



**Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino**

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

**NUMERO: 878**

**DATA: 12/03/2014**

# **A P P U N T I**

**STUDENTE: Golisano**

**MATERIA: Fisica I**

**Prof. Penna**

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

Lezione 1 6/3/2012

Introduzione alla teoria degli errori

Analisi statistica dei dati

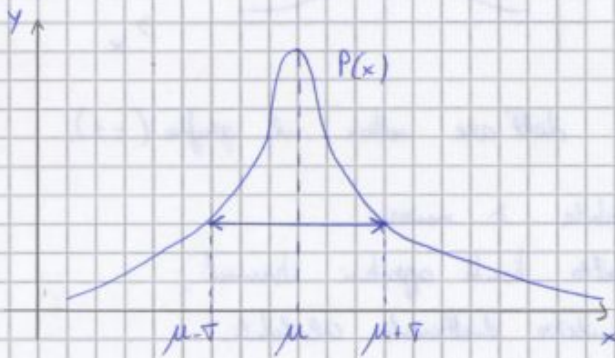
Durante la misurazione di oggetti fisici o di fenomeni fisici si commettono sempre degli errori, errori che non dipendono dall'inegligenza dell'operatore o dalla scorrettezza trascrizione dei dati, ma da fattori non prevedibili e, pertanto, casuali. Studiare dunque l'identikit di questi errori, che determina il più o meno grande distacco dalla misura reale, ci consente di fare ed ottenere la misura più precisa possibile del fenomeno. Per fare ciò, la teoria più comunemente adottata è quella sulla distribuzione probabilistica di Gauss, la cui espressione analitica è:

$$P(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$\sigma$  = varianza

$\sigma^2$  = scarto quadratico medio

$\mu$  = valore medio



\*  $P(x) \cdot \Delta x \approx$  [shaded box] indica la probabilità che la misurazione effettuata da ricadere in tale intervallo  $[x; \Delta x + x]$

\* dal teorema della media integrale  $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b x P(x) dx$

Pertanto detti con a e b gli estremi dell'intervallo, le probabilità P che la misura ricada in tale intervallo  $[a; b]$  sono date da:

$$P(a; b) = \int_a^b P(x) dx$$

A tal proposito, quanto vale  $P(-\infty; +\infty)$ ? vale 1. in quanto rappresenta la prob. totale

Da qui si ottengono due importanti risultati

Valore medio sperimentale

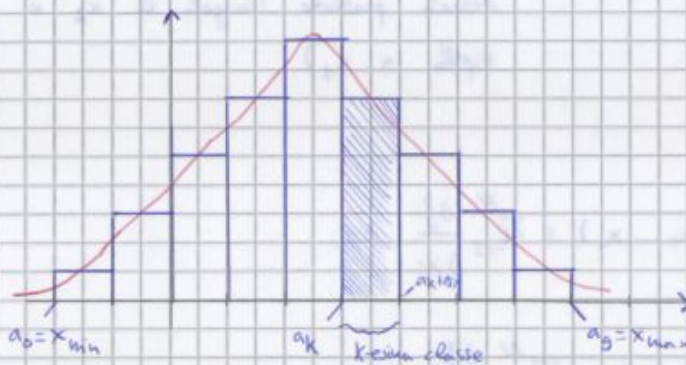
$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

Varianza sperimentale

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$

\*  $N-1$  indica che non posso fare i calcoli addebito una sola misura, in pratica però la formula funziona.

Idealmente per un numero di misurazioni  $N \gg 1$  ( $N \rightarrow +\infty$ ) si ottiene



$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{f_k}{\Delta x} \cdot \Delta x = \lim_{N \rightarrow \infty} f_k = \int_{a_k}^{a_k + \Delta x} P(x) dx$$

Il valore della funzione, dunque, quando  $N$  tende a  $\infty$ , tende al suo valore teorico, cioè si modella su una densità di probabilità gaussiana.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \mu$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 = \sigma^2 \quad x_{ke}?$$

Stima dell'errore che commetto nel valutare  $\mu$

Se effettuo un numero non troppo elevato di misurazioni posso calcolarmi  $\bar{x}$  e dire, in maniera approssimativa che l'errore commesso è pari a  $\pm s$ , pertanto la misura sarà data da  $\bar{x} \pm s$  dove  $s$ , solitamente rappresenta la sensibilità dello strumento.

Per dare però una stima più precisa dell'errore posso ragionare seguendo la seguente strada:

## Lezione 2 10/3/2012

### Cinematica del punto

La meccanica è un branca della fisica che si occupa dello studio del moto di un corpo: cerca cioè la relazione che esiste tra le caratteristiche di questo e ciò che l'ha determinato e la esprime tramite leggi qualitative.

Inizialmente ci occuperemo dello studio del moto del corpo più semplice: quello **puntiforme**, cioè quel corpo le cui dimensioni sono trascurabili rispetto allo spazio in cui può muoversi.

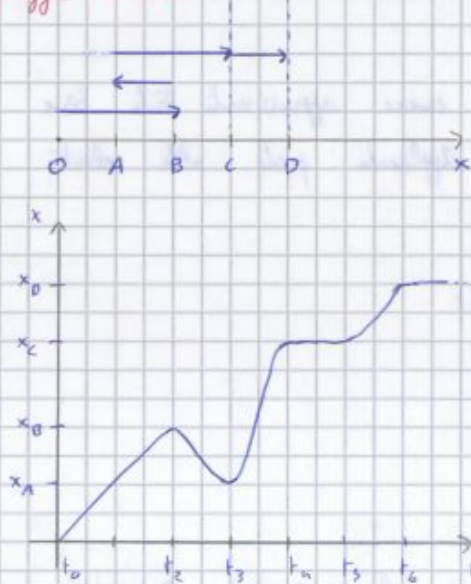
La meccanica, però, si divide in due rami: la **cinematica**, cerca le caratteristiche del moto senza chiedersi come è stato originato, e la **dinamica**, studia il perché del moto.

In tutto ciò è sempre opportuno fare riferimento ad un **sistema di riferimento** (solitamente cartesiano). È importante fare ciò perché, in generale, il sistema di riferimento non è inerte.

La **traiettoria** è l'insieme dei punti occupati successivamente dal punto in movimento.

Studiando la variazione di posizione lungo la traiettoria rispetto al tempo arriveremo a definire il concetto di **velocità**; analogamente osservando la variazione di velocità nel tempo si studierà l'**accelerazione**.

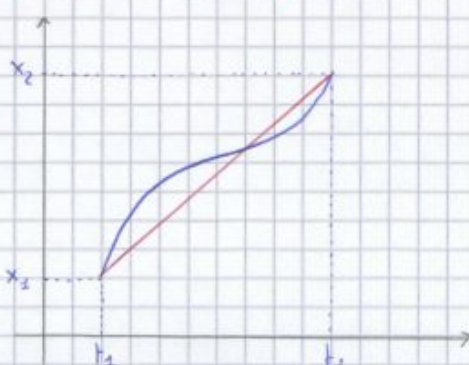
### Legge oraria



⇒ grafico che esprime gli spostamenti effettuati dal corpo

⇒ grafico della legge oraria che esprime il movimento del corpo nel tempo: **diagramma orario**

### Velocità media $v_m$



$$t_2 > t_1 \Rightarrow x = x_1$$

$$t = t_2 \Rightarrow x = x_2$$

$\Delta x = x_2 - x_1$  : intervallo percorso nel tempo  $\Delta t = t_2 - t_1$

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow \text{velocità media}$$

Se conosco  $v(t)$  posso ricavare la legge oraria  $x(t)$ ? 4

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \text{moto}$$

$$x(t) = ?$$

\*  $s$  indica il tempo, simbolo di uso a cura degli organi di integrazione

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_{t_0}^t v(s) ds = \int_{t_0}^t \frac{dx}{ds} ds \Rightarrow \int_{t_0}^t v(s) ds = [x(s)]_{t_0}^t$$

$$\int_{t_0}^t v(s) ds = x(t) - x(t_0) \Rightarrow x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t v(s) ds \quad (1)$$

$x(t_0) = x_0$  = posizione del corpo iniziale

$x(t) = x$  = posizione del corpo finale

$v(s)$  = velocità istantanea

La presenza del valore costante  $x_0$  dipende dalla risoluzione di un'equazione differenziale del primo ordine.

$\Delta x$  = spostamento complessivo e non spazio percorso

Esempio:  $v(t) = \text{costante} = v$

$$(1) \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(s) ds \Rightarrow x(t) = x_0 + v \int_{t_0}^t ds \Rightarrow x(t) = x_0 + v [s]_{t_0}^t \Rightarrow$$

$$x(t) = x_0 + v(t - t_0) \quad \text{moto uniforme}$$

Nel caso in cui  $t_0 = 0$  si avrebbe  $x(t) = x_0 + vt$ .

Il moto uniforme, dunque, è il moto di un punto materiale che percorre spazi uguali in tempi uguali, pertanto velocità istantanea, costante, coincide sempre con la velocità media.

$$\text{Dim: } x(t) = x_0 + v(t - t_0) \Rightarrow x(t) - x_0 = v(t - t_0) \Rightarrow \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = \frac{v(t - t_0)}{t - t_0}$$

$$v = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = v_m \quad \blacksquare$$

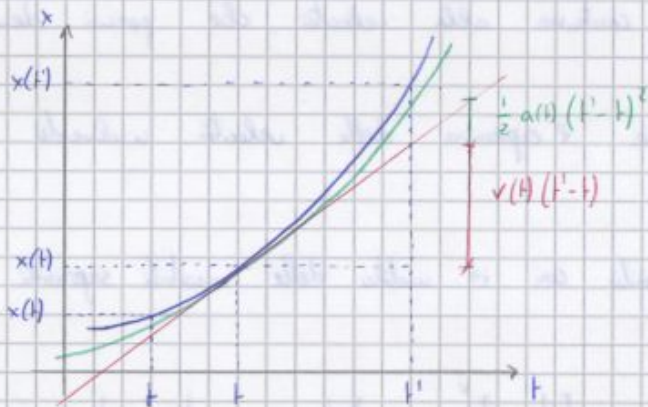
$$\Rightarrow x(t) = x_0 + v_0 \left[ s \right]_{t_0}^t + a \left[ \frac{1}{2} (s - t_0)^2 \right]_{t_0}^t \Rightarrow x(t) = x_0 + v_0 (t - t_0) + a \frac{1}{2} (t - t_0)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 + v_0 (t - t_0) + \frac{a}{2} (t - t_0)^2 \quad \text{legge oraria del moto uniformemente accelerato}$$

con  $t_0 = 0$  si ha  $x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a t^2$  (4)

Accelerazione istantanea e sviluppo di Taylor

$$x(t') = x(t) + \frac{dx}{dt} (t' - t) + \frac{1}{2} \frac{d^2x}{dt^2} (t' - t)^2 + \dots$$



$$t_2 = t_0 : v_2 = v(t_2) = v_0, \quad x_2 = x(t_2) = x_0$$

$$t_2 : v_2 = v(t_2), \quad x_2 = x(t_2)$$

Da (4)  $x(t) = x_0 + v_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} a (t - t_0)^2$  si ha che:

$$x_2 = x_1 + v_1 (t_2 - t_1) + \frac{1}{2} a (t_2 - t_1)^2 \Rightarrow x_2 = x_1 + v_1 \cdot t_2 + \frac{1}{2} a t_2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2 - x_1 = t_2 (v_1 + \frac{1}{2} a t_2)$$

Da (3)  $v(t) = v_0 + a (t - t_0)$  si ha che

$$v_2 = v_1 + a (t_2 - t_1) \Rightarrow v_2 = v_1 + a t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{v_2 - v_1}{a}$$

Sostituendo si ottiene

$$x_2 - x_1 = v_1 \left( \frac{v_2 - v_1}{a} \right) + \frac{1}{2} a \left( \frac{v_2 - v_1}{a} \right)^2 \Rightarrow x_2 - x_1 = v_1 \left( \frac{v_2 - v_1}{a} \right) + \frac{1}{2} a \frac{(v_2 - v_1)^2}{a^2}$$

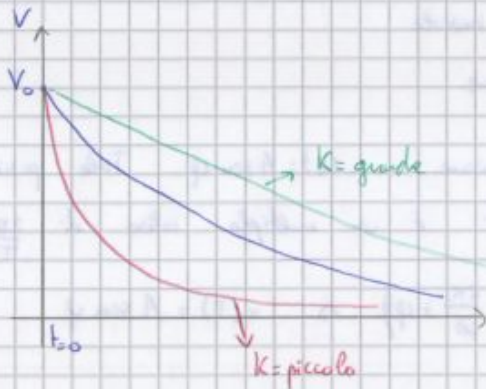
$$x(t) = x_0 + \frac{v_0}{k} (e^{-kt_0} - e^{-kt}) \quad \text{per } t_0 = 0 \text{ si ha:}$$

$$x(t) = x_0 + \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt}) \Rightarrow x(t) = x_0 + \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt}) \quad t_0 = 0 \quad \text{legge di carica}$$

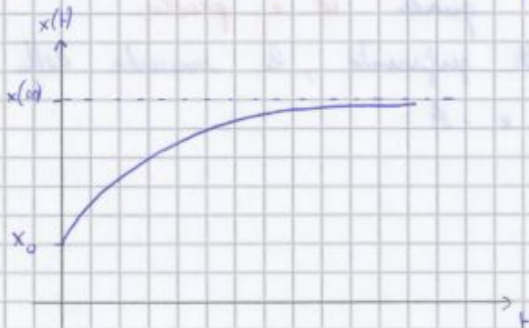
$$x(t) = x_0 + \frac{v_0}{k} (e^{-kt_0} - e^{-kt}) \quad t_0 \neq 0$$

La velocità con cui viene smorzata sia la velocità del corpo che la sua accelerazione dipende da  $k$ . Ponendo, ad esempio il tempo  $\tau = \frac{1}{k}$ , si ottiene uno smorzamento pari al fattore  $e^{-1} \approx 0,37$ .

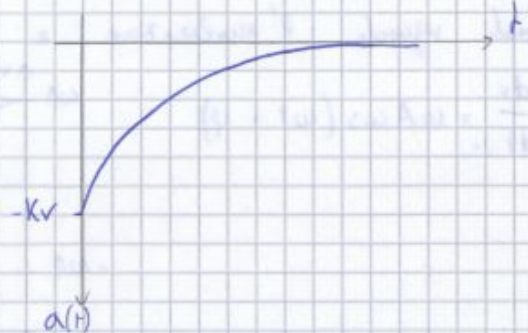
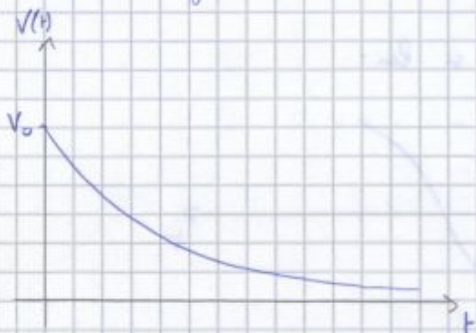
Graficamente si ha:



Se  $t \rightarrow \infty$  si ha  $x(t) = x_0 + \frac{v_0}{k}$ , potrei graficamente avere:



Per quanto riguarda l'accelerazione e la velocità rispetto al tempo i grafici saranno:





Qual'è l'equazione differenziale che caratterizza il moto armonico? 7

$$a(t) = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow a(t) = -\omega^2 x(t) \quad a(t) + \omega^2 x(t) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0$$

Relazione tra  $A$  e  $\varphi$  e le condizioni iniziali  $(x_0, v_0)$

$$x(0) = x_0 = A \sin \varphi$$

$$v(0) = v_0 = \omega A \cos \varphi$$

Come fisso  $\varphi$ ?

$$\frac{x_0}{v_0} = \frac{A \sin \varphi}{\omega A \cos \varphi} \Rightarrow \frac{x_0}{v_0} = \frac{\tan \varphi}{\omega} \Rightarrow \tan \varphi = \omega \frac{x_0}{v_0}$$

