NUMERO: 878

DATA: 12/03/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Lacirignola

MATERIA: Teoria dei Segnali

Prof. Galleani

2/10/12 POTENZA

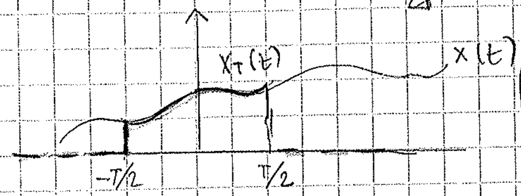
$$\boxed{P_x = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2\,dt}$$ definizione

Com'è legata all'energia?

$$= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |x_T(t)|^2\,dt}_{\mathcal{E}_{x_T}}$$

Come posso uguagliarlo? dove:

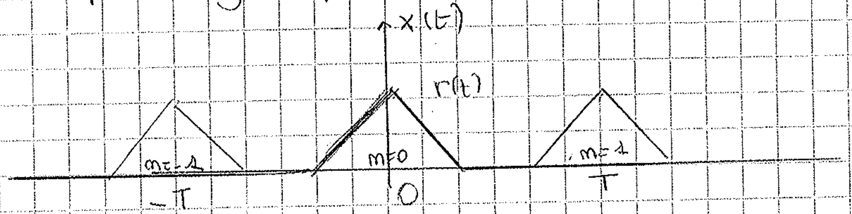
$$x_T(t) = \begin{cases} x(t), & |t| \le T/2 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$



Quindi:

$$P_x = \lim_{T\to+\infty} \frac{\mathcal{E}_{x_T}}{T}$$ energia nell'unità di tempo

Esempio: Segnali periodici



$$\mathcal{E}_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}_r = +\infty\,!$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r(t-nT)$$

Si può dimostrare che la potenza,

$$\boxed{P_x = \frac{\mathcal{E}_r}{T}}$$ dimostrare

ENERGIA / POTENZA

$x(t)$
- $\mathcal{E}_x < +\infty$: segnale a energia finita [segnali del mondo fisico]
- $\mathcal{E}_x = +\infty$
  - $P_x < +\infty$: Segnali a pot. finita [segnali periodici]
  - $P_x = +\infty$: Segnali a potenza infinita [Processi casuali, Rumore bianco]

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mu_m e^{+i\frac{2\pi}{T}mt}, \quad -\frac{T}{2}<t<\frac{T}{2}$$

$$\mu_m=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-i\frac{2\pi}{T}mt}\,dt$$

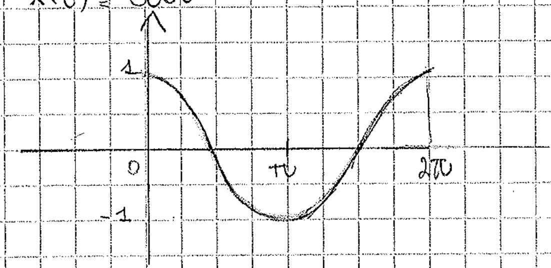
Ripasso sulle sinusoidi

Una sinusoide ha tre ingredienti:

1. Ampiezza
2. Frequenza
3. Fase

AMPIEZZA:

Consideriamo $x(t) = \cos t$

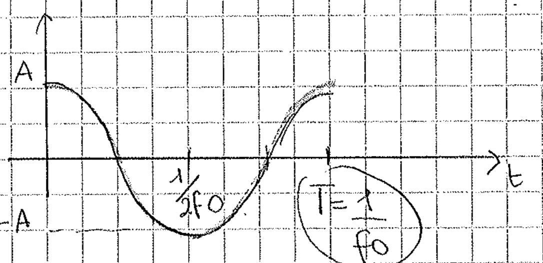


$x(t) = A\cos t$

FREQUENZA:

$x(t) = A\cos 2\pi f_0 t$

NOTA $\cos 2\pi f_0 t \equiv \cos(2\pi f_0 t)$



$f_0 = \frac{1}{T}$

NOTA

$x(t) = \cos(\underbrace{2\pi\cdot \text{qualcosa}}_{\text{frequenza}}\cdot t)$ Periodo: $\frac{1}{\text{qualcosa}}$

