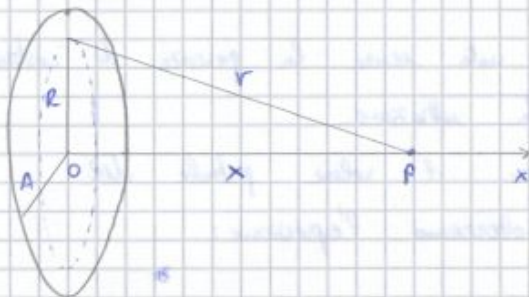
$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{r} \Rightarrow dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda z \pi R}{r} \Rightarrow V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{r} \int_0^{2\pi R} dl \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r} \Rightarrow V(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

se $x \gg R$ $V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{x}$ (come puntiforme e discorso dell'altro volti)

$$\vec{E} = -E_x \hat{u}_x = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(-\frac{1}{x} \right) \cdot \frac{1}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \cdot x = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}}$$

Calcolo del \vec{E} e del V di un disco carico



$$dq = \sigma ds = \sigma z \pi R dR \quad \sigma = \frac{q}{\pi R^2}$$

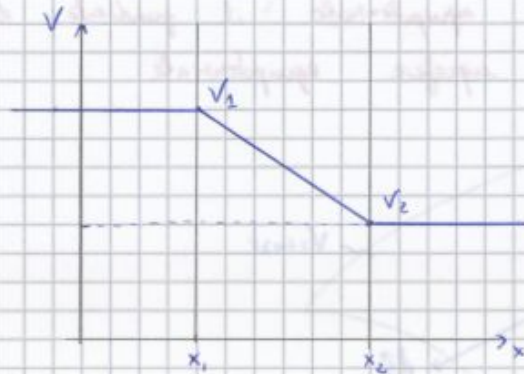
$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma ds}{r} \Rightarrow dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma z \pi R dR}{r} \Rightarrow V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sigma z \pi \int_0^R \frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}} dR$$

$$\Rightarrow V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{x^2 + R^2} \right)_0^R \Rightarrow V(P) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{x^2 + R^2} - x \right)$$

Osserviamo così che via via che la x avvicina il suo valore a quello della x_2 , il potenziale elettrostatico decresce, secondo una legge lineare.

Inoltre per le $x < x_1$ e $x > x_2$ il potenziale elettrostatico è costante, perché il valore di E , in questi punti, è zero.

Pertanto, essendo V una funzione continua per $x < x_1$, $V = V_1$ e per $x > x_2$, $V = V_2$. Il grafico che si ottiene è il seguente.



Lezione 3 8-10-2012

Superfici equipotenziali

In precedenza abbiamo descritto la forma delle cosiddette linee di campo o linee di forza, cioè zone dello spazio in cui il campo elettrostatico era costante. Ora proviamo ad effettuare lo stesso ragionamento per il potenziale elettrostatico, cioè descriviamo le cosiddette **superfici equipotenziali**: si definisce così una **superficie dello spazio tridimensionale** nei cui punti il potenziale ha lo stesso valore.

Pertanto, nelle superfici equipotenziali si ha:

$$V(x, y, z) = \text{cost}$$

e al variare della costante si ha tutta una famiglia di superfici equipotenziali.

Una delle principali proprietà di queste è il fatto che **non si possono intersecare**, quanto perché il potenziale è una funzione univoca, che dunque assume uno ed un solo valore per ogni punto dello spazio, pertanto in ogni punto dello spazio passa una e una sola **superficie equipotenziale**.

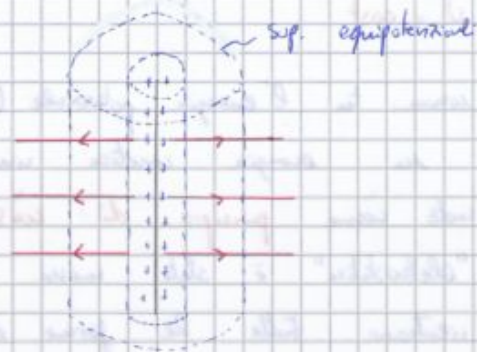
Ricordando l'espressione del potenziale

$$dV = \langle \nabla V, d\vec{s} \rangle = -\langle \vec{E}, d\vec{s} \rangle$$

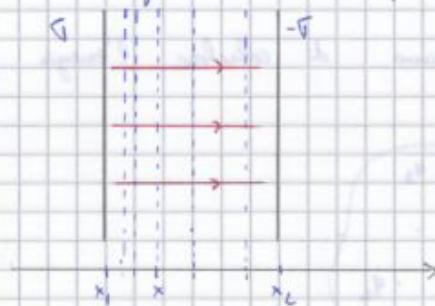
cerchiamo di capire quali sono le condizioni che rendono dV nullo, cioè $V(x, y, z) = \text{cost}$. Tali condizioni sono:

- $\vec{E} = 0$
- $d\vec{s} = 0$
- $\vec{E} \perp d\vec{s}$

- per un **filo indefinito** le linee di campo sono tutte ortogonali al filo e pertanto le superfici equipotenziali hanno una forma cilindrica con il filo che svolge la funzione di asse del cilindro



- per 2 **piani paralleli ed indefiniti** abbiamo detto che le linee di campo sono perpendicolari alle due superfici e presenti solo nell'intercapedine tra le due superfici, pertanto le superfici equipotenziali, in questo caso, sono piani paralleli ai due piani carichi e si infittiscono laddove il potenziale è maggiore, cioè nei punti più vicini al piano carico positivamente.



Tutti questi discorsi fatti per il potenziale e per le superfici equipotenziali valgono anche per l'energia potenziale elettrostatica e per le superfici ad energia potenziale elettrostatica costante.

✓ Energia potenziale elettrostatica

Abbiamo visto che se siamo in presenza di una forza conservativa, il lavoro svolto da essa può essere calcolato come:

$$W_{AB} = \int_A^B \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = U_A - U_B$$

Sappiamo inoltre, dalle nozioni di meccanica, che il lavoro può essere calcolato come la variazione di energia cinetica subita dal punto.

$$W_{AB} = E_{K,B} - E_{K,A}$$

Questa ultima relazione è **universale** in quanto ottenuta dalla seconda legge di Newton, pertanto vale sia per le forze conservative che per quelle non conservative.

Ecco che quindi l'espressione dell'energia potenziale totale del sistema vale:

$$U_{e, \text{ sistema}} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_i \cdot q_j}{r_{ij}}$$

che può anche essere scritta come:

$$U_{e, \text{ sistema}} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} q_i \cdot V_{0, j}$$

Proprietà di un campo conservativo elettrostatico

Fino ad ora abbiamo definito e fornito le formule che esprimono le proprietà di un campo conservativo quale il campo elettrostatico, ossia

$$1) \oint \langle \vec{E}, d\vec{s} \rangle = 0 \quad (\text{condizione necessaria e sufficiente})$$

$$2) \vec{E} = -\nabla V$$

Vogliamo ora cercare di esprimere la 1), che è una condizione integrale, in forma locale. Per fare ciò dobbiamo introdurre il concetto di rotore di un campo vettoriale. Il rotore (indicatedo con rot) è un operatore che si applica ad un vettore e restituisce un nuovo vettore. Esso è anche definito come il prodotto vettoriale dell'operatore ∇ con il campo vettoriale. Pentato

$$\text{rot}(\vec{E}) = \nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \frac{\partial}{\partial x} & E_x \\ \hat{u}_y & \frac{\partial}{\partial y} & E_y \\ \hat{u}_z & \frac{\partial}{\partial z} & E_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \hat{u}_x - \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \hat{u}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \hat{u}_z$$

Enunciamo ora la relazione che volevamo trovare, nota con il nome di **teorema di Stokes** (valido per un qualunque campo vettoriale):

La circuitazione di un campo vettoriale lungo una linea chiusa C è uguale al flusso del rotore del campo attraverso una qualunque superficie $\vec{\Sigma}$ avente C come contorno. In formule:

$$\oint_C \langle \vec{E}, d\vec{s} \rangle = \int_{\vec{\Sigma}} \langle \text{rot}(\vec{E}), \hat{u}_N \rangle d\vec{\Sigma}$$

Nel caso di campo conservativo, tale valore è uguale a zero, dunque:

$$\text{rot}(\vec{E}) = 0$$

lavorando nell'ipotesi di essere molto lontani dal dipolo, cioè se $r \gg a$, allora si può supporre

$$r_2 - r_1 = a \cos \theta, \quad r_1 = r_2 \Rightarrow r_1 \cdot r_2 = r^2$$

Sostituendo otteniamo:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q(a \cos \theta)}{r^2} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Rightarrow V(P) = \frac{\langle \vec{p}, \hat{u}_r \rangle}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

infatti $\langle \vec{p}, \hat{u}_r \rangle = |\vec{p}| \cdot |\hat{u}_r| \cdot \cos \theta = p \cdot \cos \theta$.

Osserviamo ora la formula:

- 1) notiamo che l'unica grandezza caratteristica del dipolo è \vec{p} e non q o a , ciò vuol dire che dalla misura del potenziale possiamo ricavare informazioni sul momento di dipolo ma non sulle caratteristiche geometriche (a) e qualitative (q) del dipolo.
- 2) il potenziale decresce con il quadrato della distanza dal dipolo, cioè più rapidamente del potenziale generato dalla singola carica puntiforme. Ciò è dovuto al fatto che gli effetti delle due cariche di segno opposto si neutralizzano parzialmente (l'effetto sarebbe nullo se le due cariche coincidessero).

Il potenziale calcolato nel punto P vale per ogni altro punto distante r dal punto medio del dipolo: ipoteticamente dunque il potenziale presenta una **simmetria cilindrica** rispetto all'asse del dipolo.

Sfruttando questa proprietà calcoliamo il campo elettrostatico:

$$\vec{E} = -\nabla V \Rightarrow \text{in coordinate polari } -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial r} ; \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} ; \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \right)$$

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\left(\frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(-\frac{2}{r^3} \right) \right) = + \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{p \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\left(\frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot (-\sin \theta) \right) = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$E_\phi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \quad (\text{non dipende da } \phi)$$

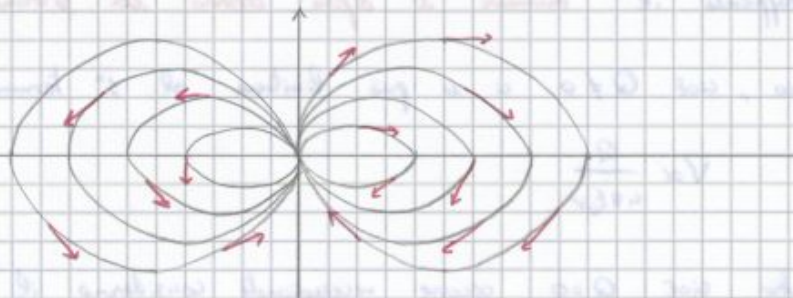
Notiamo dunque che:

- se $\theta = 0$, il campo \vec{E} è parallelo e concorde ad il momento di dipolo \vec{p} ;
- se $\theta = \pi$, il campo \vec{E} è parallelo e discorde a \vec{p} ;
- se $\theta = \frac{\pi}{2}$ oppure $\theta = \frac{3}{2}\pi$ il campo \vec{E} è parallelo e discorde a \vec{p} ;

Pertanto sull'asse del dipolo il campo è parallelo e concorde ad \vec{p} , nel piano meridiano il campo è parallelo e discorde a \vec{p} . In ogni caso E decresce con l'aumentare della distanza.