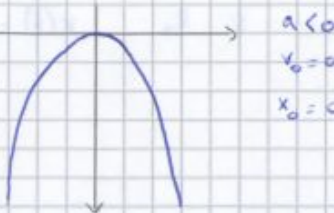
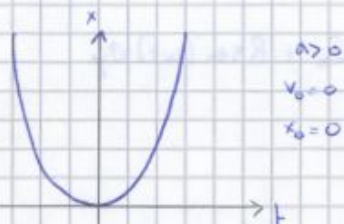
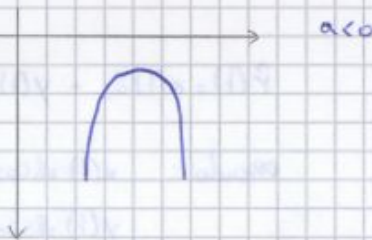
Come fisso  $A$ ?

$$A^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}$$

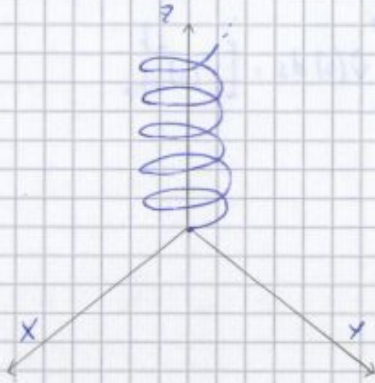
Moto uniformemente accelerati: discussione qualitativa

La legge oraria che esprime il moto uniformemente accelerato è la funzione di una parabola, pertanto, dalla sua rappresentazione grafica siamo in grado di capire una serie di nozioni sulla tipologia di moto:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad \text{con } t_0 = 0$$



### Moto elicoidale (esempio di moto 3D)



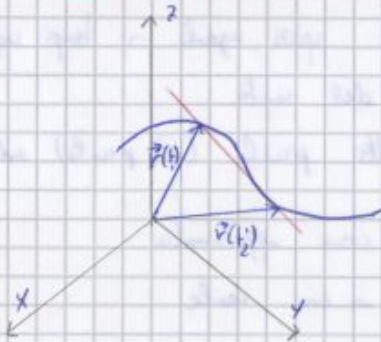
Combinazione di :- moto circolare piano (piano xy)  
- moto rettilineo (asse z)

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{e}_x + y(t)\hat{e}_y + z(t)\hat{e}_z$$

Esendo :  $x(t) = R\cos(\omega t)$   
 $y(t) = R\sin(\omega t)$   
 $z(t) = v_0 t$

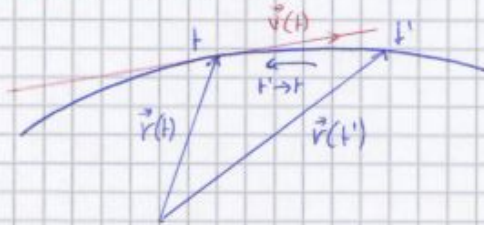
si ha  $\vec{v}(t) = R\omega\cos(\omega t)\hat{e}_x + R\omega\sin(\omega t)\hat{e}_y + v_0\hat{e}_z$

### Velocità media (in 3D)



$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

### Velocità istantanea



$t' > t$

$$\vec{v}_t = \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\vec{r}(t') - \vec{r}(t)}{t' - t}$$

Tale limite può essere scritto come somma di 3 limiti. Potuto essere:

$$\vec{r}(t) = x'\hat{e}_x + y'\hat{e}_y + z'\hat{e}_z$$

$$\vec{v}_t = \hat{e}_x \lim_{t' \rightarrow t} \frac{x' - x}{t' - t} + \hat{e}_y \lim_{t' \rightarrow t} \frac{y' - y}{t' - t} + \hat{e}_z \lim_{t' \rightarrow t} \frac{z' - z}{t' - t} =$$

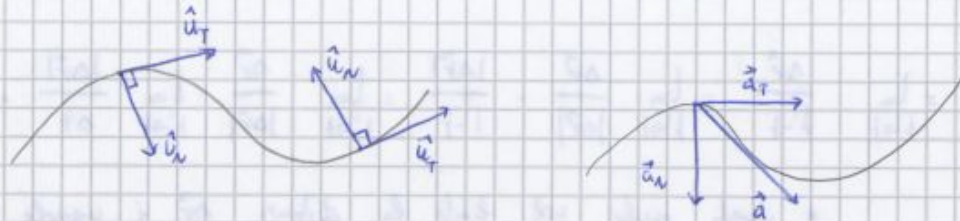
$$\vec{v}_t = \hat{e}_x \frac{dx}{dt} + \hat{e}_y \frac{dy}{dt} + \hat{e}_z \frac{dz}{dt} \Rightarrow \text{vettore velocità in 3D}$$

oppure

$$\vec{v}_t = \hat{e}_x v_x(t) + \hat{e}_y v_y(t) + \hat{e}_z v_z(t)$$

Per poter calcolare analiticamente queste due componenti dobbiamo, prima di tutto, stabilire un sistema di riferimento per ogni punto, sistema di riferimento caratterizzato dall'aver due vettori  $x$  e  $y$  ortogonali tra loro.

Facendo ciò sarà possibile calcolare le due componenti dell'accelerazione tramite la moltiplicazione tra uno scalare ed il vettore corrispondente.



$$\vec{a}_n = a_n \cdot \hat{u}_n \quad \vec{a}_t = a_t \cdot \hat{u}_t$$

È possibile a questo punto dimostrare che:

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R} \hat{u}_n + \frac{dv}{dt} \hat{u}_t$$

Per poter far ciò procediamo come segue

- 1) **Circonferenza osculatrice**: per qualunque moto posso individuare, in ogni punto, una circonferenza che approssima localmente parte della curva. Tale circonferenza prende il nome di **circonferenza osculatrice**.



- 2) **Lunghezza d'arco**: data una circonferenza si definisce lunghezza d'arco come segue

$$s_B - s_A = \int_{t_A}^{t_B} v(s) ds \quad v = \frac{ds}{dt} \quad s = \text{lunghezza d'arco}$$

L'unica differenza rispetto al solito è che la velocità è data dalla derivata prima della lunghezza d'arco rispetto al tempo, questo perché lo spazio percorso, lungo una curva, è approssimabile come visto ad un arco di circonferenza.

Dimostriamo che quanto appena detto è vero.

Moto uniformemente accelerato 3D ( $a = a(t) = \text{cost}$ )

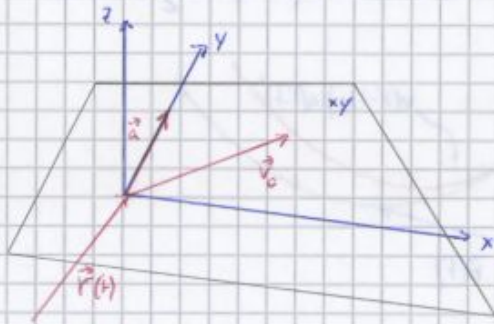
$$\textcircled{1} + \textcircled{3} \Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^t \vec{v}(s) ds \Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + [\vec{v}(s)]_{t_0}^t + \left[ \frac{1}{2} \vec{a}(s-t_0) \right]_{t_0}^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}(t-t_0) + \frac{1}{2} \vec{a}(t-t_0) \Rightarrow \text{descrive il m.v.a in 3D come parabola}$$

Se  $\vec{r}_0 = 0$  significa semplicemente che il sistema di riferimento cartesiano a 3 assi è stato spostato in corrispondenza della punta del vettore.

In tal caso si vede bene come il vettore posizione  $\vec{r}(t)$  sia una combinazione lineare dei vettori velocità  $\vec{v}$  e accelerazione  $\vec{a}$ .

Individuando questi un piano, anche la loro combinazione lineare individua il medesimo piano. Si conclude da ciò che  $\vec{r}_0$  giace sullo stesso piano di  $\vec{v}$  e  $\vec{a}$ , è sufficiente infatti scegliere un sistema di riferimento con l'asse delle  $y$  parallelo all'accelerazione



Per  $t_0 = 0$  si ha  $\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} a_y \hat{u}_y (t^2)$  posto  $\vec{v}_0 = v_{0x} \hat{u}_x + v_{0y} \hat{u}_y$

Conclusione: progetto sul piano  $xy$

$$\begin{cases} x(t) = v_{0x} \cdot t \\ y(t) = v_{0y} \cdot t + \frac{1}{2} a_y \cdot t^2 \end{cases} \quad \begin{cases} t = \frac{x(t)}{v_{0x}} \\ y(t) = v_{0y} \cdot \frac{x(t)}{v_{0x}} + \frac{1}{2} a_y \cdot \left( \frac{x(t)}{v_{0x}} \right)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(t) = v_{0y} \cdot \frac{x(t)}{v_{0x}} + \frac{1}{2} a_y \cdot \frac{x(t)^2}{v_{0x}^2} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x(t) + \frac{a_y}{2v_{0x}^2} \cdot x(t)^2$$

Sul piano  $xy$  otteniamo dunque una parabola che, a seconda del valore delle variabili più assumere configurazioni differenti, ma, nonostante ciò, passa sempre per l'origine

### Moto uniforme

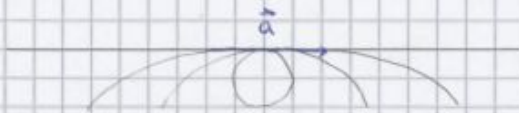
$$v = |\vec{v}| = \text{cost}$$

$$a_T = \frac{dv}{dt} = 0 \quad (\text{derivato di un valore cost} = \text{zero})$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} \Rightarrow \begin{array}{l} a_n \text{ grande per circonferenze piccole} \\ a_n \text{ piccola per circonferenze grandi} \end{array}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N = 0 + \frac{v^2}{R} \cdot \hat{u}_N$$

### Moto rettilineo uniforme



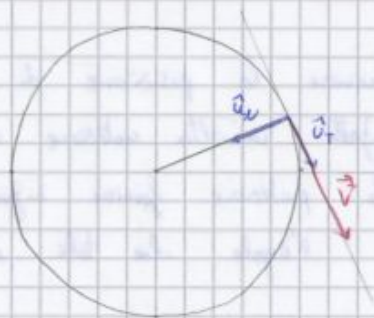
Posiamo vedere una retta come una circonferenza di raggio infinito, pertanto

$$a_n = \frac{v^2}{R} = 0$$

$$\vec{a} = a_T \hat{u}_T = \frac{dv}{dt} \hat{u}_T$$

### Moto circolare

In questo caso abbiamo una sola circonferenza osculatrice che vale per tutta la curva. Pertanto il valore del raggio  $R$  sarà un valore costante.



$$v = \frac{ds}{dt} \quad \text{ma } ds = d\theta \cdot R \Rightarrow v = \frac{R \cdot d\theta}{dt} = R \cdot \frac{d\theta}{dt} = R \cdot \theta' \quad \text{• } \omega \text{ Ricord}$$

chiamando  $\theta' = \frac{d\theta}{dt} = \omega = \text{velocità angolare}$  si ha  $v = R\omega$

$$\vec{v} = v \cdot \hat{u}_T = R \cdot \omega \cdot \hat{u}_T \Rightarrow \vec{v} = R\omega \hat{u}_T$$

Conoscendo  $\omega$  è possibile calcolare  $\theta(t)$ ?

$$\theta(t) = \theta(t_0) + \int_{t_0}^t \omega(s) ds$$

$$* \quad \theta' = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{v}{R} = \omega \Rightarrow v = R \cdot \omega$$

Per dimostrare la (4), possiamo sostituire le espressioni di  $x$  e  $y$  rispetto a  $r$  e  $\theta$  alla formula che esprime il vettore posizione in coordinate cartesiane.

$$\vec{r} = x\hat{u}_x + y\hat{u}_y \Rightarrow \vec{r} = r\cos\theta \cdot \hat{u}_x + r\sin\theta \hat{u}_y \Rightarrow \vec{r} = r(\cos\theta \hat{u}_x + \sin\theta \hat{u}_y)$$

$$\Rightarrow \vec{r} = r\hat{u}_r(\theta) \Rightarrow \vec{r} = r\hat{u}_r(\theta)$$

Nota questa espressione, ricaviamo la velocità  $\vec{v}$ :

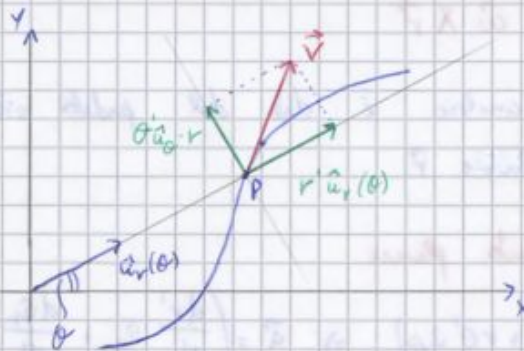
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\hat{u}_r(\theta)) = \frac{dr}{dt}\hat{u}_r(\theta) + \frac{d\hat{u}_r(\theta)}{dt}r = \frac{dr}{dt}\hat{u}_r(\theta) + \frac{d\theta}{dt} \cdot \hat{u}_\theta \cdot r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{v} = r'\hat{u}_r(\theta) + \theta' \hat{u}_\theta \cdot r$$

$r'$  = velocità radiale

$\theta'$  = velocità angolare

Come si può vedere la velocità è costituita da 2 componenti: una **radiale**, che mi esprime il modo in cui il punto si allontana dall'origine, ed una **angolare**, che mi dice come ruota attorno ad esso.

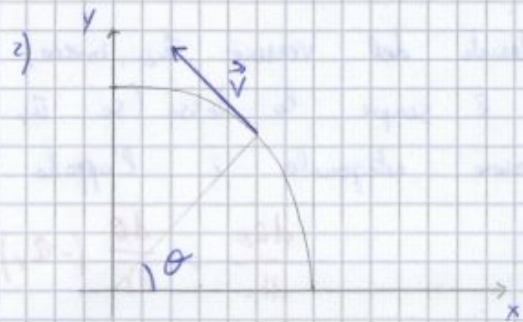
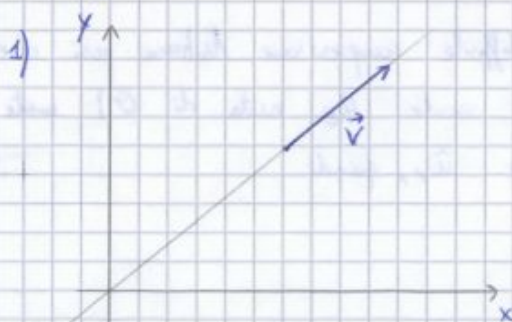


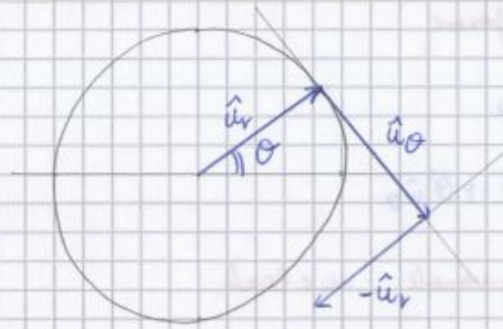
Casi particolari: 1) Moto radiale puro

$$\theta' = 0 \Rightarrow \theta = \text{cost} \Rightarrow \vec{v} = r'\hat{u}_r(\theta)$$

2) Moto circolare puro

$$r' = 0 \Rightarrow r = \text{cost} \Rightarrow \vec{v} = \theta' \hat{u}_\theta \cdot r$$





Si ottiene così:

$$\vec{a} = \ddot{r}\hat{u}_r + \frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta r' + r\theta''\hat{u}_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt}(-\hat{u}_r) + r'\theta'\hat{u}_\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \ddot{r}\hat{u}_r + r'\theta'\hat{u}_\theta + r\theta''\hat{u}_\theta - r\dot{\theta}^2\hat{u}_r + r'\theta'\hat{u}_\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \hat{u}_r(r'' - r\dot{\theta}^2) + \hat{u}_\theta(2r'\theta' + r\theta'') \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \hat{u}_r(r'' - r\dot{\theta}^2) + \hat{u}_\theta(2r'\theta' + r\theta'')$$

dove  $a_r =$  componente radiale  $= r'' - r\dot{\theta}^2$

$\Rightarrow$  DA NON CONFONDERE CON  $a_n$  e  $a_T$ !!