Nell'ipotesi che qualcosa non contenga t

3/10/12

Serie di Fourier

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n e^{+i\frac{2\pi}{T}nt} \quad , \quad -T/2 < t < T/2$$

ampiezza, fase

frequenza

$$\mu_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i\frac{2\pi}{T}nt} dt \qquad \text{prodotto scalare}$$

↳ segnale complesso

Scomposizione segnale in sinusoidi

I coefficienti μ_n sono numeri complessi. Quindi:

$$\mu_n = \underbrace{|\mu_n|}_{\text{ampiezza}} e^{+i\angle\mu_n}$$

fase

$$e^{+i\frac{2\pi}{T}nt} = \cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)$$

$$e^{+i\frac{2\pi}{T}nt} = e^{+i\,2\pi\frac{n}{T}\cdot t}$$

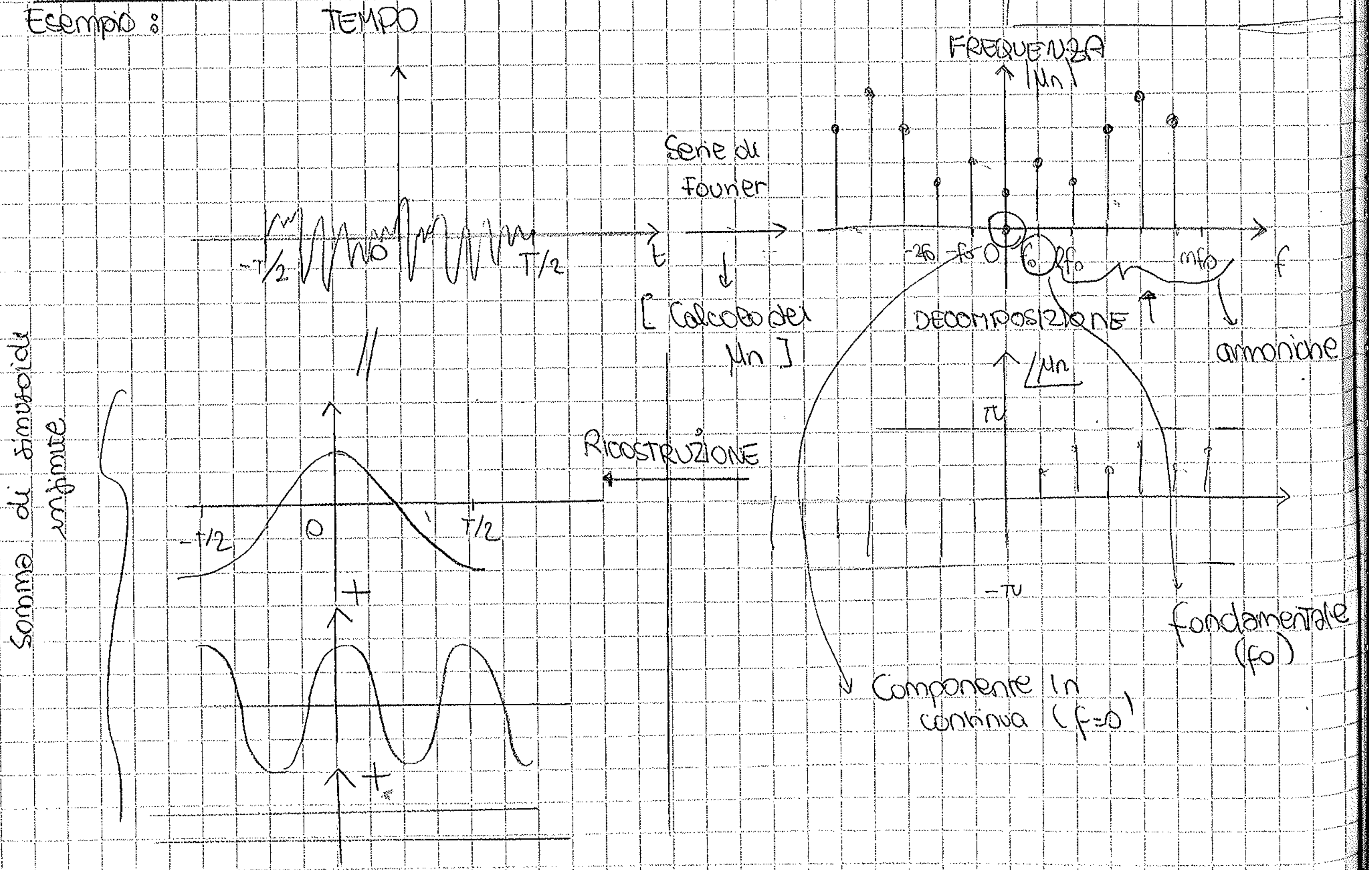
Frequenza: $\boxed{f_n = \frac{n}{T} \qquad f_n = nf_0 \qquad f_0 = \frac{1}{T}}$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n(t)$$