In ogni altra situazione il campo \vec{E} non è mai parallelo a \vec{p}



Potenziale di un sistema di cariche nell'approssimazione del dipolo

Consideriamo un sistema di cariche q_i distribuite in una regione ristretta dello spazio di dimensione D . Detto O un qualsiasi punto interno della regione calcoliamo il potenziale in un punto P ad una distanza r da O molto grande rispetto a D ($r \gg D$).

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

Chiamando \vec{d}_i il vettore che unisce O con la carica q_i , abbiamo che $\vec{d}_i + \vec{r}_i = \vec{r}$ e se appunto vale $r_i \gg D$, allora $d_i \cos\theta_i + r_i = r$, ovvero

$$r_i = r - d_i \cos\theta_i = r - \langle \vec{d}_i, \hat{u}_r \rangle$$

$$U_e = q V(x+a_x, y+a_y, z+a_z) - q V(x, y, z)$$

Supponendo a piccola possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} U_e &= q \left(V(x, y, z) + \frac{\partial V}{\partial x} a_x + \frac{\partial V}{\partial y} a_y + \frac{\partial V}{\partial z} a_z \right) - q V(x, y, z) = q \frac{\partial V}{\partial x} a_x + q \frac{\partial V}{\partial y} a_y + q \frac{\partial V}{\partial z} a_z = \\ &= q a_x \frac{\partial V}{\partial x} + q a_y \frac{\partial V}{\partial y} + q a_z \frac{\partial V}{\partial z} = p_x \frac{\partial V}{\partial x} + p_y \frac{\partial V}{\partial y} + p_z \frac{\partial V}{\partial z} = \langle \vec{p}, \nabla V \rangle = - \langle \vec{p}, \vec{E} \rangle \end{aligned}$$

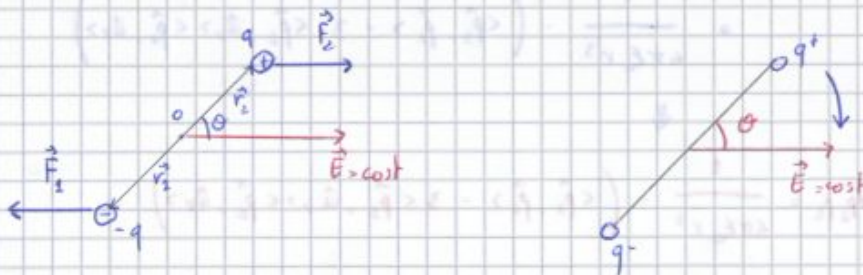
$$U_e = \langle \vec{p}, \nabla V \rangle = - \langle \vec{p}, \vec{E} \rangle = -p \cos \theta E$$

Se il campo elettrico considerato è costante, allora sulle cariche agiscono due forze uguali e contrarie, infatti

$$\vec{F} = q \vec{E} \Rightarrow \begin{aligned} \vec{F}_1 &= -q \vec{E} \\ \vec{F}_2 &= q \vec{E} \end{aligned} \Rightarrow \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

Tali forze costituiscono una coppia, pertanto hanno risultante nulla ma momento diverso da zero. Il dipolo, pertanto resta fermo nel campo uniforme e la sua posizione di equilibrio stabile, corrispondente al valore minimo di energia potenziale, è con il momento di dipolo \vec{p} parallelo e concorde al campo \vec{E} (notiamo infatti che U_e è minimo se $\cos \theta = 1$, cioè se $\theta = 0$).

Facendo dunque ruotare il dipolo di un angolo θ rispetto alla posizione di equilibrio stabile, questa risente dell'effetto della coppia di forze e, sotto l'effetto del momento $\vec{\tau}$ tende a ritornare nella posizione con $\theta = 0$.



Tale momento, calcolato ad esempio rispetto al centro del dipolo vale:

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 - \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_2 = \vec{a} \times \vec{F}_2 = \vec{a} \times (q \vec{E}) = \\ &= \vec{a} q \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E} \end{aligned}$$

↓

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} = -E p \sin \theta \hat{a}_\theta$$

Lezione 4 12-10-2012

Flusso di un campo elettrico e legge di Gauss

Nelle nozioni apprese in fisica 1 nell'elettrostatica ci si può allacciare ora al concetto di flusso di un campo elettrico e alla legge di Gauss.

Data una superficie $d\vec{\Sigma}$ immersa in una regione in cui è definito un campo \vec{E} , consideriamo il vettore normale \hat{u}_n rivolto con il verso verso l'esterno della superficie. Si definisce **flusso del campo \vec{E} attraverso la superficie $d\vec{\Sigma}$** la quantità scalare

$$d\Phi(\vec{E}) = \langle \vec{E}, \hat{u}_n \rangle d\vec{\Sigma} = E \cos \theta d\vec{\Sigma} = E_n d\vec{\Sigma}$$

Il flusso attraverso una superficie finita Σ si ottiene sommando tutti i contributi infinitesimi, cioè integrando:

$$\Phi(\vec{E}) = \int_{\Sigma} \langle \vec{E}, \hat{u}_n \rangle d\vec{\Sigma}$$

Nel caso in cui la superficie è chiusa il flusso si scrive come:

$$\Phi(\vec{E}) = \oint_{\Sigma} \langle \vec{E}, \hat{u}_n \rangle d\vec{\Sigma}$$

Data la convenzione di orientare \hat{u}_n con il verso positivo verso l'esterno della superficie, si ha che:

- i contributi **positivi** dell'integrale sono quelli per cui $\langle \vec{E}, \hat{u}_n \rangle > 0$, cioè a quelle zone in cui anche \vec{E} , è orientato verso l'esterno: in questo caso il **flusso di \vec{E} è uscente** dalla superficie;
- i contributi **negativi** dell'integrale sono quelli per cui $\langle \vec{E}, \hat{u}_n \rangle < 0$, cioè a quelle zone in cui \vec{E} punta verso l'interno: in questo caso il **flusso di \vec{E} è entrante** nella superficie.

Ecco che quindi l'integrale dà il **flusso netto** attraverso la superficie chiusa, se esso è **nullo** vuol dire di norma che il flusso entrante eguaglia in modulo il flusso uscente.

Apprese le nozioni di flusso possiamo enunciare il **teorema di Gauss**, che recita:

"Il flusso del campo \vec{E} attraverso una superficie chiusa è uguale alla somma algebrica delle cariche contenute entro la superficie, comunque siano distribuite, divisa per ϵ_0 ". In formule

$$\Phi(\vec{E}) = \oint_{\Sigma} \langle \vec{E}, \hat{u}_n \rangle d\Sigma = \int_V \operatorname{div}(\vec{E}) dV$$

Dalla legge di Gauss sappiamo che:

$$\Phi(\vec{E}) = \int_V \frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0} dV$$

Uguagliando questa espressione con quella del teorema della divergenza si ottiene:

$$\int_V \operatorname{div}(\vec{E}) dV = \int_V \frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0} dV \Rightarrow \int_V \left(\operatorname{div}(\vec{E}) - \frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0} \right) dV = 0 \Rightarrow$$

$$\operatorname{div}(\vec{E}) - \frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0} = 0$$

⇓

$$\operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Quella così ottenuta rappresenta la legge di Gauss in forma locale (o differenziale).

Equazioni di Maxwell per l'elettrostatica. Equazioni di Poisson e di Laplace

Gli operatori rotore e divergenza permettono di scrivere in forma sintetica le equazioni locali che corrispondono al fatto che il campo \vec{E} sia conservativo e obbedisca alla legge di Gauss. Abbiamo

$$\int_{\Sigma_{ch}} \langle \vec{E}, \hat{u}_n \rangle d\Sigma = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0}$$

Per il solo campo elettrostatico, in cui $\oint \langle \vec{E}, d\vec{s} \rangle = 0$ si ha che

$$\operatorname{rot}(\vec{E}) = \nabla \times \vec{E} = 0 \quad ; \quad \operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0}$$

Queste due equazioni prendono il nome di Equazioni di Maxwell per il campo elettrostatico.

Noi sappiamo che $\vec{E} = -\nabla V$, inseriamo questo nell'espressione della divergenza:

$$\langle \nabla, -\nabla V \rangle = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow -\nabla^2 V = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Per il teorema di Gauss sappiamo che:

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

dove h è l'altezza del cilindro (ossia la lunghezza del filo).

Dall'espressione di prima ricaviamo:

$$\Phi(\vec{E}) = \int_{\Sigma_{lat}} E d\Sigma = E \int_{\Sigma_{lat}} d\Sigma = E 2\pi X h$$

Uguagliamo le due espressioni ottenendo:

$$\frac{\lambda h}{\epsilon_0} = E 2\pi X h \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 X}$$

A questo punto dalla relazione $E = -\nabla V$ calcoliamo V , che in questo caso dipende solo dalla coordinata x :

$$E = -\nabla V \Rightarrow E = -\frac{\partial V}{\partial x} \Rightarrow V = -\int \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 x} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \cdot \ln x + \text{cost}$$

Dove al posto della x inseriamo l'ascissa del punto in cui si vuole calcolare il potenziale (coincide con il raggio del cilindro di asse il filo e passante per il punto P).

2) Calcolo del \vec{E} e del V di una sfera carica uniformemente

Anche in questo caso osserviamo che il sistema presenta una simmetria, questa volta però si tratta di una simmetria sferica. Per semplificare i calcoli, dunque, sceglieremo una superficie sferica concentrica il cui raggio varierà a seconda delle necessità: se il calcolo riguarda punti interni della sfera di raggio R , la superficie scelta avrà raggio r tale che $0 < r < R$, se il calcolo riguarda punti esterni, allora $r > R$.

- calcolo di \vec{E} e V per punti interni



$$0 < r < R, \quad g = \frac{dq}{dV} = \text{cost}$$

Quindi:

$$4\pi r^2 E = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi R^3}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho \cdot R^3}{3\epsilon_0 r^2}$$

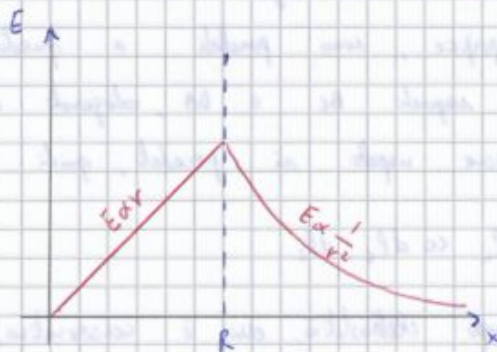
Osserviamo che, in questo caso, E diminuisce come $\frac{1}{r^2}$. Inoltre, dividendo e moltiplicando tutto per 4π si ottiene

$$E = \frac{\rho R^3 4\pi}{3} \frac{1}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

↓
Q

Questa formula ci ricorda molto il campo generato da una carica puntiforme, pertanto abbiamo scoperto che, anche se non sono a grande distanza dalla carica, posso approssimare il campo generato da una sfera carica a quello generato da una carica puntiforme (sempre se sono su un punto P esterno alla carica).