$a_\theta =$  componente angolare  $= 2r'\theta' + r\theta''$

Casi notevoli: 1) Moto radiale uniforme

$$\theta = \text{cost} \Rightarrow \theta' = \theta'' = 0 \quad \text{e} \quad r' = \text{cost} \Rightarrow r'' = 0$$

$$\vec{a} = \hat{u}_r r'' = 0 \quad \vec{v} = r'\hat{u}_r$$

2) Moto radiale uniformemente accelerato

$$\theta = \text{cost} \Rightarrow \theta' = \theta'' = 0 \quad \text{e} \quad r'' = \text{cost}$$

$$\vec{a} = r''\hat{u}_r \quad \vec{v} = r'\hat{u}_r$$

3) Moto circolare

$$r = \text{cost} \Rightarrow r' = r'' = 0$$

$$\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\hat{u}_r + r\theta''\hat{u}_\theta \quad \vec{v} = r\dot{\theta}\hat{u}_\theta \quad (\text{bita e sola tang. alla circonferenza})$$

## Dinamica del punto

### Introduzione al concetto di forza

Fino ad ora ci siamo occupati della cinematica, cioè abbiamo analizzato da un punto di vista prettamente analitico i moti, senza però chiederci chi e perché si sono generati. Per avviare a questo compito ora ci occuperemo dell'altra branca della meccanica, cioè la **dinamica**.

Come per la cinematica, anche la dinamica riguarda il **punto**, cioè quel corpo fisico ideale, di dimensioni nulle, dotato però di una certa massa. Più in generale la dinamica studia le **interazioni** tra il punto, il nostro sistema, ed il resto, cioè l'ambiente. L'unione, o se vogliamo, la somma di queste due componenti cui dai l'universo intero.

Ma cosa si intende per "interazioni"? Per Newton le interazioni erano rappresentate dalle **forze** che i corpi si esercitavano a vicenda, pertanto per **forza** possiamo pensare a quella **grandezza che esprime e misura l'interazione tra sistemi fisici**. Prima di arrivare a ciò, però, Newton enunciò le ben note 3 leggi della dinamica con le quali riuscì a mettere in relazione cause ed effetto dei moti dei corpi. Andiamo a vedere cosa disse.

### 1° legge di Newton o principio d'inerzia

Una particella libera, cioè non soggetta ad interazioni con l'ambiente circostante, non subisce cambiamenti di velocità, ossia resta in stato di quiete se era in quiete ( $v=0$ ) oppure si muove a velocità costante ( $v=\text{cost}$ ).

Facendo attenzione all'enunciato ci accorgiamo che questo ci dice che l'assenza di interazioni comporta che la velocità non vari, e non che il moto non si sia, pertanto:

$$\vec{v} = \begin{cases} \text{cost} \\ = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = \frac{dv}{dt} = 0 \quad \text{in ogni caso}$$

### 2° legge di Newton

L'interazione di un corpo con l'ambiente circostante, espressa tramite il vettore forza  $\vec{F}$  determina l'accelerazione del corpo, secondo la formula:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

dove  $m$  rappresenta la **massa inerziale** del corpo, cioè la sua resistenza a muoversi o a mantenere il suo stato di quiete.



### 3<sup>a</sup> legge di Newton o principio di azione-reazione

Se un corpo 2 esercita sul corpo 1 una forza  $\vec{F}_{21}$ , allora il corpo 1 reagisce esercitando una forza  $\vec{F}_{12}$  uguale e contraria, cioè:

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

Quindi le due forze hanno lo stesso modulo ma verso contrario, oltre che la stessa linea d'azione.

Ciò mi dice che non esiste una forza isolata, ma che le forze vanno sempre considerate in coppia.

### Quantità di moto

Si definisce quantità di moto  $\vec{p}$  il vettore ottenuto dal prodotto tra la massa del corpo  $m$  e la sua velocità  $\vec{v}$ .

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Questo non è nient'altro che un altro modo, più generale, per enunciare la 2<sup>a</sup> legge di Newton quando la massa resta costante durante il moto, infatti

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{F} = m\vec{a}$$

### Teorema dell'impulso

L'impulso di una forza, applicata ad una massa  $m$ , provoca una variazione della quantità di moto data da

$$\vec{J} = \int_{t_0}^t \vec{F}(s) ds = \int_{t_0}^t \frac{d\vec{p}}{ds} ds = \int_{t_0}^t d\vec{p} = m \int_{t_0}^t d\vec{v} = m [\vec{v}(s)]_{t_0}^t$$

↓

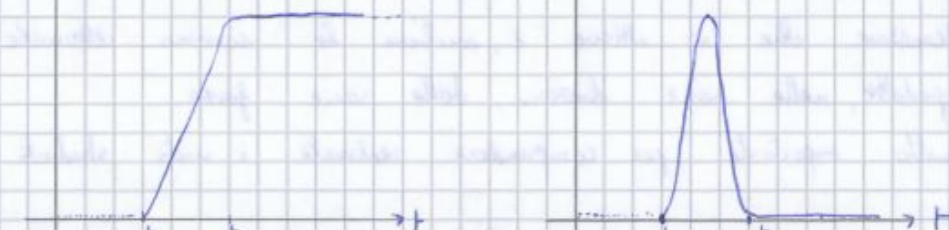
$$\vec{J} = m (\vec{v}(t) - \vec{v}(t_0)) = m \Delta \vec{v}$$

### Fenomeni impulsivi

Da un punto di vista grafico quello che si ottiene è questo:

$v \uparrow$

$a \uparrow$



quando si studia un fatto, infatti, si ottengono informazioni su quella che è la risultante delle forze, e non sulle singole componenti che concorrono a formarlo. Pertanto la 2<sup>a</sup> legge di Newton sarebbe più corretta se scritta come:

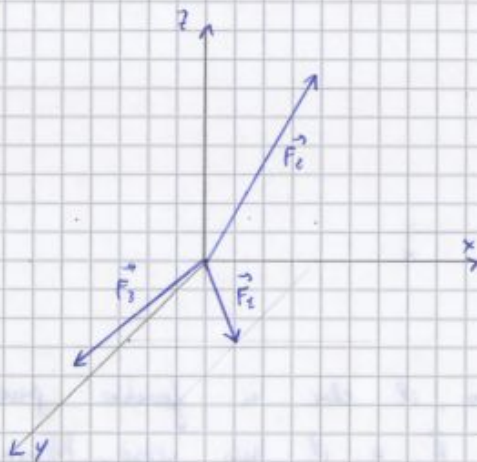
$$\vec{R} = m \cdot \vec{a}$$

Tale formula esprime il cosiddetto **principio di sovrapposizione delle forze** e, sostanzialmente mi dice che se la forza agente su di un corpo è nulla non significa necessariamente che sul corpo non agiscano forze, ma solo che la risultante di queste è nulla.

Un corpo, dunque, si trova in **equilibrio statico** se:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0 \Rightarrow \begin{aligned} \vec{R}_x &= \sum_i \vec{F}_{xi} = 0 \\ \vec{R}_y &= \sum_i \vec{F}_{yi} = 0 \\ \vec{R}_z &= \sum_i \vec{F}_{zi} = 0 \end{aligned}$$

Esempio



$$\vec{F}_1 = 3\hat{u}_x + 6\hat{u}_z$$

$$\vec{F}_2 = 2\hat{u}_x - 3\hat{u}_y + 4\hat{u}_z$$

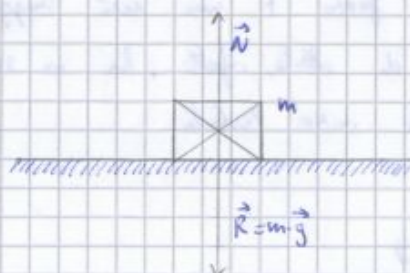
$$\vec{F}_3 = -5\hat{u}_x - 3\hat{u}_y - 4\hat{u}_z$$

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (3-2+5)\hat{u}_x + (6-3-3)\hat{u}_y + (4-4)\hat{u}_z \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

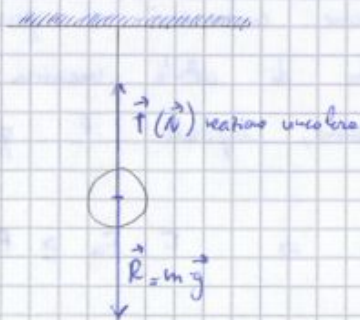
**Reazioni vincolari**

Se applicando una forza ad un corpo questo rimane fermo, dobbiamo dedurre che vi sia una qualche altra forza che la bilancia: tale forza prende il nome di **reazione vincolare**, che, sempre se il corpo rimane fermo, è uguale e contraria alla forza risultante che agisce sul corpo.

Esempi



se c'è equilibrio  $\Rightarrow \vec{R} + \vec{N} = 0$



Lo dimostra due cose:

- 1) la forza di attrito non ha un valore costante, ma oscilla il suo modulo tra un minimo (zero) ed un massimo ( $\mu_s N$ ). Tali valori vengono raggiunti con l'ampiezza della forza  $\vec{F}$ ;
- 2) la forza di attrito è legata alla massa del corpo: più questa è alta, maggiore è la  $\vec{F}_a$ .

### Forza di attrito dinamico

Quando il corpo entra in movimento, l'attrito da statico diventa **dinamico**:

$\vec{F}_{ad} = \mu_d \cdot \vec{N}$ , dove  $\mu_d$  rappresenta il coefficiente di attrito dinamico e risulta sempre  $\mu_s > \mu_d$ . Pertanto si ottiene:

$$\vec{R} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow -\vec{F} + \vec{F}_{ad} = m \cdot \vec{a}$$

Il fatto che  $\mu_s$  è sempre maggiore di  $\mu_d$  è dovuto dal fatto che, a parità di massa, se il corpo è fermo ha più tempo per instaurare legami di tipo elettrostatico con il materiale del piano su cui è sta muovendo, tempo notevolmente ridotto se il corpo è in movimento.



Quello che conta, dunque è la **massa** e la forza di coesione che ne deriva, e non l'estensione della superficie di contatto.

Pertanto le forze di attrito indotte sono **sempre reversibili**, nonostante i numerosi tentativi per ridurre l'intensità.

### Forza di attrito viscoso

La forza di attrito viscoso è un esempio di forza di attrito che si genera nel moto di un corpo dentro un fluido, opponendosi al moto stesso.

Tale forza, proporzionale alla velocità del corpo, è data da:

$$\vec{F}_v = -mK\vec{v} = -\gamma\vec{v}$$

$$K = \text{coeff. di smorzamento} = \frac{\gamma}{m} = 6\pi r \text{ per corpo sferico}$$

$$\ln\left(\frac{F}{m} - kv\right) = -tk \quad \frac{F}{m} - kv = e^{-tk} \quad -kv = e^{-tk} - \frac{F}{m}$$

$$v = \frac{F}{km} - \frac{e^{-tk}}{k} \Rightarrow v = \frac{1}{k} \left( \frac{F}{m} - e^{-tk} \right) \text{ se } t_0 = 0$$

Se  $t_0 \neq 0$  allora, l'integrazione, avviene tra i due estremi  $t$  e  $t_0$ , pertanto si ottiene:

$$-\frac{1}{k} \ln\left(\frac{F}{m} - kv\right) = t - t_0 \Rightarrow \ln\left(\frac{F}{m} - kv\right) = (t_0 - t)k \Rightarrow \frac{F}{m} - kv = e^{kt_0 - kt}$$

$$\Rightarrow -kv = -\frac{F}{m} + e^{kt_0 - kt} \Rightarrow v = \frac{F}{km} - \frac{A \cdot e^{-kt}}{k} \Rightarrow v = \frac{1}{k} \left( \frac{F}{m} - A e^{-kt} \right)$$

In questa espressione  $A$  è incognita, pertanto, per poterla definire sfruttiamo la velocità iniziale

$$v_0 = \frac{1}{k} \left( \frac{F}{m} - A e^{-kt_0} \right) \Rightarrow v_0 = \frac{1}{k} \left( \frac{F}{m} - A \right) \Rightarrow A = \frac{F}{m} - v_0 k$$

Sostituendo si ottiene:

$$v = \frac{1}{k} \left( \frac{F}{m} - \left( \frac{F}{m} - v_0 k \right) e^{-kt} \right) \Rightarrow v = \frac{F}{mk} - \left( \frac{F}{mk} - v_0 \right) e^{-kt}$$

Per  $t \gg \frac{1}{k}$  (ipoteticamente  $t \rightarrow \infty$ ) il moto da uniformemente accelerato diventa uniforme, infatti la velocità assume un valore prossimo costante definito **velocità limite**.

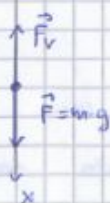
$$t \rightarrow \infty \quad v(\infty) = \frac{F}{mk} = \text{velocità limite}$$

Esempio:

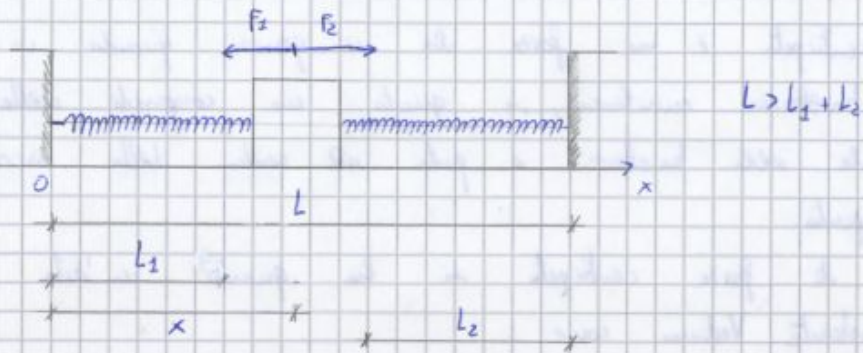
$$\vec{g} = g \cdot \hat{u}_x \quad F = m \cdot g$$

$$v(t) = \frac{m \cdot g}{mk} - \left( \frac{m \cdot g}{mk} - v_0 \right) e^{-kt} =$$

$$v(t) = \frac{g}{k} - \left( \frac{g}{k} - v_0 \right) e^{-kt}$$



Caso particolare



$$F_{\text{tot}}(x) = -F_1 + F_2 = -k(x - L_1) + k(L - x - L_2)$$

Ad ogni molla è applicata una forza di richiamo, solo che nella molla ① la forza di richiamo è negativa, mentre per la molla ② è positiva, ecco perché le due forze hanno verso opposto.

In questo caso, l'equazione differenziale con una forza elastica è:

$$F = m \cdot a \Rightarrow -k(x - L_0) = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \quad -kx + kL_0 = m x'' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow +m x'' + kx = +kL_0 \quad x'' + \frac{k}{m}x = +\frac{k}{m}L_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x'' + \omega^2 x = +\omega^2 L_0$$

Soluzione caso omogeneo  $x'' + \omega^2 x = 0 \Rightarrow x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

Soluzione caso particolare  $x'' + \omega^2 x = \omega^2 L_0 \Rightarrow x(t) = +L_0 \Rightarrow x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) + L_0$

Nota  $A$  e  $\varphi \Rightarrow x_0$  e  $v_0$ ?

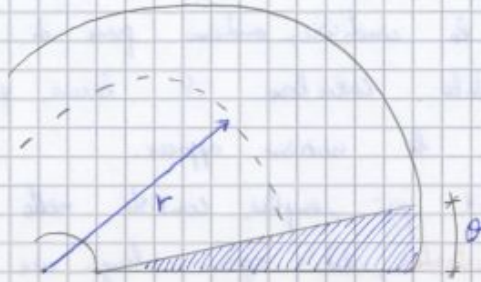
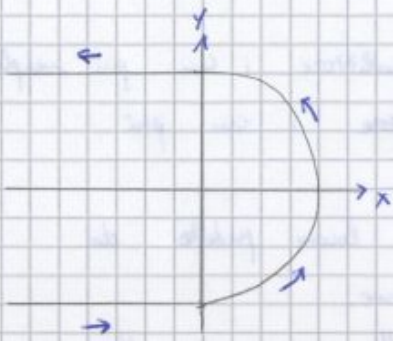
$$x_0 = A \sin \varphi + L_0 \quad ; \quad v_0 = \omega A \cos \varphi + L_0$$

Nota  $x_0$  e  $v_0 \Rightarrow A$  e  $\varphi$ ?