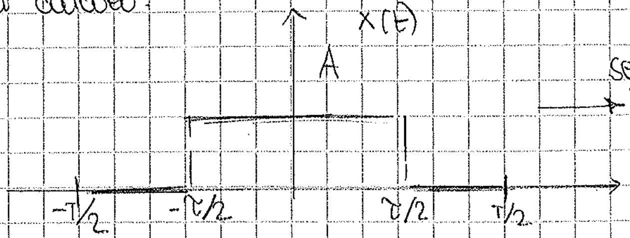
$$x_n(t) = |\mu_n| \cdot e^{i\angle\mu_n} \cdot e^{i2\pi f_n t} = |\mu_n| e^{i(2\pi f_n t + \angle\mu_n)}$$

forma della sinusoide complessa

Esempio:



Esempio di calcolo:



segnale porta → $\boxed{x(t) = A\,p_\tau(t)}$

$$p_\tau(t) = \begin{cases} 1, & |t| \le \tau/2 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\mu_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{-i\frac{2\pi}{T}nt}\, dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A p_\tau(t)\, e^{-i\frac{2\pi}{T}nt}\, dt$$

$$= \frac{A}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-i\frac{2\pi}{T}nt}\, dt$$

Nota: $\int e^{zt}\, dt = \frac{e^{zt}}{z}$, z complesso

$$= \frac{A}{T} \left. \frac{e^{-i\frac{2\pi}{T}nt}}{-i\frac{2\pi}{T}n} \right|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{A}{T} \frac{e^{-i\frac{2\pi}{T}n\tau/2} - e^{+i\frac{2\pi}{T}n\tau/2}}{-i\frac{2\pi}{T}n} =$$

$$= A \frac{e^{+i\frac{\pi n\tau}{T}} - e^{-i\frac{\pi n\tau}{T}}}{2i\pi n} \cdot \sin\frac{\pi n\tau}{T} = \boxed{\frac{A \sin \pi n\tau/T}{\pi n} = \mu_n}$$

↑ ampiezze e fasi

$$\mu_n = \frac{A \operatorname{sen} 2\pi \frac{\tau}{2} n/T}{\pi n} = \frac{A \operatorname{sen} 2\pi \frac{\tau}{2} n f_0}{\pi n}$$

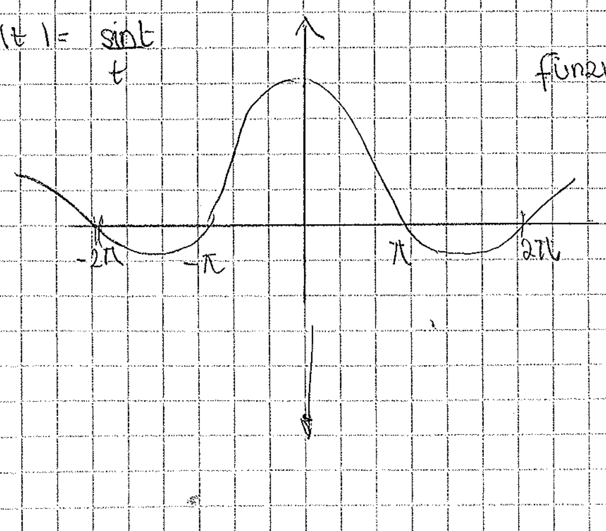
(frequenza)

$$= A\tau f_0 \frac{\operatorname{sen} \pi\tau n f_0}{\pi\tau n f_0}$$

PERIODO: $\frac{2}{\tau}$

FREQUENZA: $\frac{\tau}{2}$

NOTA: $x(t) = \frac{\sin t}{t}$ funzione sinc(t)