Graficamente si ha:



Il potenziale, invece, vale:

$$V = - \int E dr' = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r'} + \text{cost} \qquad V = + \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r'} + \text{cost}$$

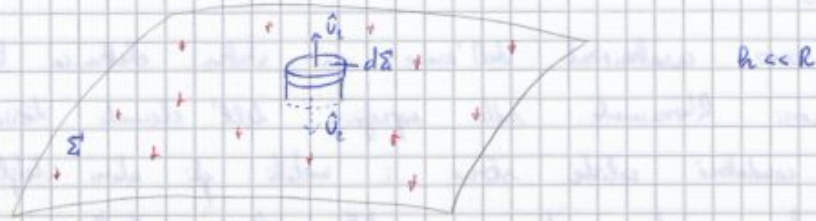
Osserviamo che, se V , come sappiamo, è una funzione continua, vuol dire che V , calcolato sulla superficie della sfera, deve dare lo stesso valore indipendente mente dalla formula adottata. Pensateci su ha:

$$- \frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} + \text{cost} = + \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0 R} + \text{cost}' \Rightarrow \text{cost} = \frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} + \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{cost} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}$$

Consideriamo ora un punto di Σ e un suo intorno di area $d\vec{\Sigma}$ e chiamiamo con \hat{u}_n la normale alla superficie



Costruiamo un cilindro con aree di base pari a $d\vec{\Sigma}$, parallele alla superficie curva e con uno spessore di un valore molto più piccolo, e dunque trascurabile rispetto a $d\vec{\Sigma}$. La carica contenuta all'interno della curva cilindrica è $\sigma d\vec{\Sigma}$. Applichiamo la legge di Gauss

$$d\phi(\vec{E}) = \langle \vec{E}_1, \hat{u}_1 \rangle d\vec{\Sigma}_1 + \langle \vec{E}_2, \hat{u}_2 \rangle d\vec{\Sigma}_2 + \underbrace{\langle \vec{E}, \hat{u}_n \rangle d\vec{\Sigma}}_{\text{trascurabile}} = \frac{\sigma d\vec{\Sigma}}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \langle \vec{E}_1, \hat{u}_1 \rangle d\vec{\Sigma} + \langle \vec{E}_2, -\hat{u}_2 \rangle d\vec{\Sigma} = \frac{\sigma d\vec{\Sigma}}{\epsilon_0} \Rightarrow$$

$$d\vec{\Sigma} (E_{1n} - E_{2n}) = \frac{\sigma d\vec{\Sigma}}{\epsilon_0} \Rightarrow E_{1n} - E_{2n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Avendo indicato con E_{in} le componenti normali del campo elettrico \vec{E} . Nell'attraversamento della superficie, quindi, la componente normale del campo \vec{E} subisce una discontinuità pari a σ/ϵ_0 .

Le due relazioni così trovate possono essere riassunte con la notazione vettoriale nella formula

$$\vec{E}_1 - \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{u}_n$$

Questa notazione è una notazione locale, non vale in ogni punto della superficie: non è necessario che σ sia costante o che la superficie sia piana.

I campi \vec{E}_1 ed \vec{E}_2 sono dovuti sia alle cariche superficiali sia alle altre cariche presenti: i loro valori e le loro direzioni variano a seconda della σ in quel punto e della geometria della superficie, quello che non cambia sta nel fatto che la differenza è solo nella componente normale, la quale dipende solo da σ .

b) Il **potenziale** V del conduttore è costante in ogni punto del conduttore, infatti, presi due punti qualsiasi

$$V(P_1) - V(P_2) = \int_{P_1}^{P_2} \langle \vec{E}, d\vec{s} \rangle = 0 \Rightarrow V(P_1) = V(P_2) = V_0$$

Questo vuol dire che la **superficie** del conduttore è una **superficie equipotenziale**.

c) Essendo la superficie del conduttore equipotenziale, il campo in un punto esterno molto vicino alla superficie è ortogonale alla superficie del conduttore, indipendentemente dalla forma di questo.

Il valore del campo elettrostatico si ricava dalla formula:

$$\vec{E}_1 - \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{a}_N$$

che espone la discontinuità subita dal campo nell'attraversare una superficie carica. Infatti, dato con \vec{E}_2 il campo all'interno del conduttore e con \vec{E}_1 il campo all'esterno del conduttore si ha

$$\vec{E}_1 = \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{a}_N \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{a}_N$$

Questo risultato è noto come **Teorema di Coulomb** (verso uscente se $\sigma > 0$, entrante se $\sigma < 0$)

Anche dalla formula si osserva che il campo è **maggiore** dove è **maggiore** σ , e quest'ultimo è tanto più alto quanto più piccolo è il raggio di curvatura. Questo vuol dire che l'unica geometria a densità superficiale di carica costante è la sfera ($R = \text{cost}$) e il piano ($R = \infty \Rightarrow \text{cost}$).



Capacità di un conduttore isolato

La capacità C di un conduttore è definita come:

$$C = \frac{q}{V} \left[\frac{C}{V} \right] = \frac{\text{Coulomb}}{\text{Volt}} = \text{Farad [F]}$$

Contrariamente da quello che appare in formula, la capacità di un conduttore non dipende né dalla carica né dal potenziale, ma solo dalla

Nella sfera ($r=R$) si ha dunque:

$$V_{sf} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \Rightarrow C = \frac{q}{\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}} = 4\pi\epsilon_0 R$$

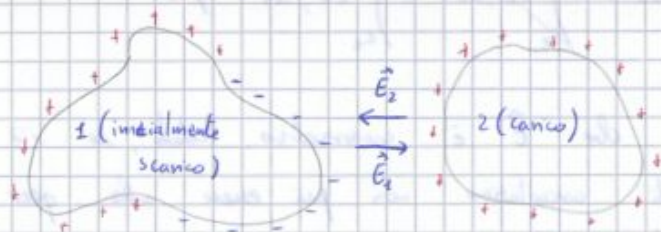
Per evidenziare come il Farad sia una unità di misura molto grande, proviamo a calcolare la capacità elettrica della Terra ($R=6,7 \cdot 10^6$ m). Dato il valore di $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$ si ha

$$C = 4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 6,7 \cdot 10^6 = 0,74 \cdot 10^{-3} F = 0,74 \text{ mF}$$

$$[\epsilon_0] = \frac{\text{Capacità}}{\text{lunghezza}} = \frac{F}{m}$$

Induzione elettrostatica con due conduttori

Avvicinando un conduttore, carico o scarico, ad un altro corpo carico, ovvero introducendo in un campo elettrico \vec{E}_1 , il campo elettrico all'interno non sarebbe più nullo, ma sarebbe dato da \vec{E} . In realtà quel che si verifica è ben diverso da quanto detto, questo a causa del fenomeno di **induzione elettrostatica**: l'avvicinamento di un corpo carico ad uno, carico o scarico, provoca un movimento di elettroni e, sulla superficie del conduttore compare una carica, se prima era scarico, o viene modificata la distribuzione di carica superficiale, se prima era carico, con il risultato di generare un nuovo campo elettrostatico \vec{E}_2 che va a compensare quello di prima, cosicché la somma dei due campi dà, ovunque valore nullo. Le cariche, quindi si ridistribuiscono, instaurando l'equilibrio.



$$\Sigma \text{cariche indotte} = 0$$

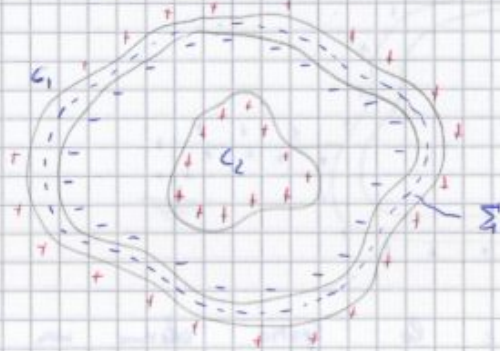
$$E_2 + E_1 = 0 \text{ (in ogni punto di 1)}$$

In totale, dunque, la carica indotta non varia. Inoltre la **distribuzione di equilibrio** che si ha sul conduttore 1 è unica.

Nel caso in cui i due conduttori vengano a contatto si costituisce un **unico corpo conduttore**: sparisce così il fenomeno di induzione e le cariche si distribuiscono su entrambi i conduttori in modo tale da garantire la condizione $E=0$. Inoltre i 2 conduttori, a contatto, si portano **allo stesso potenziale V**.

In conclusione possiamo dire che la carica di un conduttore in equilibrio si distribuisce sempre e soltanto sulla superficie esterna, anche se il conduttore è cavo, il campo elettrostatico è nullo e il potenziale in ogni punto interno è uguale al potenziale del conduttore. Resta inalterata la capacità del conduttore anche se questo è cavo.

Consideriamo ora un conduttore C_1 cavo, isolato e privo di carica e introduciamo un altro conduttore C_2 carico nella cavità, mantenendolo staccato da C_1 .



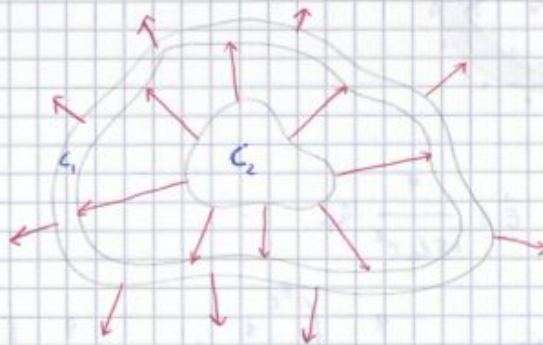
C_1 = inizialmente scarico

C_2 = carico

Per il fenomeno di induzione, sulla superficie interna di C_1 si vengono a formare delle cariche negative, cariche che, essendo il conduttore C_1 neutro, sono bilanciate dalle cariche positive che si sistemano all'esterno del conduttore C_1 .

Tale fatto si spiega con la legge di Gauss applicata su superficie Σ interna a C_1 e contenente la cavità, il flusso di \vec{E} è nullo in quanto è nullo il campo stesso. Di conseguenza all'interno di Σ non c'è carica e se C_2 porta la carica positiva, sulla superficie interna di C_1 deve comparire una carica negativa.

Questo fatto rende il caso di induzione elettrostatica completa, in cui tutte le linee di forza che partono da C_2 terminano su C_1 .



Notiamo che fissato il valore q della carica portata dal conduttore interno C_2 , all'esterno l'effetto è sempre lo stesso, qualunque sia la forma e la posizione di tale conduttore, infatti la distribuzione esterna delle cariche è una sola e dipende solo ed esclusivamente dalla forma esterna di C_1 .

L'unico modo per far passare le informazioni di ciò che c'è all'interno, alla parte esterna del conduttore, è quello di utilizzare un campo che penetri nel

$$C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{q}{\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right)} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

Il che dimostra, ancora un volta, che la capacità di un conduttore dipende dalla geometria del sistema e non dalla carica.

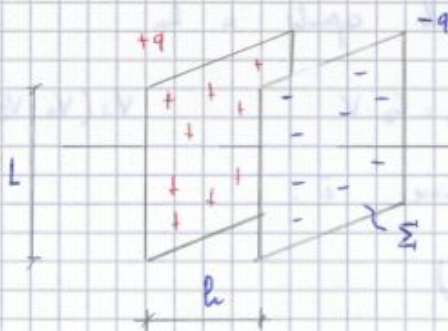
I Condensatori

Un sistema costituito da due conduttori tra i quali c'è induzione completa si chiama condensatore, e i due conduttori prendono il nome di **armature del condensatore**. Il rapporto tra il valore assoluto della carica presente su una delle armature e la d.d.p. su ciascuna **capacità del condensatore**. La formula

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} \quad ; \quad q = C(V_1 - V_2) \quad ; \quad V_1 - V_2 = \frac{q}{C}$$

Validiamo, ad esempio, la capacità di un **condensatore piano**, cioè di un condensatore costituito da due conduttori piani paralleli, di area Σ e distanti h . La carica positiva $+q$ è distribuita con densità uniforme pari a σ sull'armatura positiva e quella negativa $-q$ con densità $-\sigma$ sull'armatura negativa. Con i risultati già ottenuti negli esempi precedenti abbiamo che

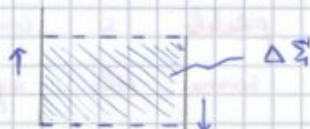
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{\sigma \Sigma}{\frac{\sigma}{\epsilon_0} h} = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h} \Rightarrow C = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h}$$



$h \ll L$ (se non soddisfa no condensatore)

$$V_1 - V_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (x_1 - x_2) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot h$$

Come si osserva anche dalla formula, la capacità del condensatore dipende dalla superficie di sovrapposizione Σ , variando questa varia anche la capacità del condensatore. In commercio esistono dei condensatori cosiddetti a **capacità variabile** in cui le armature possono scorrere le une rispetto alle altre, variando la capacità totale del condensatore



Notiamo inoltre che, per i condensatori in parallelo vale sempre l'espressione 24

$$C_{eq} > C_i \quad i \geq 1$$

Collegamento in serie

Nel collegamento in serie c'è un solo collegamento tra i due condensatori, in quanto una delle armature è in comune con l'altro condensatore.