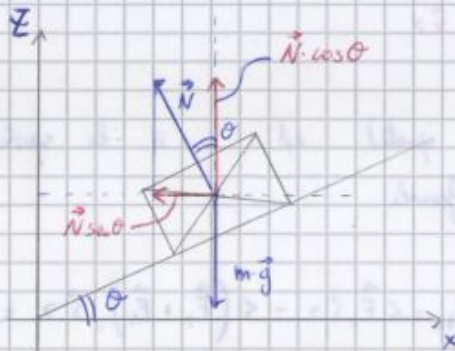
$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

$$\text{tg } \varphi = \omega \cdot \frac{x_0}{v_0}$$

Corso in curva di auto, ma con curva inclinata:



Da un punto di vista statico avremo che:



$$\begin{cases} m \cdot a_z = N \cos \theta - m \cdot g = 0 & \text{(altrimenti l'auto volerebbe!!)} \\ m \cdot a_r = 0 & (v = \text{cost}) \\ m \cdot a_n = + N \cdot \sin \theta & \text{(con + xke punta verso il centro della curva)} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N \cos \theta = m \cdot g \\ / \\ / \end{cases} \begin{cases} N = \frac{m \cdot g}{\cos \theta} \\ m \cdot \frac{v^2}{r} = \frac{m \cdot g}{\cos \theta} \cdot \sin \theta \Rightarrow v^2 \leq g \cdot \tan \theta \cdot r \Rightarrow v \leq \sqrt{r \cdot g \cdot \tan \theta} \end{cases}$$

$$v \leq \sqrt{r \cdot g \cdot \tan \theta}$$

Portando se la velocità non supera questo valore, anche in totale assenza di attrito (fondo ghiacciato) l'auto non parte per la tangente.

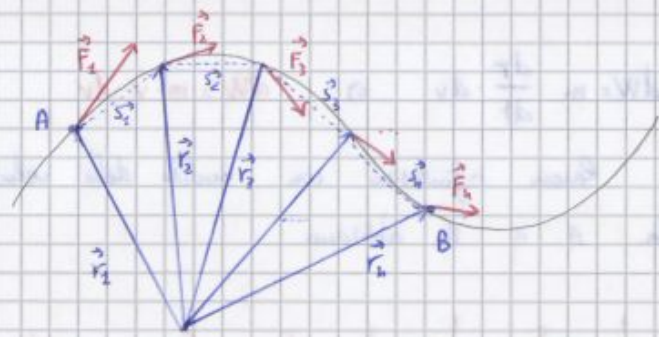
tenzione del filo, la quale però non produce alcun tipo di lavoro.

Pertanto possiamo affermare che il lavoro  $W$  è nullo se:

- non agiscono forze
- le forze che agiscono danno risultante nulla (moto rettilineo uniforme con attrito)
- le forze che agiscono danno risultante ortogonale alla traiettoria (moto circolare uniforme)

Osserviamo ora il caso più generale possibile in cui la forza che agisce è variabile, cioè è una funzione della posizione ( $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ ). In tal caso la traiettoria viene considerata generica e dunque curvilinea ed indicata con  $\gamma$  (cammino).

Immaginiamo dunque di prendere il nostro corpo e di inserirlo in un campo di forze, tutte diverse, che variano continuamente la traiettoria del mio corpo.



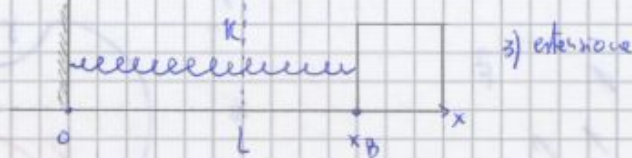
Tutte queste forze conducono il mio corpo dalla posizione A alla B lungo una traiettoria curvilinea. A questo punto ognuna di queste forze determina uno spostamento lungo la traiettoria, e dunque un lavoro; la somma di tutti questi infiniti contributi che danno come risultato lo spostamento del corpo dalla posizione A alla B mi dà il lavoro, che in termini matematici è definito dall'integrale di linea.

$$W_{AB} = \int_A^B \langle \vec{F}(\vec{r}), d\vec{r} \rangle = \int_A^B F_T dr$$

Quello che è importante capire è che entrambe le grandezze vettoriali dipendono dal tempo, infatti:

- $\vec{F}(\vec{r}) = F_x(\vec{r}) \hat{u}_x + F_y(\vec{r}) \hat{u}_y + F_z(\vec{r}) \hat{u}_z$ , ma anche  $\vec{r}$  dipende da un variabile che è il tempo dunque
- $\vec{r}(t) = x(t) \hat{u}_x + y(t) \hat{u}_y + z(t) \hat{u}_z$ , quindi lo dico otteniamo
- $\vec{F}(\vec{r}) = F_x(x(t), y(t), z(t)) \hat{u}_x + F_y(x(t), y(t), z(t)) \hat{u}_y + F_z(x(t), y(t), z(t)) \hat{u}_z$

## Lavoro di una forza elastica



Sapendo che la forza elastica  $F(x) = -k(x-L)$  voglio calcolare  $W_{AB}$ :

$$\begin{aligned}
 W_{AB} &= \int_A^B \langle \vec{F}(x), d\vec{r} \rangle = \int_A^B \langle F \cdot \hat{u}_x, dx \cdot \hat{u}_x \rangle = \int_A^B F \cdot dx \langle \hat{u}_x, \hat{u}_x \rangle = \int_A^B F(x) \cdot dx = \\
 &= \int_A^B -K(x-L) dx = \left[ -\frac{1}{2} k(x-L)^2 \right]_A^B = -\frac{1}{2} k(x_B-L)^2 + \frac{1}{2} k(x_A-L)^2
 \end{aligned}$$

ciò mostra come non sia importante il percorso fatto per raggiungere le condizioni finali ed iniziali, ma solo il valore che tali condizioni assumono.

Inoltre, sia nel caso dell'energia cinetica che in quello (che definiremo successivamente come energia potenziale) sono state omesse le costanti additive, queste perché, trattandosi sempre di differenza ed essendo tali costanti dei valori fissi, durante il calcolo dell'integrale queste vengono eliminate. In generale tale discorso vale per qualunque tipo di energia.

### Forze conservative

Come abbiamo appena visto, per quanto riguarda il lavoro svolto da una forza elastica, esso non dipende dal percorso svolto, ma solo dalle condizioni finali ed iniziali. Tutte quelle forze per cui vale il seguente ragionamento vengono dette **forze conservative**.

Per capire se un campo di forze è conservativo devo chiedermi se vale la seguente espressione:



da qui si deduce che se il percorso è chiuso il lavoro è nullo

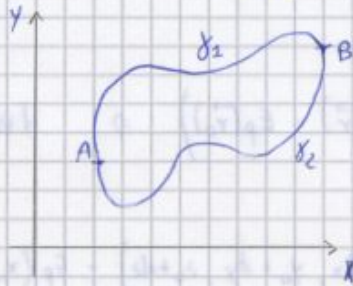
$$\int_A^B \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = - \int_B^A \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle \Rightarrow \int_A^B \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle + \int_B^A \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = 0$$

Questo è nussune con:

$$W_{\Gamma} = \oint_{\Gamma} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = 0 \quad \forall \Gamma$$

Tutto ciò mi sta a dire che la condizione necessaria e sufficiente affinché un campo di forze sia conservativo è che l'integrale di linea lungo un qualunque percorso chiuso sia nullo.

Dim 1):  $H_p = \vec{F}$  conservativo  $\quad Th = \oint_{\Gamma} \langle \vec{F}, d\vec{r} \rangle = 0$



Per definizione:  $\oint_{\Gamma} \langle \vec{F}, d\vec{r} \rangle = \int_A^B \delta_2 \langle \vec{F}, d\vec{r} \rangle + \int_B^A \delta_2 \langle \vec{F}, d\vec{r} \rangle = - [E_p(B) - E_p(A)] + [E_p(A) - E_p(B)]$   
 $= -E_p(B) + E_p(A) - E_p(A) + E_p(B) = 0 \quad \text{c.v.d.}$

Dim 2):  $H_p = \oint_{\Gamma} \langle \vec{F}, d\vec{r} \rangle = 0 \quad \forall \Gamma$ ;  $Th = \vec{F}$  conservativo

$$\oint_{\Gamma} \langle \vec{F}, d\vec{r} \rangle = 0 \Rightarrow \int_A^B \delta_2 \langle \vec{F}, d\vec{r} \rangle = - \int_B^A \delta_2 \langle \vec{F}, d\vec{r} \rangle \Rightarrow \int_A^B \delta_2 \langle \vec{F}, d\vec{r} \rangle = \int_A^B \delta_2 \langle \vec{F}, d\vec{r} \rangle$$

$\Rightarrow$  tale relazione vale per qualunque coppia di punti arbitrari,  $\forall p$  pertanto esiste una funzione tale che

$$* = - [E_p(B) - E_p(A)] \quad \text{c.v.d.}$$

gradiente di un campo scalare qualsiasi (nel nostro caso il campo scalare è l'energia potenziale) allora tale campo di forza è conservativo.

Lezione 7 22/03/2012

Continua da sopra...

... in formule abbiamo:

$$1) W_{AB} = \int_A^B \langle \vec{F}, d\vec{r} \rangle = - [E_p(B) - E_p(A)] = - \Delta E_p$$

$$2) W_{AB} = \oint_{\Gamma} \langle \vec{F}, d\vec{r} \rangle = 0 \quad \forall \Gamma$$

$$3) \vec{F}(\vec{r}) = -\nabla E_p(\vec{r}) \quad (\text{se è nota } E_p(\vec{r}))$$

Alla luce di tutto ciò possiamo affermare che non è possibile trovare lavoro da una forza conservativa se il percorso è chiuso, ovvero, come si dice, se è ciclico. L'energia potenziale, dunque, è una grandezza che incontriamo solo in presenza di campi di forza conservativi. Trattandosi di un'energia, però viene definita a meno di una costante additiva, che dipende dal sistema di riferimento scelto. Logicamente, per mantenerci nelle condizioni più comode, noi assumiamo un sistema di riferimento tale da rendere nullo il valore della costante. In realtà, però, questo è del tutto irrilevante per il calcolo del lavoro, in quanto si tratta sempre di calcolare una differenza tra condizioni finali ed iniziali, calcolo nel quale la costante viene eliminata.

**Teorema di conservazione dell'energia meccanica**

Se ci troviamo in un campo di forza conservativo allora valgono le due formule:

$$1) E_k = \frac{1}{2} m v^2 \quad \text{da cui: } W_{AB} = \int_A^B \langle \vec{F}, d\vec{r} \rangle = E_k^B - E_k^A$$

$$2) W_{AB} = - (E_p(B) - E_p(A)) = - (E_p^B - E_p^A)$$

Eguagliando le due relazioni otteniamo:

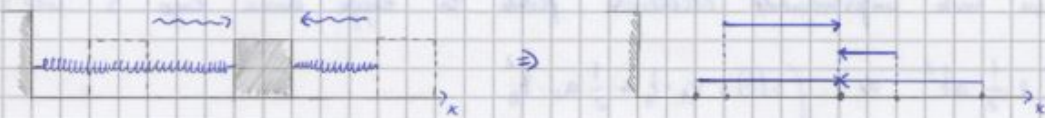
$$E_k^B - E_k^A = - (E_p^B - E_p^A) \quad \Rightarrow \quad E_k^B + E_p^B = E_k^A + E_p^A$$

Notiamo dunque che la somma tra  $E_k$  ed  $E_p$  di un corpo che si muove sotto l'effetto di forze conservative non cambia durante il moto, cioè rimane costante e non dipende dalla sua posizione, pertanto in formule possiamo scrivere che

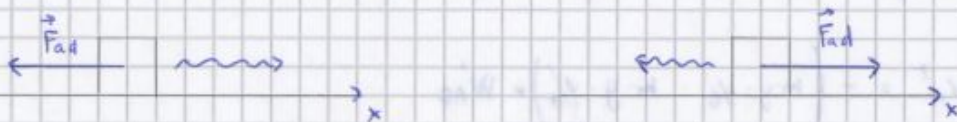
Vi è dunque un valore, dato dal lavoro svolto dalla forza di attrito, che riduce il lavoro svolto dalle forze conservative (cioè perché le forze di attrito sono dette dissipative).  
 Pertanto, in presenza di forze non conservative l'energia meccanica non resta costante e la sua variazione è uguale al lavoro delle forze non conservative.

Ma che cos'è, in generale, un campo di forza non conservativo?

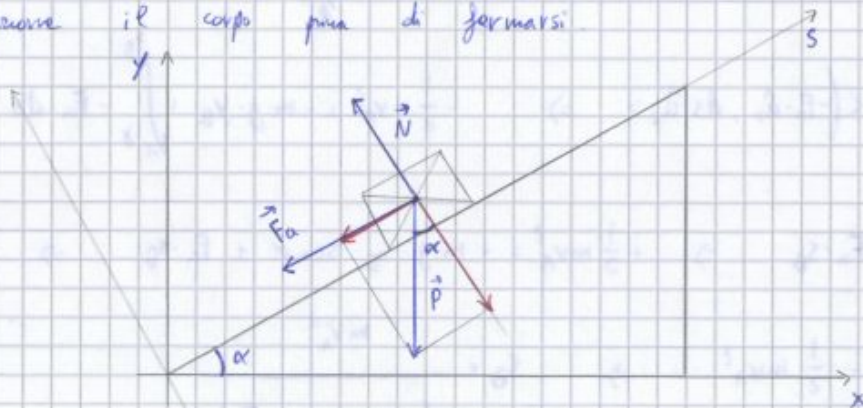
Pensiamo come sistema un corpo attaccato ad una molla. Scegliendo come asse  $x$  la direzione lungo la quale può muoversi il corpo, posso, per tutti i punti lungo tale asse definire uno ed un solo vettore che mi espone la forza che agisce, in quel punto sulla molla. Se è possibile fare ciò, il campo di forza è conservativo.



Consideriamo ora, come sistema, un corpo che si muove, sotto l'effetto di una forza, lungo il medesimo asse ma non è vincolato da molla. Inoltre, in tale corpo ha effetto l'attrito dinamico. Se il movimento avviene lungo l'asse positivo delle  $x$ , allora il vettore  $\vec{F}_{at}$  sarà diretto nella direzione opposta, viceversa se il moto avviene lungo l'asse negativo. Pertanto nello stesso punto non è possibile definire un solo vettore che mi descriva il moto, perché questo dipende dal verso rispetto al quale il moto avviene - pertanto i due vettori saranno uguali in modulo ma di verso opposto. In tal caso il campo di forza non è conservativo.



Dato il seguente schema e dati i seguenti dati:  $m, \mu_d, \alpha, v_A$ , calcolare quanto strada percorre il corpo prima di fermarsi.

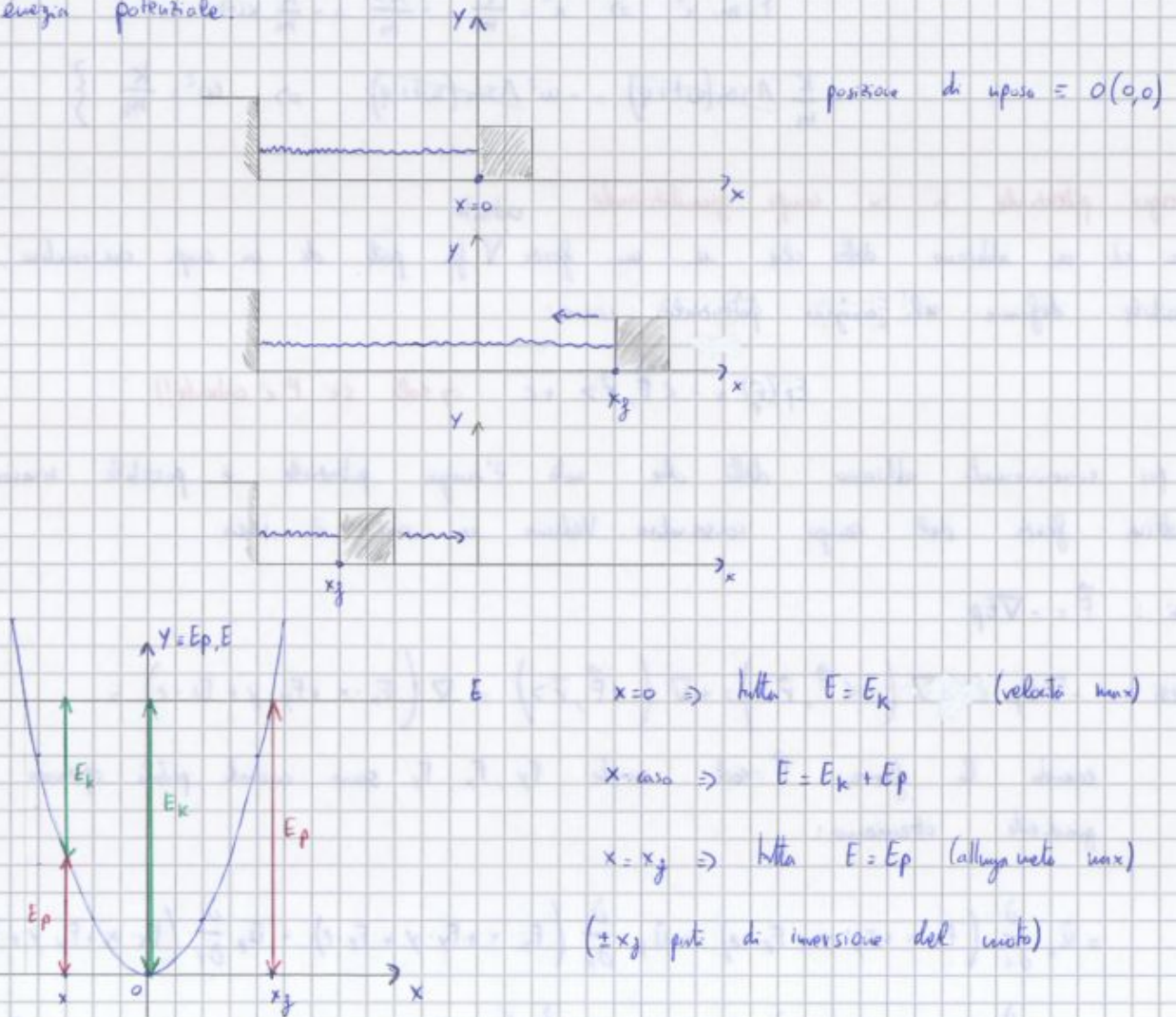


$$S_B = \frac{mv_A^2}{2(mg \cdot \sin \alpha + M_d \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha)} \Rightarrow S_B = \frac{v_A^2}{2g(\sin \alpha + M_d \cos \alpha)}$$

Discussione qualitativa del grafico dell'energia potenziale

1) Oscillatore armonico

Come abbiamo visto, il moto di un corpo sotto l'effetto di una forza elastica è un moto armonico. Consideriamo dunque il solito schema ed anzitutto il grafico dell'energia potenziale.