PASSAGGIO DALLA SERIE ~~DDF~~ ALLA TRASFORMATA DI FOURIER (POCO RIGOROSO)

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n e^{+i\frac{2\pi}{T}nt}, \quad -T/2 < t < T/2$$

$$\mu_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{-i\frac{2\pi}{T}nt}\, dt$$

Sostituzione:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t')\, e^{-i\frac{2\pi nt'}{T}}\, dt' \right) e^{+i\frac{2\pi}{T}nt}$$

Voglio $T \to \infty$, valutare il limite per $T \to +\infty$

Definiamo:

$$f_n = \frac{n}{T} = nf_0$$

$$\Delta f = f_n - f_{n-1} = \frac{n}{T} - \frac{n-1}{T} = \frac{1}{T} \qquad \Delta f = \frac{1}{T}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-T/2}^{T/2} x(t')\, e^{-i2\pi f_n t'}\, dt' \right) e^{+i2\pi f_n t}\, \Delta f$$

Quando $T \to +\infty$, succedono una serie di cose:

① $\Delta f \to df \quad \left[\lim_{T\to\infty} \Delta f = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} = 0 \ \ldots \right]$

② $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \to \int_{-\infty}^{+\infty}$

③ $f_n \to f$

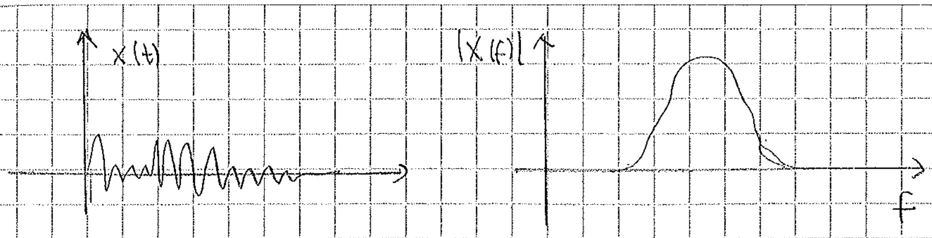
Sostituendo otteniamo $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t')\, e^{-i2\pi f t'}\, dt'}_{X(f)} \Big) e^{+i2\pi f t}\, df$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{+i2\pi f t}\, df$$ ANTITRASFORMATA

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-i2\pi f t}\, dt$$ TRASFORMATA

COPPIA DI TRASFORMATE DI FOURIER

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 132



[Billie Holiday]

ESISTENZA

La trasformata di Fourier esiste per tutti i segnali a energia finita su $-\infty < t < +\infty$

Spettro di energia

$$S_m(f) = |x(f)|^2$$

Uguaglianza di Parseval

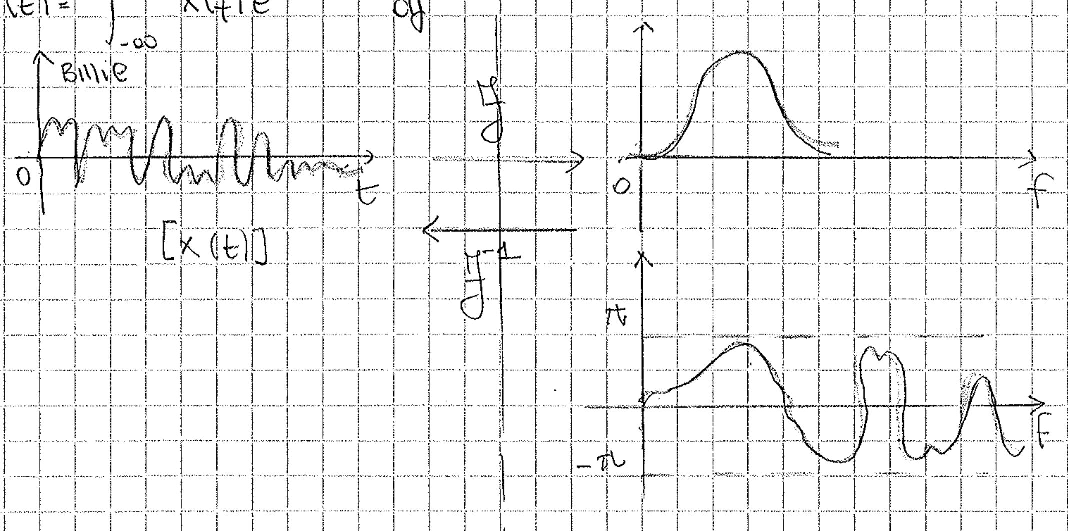
$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df$$