In questo modo viene costituito un sistema composto da 3 conduttori: ai due estremi si applica la d.d.p. $V = V_A - V_C$, mentre il conduttore intermedio assume il potenziale $V' = V_B - V_C$



Se l'armatura superiore del condensatore C_1 è carica positivamente, con potenziale V_A , l'armatura ad essa affiancata vedrà comparsi delle cariche negative per induzione, mentre sull'armatura ad essa collegata, dovendo essere il conduttore centrale neutro, compariranno invariante delle cariche positive, a bilanciare le negative di prima. Sempre per induzione, sull'armatura inferiore del condensatore C_2 , compariranno delle cariche negative a potenziale V_C .

In questo modo le cariche dei condensatori sono le stesse.

Sommiamo ora i potenziali così definiti

$$V_A - \cancel{V_B} + \cancel{V_B} - V_C = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} \Rightarrow V_A - V_C = q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

Pertanto l'inverso della capacità equivalente del sistema è la somma degli inversi delle capacità dei singoli condensatori.

In questo caso vale la relazione

$$C_{eq} < C_i \quad i \geq 1$$

Questa formula vede la formula contiene solo informazioni riguardanti la carica trasportata e la capacità del condensatore, e non contiene informazioni riguardanti il processo effettivo.

Questo lavoro, effettuato contro la forza elettrostatica, viene immagazzinato nel sistema sotto forma di **energia (potenziale) elettrostatica**. Partendo che all'inizio $U_{e,ini} = 0$, in quello non ci sono cariche e $q=0$, si ha

$$W = U_{e,finale} - U_{e,inizi} \Rightarrow U_{e,fin} = -W \Rightarrow U_e = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C}$$

formula che può anche essere scritta come:

$$U_e = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} q V$$

Note: il segno meno indica che il lavoro viene visto dal sistema come un lavoro subito, mentre prima era un lavoro svolto dall'esterno.

Possiamo ora trovare un'espressione alternativa dell'energia, legata al campo prodotto dal sistema di cariche, piuttosto che dalle sorgenti del campo stesso.

Consideriamo un condensatore piano e calcoliamo l'energia elettrostatica:



$$C = \frac{\epsilon_0 S}{h}$$

$$U_e = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\sigma S)^2}{\frac{\epsilon_0 S}{h}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma^2 S^2}{\epsilon_0 S} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma^2}{\epsilon_0} \cdot S h \cdot \epsilon_0$$

E^2 (volume)

$$U_e = \frac{1}{2} E^2 V \epsilon_0$$

A questo punto possiamo calcolare la cosiddetta **densità di energia elettrostatica** u_e data da:

$$u_e = \frac{U_e}{V} = \frac{1}{2} E^2 \epsilon_0 \quad \left[\frac{J}{m^3} \right]$$

La generalità di questa formula, in cui l'unico elemento caratteristico che compare è il valore del campo e il mezzo, ci suggerisce di poterla applicare a qualsiasi situazione.

Portando il campo elettrico viene ridotto dello stesso valore della costante K .

La variazione del campo elettrico dovuta alla presenza dell'isolante è data da

$$E_0 - E_K = \frac{Q_0}{\epsilon_0} - \frac{Q_0}{K\epsilon_0} = \frac{Q_0}{\epsilon_0} \left(\frac{K-1}{K} \right) \Rightarrow E_0 - E_K = \frac{K-1}{K} \frac{Q_0}{\epsilon_0}$$

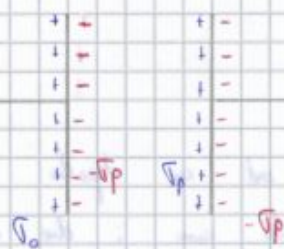
In cui il valore: $X = K-1$

viene detta **susultivita' elettrica del dielettrico**. Per il campo elettrico nel dielettrico possiamo scrivere

$$E_K = E_0 - \frac{Q_0}{\epsilon_0} \left(\frac{K-1}{K} \right) = \frac{Q_0}{\epsilon_0} - \frac{Q_p}{\epsilon_0} \Rightarrow E_K = \frac{Q_0}{\epsilon_0} - \frac{Q_p}{\epsilon_0}$$

\downarrow
 densità di carica per unità di superficie
 in quanto $\frac{K-1}{K}$ è un numero puro

Dove il segno meno indica che il segno delle cariche è opposto. Tale formula mostra come il campo E_K sia formato da 2 contributi: uno dovuto alle cariche libere sulle armature ed uno dovuto alle cariche sulle facce del dielettrico dette **cariche di polarizzazione**



La capacità del condensatore pieno di dielettrico è data da

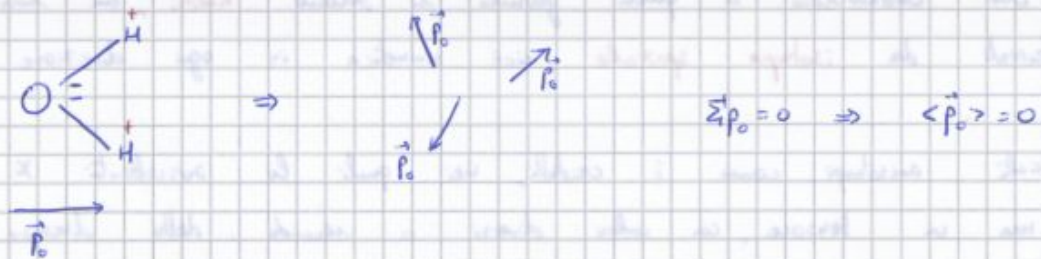
$$C_K = \frac{Q_0}{V_K} = K \cdot \frac{Q_0}{V_0} = K \cdot C_0 \Rightarrow C_K = K \cdot C_0$$

ossia aumentata dello stesso fattore K di cui è diminuita la d.d.p. ai capi del condensatore, in accordo con il fatto che la carica è rimasta costante.

Tale relazione è di carattere generale e vale qualunque sia la forma del condensatore, pertanto, tutte le formule fino ad ora descritte in cui compare il valore ϵ_0 possono avere inteso il caso in cui le cariche, invece che essere nel vuoto, si trovano in un dielettrico, basta infatti effettuare

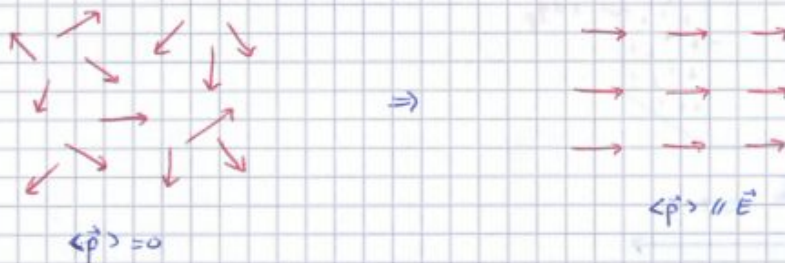
Polareizzazione per orientamento

Esistono delle sostanze le cui molecole presentano un momento di dipolo intrinseco, dovuto alla geometria spaziale della molecola e dalla differenza di elettronegatività degli elementi che la costituiscono. Ad esempio, la molecola dell'acqua ha un momento di dipolo proprio, dovuto al fatto che il centro delle cariche positive e delle cariche negative non coincide, in quanto le cariche negative vengono a localizzarsi principalmente in prossimità dell'atomo di ossigeno, lasciando le cariche positive vicine agli atomi di idrogeno. Tutte le molecole dell'acqua presentano questa configurazione, che diventa tanto più ordinata quanto più bassa è la temperatura. In ogni caso, però, la somma di tutti questi vettori dipolari orientati casualmente dà, come risultato, zero.



Questo meccanismo, che porta il nome di polareizzazione per orientamento, porta al risultato che ogni molecola acquista un momento di dipolo elettrico medio $\langle \vec{p} \rangle$ macroscopico e parallelo al campo \vec{E} .

In fatti, se introduciamo un campo elettrico \vec{E} , tutti i dipoli intrinseci si orientano nel verso di \vec{E} , però, in questo caso, l'agitazione termica scombinate il tutto finché, giunti all'equilibrio un certo numero di dipoli sarà allineato ed un certo numero no



Indicando con N il n° di dipoli totali, con N_1 il n° di dipoli orientati e con N_2 il numero di dipoli disorientati, si avrà

$$\langle \vec{p}_0 \rangle < N \vec{p}_0 \quad \text{e} \quad \vec{p} = N_1 \langle \vec{p}_1 \rangle$$

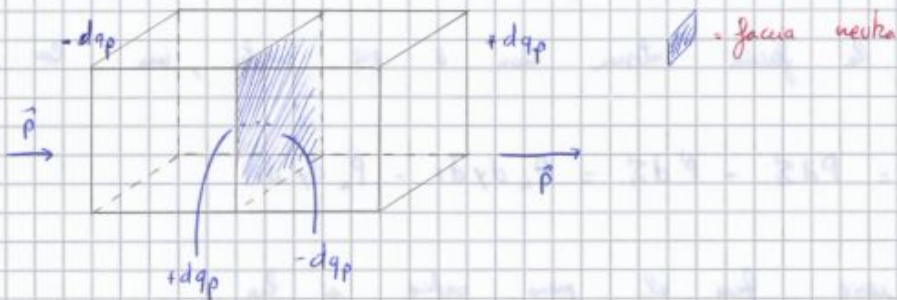
$$P d\vec{\Sigma} d\ell = dq_p d\ell \Rightarrow P d\vec{\Sigma} = dq_p$$

↓

$$P = \frac{dq_p}{d\vec{\Sigma}} = \nabla_p$$

Questo risultato ci porta a dire che il fenomeno di polarizzazione può essere modellizzato considerando che, sulle facce del parallelepipedo, si localizzano le cariche come in un dipolo distante $d\ell$. Tale faccia del parallelepipedo presenta, inoltre, una densità di carica $\pm \nabla_p = \pm P$.

Se ora consideriamo due parallelepipedo consecutivi con una base in comune e se \vec{P} è costante, la carica $+dq_p$ di un prisma si annulla con la carica $-dq_p$ dell'altro sulla base comune. Ripetendo l'operazione per tutti i prismi alla fine restano solo le cariche sulle basi dei prismi che appartengono alle facce della lastica.