L'equazione differenziale del moto armonico è:  $x'' + \frac{k}{m}x = 0$ , le cui soluzioni sono  $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$  con  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ .

Calcoliamo analiticamente l'energia meccanica:

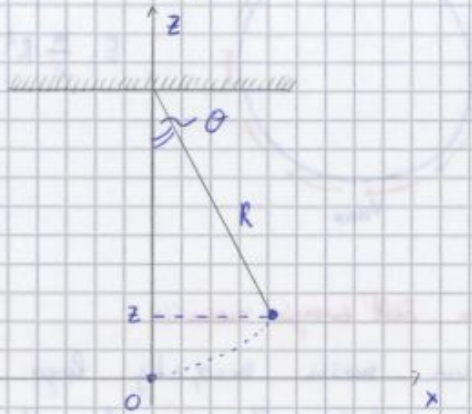
$$v(t) = \omega A \cos(\omega t + \varphi) \quad x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \cdot \omega^2 \cdot A^2 \cdot \cos^2(\omega t + \varphi)$$

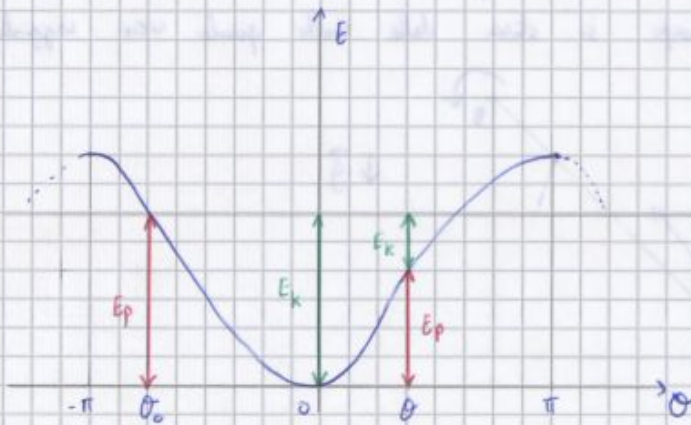
## Discussione qualitativa del grafico dell'energia potenziale

### 2) Pendolo

Prendiamo come sistema un pendolo fisso ad una parete e studiamo il grafico dell'energia potenziale quantistica, in questo, in questo caso, l'unica forma di forza presente è la forza di gravità (oltre alla tensione del filo che però non produce lavoro).



Assumiamo il seguente sistema di riferimento con origine nel punto più basso raggiunto dal corpo.



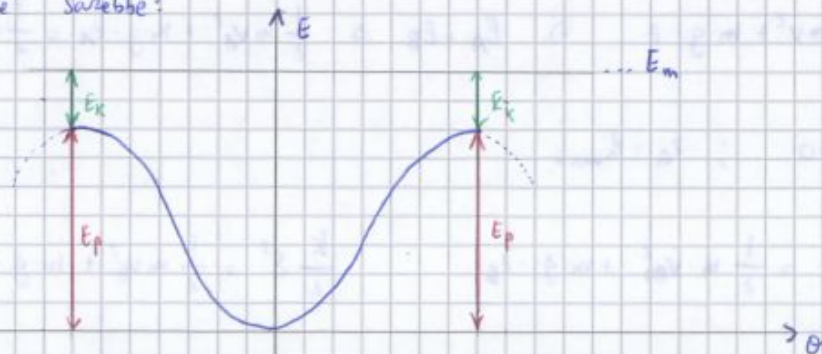
$E_m$  (fissato arbitrariamente)

1) Punto di inversione :  $E_p = E = m \cdot g \cdot z = m \cdot g \cdot (R - R \cos \theta) = m \cdot g \cdot R (1 - \cos \theta)$   $E_k = 0$  ( $v=0$ )

2) Punto origine :  $E_p = 0$  ( $\theta=0$ )  $E = E_k = \frac{1}{2} m v^2$  ( $v=\max$ )

3) Punto a caso :  $E_p = m \cdot g \cdot (R - R \cos \theta) = m \cdot g \cdot R (1 - \cos \theta)$   $E_k = \frac{1}{2} m v^2$

Osservando il fatto che si tratta di un moto circolare uniformemente accelerato ( $g = \text{cost}$ ) la velocità  $v = R \cdot \theta'$ , quindi l'energia cinetica  $E_k = \frac{1}{2} m \cdot R^2 \cdot \theta'^2$ . Se l'energia meccanica fosse maggiore del valore stabilito in precedenza, il grafico dell'energia potenziale sarebbe:



$$\frac{k}{2} s^2 - m \cdot g \cdot z = \frac{m}{2} v_B^2$$

$$\frac{2}{m} \left( \frac{k}{2} s^2 - m \cdot g \cdot z \right) = v_B^2$$

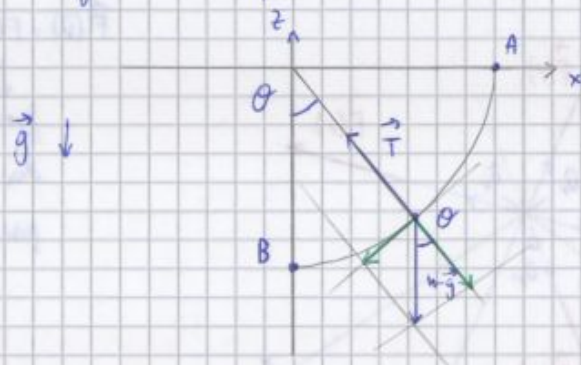
28

$$\frac{k}{m} s^2 - 2g z = v_B^2 \Rightarrow v_B = \sqrt{\frac{k}{m} s^2 - 2g z} = 0,436 \text{ m/s}$$

Il capo, dunque, riesce a salire se e solo se  $s \geq \sqrt{\frac{2g z m^2}{k}} = 0,022 \text{ m}$  ok!

### Esercizio col pendolo fisso

Calcolare l'energia potenziale di un pendolo semplice di massa  $m$  e la velocità che raggiunge nel punto B se  $m$  è inizialmente fermo nel punto A. Trovare anche la tensione della fune nel punto B.



$$1) E = \frac{1}{2} m v^2 + m \cdot g \cdot z$$

$$E_A = E_B \quad \frac{1}{2} m v_A^2 + m \cdot g \cdot z_A = \frac{1}{2} m v_B^2 + m \cdot g \cdot z_B \quad z_A = 0 ; v_A = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_B^2 + m \cdot g \cdot z_B = 0 \quad \frac{v_B^2}{2} = +g(+R) \Rightarrow v_B = \sqrt{2 \cdot g \cdot R}$$

$$2) m \cdot \vec{a} = \vec{T} + m \cdot \vec{g}$$

$$\begin{cases} m \cdot a_T = -m \cdot g \cdot \sin \theta \\ m \cdot a_N = T - m \cdot g \cdot \cos \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} m \cdot g \cdot \sin \theta = 0 \\ m \cdot \frac{v_B^2}{R} = T - m \cdot g \cdot \cos \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} T = m \left( \frac{v_B^2}{R} + g \cos \theta \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} T = m \left( \frac{2gR}{R} + g \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} T = 2gm + mg \end{cases}$$

$$\Rightarrow T = 3mg$$

Come si può vedere dal disegno, il cammino è costituito da due tipologie di percorsi: uno **circolare** lungo la sfera ed uno **radiale** lungo la direzione passante per O.

I cammini lungo la sfera hanno un lavoro **nullo**, in quanto il vettore spostamento infinitesimo  $d\vec{r}$  ed il versore  $\hat{u}_r$  sono ortogonali dunque  $\langle \hat{u}_r, d\vec{r} \rangle = 0$ .

Pertanto

$$W_{AB} = \int_A^{A_2} \langle \vec{F}, d\vec{r} \rangle + \int_{A_2}^{A_3} \langle \vec{F}, d\vec{r} \rangle + \int_{A_3}^B \langle \vec{F}, d\vec{r} \rangle =$$

$$= \int_A^{A_2} \left\langle \left(-\frac{k}{r^2}\right) \hat{u}_r, dr \cdot \hat{u}_r \right\rangle + \int_{A_2}^{A_3} \left\langle \left(-\frac{k}{r^2}\right) \hat{u}_r, dr \cdot \hat{u}_r \right\rangle + \int_{A_3}^B \left\langle \left(-\frac{k}{r^2}\right) \hat{u}_r, dr \cdot \hat{u}_r \right\rangle =$$

I valori  $\left(-\frac{k}{r^2}\right)$  e  $dr$  sono valori scalari che posso portare fuori dal prodotto scalare. Inoltre il prodotto scalare di un versore per se stesso è pari ad 1, pertanto

$$W_{AB} = \int_A^{A_2} -\frac{k}{r^2} dr + \int_{A_2}^{A_3} -\frac{k}{r^2} dr + \int_{A_3}^B -\frac{k}{r^2} dr$$

Come si può vedere sono tutti dipendenti dalla stessa variabile, pertanto li posso scrivere come

$$W_{AB} = \int_{r_A}^{r_B} \left(-\frac{k}{r^2}\right) dr = \left[\frac{k}{r}\right]_{r_A}^{r_B} = \frac{k}{r_B} - \frac{k}{r_A} = -\left[E_p(r_B) - E_p(r_A)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_p(r) = -\frac{k}{r} + c$$

A questo punto posso anche provare a dimostrare che:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{k}{r^2} \hat{u}_r = -\nabla E_p(r)$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla\left(-\frac{k}{r}\right) = k\nabla\frac{1}{r} \quad \text{Sapendo che } \nabla = \hat{u}_x \partial_x + \hat{u}_y \partial_y + \hat{u}_z \partial_z$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = k\nabla\frac{1}{r} = k\left(\hat{u}_x \partial_x\left(\frac{1}{r}\right) + \hat{u}_y \partial_y\left(\frac{1}{r}\right) + \hat{u}_z \partial_z\left(\frac{1}{r}\right)\right) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) = -\frac{1}{r^2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)^{-1} \cdot (zx) = -x \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^{-3} = -\frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} = -\frac{x}{r^3}$$

### Teorema del momento angolare (per un punto materiale)

Calcoliamo la variazione nel tempo del momento angolare di un punto materiale in movimento e vediamo cosa otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\vec{v}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \frac{d\vec{v}}{dt} \times m\vec{r} = m \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{r} \right) = \\ &= m \left( \underbrace{\vec{v} \times \vec{v}}_{\vec{0}} + \vec{a} \times \vec{r} \right) = m \vec{a} \times \vec{r} = \vec{F} \times \vec{r} = \vec{\tau} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} \end{aligned}$$

Questo è l'espressione analitica del teorema del momento angolare, il quale ci dice che la derivata rispetto al tempo del momento angolare è uguale al momento della forza.

Partendo se  $\vec{\tau} = 0$  vuol dire che  $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{cost.}$  Ma  $\vec{L}$  costante vuol dire

$\vec{r} \neq 0; \vec{F} \neq 0 \Rightarrow \vec{r} \times \vec{F} = 0 \Rightarrow$  Quali sono questi tipi di forze? Le forze dei **campi di forze centrali**

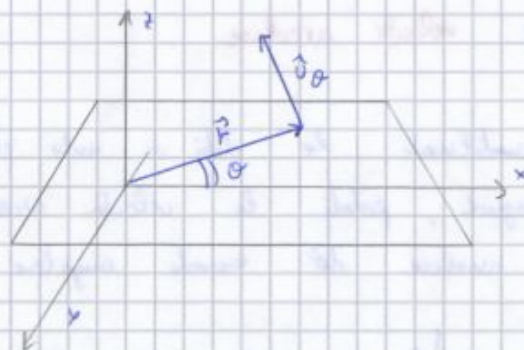
### Teorema del momento angolare e forze centrali

In un campo di forze centrali il vettore spostamento  $\vec{r}$  e la forza  $\vec{F}$  sono sempre paralleli, pertanto il loro prodotto vettoriale è nullo. Per tale motivo in un campo di forze centrali il momento della forza  $\vec{\tau}$  è nullo in ogni punto

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$$

### Momento angolare per un moto piano

Immaginiamo che su un piano si verifichi un moto e che i vettori  $\vec{r}$  e  $\vec{v}$  giacciono sul piano stesso.



$$\vec{r} = r \cdot \hat{u}_r$$

$$\begin{cases} \vec{v} = r' \hat{u}_r + r \theta' \hat{u}_\theta \\ \vec{r} = r \cdot \hat{u}_r \end{cases} \Rightarrow \vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \left[ (r \cdot \hat{u}_r) \times (r' \hat{u}_r + r \theta' \hat{u}_\theta) \right] m =$$



Il fatto che la velocità angolare sia costante, non implica necessariamente che <sup>31</sup> anche il moto avvenga sempre sullo stesso piano. Nella, infatti, gli dovrebbe impedire di muoversi nello spazio a suo piacere, mantenendo comunque la velocità costante.

Dimostriamo, dunque, che anche il moto rimane sempre sullo stesso piano.

Consideriamo uno spostamento infinitesimo da  $t$  a  $t' = t + \epsilon$ , dove  $\epsilon$  è uno scarto piccolo a piacere:

$$\vec{r}' = \vec{r}(t') = \vec{r}(t + \epsilon) = \vec{r}(t) + \epsilon \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r} + \epsilon \vec{v} \Rightarrow \text{il vettore posizione } \vec{r} \text{ e la velocità } \vec{v} \text{ giacciono entrambi sul piano iniziale del moto, pertanto anche il vettore } \vec{r}' \text{ giace su tale piano.}$$

$$\vec{v}' = \vec{v}(t') = \vec{v}(t + \epsilon) = \vec{v}(t) + \epsilon \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}(t) + \epsilon \vec{a} = \vec{v}(t) + \epsilon \frac{\vec{F}}{m} \Rightarrow \text{il vettore forza } \vec{F} \text{ non può che agire sul piano di } \vec{v}, \text{ così come } \vec{v}, \text{ pertanto anche } \vec{v}' \text{ si muove sul medesimo piano}$$

Altrimenti: passaggi algebrici offrono molti, andiamo a vedere in altro modo per dimostrare che il momento angolare  $\vec{L}$  resta costante in un campo di forze centrale.

$$\begin{aligned} \vec{L}' &= \vec{L}(t') = \vec{L}(t + \epsilon) = m \vec{r}(t + \epsilon) \times \vec{v}(t + \epsilon) = m (\vec{r} + \epsilon \vec{v}) \times (\vec{v} + \epsilon \frac{\vec{F}}{m}) = \\ &= m (\vec{r} \times \vec{v}) + (\epsilon \vec{v} \times \vec{v}) + (\vec{r} \times \epsilon \frac{\vec{F}}{m}) + (\epsilon \vec{v} \times \epsilon \frac{\vec{F}}{m}) = \end{aligned}$$

\*

### Esempio 1

Prendiamo ora come sistema un corpo di massa  $m$  che si muove su un piano e che viene legato ad un filo, il quale, a sua volta può essere teso a piacere da un operatore. Tale tensione  $\vec{T}$  è un caso banale di forza centrale attrattiva, infatti essa punta al centro della orbita circolare descritta e rimane sempre costante in modulo lungo la medesima circonferenza. Essendo sempre parallelo al vettore posizione  $\vec{r}$ , tale tensione non produce momenti.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{T} = 0 \quad \text{sempre}$$

$$\vec{L} = m r^2 \dot{\theta} \hat{u}_z \Rightarrow r = \text{cost}$$

$$\begin{cases} \frac{d\vec{L}}{dt} = m r^2 \ddot{\theta} \hat{u}_z & (\text{l'unica cosa che è funzione del tempo è la velocità angolare}) \\ \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times m \vec{g} = (r \cdot \hat{u}_r) \times (m \cdot g \cdot \text{sen} \theta \cdot \hat{u}_\theta) = -r m g \text{sen} \theta \hat{u}_z & (\text{non considero la componente normale, perché non dà momento angolare}) \end{cases}$$

Uguaglio le due espressioni

$$m r^2 \ddot{\theta} \hat{u}_z = -r m g \text{sen} \theta \hat{u}_z \quad r \ddot{\theta} = -g \text{sen} \theta \Rightarrow r \ddot{\theta} + g \text{sen} \theta = 0$$

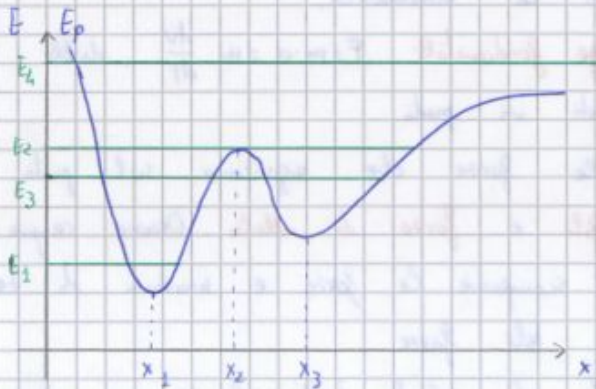
negli sviluppi di Taylor:  $\text{sen} \theta = \theta - \frac{\theta^3}{6} + \dots$ , ma per  $\theta = \text{"piccolo"}$

$$\text{sen} \theta \approx \theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{r} \theta = 0 \Rightarrow \text{equazione differenziale del moto armonico}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{r} \theta = 0 \Leftrightarrow \ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

Per tanto il moto del pendolo, per angoli molto piccoli, può essere considerato come un moto armonico.

Punti di stabilità e di instabilità



Prendiamo un moto con un'energia potenziale descritta dalla funzione in figura. Osserviamo che i punti  $x_1, x_2, x_3$  sono punti di massimo e di minimo, perché in tali punti:

$$\frac{dE_p}{dx} = 0 \Rightarrow F(x) = -\nabla E_p = -\frac{\partial E_p}{\partial x} = 0 \quad (\text{siamo su una sola dimensione})$$

Tali punti sono detti **punti di equilibrio**. Essi si dividono in punti di equilibrio **stabile ed instabile**.

Analogo ragionamento vale per un corpo lanciato da una certa altezza: tale corpo è immerso in un campo gravitazionale, pertanto è soggetto ad un'accelerazione verticale, tuttavia il moto avviene lungo una traiettoria parabolica anche se la forza (peso) è verticale.

Discutendo poi sul **lavoro** abbiamo visto che, qualunque sia la topologia di forza agente sul corpo, esso è uguale alla **variazione di energia cinetica** del corpo.

Una particolare categoria di forze è rappresentata dalle **forze costanti vettorialmente** e dalle **forze centrali**, cioè dalle **forze conservative** per tali forze è possibile definire una funzione nella variabile posizionale ( $\vec{r}$ ), definita **energia potenziale**, tanto la quale è possibile calcolare il lavoro.

La somma tra energia cinetica ed energia potenziale esprime la grandezza **energia meccanica** la quale rimane costante durante il moto del corpo stesso.

Il significato fisico di  $E_k$  ed  $E_p$  è rappresentato dal fatto che queste grandezze mi esprimono la capacità del sistema di **scambiare lavoro**. Detto in termini pratici è il loro "serbatoio di lavoro", in quanto, se un corpo possiede o  $E_k$  o  $E_p$  o tutti e due, allora vuol dire che tanto oppur meno è possibile ricavare lavoro, in maniera parziale o totale, a seconda della presenza di forze dissipative.

L'applicazione più comune del **principio di conservazione dell' $E_m$**  sfrutta il legame stabilito tra  $E_k$  ed  $E_p$ , con il quale è possibile calcolare la velocità di un corpo nota la sua posizione. Tale via è preferibile nei problemi in cui non è richiesta la dipendenza dal tempo. Nel caso in cui è richiesta la legge oraria è preferibile definirne tramite la legge di Newton.

In fine vale come il **teorema del momento angolare** ci consentirà di descrivere e dimostrare le leggi di Keplero e molti altri teoremi che riguardano moti di corpi immersi in campi di forze centrali.

Descriviamo ora il moto relativo tra i due sistemi di riferimento. Sapendo che  $\vec{r}' = -\vec{R} + \vec{r}$  e che se  $O'$  è in moto rispetto ad  $O$  allora

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{v}_{O'} \neq 0 \Rightarrow \text{velocità di } O' \text{ rispetto ad } O \text{ (velocità di trascinamento)}$$

si ha che la velocità relativa di  $S'$  rispetto ad  $S$  è:

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} - \vec{R}) \Rightarrow \frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{d\vec{R}}{dt} \Rightarrow \vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_{O'}$$

Per quanto riguarda l'accelerazione si ha:

$$\frac{d\vec{v}_{O'}}{dt} = \vec{a}_{O'} \neq 0 \Rightarrow \text{accelerazione di } O' \text{ rispetto ad } O \text{ (accelerazione di trascinamento)}$$

$$\frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v} - \vec{v}_{O'}) \Rightarrow \frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{d\vec{v}_{O'}}{dt} \Rightarrow \vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_{O'}$$

Tutte queste relazioni

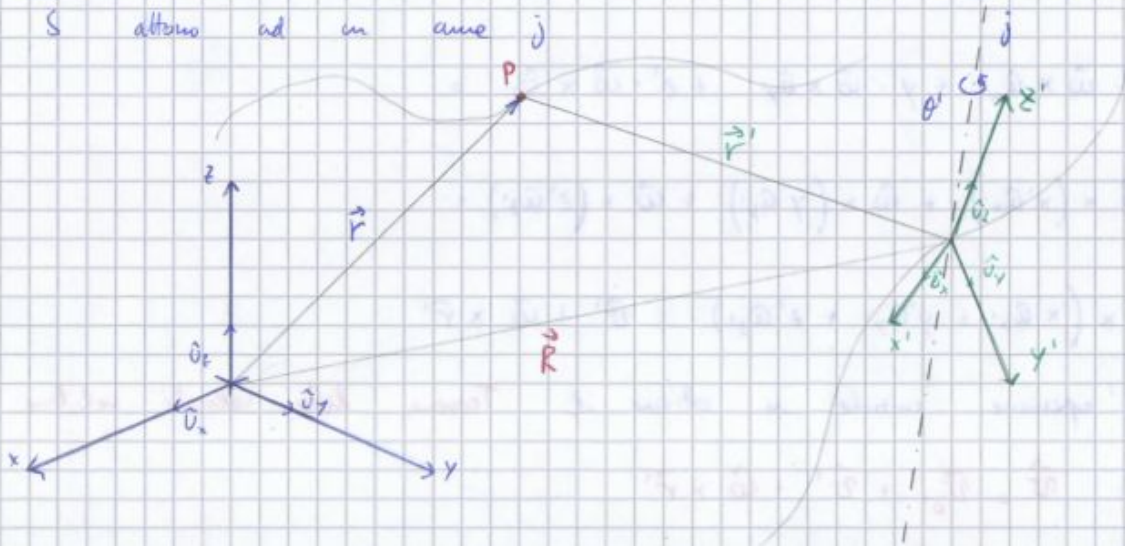
$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{R} ; \quad \vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_{O'} ; \quad \vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_{O'}$$

si chiamano **trasformazioni galileiane** e collegano due sistemi di riferimento  $S$  ed  $S'$  soggetti ad un moto relativo uniforme, cioè

$$\vec{a}_{O'} = 0 ; \quad \vec{v}_{O'} \neq 0 = \text{cost}$$

Un sistema **inerziale** è dunque un sistema che rispetta queste due condizioni e per passare da un sistema inerziale ad uno non inerziale si usano le formule descritte prima \*

Consideriamo ora il caso in cui  $S'$  è ottenuto per traslazione e rotazione di  $S$  attorno ad un asse  $j$



con  $\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}'$  che esprime la velocità di traslazione.

### Teorema delle accelerazioni relative

Passiamo ora alle accelerazioni derivando ulteriormente:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{v}_0 + \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}') = \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt} = \\ &= \vec{a}_0 + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}') + \frac{d\vec{v}'}{dt} = \\ &= \vec{a}_0 + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \frac{d\vec{v}'}{dt}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{v}'}{dt} &= \frac{d}{dt} (v'_x \hat{u}_x + v'_y \hat{u}_y + v'_z \hat{u}_z) = \\ &= \frac{dv'_x}{dt} \hat{u}_x + \frac{d\hat{u}_x}{dt} \cdot v'_x + \frac{dv'_y}{dt} \hat{u}_y + \frac{d\hat{u}_y}{dt} v'_y + \frac{dv'_z}{dt} \hat{u}_z + \frac{d\hat{u}_z}{dt} v'_z = \\ &= a'_x \hat{u}_x + a'_y \hat{u}_y + a'_z \hat{u}_z + v'_x \vec{\omega} \times \hat{u}_x + v'_y \vec{\omega} \times \hat{u}_y + v'_z \vec{\omega} \times \hat{u}_z = \\ &= \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}'\end{aligned}$$

Sostituendo nell'espressione iniziale si ottiene il **Teorema delle accelerazioni relative**

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0 + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

con  $\vec{a}_0 + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{a}'$  che esprime l'accelerazione di traslazione, mentre  $2\vec{\omega} \times \vec{v}'$  viene detta **accelerazione di Coriolis**

### Sistemi inerziali e forze apparenti

In precedenza abbiamo definito un sistema di riferimento inerziale, cioè un sistema in cui vale rigorosamente la legge d'inerzia di Newton, la quale ci dice che se su di un corpo non agiscono forze o la risultante di esse è nulla, allora il corpo mantiene il suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme.

Tale situazione, verosimilmente, si verifica quando il punto è sufficientemente distante dagli altri corpi, in modo tale che si possano trascurare tutte le interazioni, ma quando è possibile bilanciare tutte le forze in maniera che la risultante risulti nulla (corpo libero o  $\vec{R} = 0$ ).

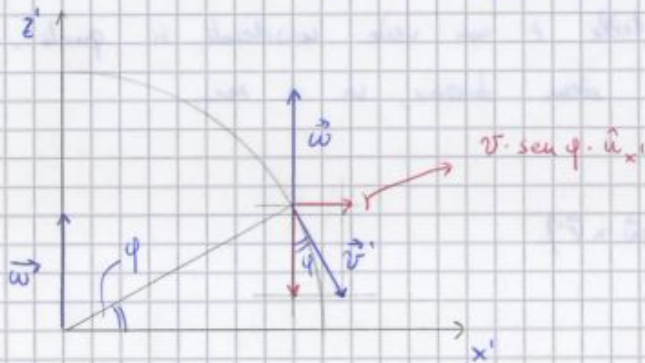
Moltiplicando tutto per  $m$  otteniamo

$$m \vec{a}' = m \vec{a} - m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2m \vec{\omega} \times \vec{v}' \quad \vec{N} = \text{reazione vincolare}$$

$\downarrow$   
 $F$

Questa forza  $F$  per il treno è data da  $\vec{P}$ , che, però, è facilmente bilanciata da  $\vec{N}$ , inoltre il valore di  $-m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$  è del tutto trascurabile, in quanto rappresentato una forza bilanciata con facilità dalla reazione vincolare, pertanto avremo che

$$m \vec{a}' = -2m \vec{\omega} \times \vec{v}'$$



Sostituendo otteniamo:

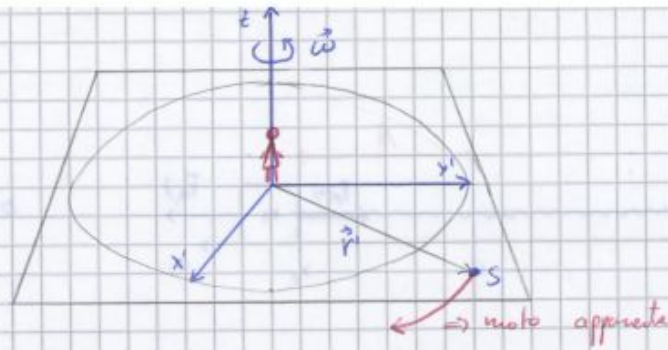
$$\begin{aligned} m \vec{a}' &= -2m \vec{\omega} \times (v \cdot \text{sen } \varphi \cdot \hat{u}_{x'}) = \\ &= -2m v \text{sen } \varphi (\vec{\omega} \times \hat{u}_{x'}) \Rightarrow \text{Essendo } \vec{\omega} = \omega \cdot \hat{u}_z \text{ si ha } \hat{u}_z \times \hat{u}_x = \hat{u}_y, \\ \Rightarrow \vec{F}' &= m \vec{a}' = -2m v \omega \text{sen } \varphi \cdot \hat{u}_y \end{aligned}$$

Quella così ottenuta è la cosiddetta forza fittizia, in quanto se  $\vec{\omega} = 0$  essa non si verrebbe, inoltre è la responsabile dell'erosione maggiore del binario destra del treno che percorre il meridiano da Nord a Sud.

### Caduta verso est dei corpi

Un altro effetto della rotazione della Terra è la caduta dei corpi verso Est, infatti, un corpo lasciato cadere dall'alto, non percorre una traiettoria perfettamente verticale, ma questa è leggermente deviata verso Est. Vediamo perché





$$S: \vec{v} = \vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{v}' = \cancel{\vec{v}} - \vec{\omega} \times \vec{r}' = -\vec{\omega} \times \vec{r}'$$

$$\vec{a}' = \cancel{\vec{a}} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}' - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

Sostituendo otteniamo

$$\vec{a}' = +2\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') =$$

$$= \vec{\omega} \left( \underbrace{\langle \vec{\omega}, \vec{r}' \rangle}_{\text{skt } \perp} \right) - \vec{r}' \left( \langle \vec{\omega}, \vec{\omega} \rangle \right) = -\vec{r}' \cdot \omega^2 \Rightarrow \vec{a}' = -\vec{r}' \omega^2 \Rightarrow \text{accelerazione centripeta}$$

Dalle formule si evince che per l'osservatore il punto non è fermo, ma si sta muovendo con accelerazione costante, che si muove lungo un percorso circolare e che ruota in senso contrario alla giusta, cioè orario.

### Lezione 10 13/4/2012

#### Oscillatore armonico smorzato da una forza di attrito costante

Durante lo studio del moto armonico abbiamo considerato il moto di un punto materiale sotto l'effetto di una forza elastica dovuta ad una molla. Il billo era stato considerato senza attrito ed aveva portato ai seguenti risultati:

legge oraria:  $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

velocità:  $v(t) = \omega A \cos(\omega t + \varphi)$

$F_e(x) = -Kx$

accelerazione:  $a(t) = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi)$

equazione differenziale:  $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$

Questo caso, però, rappresenta il caso ideale, nella realtà noi sappiamo che  $\mu$  è sempre una forza di attrito che smorza il moto ed impedisce che questo continui all'infinito.