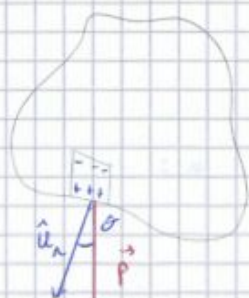


Questo risultato ci dice che le cariche di polarizzazione si trovano solo sulle superficie del dielettrico, mentre, all'interno di questo non vi sono cariche di polarizzazione, pertanto

$$\int_{\vec{\Sigma}_{dielettrico}} \nabla_p d\vec{\Sigma} = 0$$

La lastica quindi viene ad essere equivalente a due distribuzioni di carica, localizzate sulle facce, con densità $\pm \nabla_p = \pm P$.

Estendiamo ora il risultato ad un dielettrico di forma qualsiasi, sempre uniformemente polarizzato. In tal caso la densità superficiale ∇_p è data da



$$\nabla_p = \frac{dq_p}{d\vec{\Sigma}} = P \cdot \frac{d\vec{\Sigma}_0}{d\vec{\Sigma}} = P \cos \theta = \langle \vec{P}, \hat{u}_n \rangle$$

$$\nabla_p = \langle \vec{P}, \hat{u}_n \rangle$$

dove $d\vec{\Sigma}_0$ = proiezione di superficie $\perp \vec{P} \Rightarrow d\vec{\Sigma}_0 = d\vec{\Sigma} \cos \theta$

Quindi in un dielettrico in cui la polarizzazione non sia uniforme, oltre alla densità superficiale σ_p , compare anche una densità spaziale di carica ρ_p eguale, in ogni punto, all'opposto della divergenza del vettore \vec{P} .
 Pertanto se considero \vec{P} , che è una grandezza macroscopica, ciò cosa succede a livello microscopico all'interno del dielettrico

Lezione 7 22-10-2012

Esercizio con applicazione delle formule sulla polarizzazione dei dielettrici

Abbiamo dunque visto che un dielettrico, in presenza di un campo elettrico \vec{E} si polarizza: nel caso in cui la polarizzazione sia uniforme, le cariche di polarizzazione compaiono solo sulla superficie del dielettrico, con una densità di carica data da

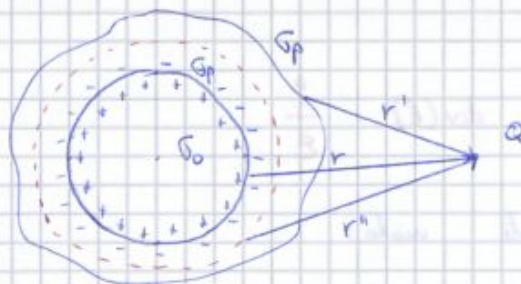
$$\sigma_p = \langle \vec{P}, \hat{u}_n \rangle = P \cos \theta \quad (\text{il segno di } \sigma_p \text{ varia a seconda del valore di } \theta)$$

mentre, nel caso in cui la polarizzazione non sia uniforme, oltre alle cariche superficiali del dielettrico, compaiono anche delle cariche di polarizzazione all'interno dello stesso, la cui densità di carica (volumica) è data da

$$\rho_p = -\text{div}(\vec{P})$$

Vediamo ora un'applicazione di queste due proprietà.

Ipoteziamo di voler calcolare il potenziale V nel punto Q di un sistema costituito da una sfera conduttrice carica positivamente, avvolta da un materiale dielettrico:



Devo tenere conto di tutte le cariche in gioco

$$V(Q) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma_{\text{cond}}} \frac{\sigma_0 d\vec{\alpha}}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma_{\text{die}}} \frac{\sigma_p d\vec{\alpha}}{r'} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_{\text{die}}} \frac{\rho_p dV}{r''} \quad (\text{dielettrico qualsiasi})$$

che non ha alcun significato fisico, possiamo dire che

$$\operatorname{div}(\vec{D}) = \rho \quad \text{e} \quad \oint_{\Sigma} \langle \vec{D}, \hat{u}_n \rangle d\vec{s} = q = \Phi(\vec{D})$$

cioè che il flusso del vettore \vec{D} attraverso una qualsiasi superficie chiusa, contenuta, in generale, sia cariche libere che cariche di polarizzazione, dipende solo dalle cariche libere.

Tale risultato non è banale, in quanto, la superficie Σ scelta potrebbe intersecare un dielettrico, invece che contenerlo interamente, per cui la carica di polarizzazione all'interno di Σ non è nulla.

L'utilità di queste due formule riguardanti il vettore \vec{D} si può capire osservando che, di norma, le cariche che noi conosciamo sono quelle libere e non quelle di polarizzazione. È quindi possibile calcolare il vettore \vec{D} , da questo, nota la relazione tra \vec{E} e \vec{P} , si determina il campo elettrico e la polarizzazione e da queste la densità di carica di polarizzazione.

Nello spazio privo di cariche libere, come può essere lo spazio tra conduttori carichi riempito da un dielettrico, le formule diventano

$$\operatorname{div}(\vec{D}) = 0 \quad \text{e} \quad \oint \langle \vec{D}, \hat{u}_n \rangle d\vec{s} = 0$$

che si dicono che in assenza di cariche libere il campo vettoriale \vec{D} è solenooidale.

Dielettrici isotropi e anisotropi:

Nel caso di dielettrico isotropo, \vec{P} ed \vec{E} sono paralleli e legati dalla relazione

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$$

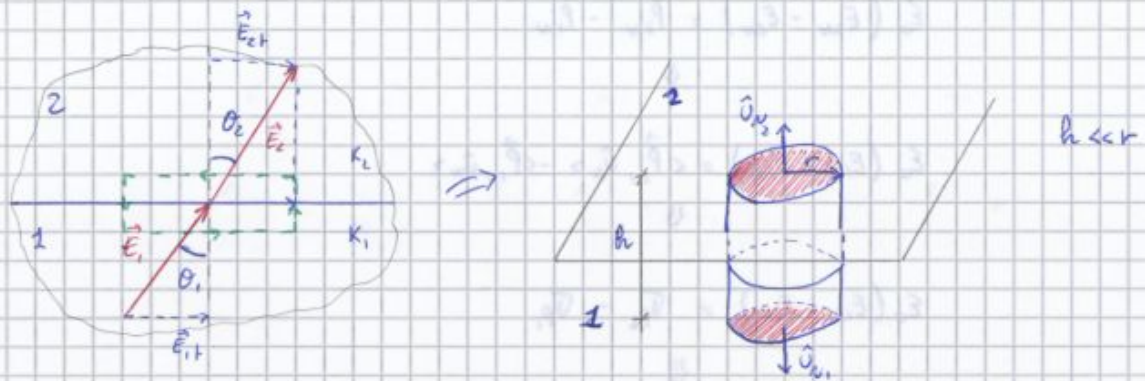
Inseriamo questa espressione nella definizione di \vec{D} :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi \vec{E} \Rightarrow \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} (1 + \chi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} K \Rightarrow \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

Quindi nel caso che in un dielettrico isotropo i vettori \vec{D} , \vec{P} ed \vec{E} sono paralleli tra loro e legati da relazioni in cui le proprietà del dielettrico sono espresse soltanto dalla costante dielettrica relativa K o dalla suscettività elettrica χ , infatti:

Prendiamo dunque due dielettrici, separati da una superficie Σ , e indichiamo con $k_1, \vec{E}_1, \vec{P}_1$ e \vec{D}_1 le proprietà del 1° dielettrico, e con $k_2, \vec{P}_2, \vec{E}_2$ e \vec{D}_2 le proprietà del secondo dielettrico



Dall'analisi fatta nel caso di attraversamento di una superficie carica, avevamo visto come la componente tangenziale \vec{E} rimane costante nel passaggio attraverso Σ , relazione che può essere scritta come

$$E_{1t} = E_2 \cdot \sin \theta_2 = E_2 \cdot \sin \theta_1 = E_{1t}$$

Applichiamo ora la legge di Gauss, considerando come superficie chiusa un cilindro di altezza h infinitesima, ortogonale a Σ e con le basi all'interno dei 2 dielettrici.

All'interno della superficie del cilindro non ci sono cariche libere, quindi $\phi(\vec{D}) = 0$. Effuiamo il calcolo:

$$d\phi = \langle \vec{D}_1, \hat{u}_1 \rangle d\vec{S}_1 + \langle \vec{D}_2, \hat{u}_2 \rangle d\vec{S}_2 + \langle \vec{D}, \hat{u}_{\text{lat}} \rangle d\vec{S}_{\text{lat}} = 0$$

\Downarrow

$$\langle \vec{D}_1, \hat{u}_1 \rangle d\vec{S}_1 - \langle \vec{D}_2, \hat{u}_2 \rangle d\vec{S}_2 = 0$$

\Downarrow

$$(D_{1n} - D_{2n}) d\vec{S} = 0$$

\Downarrow

$$D_{1n} = D_{2n}$$

Pertanto, nel passaggio attraverso Σ la componente normale di \vec{D} non varia. Esplicitando \vec{D} come da definizione si ottiene:

Rigidità dielettrica

Per ogni dielettrico esiste un valore limite del campo elettrico oltre il quale si produce una scarica attraverso il dielettrico, se il dielettrico è un solido, la scarica lo deteriora irreparabilmente.

Il massimo campo elettrico che un dielettrico può sopportare/sopportare prima della scarica prende il nome di rigidità dielettrica.

I valori dati di norma sono valori medi, in quanto, in ciascun dielettrico, la rigidità dipende dalla sua purezza e dalle caratteristiche superficiali delle armature (pulizia, lunghezza).

Energia elettrostatica nei dielettrici

Il ragionamento che ha portato a definire l'energia (potenziale) elettrostatica U_e in un condensatore piano carico, può essere ripetuto anche se lo spazio tra le armature è riempito da un dielettrico con costante K , con il seguente risultato

$$U_e = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C_K} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 V \quad V = \text{volume (valido se dielet. isotropo)}$$

Dividendo questo valore per il volume V (dato dal prodotto di h per la superficie di sovrapposizione S), si ottiene

$$u_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{D^2}{\epsilon} = \frac{1}{2} D E$$

che esprime la densità di energia elettrostatica

Nel caso di dielettrici anisotropi si ha

$$u_e = \frac{1}{2} \langle \vec{D}, \vec{E} \rangle$$

in cui si mette in evidenza il fatto che, in questo caso, \vec{D} ed \vec{E} non sono paralleli.

$$U_e = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C_K} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\int \sigma^2 dS}{K \epsilon_0} = \frac{1}{2} \frac{\int \sigma^2 dS \cdot h}{K \left(\frac{S}{\epsilon_0} \right)} = \frac{1}{2} \frac{\int \sigma^2 dS \cdot h}{K S \epsilon_0} = \frac{1}{2} \frac{\int \sigma^2}{\epsilon} \frac{h}{S} \frac{\epsilon}{\epsilon} = \frac{1}{2} \frac{\int \sigma^2}{\epsilon^2} V \epsilon$$

$$U_e = \frac{1}{2} \epsilon^2 V E \quad \text{C.V.D}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V = E_2 \left(\frac{K_2 d_1 + K_1 d_2}{K_1} \right) \\ E_1 = \frac{V K_2}{K_2 d_2 + K_1 d_1} \\ E_2 = \frac{V K_1}{K_2 d_1 + K_1 d_2} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} \vec{E}_1 = \frac{V K_2}{K_1 d_2 + K_2 d_1} \hat{u}_N \\ \vec{E}_2 = \frac{V K_1}{K_1 d_2 + K_2 d_1} \hat{u}_N \end{array}$$

Il condensatore può essere considerato come un serie di due condensatori uno avente come dielettrico il primo dielettrico, l'altro avente come dielettrico il secondo dielettrico. E come se, all'interfaccia tra i due dielettrici, ci fosse un'armatura che fa da armatura a due condensatori.