Andiamo dunque a vedere come cambiano le cose se consideriamo una forza di attrito dinamico costante.

$$\Rightarrow A' = A - \frac{2\mu d \cdot m \cdot g}{k} \quad (\text{se } F_a = 0, \mu d = 0 \Rightarrow A' = A \Rightarrow \text{moto armonico})$$

② trasporto da  $x_2$  a  $x_3$

$$E_k^p - E_k^i = -(E_p^p - E_p^i) + \int_{x_i}^{x_f} -F_a \cdot dx \Rightarrow 0 = -\left(\frac{k}{2} x_2^2 - \frac{k}{2} x_1^2\right) - F_a \int_{x_1}^{x_2} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{k}{2} (x_2^2 - x_1^2) = -\mu d \cdot m \cdot g \cdot (x_2 - x_1) \Rightarrow \frac{k}{2} (A''^2 - A'^2) = -\mu d \cdot m \cdot g (A'' + A') \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{k}{2} (A'' + A') (A'' - A') = -\mu d \cdot m \cdot g (A'' + A') \Rightarrow A'' - A' = -\frac{2\mu d \cdot m \cdot g}{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A'' = A' - \frac{2\mu d \cdot m \cdot g}{k}$$

Unendo le due espressioni otteniamo:

$$x_2 = A \Rightarrow x_3 = A'' = A' - \frac{2\mu d \cdot m \cdot g}{k} = A - \frac{2\mu d \cdot m \cdot g}{k} - \frac{2\mu d \cdot m \cdot g}{k} \Rightarrow$$

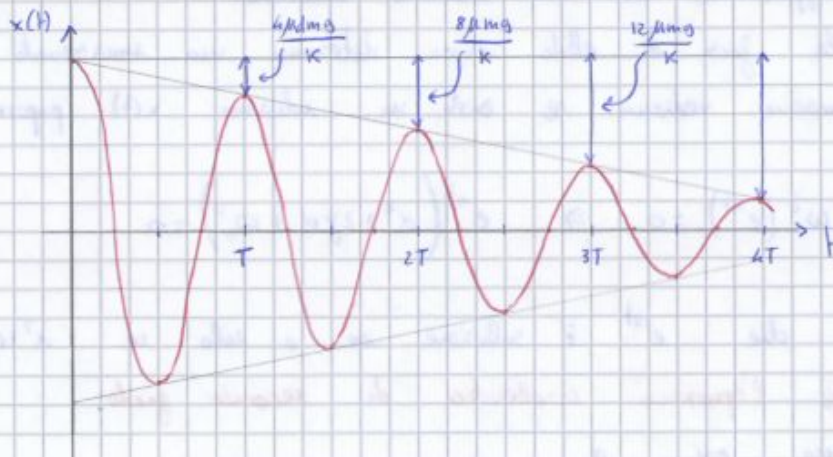
$$x_3 = A - \frac{4\mu d \cdot m \cdot g}{k}$$

Con ciò ho scoperto che ogni volta che avviene un'andata ed un ritorno, l'ampiezza si riduce di un fattore  $\frac{4\mu d \cdot m \cdot g}{k}$ , dipendente dall'attrito dinamico.

La formula generale sarà dunque:

$$x_n = A - \frac{2n\mu d \cdot m \cdot g}{k}$$

dove  $n$  indica il numero di movimenti effettuati (completi). Da un punto di vista grafico avremo una sinusoide con archi lineari decrescenti.



Come si può vedere dunque il moto non è strettamente periodico, tuttavia il periodo  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  resta lo stesso e prende il nome di **pseudoperiodo**.



Abbiamo così 3 casi possibili:

-  $\gamma^2 > \omega_0^2$  : smorzamento forte

-  $\gamma^2 = \omega_0^2$  : smorzamento critico

-  $\gamma^2 < \omega_0^2$  : smorzamento debole

Caso 1: smorzamento forte ( $\gamma$  grande)

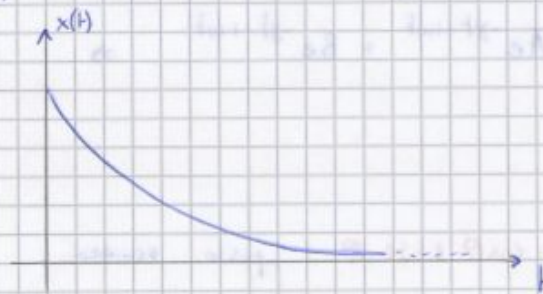
$\gamma^2 > \omega_0^2 \Rightarrow R = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} > 0 \Rightarrow \alpha$  ha due soluzioni reali e distinte date da:

$$\alpha_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad \text{e} \quad \alpha_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad \text{entrambe negative (perché } R < \gamma)$$

La soluzione più generale dell'equazione differenziale sarà dunque:

$$x(t) = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t} = e^{-\gamma t} (Ae^{+tR} + Be^{-tR})$$

Dunque un semplice moto smorzato esponenzialmente:



Caso 2: smorzamento critico

$\gamma^2 = \omega_0^2 \Rightarrow R = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = 0 \Rightarrow \alpha$  ha 2 sol. reali e coincidenti date da

$$\alpha_1 = \alpha_2 = -\gamma$$

Ritornando alla soluzione generale trovata prima e sostituendo otteniamo:

$$x(t) = e^{-\gamma t} (Ae^{+tR} + Be^{-tR}) \quad \text{x gli sviluppi di McLaurin con } R \rightarrow 0 \text{ si ha:}$$

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left( A \left( 1 - tR + \frac{1}{2} t^2 R^2 + \dots \right) + B \left( 1 + tR + \frac{1}{2} t^2 R^2 + \dots \right) \right) \Rightarrow$$

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left( \underbrace{(A+B)}_b + \underbrace{(B-A)}_a tR + \dots \right) \Rightarrow x(t) = e^{-\gamma t} (at + b)$$

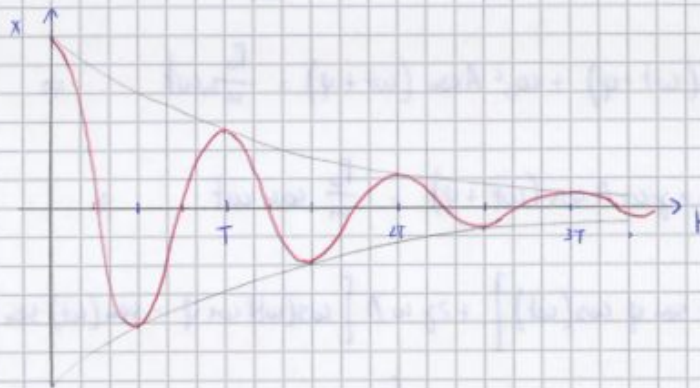
Che può essere scritto come

$$x(t) = A_0 e^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

In tal caso lo pseudo periodo  $T$  sarà dato da:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$

Graficamente avremo un sinusoidale controllato dall'esponenziale che dunque descrive un moto pseudoperiodico diverso da quello descritto con l'intervento dell'abito dinamico



Accogliendo i casi fino ad ora studiati possiamo dire che in un moto armonico il corpo tende a ritornare nella sua posizione di equilibrio sotto l'effetto della forza elastica. Se non c'è abito l'oscillazione è indefinita, cioè continua fino all'infinito, se invece c'è abito, costante o viscoso, si ha un'oscillazione smorzata che si esaurisce in un certo lasso di tempo.

Dato che l'abito è sempre presente, il moto armonico è sempre smorzato.

Vediamo ora di studiare il modo per rendere l'oscillazione **permanente**, cioè come si può realizzare un sistema fisico reale che oscilla con frequenza definita ed ampiezza costante, nonostante la presenza di un abito viscoso.

Studiamo cioè il cosiddetto **oscillatore armonico forzato**.

### Oscillatore armonico forzato

Per poter ottenere questo risultato è indispensabile applicare una **forza esterna sinusoidale**, in modo tale che l'equazione differenziale sia:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$$

Come si può vedere l'equazione non è più omogenea, pertanto la soluzione generale

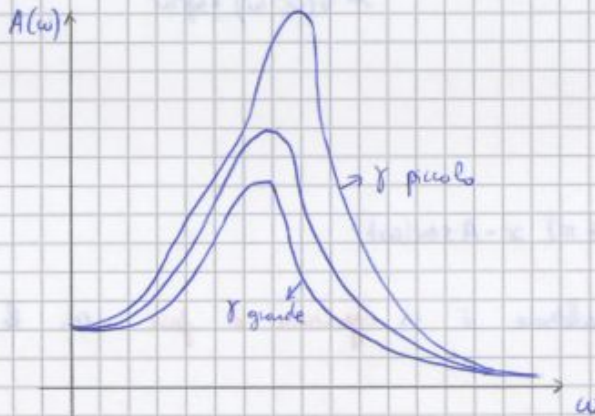
Mentre la fase  $\varphi$  è data da:

$$\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = -\frac{R \sin \varphi}{R \cos \varphi} \Rightarrow -\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Dall'espressione dell'ampiezza  $A$  è possibile definire il suo valore massimo:

$$\frac{dA}{d\omega} = 0 \Rightarrow \frac{F_0}{m} \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{\left(\dots\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left[-4\omega(\omega_0^2 - \omega^2) + 8\gamma^2\omega\right] = 0 \Rightarrow 8\gamma^2\omega = 4\omega(\omega_0^2 - \omega^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\gamma^2 = \omega_0^2 - \omega^2 \Rightarrow \omega_H = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$$



Il picco è sempre più pronunciato quando più  $\omega \rightarrow \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$ . Inoltre, in ogni caso quando sempre detta se non si fosse altro l'ampiezza tenderebbe all'infinito.

Lezione 11 17/4/2012

Continua moto armonico forzato

Ricapitolando, dall'analisi appena svolta abbiamo definito le formule per il calcolo dell'ampiezza  $A$ , della fase  $\varphi$  ed i valori di  $\sin \varphi$ ,  $\cos \varphi$  ed  $R$ :

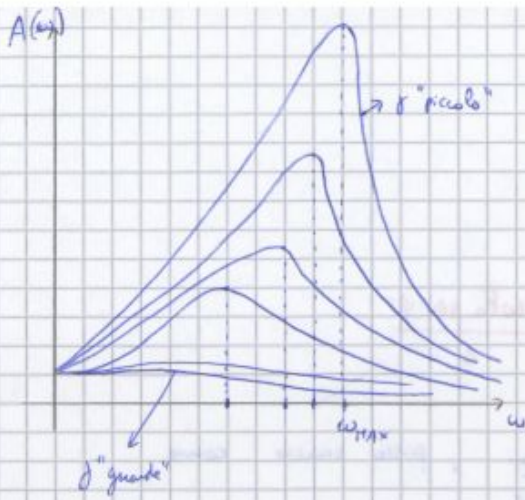
$$A = \frac{F_0}{mR} = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} ; \operatorname{tg} \varphi = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\sin \varphi = -\frac{2\gamma\omega}{R} ; \cos \varphi = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{R} ; R = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}$$

Tramite queste espressioni cerchiamo ora di analizzare lo spostamento del sistema in funzione della pulsazione della forzante, ossia  $\omega$ . Cerchiamo dunque i risultati a seconda del confronto tra  $\omega$  ed  $\omega_0$ .

1)  $\omega \ll \omega_0$

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \approx \frac{F_0}{m\omega_0^2} ; \operatorname{tg} \varphi = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \approx 0 \Rightarrow \varphi = 0$$



Le curve hanno valori di  $\omega_{max}$  diversi, perché per ognuno vi è un valore diverso di  $\gamma$   
 $(\omega_{max} = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2})$ .

$$\omega_{max} = \frac{2\pi}{T} \quad T \text{ potrebbe essere il tempo di risonanza}$$

### Risonanza in energia

Una forza  $F = F_0 \sin(\omega t)$  fa muovere l'oscillatore armonico con una certa velocità:  
 $x(t) = \omega A \cos(\omega t + \varphi)$ , pertanto è possibile calcolare la potenza istantanea fornita da tale forza:

$$\begin{aligned} P(t) &= F(t) \cdot v(t) = F_0 \sin(\omega t) \cdot \omega A \cos(\omega t + \varphi) = A\omega F_0 \cdot \sin(\omega t) (\cos(\omega t) \cos \varphi - \sin(\omega t) \sin \varphi) \\ &= A\omega F_0 \left[ (\sin(\omega t) \cos(\omega t) \cos \varphi) - (\sin(\omega t) \cdot \sin(\omega t) \cdot \sin \varphi) \right] = \\ &= A\omega F_0 \left[ \frac{1}{2} \sin(2\omega t) \cos \varphi - \sin^2(\omega t) \cdot \sin \varphi \right] = A\omega F_0 \left[ \frac{1}{2} \sin(2\omega t) \cos \varphi - \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} \sin \varphi \right] \\ &= A\omega F_0 \left[ \frac{\sin(2\omega t) \cos \varphi}{2} - \frac{\sin \varphi}{2} + \frac{\sin \varphi}{2} \cos(2\omega t) \right] \end{aligned}$$

A questo punto sfruttando il teorema della media integrato tra il tempo  $T$  ed il tempo  $T_0=0$ , calcola la potenza media fornita  $\langle P(t) \rangle$ .

$$\langle P(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{A\omega F_0}{T} \int_0^T \left[ \frac{\cos \varphi}{2} \sin(2\omega t) - \frac{\sin \varphi}{2} + \frac{\sin \varphi}{2} \cos(2\omega t) \right] dt$$

Osserviamo che:

$$\begin{aligned} 1) \int_0^T \sin(2\omega t) dt &= \left[ -\frac{\cos(2\omega t)}{2\omega} \right]_0^T = -\frac{\cos(2\omega T)}{2\omega} + \frac{\cos(0)}{2\omega} = -\frac{\cos(2\omega \frac{2\pi}{\omega})}{2\omega} + \frac{1}{2\omega} = \\ &= -\frac{\cos(4\pi)}{2\omega} + \frac{1}{2\omega} = -\frac{1}{2\omega} + \frac{1}{2\omega} = 0 \end{aligned}$$

$$2) \int_0^T \cos(2\omega t) dt = \left[ \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega} \right]_0^T = \frac{\sin(2\omega T)}{2\omega} - \frac{\sin(0)}{2\omega} = \frac{\sin(4\pi)}{2\omega} - \frac{\sin(0)}{2\omega} = 0$$

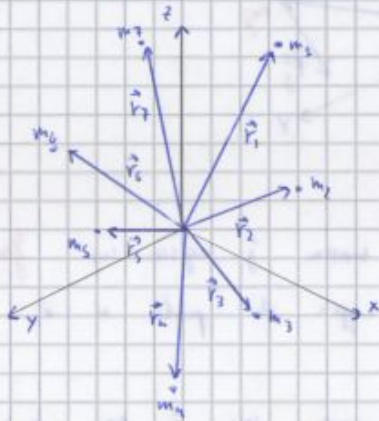
### Dinamica dei sistemi dei punti materiali

Fino ad ora abbiamo studiato la dinamica di punti materiali isolati, ora, invece ci occupiamo di sistemi con  $n$  punti materiali che interagiscono tra loro e con l'universo.

### Centro di massa

Si definisce centro di massa  $\vec{R}_{cm}$  il vettore dato da

$$\vec{R}_{cm} = \frac{\sum_{j=1}^N m_j \vec{r}_j}{\sum_{j=1}^N m_j} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N m_j \vec{r}_j$$



Ass: se  $m_j = m \Rightarrow \vec{R}_{cm} = \frac{m \sum_{j=1}^N \vec{r}_j}{nm} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \vec{r}_j \rightarrow \vec{r}$  un semplice valore medio dei raggi vettoria

se  $m_1 \gg m_j \Rightarrow \vec{R}_{cm} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + \sum_{j=1}^N m_j \vec{r}_j}{m_1 + \sum_{j=1}^N m_j} \approx \frac{m_1 \vec{r}_1}{m_1} \approx \vec{r}_1 \rightarrow$  il centro di massa è più vicino al punto con massa più grande

In generale, per tutti i corp omogenei che presentano una certa simmetria, il centro di massa coincide con il centro geometrico.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Parentesi: } \vec{R}_{cm} = \frac{1}{M} \iiint_V d^3r \rho(\vec{r}) \vec{r} = \frac{1}{M} \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_1}^{z_2} dz \rho(\vec{r}) \vec{r} = \frac{1}{M} \iiint_V dm \cdot \vec{r} \\ \rho \cdot dV = dm \end{array} \right.$$

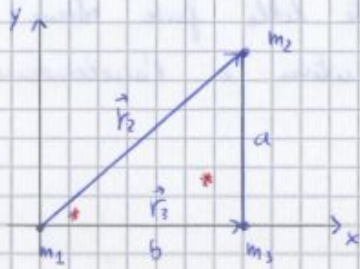
### Premesse per il teorema del centro di massa

Dato  $\vec{R}_{cm}$  è possibile calcolare:

$$\vec{V}_{cm} = \frac{d\vec{R}_{cm}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N m_j \vec{r}_j \right) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N m_j \frac{d\vec{r}_j}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N m_j \vec{v}_j$$

$$\vec{P}_{tot} = M \cdot \vec{V}_{cm} = M \cdot \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N m_j \vec{v}_j = \sum_{j=1}^N \vec{p}_j$$

Esercizio: trovare il centro di massa di 3 masse  $m_1, m_2, m_3$  poste ai vertici di un triangolo rettangolo di cateti  $a$  e  $b$ .



$$m_1: \vec{r}_1 = 0$$

$$m_2: \vec{r}_2 = b\hat{u}_x + a\hat{u}_y$$

$$m_3: \vec{r}_3 = b\hat{u}_x$$

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m_2 (b\hat{u}_x + a\hat{u}_y) + m_3 (b\hat{u}_x)}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{1}{M} b\hat{u}_x (m_2 + m_3) + \frac{1}{M} a\hat{u}_y m_2$$

1) se  $m_3 = 2m_1$  ed  $m_2 = m_1$

$$\vec{R}_{cm} = \frac{\hat{u}_x}{4m_1} b (3m_1) + \frac{\hat{u}_y}{4m_1} a (m_1) = \frac{3}{4} b \hat{u}_x + \frac{1}{4} a \hat{u}_y$$

2) se  $m_3 = 10^6 m_1$  ed  $m_2 = 10^3 m_1$

$$\vec{R}_{cm} = \frac{\hat{u}_x \cdot b (10^3 m_1 + 10^6 m_1)}{m_1 + 10^3 m_1 + 10^6 m_1} + \frac{\hat{u}_y \cdot a \cdot 10^3 m_1}{m_1 + 10^3 m_1 + 10^6 m_1} = \hat{u}_x b \frac{10^3 + 10^6}{1 + 10^3 + 10^6} + \hat{u}_y a \frac{10^3}{1 + 10^3 + 10^6} =$$

$$= \hat{u}_x \cdot \frac{b}{10^3} + \hat{u}_y \cdot \frac{a}{10^3}$$

Prova per le successive dimostrazioni

$J \rightarrow J'$  con  $c.d.m \equiv O'$

$$\vec{r}_j' = \vec{r}_j - \vec{R}_{cm}$$

$$\vec{R}_{cm}' = \frac{1}{M} \sum_j m_j \cdot \vec{r}_j' = \frac{1}{M} \sum_j m_j (\vec{r}_j - \vec{R}_{cm}) = \frac{1}{M} \sum_j m_j \vec{r}_j - \frac{1}{M} \sum_j m_j \vec{R}_{cm} =$$

$$= \vec{R}_{cm} - \frac{1}{M} \cdot M \cdot \vec{R}_{cm} = 0$$

$$\vec{v}_j' = \vec{v}_j - \vec{V}_{cm}$$

$$\vec{V}_{cm}' = \frac{1}{M} \sum_j m_j \vec{v}_j' = \frac{1}{M} \sum_j m_j (\vec{v}_j - \vec{V}_{cm}) = \frac{1}{M} \sum_j m_j \vec{v}_j - \frac{1}{M} \sum_j m_j \vec{V}_{cm} =$$

$$= \vec{V}_{cm} - \frac{1}{M} M \vec{V}_{cm} = 0$$

Restante:  $\sum_j m_j \vec{r}_j' = 0$        $\sum_j m_j \vec{v}_j' = 0$

$-\vec{v}_j$  = velocità della massa  $j$ -esima;

$-\vec{v}_p$  = velocità del polo  $P$ .

Osserviamo, graficamente, che:  $\vec{S}_j = \vec{R}_p + \vec{r}_j$ , pertanto:

$$\vec{v}_j = \frac{d\vec{S}_j}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{R}_p + \vec{r}_j) = \vec{v}_p + \frac{d\vec{r}_j}{dt} \Rightarrow \vec{v}_j = \vec{v}_p + \frac{d\vec{r}_j}{dt}$$

Come si può notare  $\frac{d\vec{r}_j}{dt}$ , cioè la velocità della massa  $j$ -esima osservata dal polo  $P$ , non ha un nome particolare, questo perché, durante la successiva dimostrazione questi termini si cancellano e dunque è inutile attribuirgli una sigla speciale.

Andiamo ora a studiare la variazione del momento angolare totale  $\vec{L}$  dato da

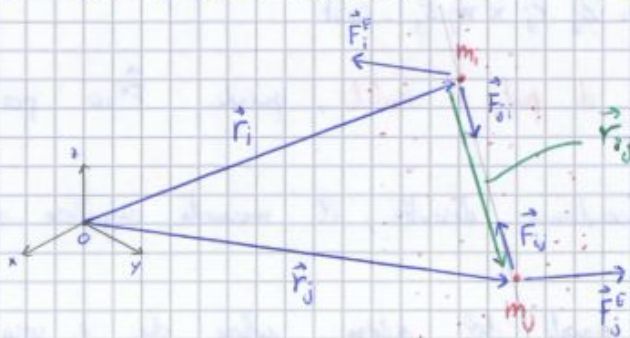
$$\vec{L} = \sum_j \vec{r}_j \times m_j \vec{v}_j$$

cioè dalla somma di tutte le masse che compongono il sistema.

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \sum_j \vec{r}_j \times m_j \vec{v}_j \right) = \frac{d}{dt} \left( \sum_j m_j \vec{r}_j \times \vec{v}_j \right) = \sum_j m_j \frac{d}{dt} \left( \vec{r}_j \times \vec{v}_j \right) = \\ &= \sum_j m_j \left[ \frac{d\vec{r}_j}{dt} \times \vec{v}_j + \vec{r}_j \times \frac{d\vec{v}_j}{dt} \right] = \sum_j m_j \left[ (\vec{v}_j - \vec{v}_p) \times \vec{v}_j + \vec{r}_j \times \vec{a}_j \right] = \\ &= \sum_j m_j \left[ \vec{v}_j \times \vec{v}_j - \vec{v}_p \times \vec{v}_j + \vec{r}_j \times \vec{a}_j \right] = \sum_j \left[ -\vec{v}_p \times m_j \vec{v}_j + \vec{r}_j \times m_j \vec{a}_j \right] = \\ &= \sum_j \left[ -\vec{v}_p \times m_j \vec{v}_j + \vec{r}_j \times \vec{F}_j \right] = -\sum_j \vec{v}_p \times m_j \vec{v}_j + \sum_j \vec{r}_j \times \vec{F}_j = \\ &= -\vec{v}_p \times \sum_j m_j \vec{v}_j + \sum_j \vec{r}_j \times \vec{F}_j = -\vec{v}_p \times M \vec{V}_{cm} + \sum_j \vec{r}_j \times \left( \vec{F}_j^E + \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij} \right) = \\ &= -\vec{v}_p \times M \vec{V}_{cm} + \sum_j \vec{r}_j \times \vec{F}_j^E + \sum_j \vec{r}_j \times \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij} = \end{aligned}$$

Analizziamo ora l'ultima termine, ossia

$$\sum_j \sum_{i \neq j} \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij}$$

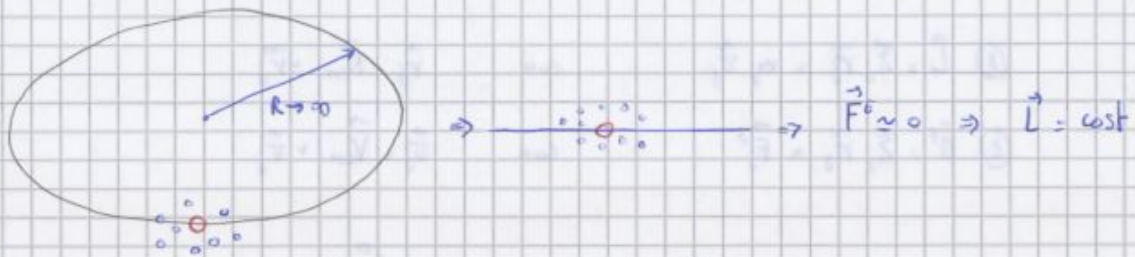


Per il principio di azione-reazione

$$\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$$

estere, tuttavia queste sono così deboli da poter essere trascurate.  
 Inoltre è vero che il sistema solare è "immerso" nella galassia, tuttavia questa ha un raggio così grande che il moto del sistema solare, nel suo complesso, può essere considerato rettilineo e uniforme, pertanto sono verificate le condizioni del caso 3.

dalla legge di Newton si possiamo affermare che per tutti i corpi del sistema solare il momento angolare si conserva.



**Collaudo del teorema del momento angolare (dimostrazione facoltativa)**

Il collaudo che verrà di seguito dimostrato potrà essere applicato ogniqualvolta il polo  $P$  coinciderà con il centro di massa del sistema, cioè  $P \equiv c.m.$

La scelta del polo per la risoluzione di un problema è a discrezione di chi sta risolvendo il problema, pertanto questo collaudo è molto comodo, perché ci consente di trovare facilmente la soluzione di problemi, altrimenti molto difficili, semplicemente effettuando una scelta appropriata del sistema di riferimento.

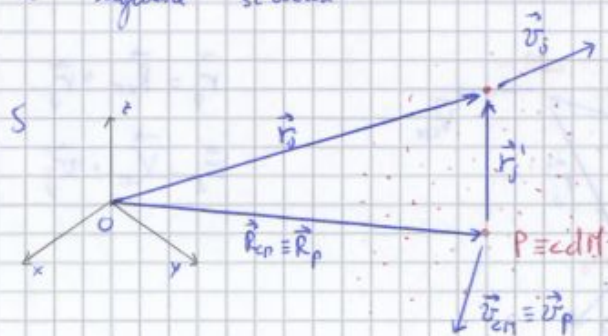
Tale collaudo ci dice che il teorema del momento angolare vale anche in un sistema non inerziale purché, come polo, si scelga il centro di massa; al calcolo del momento contribuiscono solo le forze vere (esterne).

La formula è:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{H}^E \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{H}^E$$

dove le grandezze con l'apice "E" fanno tutto riferimento al polo coincidente con il centro di massa.

Osserviamo il seguente schema





Il momento angolare, come sempre, è dato da:

$$\vec{L} = \sum_j \vec{r}_j \times m_j \vec{v}_j$$

Riscrivendo sostituendo  $\vec{r}_j$  e  $\vec{v}_j$  con le espressioni appena enunciate:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_j \left( (\vec{R}_{cm} + \vec{r}'_j) \times m_j (\vec{V}_{cm} + \vec{v}'_j) \right) = \sum_j m_j \left[ \vec{R}_{cm} \times \vec{V}_{cm} + \vec{R}_{cm} \times \vec{v}'_j + \vec{r}'_j \times \vec{V}_{cm} + \vec{r}'_j \times \vec{v}'_j \right] = \\ &= \sum_j m_j \vec{R}_{cm} \times \vec{V}_{cm} + \sum_j \vec{R}_{cm} \times m_j \vec{v}'_j + \sum_j m_j \vec{r}'_j \times \vec{V}_{cm} + \sum_j m_j \vec{r}'_j \times \vec{v}'_j = \\ &= \sum_j m_j \vec{R}_{cm} \times \vec{V}_{cm} + \vec{R}_{cm} \times \sum_j m_j \vec{v}'_j + \sum_j m_j \vec{r}'_j \times \vec{V}_{cm} + \sum_j m_j \vec{r}'_j \times \vec{v}'_j = \\ &= \sum_j m_j \vec{R}_{cm} \times \vec{V}_{cm} + \vec{L}' \Rightarrow \vec{L} = M \vec{R}_{cm} \times \vec{V}_{cm} + \vec{L}' = \vec{L}_{cm} + \vec{L}' \end{aligned}$$

Pertanto il momento angolare del sistema di punti si può scrivere come la somma tra il momento angolare del centro di massa in moto e il momento angolare del sistema rispetto al centro di massa.

Osserviamo che se il polo coincide con il centro di massa, si ritorna alla condizione in cui  $\vec{L} = \vec{L}'$ , in quanto  $\vec{R}_{cm}$  sarebbe uguale a zero.

### 2° Teorema di König

Utilizzando il medesimo schema del 1° teorema, calcoliamo l'energia cinetica del sistema di punti. Essa dunque vale:

$$E_k = \sum_j \frac{1}{2} m_j \vec{v}_j^2$$

Sostituendo  $\vec{v}_j$  con le solite espressioni otteniamo:

$$\begin{aligned} E_k &= \sum_j \frac{1}{2} m_j (\vec{V}_{cm} + \vec{v}'_j)^2 = \sum_j \frac{1}{2} m_j \left( \vec{V}_{cm}^2 + 2 \vec{V}_{cm} \times \vec{v}'_j + \vec{v}'_j^2 \right) = \\ &= \sum_j \frac{1}{2} m_j \vec{V}_{cm}^2 + \sum_j m_j \vec{V}_{cm} \times \vec{v}'_j + \sum_j \frac{1}{2} m_j \vec{v}'_j^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_j m_j \vec{V}_{cm}^2 + \vec{V}_{cm} \times \sum_j m_j \vec{v}'_j + \frac{1}{2} \sum_j m_j \vec{v}'_j^2 = \frac{1}{2} M \vec{V}_{cm}^2 + E_k' = E_{k,cm} + E_k' \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E_k = E_{k,cm} + E_k'$$

Pertanto l'energia cinetica di un sistema di punti è data dalla somma tra l'energia cinetica del centro di massa in moto e l'energia cinetica del sistema di punti rispetto al centro di massa.

Lezione 12 24/4/2012

**Teorema della conservazione dell'energia per un sistema di punti**

Durante lo studio della dinamica del punto abbiamo definito il principio di conservazione dell'energia meccanica, il quale ci diceva che, per un punto, l'energia meccanica si conserva durante il moto del punto stesso, cioè

$$E_k^A + E_p^A = E_k^B + E_p^B$$

Un teorema analogo vale per un sistema di  $N$  punti, con l'unica differenza che i valori di energia cinetica e potenziale, in questo caso, variano di espressione.

La nostra tesi sarà dunque definire la conservazione dell'energia meccanica come

$$E_k^A + E_p^A = E_k^B + E_p^B \quad \text{dove: } \textcircled{1} \quad E_k^A = \frac{1}{2} \sum_j m_j \vec{v}_{j,A}^2 \quad - \quad E_k^B = \frac{1}{2} \sum_j m_j \vec{v}_{j,B}^2$$

$$\textcircled{2} \quad E_p^A = \sum_j U_A^E + \frac{1}{2} \sum_{(i,j)} U_{A(i,j)}^I \quad - \quad E_p^B = \sum_j U_B^E + \frac{1}{2} \sum_{(i,j)} U_{B(i,j)}^I$$

Andiamo ora per ordine:

**① Energia cinetica per un sistema di punti**

Per una particella avevamo visto che:  $dW = m v dv$ . Per un sistema di punti, il discorso è analogo, solo che il lavoro infinitesimo  $dW$  del sistema è dato da tutti gli infinitesimi contributi delle  $j$  particelle che costituiscono il sistema, pertanto si ha che

$$dW_j = \sum_j m_j v_j dv_j$$

Integrando entrambi i membri otteniamo:

$$W = \int_A^B \sum_j m_j v_j dv_j = \sum_j \int_A^B m_j v_j dv_j = \sum_j m_j \int_A^B v_j dv_j = \sum_j m_j \left[ \frac{1}{2} v_j^2 \right]_A^B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} \sum_j m_j v_{j,B}^2 - \frac{1}{2} \sum_j m_j v_{j,A}^2 = E_k^B - E_k^A$$

Dove  $v_{j,A}$  e  $v_{j,B}$  sono le velocità della  $j$ -esima particella all'istante  $A$  e  $B$ , mentre  $E_k^B$  ed  $E_k^A$  sono le energie cinetiche totali del sistema, all'istante  $A$  e  $B$ .

Quello che è stato così ottenuto esprime il **teorema dell'energia cinetica per un sistema di punti materiali**.