La capacità equivalente, dunque, vale:

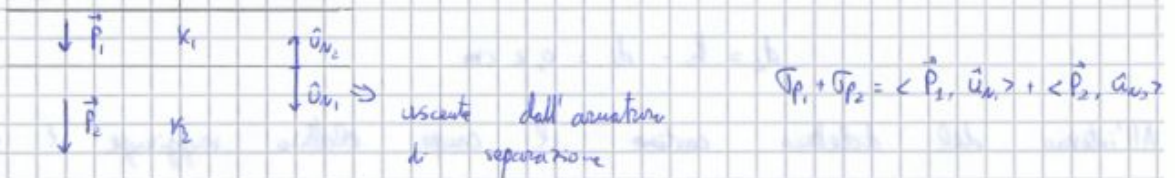
$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d_1}{\epsilon_0 K_1 S} + \frac{d_2}{\epsilon_0 K_2 S} = \frac{1}{\epsilon_0 S} \left(\frac{d_1}{K_1} + \frac{d_2}{K_2} \right) = \frac{1}{\epsilon_0 S} \left(\frac{d_1 K_2 + d_2 K_1}{K_1 K_2} \right) \Rightarrow$$

$$C_{eq} = \frac{\epsilon_0 K_1 K_2 S}{d_1 K_2 + d_2 K_1}$$

La carica sulle armature vale

$$q = C_{eq} \cdot V \Rightarrow q = \frac{\epsilon_0 K_1 K_2 S V}{K_2 d_1 + K_1 d_2}$$

La polarizzazione è uniforme, pertanto non vi sono cariche di polarizzazione all'interno del dielettrico ($\rho_p = 0$).



$$\vec{\sigma}_{p_1} = \langle \vec{P}_1, \hat{u}_N \rangle = P_{1N} = \epsilon_0 \chi_1 E_1 = \epsilon_0 (K_1 - 1) E_1 \Rightarrow \vec{\sigma}_{p_1} = \epsilon_0 (K_1 - 1) E_1$$

$$\vec{\sigma}_{p_2} = \langle \vec{P}_2, \hat{u}_N \rangle = P_{2N} = \epsilon_0 \chi_2 E_2 = \epsilon_0 (K_2 - 1) E_2 \Rightarrow \vec{\sigma}_{p_2} = \epsilon_0 (K_2 - 1) E_2$$

in questo modo il campo elettrico nel secondo dielettrico vale

$$E = \frac{V}{d_2} = 6 \cdot 10^6 \text{ V/m}$$

inferiore alla rigidità elettrica del conduttore. In questo caso il condensatore è ancora funzionante.

Nel caso in cui i dielettrici fossero stati disposti nel seguente modo:



Il condensatore potrà essere considerato come due condensatori collegati in parallelo.

Materiali piezoelettrici

Esistono alcuni solidi, come il quarzo, i quali, sottoposti ad uno sforzo di compressione o trazione presentano una polarizzazione, che non hanno in assenza di azioni meccaniche, e quindi generano un campo elettrico. Tali sostanze prendono il nome di materiali piezoelettrici e hanno numerose applicazioni, tra queste vi è il sismografo piezoelettrico.

Questo strumento viene utilizzato per misurare i movimenti della crosta terrestre in caso di sisma. Esso è costituito da una scatola metallica all'interno della quale si trova una massa sismica, di materiale conduttore, e due materiali piezoelettrici, con gli elettrodi a contatto, disposti a poli opposti.

Questo pacchetto viene tenuto compresso da una molla di acciaio, anch'essa di materiale conduttore. Se il sistema è disposto in verticale, sarà in grado di misurare le accelerazioni dei movimenti sismici in verticale. Infatti, in assenza di movimenti tellurici, i cristalli sono in equilibrio, pertanto la d.d.p. che si misura con la polarizzazione dei cristalli resta costante.

Nel momento in cui si verifica un movimento verticale i cristalli si schiacciano o si distanziano, variando la loro polarizzazione e dunque la loro d.d.p.

Tale variazione verrà misurata e amplificata da un amplificatore di carica il quale, collegato con opportuni shunt, rappresenta graficamente il movimento registrato e lo ha da un'intensità.

Se si mettono a contatto due conduttori C_1 e C_2 isolati, a potenziali V_1 e V_2 diversi, dopo un breve lasso di tempo i due corpi si porteranno in una condizione di equilibrio, cioè allo stesso potenziale V . In tale processo gli elettroni passano dal corpo a potenziale minore a quello a potenziale maggiore sotto l'effetto del campo elettrico \vec{E} dovuto alla differenza di potenziale ΔV . Questo moto ordinato di elettroni in una certa direzione costituisce una **corrente elettrica** e il fenomeno è un esempio di **conduzione elettrica**.

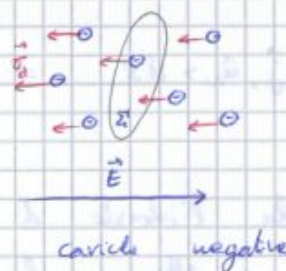
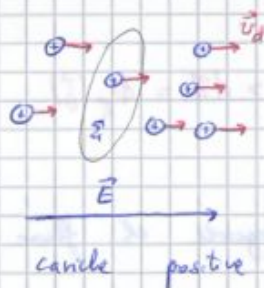
In questo caso il fenomeno ha una durata brevissima (gli elettroni si muovono con una velocità dell'ordine della velocità della luce), pertanto non può essere studiato in maniera opportuna.

È dunque necessario disporre di un dispositivo in grado di mantenere una differenza di potenziale: in questo modo il flusso di elettroni può durare per molto tempo e quindi, nel conduttore si instaura una corrente elettrica stabile, in un regime di equilibrio dinamico e non più elettrostatico.

Un qualunque dispositivo con questa proprietà viene detto **generatore di forza elettromotrice** (es. pila).

Corrente elettrica

Supponiamo che in una certa regione di un conduttore ci siano n_+ portatori di carica $+e$ per unità di volume e che agisca un campo elettrico \vec{E} generato da un generatore di f.e.m. I portatori si muovono sotto l'azione della forza elettrica $\vec{F} = e\vec{E}$, dando origine ad una corrente elettrica, e indicano con \vec{v}_d la loro velocità detta **velocità di deriva** (coerente ad \vec{E} se le cariche sono positive, divergente ad \vec{E} se le cariche sono negative).



Consideriamo una superficie Σ tracciata all'interno del conduttore; detta Δq la carica che passa attraverso Σ nel tempo Δt , si definisce **intensità di corrente** i la grandezza

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$$

$$[i] = \frac{C}{s} = A \text{ (Ampère)}$$

Pertanto la densità di carica è la corrente che attraversa l'unità V di superficie perpendicolare alla direzione del moto delle cariche

Lezione 9 29-10-2012

... continua su corrente elettrica

Se, come nel caso dei conduttori metallici, i portatori di carica sono negativi, fissata la direzione ed il verso di \vec{E} , la velocità di deriva \vec{v}_d è diretta in verso opposto rispetto al campo elettrico. Il vettore $-e\vec{v}_d$ ha, invece, lo stesso verso di \vec{E} e la densità di corrente è data da:

$$\vec{j} = -n_e e \vec{v}_d$$

parallela e concorde al campo elettrico (n_e indica il n° di portatori di carica negativi).

Se, come nel caso delle soluzioni elettrolitiche, vi sono portatori di carica sia positivi, con velocità \vec{v}_+ , sia negativi, con velocità \vec{v}_- , la densità di corrente è data da:

$$\vec{j} = n_+ e \vec{v}_+ - n_- e \vec{v}_-$$

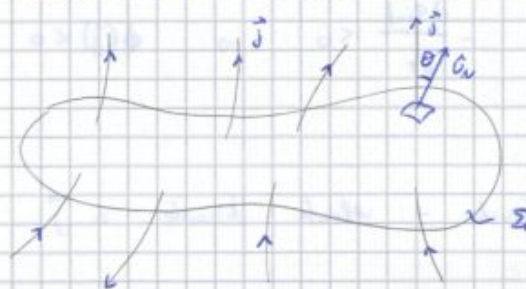
in cui entrambi i termini sono paralleli e concordi al campo elettrico.

Questo fatto che \vec{j} sia sempre parallelo e concorde ad \vec{E} deriva direttamente dalla definizione di \vec{j} come prodotto fra la carica per unità di volume per la velocità di deriva, e riflette la circostanza sperimentale secondo cui a livello macroscopico non è possibile correlare il verso della corrente elettrica con il segno dei portatori di carica.

Questo vuol dire che, fissata una certa d.d.p. gli stessi effetti si hanno sia se la conduttore è dovuto a cariche positive sia se è dovuto a cariche negative. Per convenzione, dunque, si assume come verso della corrente quello di moto delle cariche positive, ovvero quello che va dal potenziale maggiore a quello minore.

Legge di conservazione della carica. Regime di corrente stazionaria

Consideriamo una regione di spazio di volume V delimitata da una superficie Σ chiusa e orientiamo il versore normale alla superficie \hat{n} verso l'esterno



Cerchiamo ora di ricavare la forma locale del principio appena scritto.

La carica interna q_{int} può sempre essere scritta come:

$$q_{int} = \int_V \rho \, dV$$

Inoltre è sempre valido il teorema della divergenza per cui:

$$\oint_{\Sigma} \langle \vec{j}, \vec{a}_n \rangle \, d\vec{\Sigma} = \int_V \operatorname{div}(\vec{j}) \, dV$$

Inseriamo queste espressioni nell'equazione e otteniamo:

$$\oint_{\Sigma} \langle \vec{j}, \vec{a}_n \rangle \, d\vec{\Sigma} = - \frac{\partial q_{int}}{\partial t} \Rightarrow \int_V \operatorname{div}(\vec{j}) \, dV = - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, dV \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_V \operatorname{div}(\vec{j}) \, dV = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV \quad \begin{array}{l} \text{essendo il volume} \\ V \text{ lo stesso in lei:} \end{array} \Rightarrow \int_V \left(\operatorname{div}(\vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \, dV = 0$$

↓

$$\operatorname{div}(\vec{j}) = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Questa così ottenuta è detta **equazione di continuità della corrente elettrica** ed espone in modo dinamico la conservazione della carica elettrica.

Un caso particolare, molto diffuso nella pratica, si ha quando la carica contenuta all'interno della superficie non varia, per cui non si è né accumulata né perduta di carica; questo vuol dire che

$$\frac{\partial q_{int}}{\partial t} = 0 \quad (\text{regime stazionario})$$

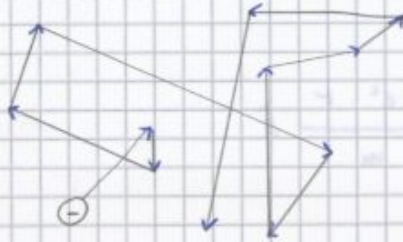
Tale risultato ha tutta una serie di conseguenze, infatti:

$$\Phi(\vec{j}) = 0 \quad ; \quad \operatorname{div}(\vec{j}) = 0 \quad ; \quad \vec{j} \text{ è solenoideale}$$

Queste relazioni valgono quindi nel caso in cui il sistema si trova in **regime stazionario**. (flusso uscente da Σ uguale al flusso entrante in Σ).

Nei loro moto disordinato gli elettroni subiscono continue interazioni con gli ioni, interazioni che chiamiamo urti: a seguito di ogni urto l'elettrone perde memoria di ciò che gli è successo in precedenza, cioè si "dimentica" di essere stato accelerato.

La traiettoria seguita dagli elettroni è perfettamente rettilinea, così che la traiettoria globale di ciascun elettrone è formata da una successione di segmenti rettilinei con lunghezza e direzioni variabili.



L'insieme delle traiettorie è completamente casuale e non si ha un flusso netto di carica, cioè un corrente, in nessuna direzione.

Si possono inoltre definire un libero cammino medio l tra due urti successivi e un tempo di libero cammino medio τ tra due urti successivi.

Le due grandezze sono legate dalla relazione

$$v_{th} = \frac{l}{\tau}$$

della velocità di agitazione termica posseduta anche in assenza di campo elettrico.

Applichiamo ora un campo elettrico \vec{E} : ciascun elettrone acquista un'accelerazione data da:

$$\vec{a} = \frac{F}{m} \Rightarrow \vec{a} = -\frac{e\vec{E}}{m}$$

Se consideriamo due urti successivi (i e $i+1$) la velocità $i+1$ che si ottiene è:

$$v_{i+1} = v_i - \frac{e\vec{E}}{m} \tau$$

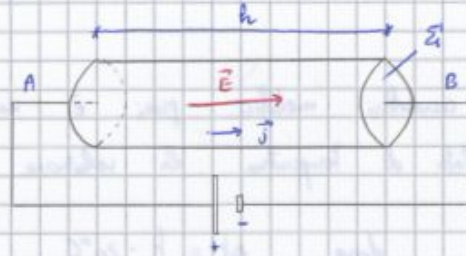
Mediante su tutti gli elettroni si ottiene

$$\langle v_{i+1} \rangle = \langle v_i \rangle - \left\langle \frac{e\vec{E}}{m} \tau \right\rangle \Rightarrow \vec{v}_d = -\frac{e\vec{E}}{m} \tau$$

Potrebbe, per effetto del campo elettrico \vec{E} ciascun elettrone viene a possedere una velocità v_d detta velocità di deriva nella stessa direzione del campo elettrico \vec{E} e proporzionale al campo elettrico stesso.

Legge di Ohm per i conduttori metallici. Resistenza elettrica

Applichiamo i risultati così ottenuti ad un conduttore metallico cilindrico di lunghezza h e sezione Σ . Ai capi del conduttore è applicata una differenza di potenziale $V = V_A - V_B$ per cui il conduttore è sede di un campo elettrico \vec{E} , parallelo all'asse del cilindro, ed è percorso da una densità di corrente elettrica \vec{j} .



$$\vec{j} = \sigma \vec{E} = \text{cost}$$

$$\vec{j} \perp \hat{u}_N$$

Il regime è stazionario, quindi l'intensità di corrente elettrica è costante nel conduttore. In base alle relazioni trovate prima abbiamo che:

$$V_A - V_B = \int_A^B \langle \vec{E}, d\vec{s} \rangle = \int_A^B \sigma \langle \vec{j}, d\vec{s} \rangle \Rightarrow V_A - V_B = \int_A^B \sigma j ds$$

$$V_A - V_B = \sigma j \int_A^B ds \Rightarrow V_A - V_B = \sigma j h \quad \text{sapendo che } j = \frac{i}{\Sigma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = V_A - V_B = \frac{\sigma \cdot h}{\Sigma} \cdot i \quad \text{dato con } R = \frac{\sigma \cdot h}{\Sigma} \quad \text{resistenza del conduttore}$$

↓

$$V_A - V_B = V = R \cdot i$$

Nota come legge di Ohm per i conduttori metallici

Se la sezione del conduttore è variabile, la resistenza R del conduttore è data da

$$R = \int_A^B \frac{\sigma}{\Sigma} dh \Rightarrow V = i \int_A^B \frac{\sigma dh}{\Sigma}$$

Pertanto in regime stazionario il rapporto tra la d.d.p. V applicata ai capi del conduttore e l'intensità di corrente che a seguito di ciò lo attraversa è pari ad una grandezza, detta resistenza del conduttore, che dipende solo dalla natura del conduttore (σ) e dalla sua geometria (h e Σ)

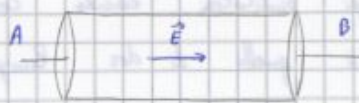
Lezione 10 31-10-2012

Potenza ed effetto Joule

Come abbiamo visto, tutti i materiali conduttori presentano un certo ostacolo al passaggio della corrente che abbiamo chiamata resistenza R .

Data la presenza della resistenza, per far passare della corrente elettrica attraverso un conduttore è necessario spendere un certo lavoro.

Consideriamo dunque una porzione di conduttore, attraversata da una corrente elettrica con intensità i , ai cui capi è applicata una differenza di potenziale $V = V_A - V_B$. Calcoliamo il lavoro speso:



$$dW = dq \cdot V \quad \text{ricordando che } i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dW = i dt \cdot V \quad \Rightarrow \quad W = \int_0^t i V dt \quad (\text{generale})$$

$$\text{in caso di regime stazionario } (i = \text{cost}) \Rightarrow \quad W = i V t$$

In termini di potenza si ha:

$$P = \frac{dW}{dt} = i V \quad \Rightarrow \quad P = i \cdot V = i^2 R = \frac{V^2}{R} \quad (\text{in regime ohmico})$$

Idem per il lavoro:

$$W = i V t = i^2 R t = \frac{V^2}{R} t \quad (\text{in regime ohmico})$$

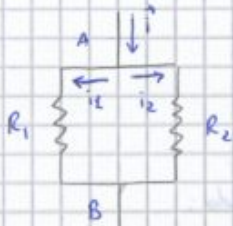
Ogni conduttore per cui vale la legge di Ohm, attraversato da una corrente in regime stazionario

Come abbiamo detto, questo lavoro serve per vincere la resistenza opposta dal reticolo cristallino al moto ordinato degli elettroni, e da un punto di vista termodinamico, esso viene assorbito dal conduttore aumentando la sua energia interna. Di conseguenza aumenta la temperatura del conduttore: se esso è isolato dall'ambiente esterno la temperatura aumenta fino a raggiungere il valore di fusione e il conduttore fonde, se invece il conduttore è a contatto termico con l'ambiente la temperatura cresce fino a che si raggiunge uno stato di equilibrio in cui l'energia interna non varia più e il lavoro elettrico viene ceduto all'ambiente sotto forma di calore.

Tale effetto di riscaldamento di un conduttore attraversato da una corrente elettrica prende il nome di **effetto Joule**, il quale non è sempre un male,

condotti diverse i_1 e i_2 se sono diverse le resistenze R_1 ed R_2

Applichiamo ora la legge di Ohm a due resistori in parallelo:



$$V_A - V_B = i_1 \cdot R_1$$

sapendo che $i = i_1 + i_2$ si ottiene

$$V_A - V_B = i_2 \cdot R_2$$

$$i_1 = \frac{V_A - V_B}{R_1}$$

$$i_2 = \frac{V_A - V_B}{R_2}$$

$$\Rightarrow i_1 + i_2 = i = (V_A - V_B) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \Rightarrow i = \frac{V_A - V_B}{R_{eq}}$$

Avendo posto: $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$

Risulta così che la resistenza equivalente di conduttori collegati in parallelo è sempre inferiore al valore di ciascuna delle resistenze in gioco.

La potenza spesa è:

$$P = R_1 \cdot i_1^2 + R_2 \cdot i_2^2 = R_1 \cdot \frac{V^2}{R_1^2} + \frac{V^2}{R_2^2} \cdot R_2 = V^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = V^2 / R_{eq} = i^2 R_{eq} = P_1 + P_2$$

Come anche per i conduttori, nei resistori collegati l'una verso l'altro i valori di resistenza tra i resistori sono simili tra loro alternati, nei collegamenti in serie prevale la resistenza maggiore, mentre in quelli in parallelo prevale la resistenza più piccola.

In termini microscopici, la potenza spesa dalla forza $\vec{F} = q\vec{E}$ per mantenere in moto la carica unitaria q con velocità \vec{v}_d è data da

$$P = \langle \vec{F}, \vec{v}_d \rangle = \langle q\vec{E}, \vec{v}_d \rangle = q \langle \vec{E}, \vec{v}_d \rangle$$

Per un canale la potenza spesa per unità di volume è:

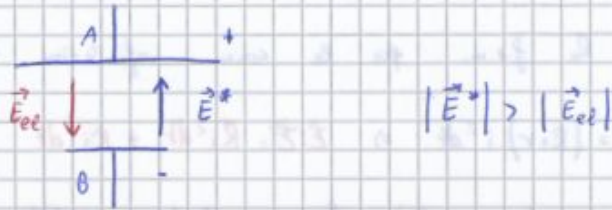
$$P_v = nq \langle \vec{E}, \vec{v}_d \rangle = \langle \vec{E}, nq\vec{v}_d \rangle = \langle \vec{E}, \vec{j} \rangle \Rightarrow P = \langle \vec{E}, \vec{j} \rangle$$

Tale formula vale anche se non si trovano in regime ohmico.

In caso di regime ohmico essa si semplifica come segue:

$$P_v = \langle \rho \vec{j}, \vec{j} \rangle = \rho j^2 \Rightarrow P_v = \rho j^2 = \sigma E^2$$

Nel calcolo della \mathcal{E} il primo termine fa riferimento al conduttore esterno, mentre il secondo termine riguarda ciò che succede all'interno del generatore.



Così si può vedere dalla figura, nel generatore, oltre al campo elettrostatico è presente anche un campo elettrostatico opposto al campo elettrostatico. Affinché si sia un moto delle cariche dal polo negativo a quello positivo è necessario che: $|\vec{E}^*| > |\vec{E}_{el}|$, in modo che risulti

$$\int_B^A \langle \vec{E}^*, \vec{E}_{el} \rangle, d\vec{s} > 0$$

Si come la corrente esterna che passa attraverso il conduttore esterno passa anche nel generatore dal polo B al polo A, definiamo una grandezza caratteristica del generatore detta resistenza interna r :

$$\int_A^B \langle \vec{E}^* + \vec{E}_{el} \rangle, d\vec{s} = r \cdot i$$

che estende la legge di Ohm all'interno del generatore. Poiché la r dipende da entrambi i campi \vec{E}^* ed \vec{E}_{el} .

Date queste informazioni possiamo scrivere:

$$\mathcal{E} = R \cdot i + r \cdot i = (R+r) \cdot i = R_t \cdot i \Rightarrow i = \frac{\mathcal{E}}{R+r}$$

la corrente che circola nel circuito è data dal rapporto tra la f.e.m. fornita dal generatore e la resistenza totale

Da tale espressione ricaviamo inoltre

$$V_A - V_B = R \cdot i = \mathcal{E} - r \cdot i$$

la d.d.p. misurata tra i poli A e B del generatore è minore della f.e.m. se nel circuito passa corrente

Di conseguenza quando $i=0$, si ha

$$V_A - V_B = \mathcal{E}$$

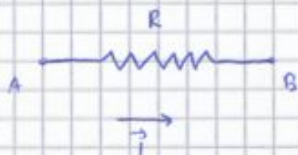
- se non ci sono generatori ($\sum_K \mathcal{E}_K = 0$) $\Rightarrow V_A - V_B = R \cdot i$

- se il circuito è chiuso ($V_A = V_B$) $\Rightarrow \sum_K \mathcal{E}_K = R_T \cdot i$

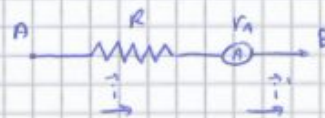


Strumenti di misura

Per misurare l'intensità di corrente i si usa un **amperometro** (o piccolo circuito detto **galvanometro**). Esso viene posizionato in prossimità del punto di "uscita" della corrente. Tuttavia anche l'amperometro ha una sua resistenza interna, per cui l'intensità di corrente misurata non è propriamente quella reale del circuito.



$$i = \frac{V_A - V_B}{R}$$



$$i' = \frac{V_A - V_B}{R + r_A}$$

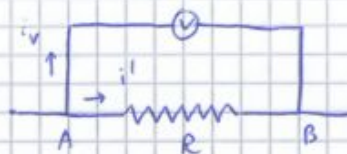
Dalle formule si vede chiaramente che, per ottenere valori di i accettabili è necessario disporre di un amperometro con una resistenza $r_A \ll R$, così che $i \approx i'$.

Per misurare la d.d.p. si usa il **voltmetro**, posizionato in parallelo (un estremo in prossimità di V_A ed uno in prossimità di V_B).

Anche in questo caso la d.d.p. misurata è leggermente diversa da quella reale.



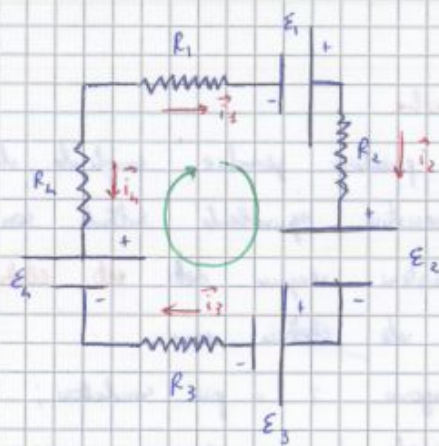
$$V_A - V_B = i \cdot R$$



$$i_V r_V = i' \cdot R$$

$$(V_A - V_B)' = i' \cdot R$$

In questo caso è necessario che la resistenza del voltmetro r_V sia molto maggiore di quella del circuito R , così che $i' \approx i$ (r_V molto alto perché deve far passare meno corrente possibile nel ramo del voltmetro).



Una volta scelta in maniera arbitraria il verso di percorrenza delle correnti (in questo caso lo si considera orario), possiamo scrivere la relazione

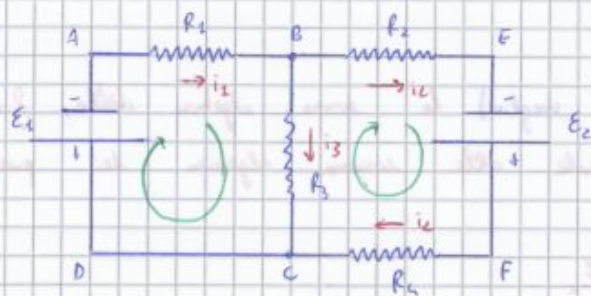
$$E_1 - E_2 - E_3 + E_4 = R_1 i_1 + R_2 i_2 + R_3 i_3 - R_4 i_4$$

Notiamo così che possiamo scrivere un'equazione per ognuna delle maglie individuate, tuttavia esse non sono sempre linearmente indipendenti. Affinché lo sia è necessario che le maglie scelte abbiano almeno un ramo che non appartiene a nessuna delle altre maglie scelte in precedenza.

Se alla fine dei calcoli otteniamo dei valori negativi, vuol dire che il verso ipotizzato è diverso da quello reale.

Esempio:

Data la rete elettrica in figura determinare l'intensità di corrente erogata da ciascun generatore e l'intensità di corrente attraverso ogni resistenza. Verificare il bilancio della potenza della rete (le resistenze interne dei generatori sono trascurabili).



$$E_1 = 18 \text{ V}$$

$$E_2 = 12 \text{ V}$$

$$R_1 = 12 \Omega$$

$$R_2 = 2 \Omega$$

$$R_3 = 6 \Omega$$

$$R_4 = 4 \Omega$$

$$i_1, i_2, i_3 = ?$$

$$\begin{cases}
 2 \text{ nodi} \Rightarrow 1 \text{ legge dei nodi} \\
 2 \text{ maglie} \Rightarrow 2 \text{ leggi delle maglie}
 \end{cases}
 \Rightarrow
 \begin{cases}
 -i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\
 -E_1 = R_1 i_1 + i_3 R_3 \\
 E_2 = i_2 (R_2 + R_4) - i_3 R_3
 \end{cases}
 \Rightarrow
 \begin{cases}
 i_1 = -0,8 \text{ A} \\
 i_2 = 0,6 \text{ A} \\
 i_3 = 1,4 \text{ A}
 \end{cases}$$

L'ipotesi fatta sul verso di scorrimento di i_1 è errata, poiché i_3 scorre in verso antiorario, dato vuol dire che:

In un istante generico t vale:

$$\mathcal{E} = V_R + V_C = Ri(t) + \frac{q(t)}{C} \quad ; \quad i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

Combiniamo le due equazioni ottenendo un'equazione differenziale risolubile per variabili separabili:

$$\mathcal{E} = \frac{q}{C} + R \cdot \frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{1}{R} \cdot dt = \frac{1}{\mathcal{E} - \frac{q}{C}} dq$$

Risoliamo integrando tra $t=0$ e t e tra $q=0$ e q .

$$\int_0^t \frac{1}{R} \cdot dt = \int_0^q \frac{1}{\mathcal{E} - \frac{q}{C}} dq \Rightarrow \frac{t}{R} = (-C) \left[\ln \left(\mathcal{E} - \frac{q}{C} \right) \right]_0^q \Rightarrow -\frac{t}{RC} = \ln \left(\frac{\mathcal{E} - \frac{q}{C}}{\mathcal{E}} \right)$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{\mathcal{E} - \frac{q}{C}}{\mathcal{E}} \Rightarrow q = C \cdot \mathcal{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

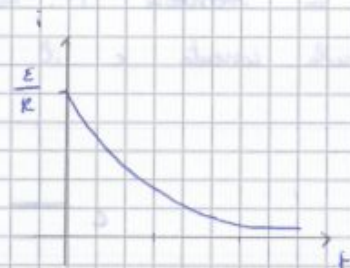
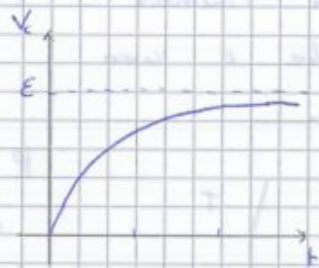
Dalle tre note relazioni tra q, V, i otteniamo

$$q(t) = C \cdot \mathcal{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \mathcal{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$V_R(t) = R \cdot i(t) = \mathcal{E} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$



Si osserva così che la corrente nel circuito è massima per $t=0$ e decresce esponenzialmente fino ad annullarsi per $t \rightarrow \infty$.

L'andamento temporale è regolato dalla costante di tempo $\tau = RC$. Se $t = \tau$, si

ha $e^{-1} \approx 0,37$, quindi il fattore di riduzione $1 - e^{-1} \approx \frac{1}{3}$, ciò vuol dire che:

trascorso un tempo $t = \tau$ la carica ha raggiunto un valore pari a circa $\frac{2}{3}$

del valore finale, mentre la corrente si è ridotta di circa $\frac{2}{3}$ del valore iniziale.

partendo in tempo pari a 3τ si può affermare come ultimato il transitorio.

In questo caso non è presente un generatore, pertanto

$$V_C + V_R = 0$$

si ha dunque

$$\frac{q}{C} + iR = \frac{q}{C} + R \frac{dq}{dt} = 0 \quad (V_C = \mathcal{E})$$

Risolviendo ottenendo

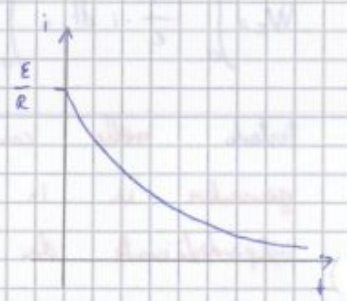
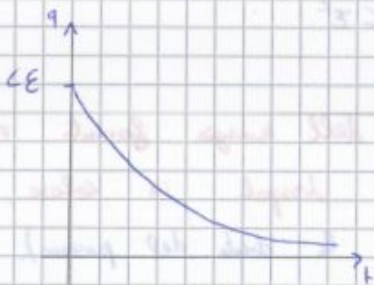
$$-\frac{q}{C} = R \frac{dq}{dt} \Rightarrow \int_0^t -\frac{dt}{RC} = \int_{q_0}^q \frac{dq}{q} \Rightarrow -\frac{t}{RC} = \ln\left(\frac{q}{q_0}\right) \Rightarrow e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{q}{q_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q = q_0 e^{-\frac{t}{RC}} = CE e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$V_C(t) = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} e^{-\frac{t}{RC}} = V_0 e^{-\frac{t}{RC}} = \mathcal{E} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -\frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow \text{il segno meno indica che la corrente scorre in verso opposto}$$

Nel processo di scarica non resta più energia: tutta l'energia elettrica viene dissipata per effetto Joule.



I circuiti così costituiti perdono il nome di circuiti RC e mostrano come avviene la carica e la scarica di un condensatore. Per la carica si vuole sempre un certo lasso di tempo perché è sempre presente la resistenza del circuito. Nel caso della scarica occorre sottolineare che, se questo avviene come descritto, cioè tramite un resistore, l'energia elettrostatica viene completamente persa.

In tutti i ragionamenti fatti finora abbiamo considerato $i(t)$ uguale in ogni sezione del circuito, soddisfacendo la condizione di stazionarietà. Questo vuol dire che intendiamo che il fenomeno di variazione sia abbastanza lento, per cui il tempo che impiegherebbe la luce ad attraversare il circuito è molto minore di τ .

Le due materie:

- nell' **elettrostatica** è sempre possibile isolare la carica, questo perché la materia, nella sua struttura intrinseca è formata da cariche elementari.

nel **magnetismo** non è possibile fare ciò, cioè non è possibile definire ed isolare il **monopolo magnetico**: i poli sembrano esistere sempre e solo a coppie di ugual valore e segno opposti e non è possibile separare i due poli tra di loro (come si dimostra l'esperimento della calamita spezzata).



Siccome la non isolabilità dei poli magnetici è confermata anche a livello atomico, siamo portati a supporre che atomi e molecole, come ulteriori proprietà intrinseche, abbiano anche un **momento di dipolo magnetico**.

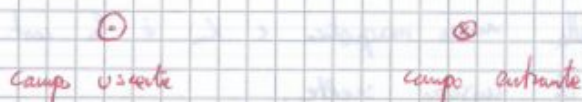
Un ago magnetico posto in prossimità di un filo attraversato da una corrente elettrica tende a disporsi secondo una posizione ben definita. Tale risultato si interpreta dicendo che la corrente che attraversa il filo produce un campo magnetico e che l'ago si orienta parallelamente a questo campo, definito in maniera diversa, punto per punto. In seguito Ampère osservò che due fili, attraversati da una corrente elettrica, erano soggetti ad una interazione reciproca. In sostanza, con il passare del tempo, si è arrivati alla conclusione che **campo elettrico e campo magnetico sono due facce della stessa medaglia**.

Linee di forza del campo magnetico e legge di Gauss

Una sistema di coriche in moto genera un campo magnetico \vec{B} , campo di natura vettoriale, ossia, per ogni punto, esso deve essere descritto indicando direzione, verso e modulo. In generale queste informazioni variano da punto a punto (**campo non uniforme**) e nel tempo (**campo non costante o non stazionario**).

Graficamente \vec{B} viene indicato tramite le sue linee di forza, con caratteristiche analoghe a quelle del campo \vec{E} .

Dato che spesso il campo avrà una direzione ortogonale al foglio, definiamo una convenzione:



Per definire la direzione del campo \vec{B} è sufficiente prendere un ago e dipolo nel