TRASFORMATA DI FOURIER

8/10/12

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i 2\pi f t} dt \qquad -\infty < t < +\infty$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{+i 2\pi f t} df$$



TEMPO $x(t)$ | $X(f)$ FREQUENZA

Nota :

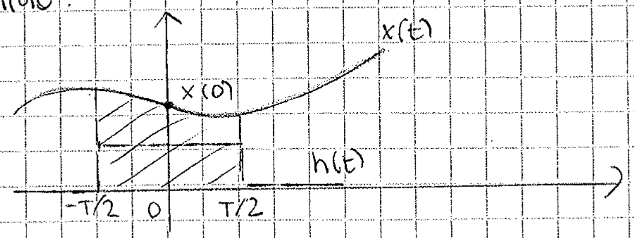
$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{+i 2\pi f t} df$$

Ampiezza fase

frequenza

(2) Strumento di misura ideale

ESEMPIO:



Vogliamo misurare $x(0)$

$$\boxed{x(0) \simeq \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, x(t)\, dt$$

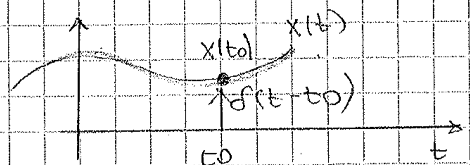
dove:

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{T}, & \text{se } -T/2 < t < T/2 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases} = \boxed{\frac{1}{T} p_T(t) = h(t)}$$

$$\lim_{T\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} h_T(t)\, x(t)\, dt = \boxed{x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, x(t)\, dt} \rightarrow \text{definiz. delta}$$

PROPRIETA':

1°) $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\, x(t)\, dt = x(t_0)$

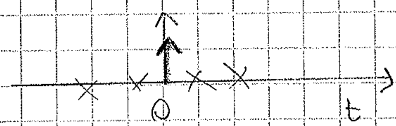


2°) $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$ DISTRIBUZIONE PARI

Nota:

$\delta(-t) = \delta(t)$

3°) $\delta(t) = 0 \quad , t \neq 0$



4°) $x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$

(in 0)

[Proprietà di campionamento]

5°) $$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi ft}\, dt = \delta(f)}$$

antitrasformata

NOTA

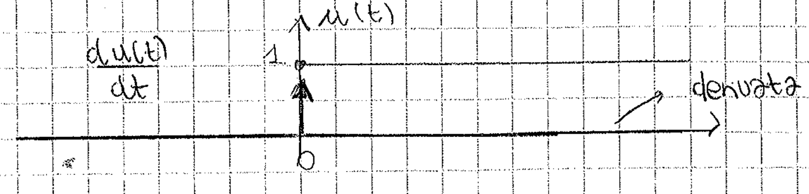
non contiene f

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi \cdot \text{qualcosa} \cdot t}\, dt = \delta(\text{qualcosa})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi ft}\, dt = \delta(f)$$

6°) Risolve i problemi di non derivabilità e continuità

$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$$



2 SIMMETRIA

Se un segnale $x(t)$ è reale, allora:

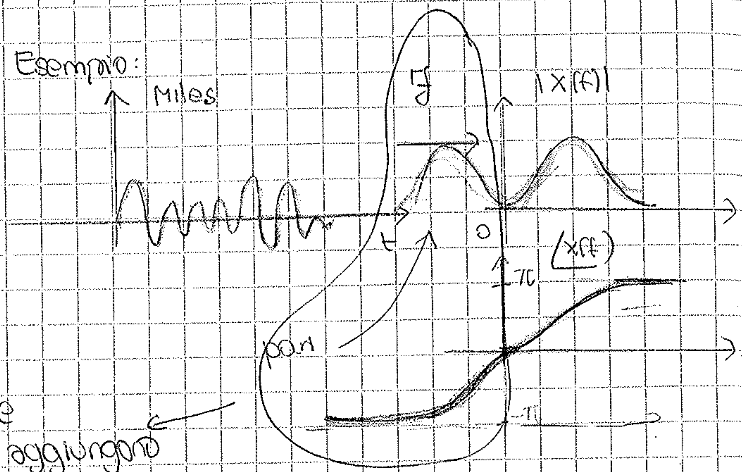
A) $\mathrm{Re}\{X(f)\}$ è pari

$\mathrm{Im}\{X(f)\}$ è dispari

B) $|X(f)|$ è pari

$\angle X(f)$ è dispari

Esempio:



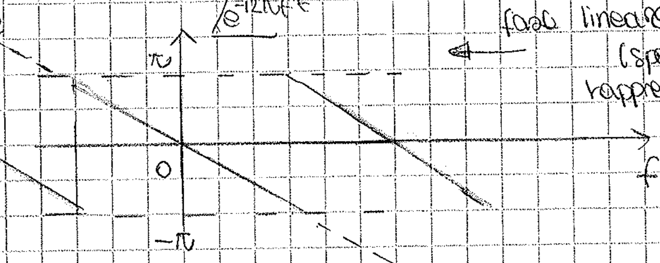
le frequenze negative non aggiungono informazione

3 ANTICIPO E RITARDO

$x(t)$ ritardato $\quad x(t-T) \longleftrightarrow X(f)\, e^{-i2\pi fT}$

$e^{-i2\pi fT}$: fattore di fase lineare

$\angle e^{-i2\pi ft} = -2\pi ft$



fase lineare (spezzato perché rappresentato tra $-\pi$ e π)

$x_1(t) = x(t \pm T)$

$X_1(f) = X(f)\, e^{-i2\pi fT}$

$S_{x_1}(f) = |X_1(f)|^2 = |X(f)\, e^{-i2\pi fT}|^2 = \underbrace{|X(f)|^2}_{S_{x_2}(f)} \cdot \underbrace{|e^{-i2\pi fT}|^2}_{=1}$

spettro di energia

Quindi : $S_{x_1}(f) = S_{x_2}(f)$ lo spettro di energia rimane invariato

4 MODULAZIONE

$\boxed{x(t)\, e^{\pm i2\pi f_0 t} \longleftrightarrow X(f \mp f_0)}$ per trasportare il segnale nella banda di interesse

Esempio: Se $x_1(t) = x(t)\, e^{+i2\pi f_0 t}$

$X_1(f) = X(f - f_0)$

- Prodotto

$$x_1(t)\,x_2(t) \longleftrightarrow X_1(f) * X_2(f)$$

$$X_1(f) * X_2(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(f-f')\,X_2(f')\,df'$$

(7) DERIVAZIONE

$$\underbrace{\frac{dx(t)}{dt}}_{\text{op. differenziale}} \longleftrightarrow \underbrace{i2\pi f X(f)}_{\text{op. algebrica}}$$

Esempio:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_0 y(t) = x(t) \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \mathcal{F}\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_0 y(t)\right\} = \mathcal{F}\{x(t)\} = X(f)$$

$$\underbrace{\mathcal{F}\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right\}}_{(i2\pi f)^2 \cdot Y(f)} + \underbrace{\mathcal{F}\{a_0 y(t)\}}_{Y(f)} = X(f)$$

$$= -4\pi^2 f^2 Y(f) + a_0 Y(f) = X(f)$$

$$= Y(f)\left[a_0 - 4\pi^2 f^2\right] = X(f)$$

$$\boxed{Y(f) = \frac{1}{a_0 - 4\pi^2 f^2} X(f)}$$

(8) PRINCIPIO DI INDETERMINAZIONE

Consideriamo un segnale a energia finita $x(t)$. Definiamo due quantità:

- Durata del segnale : $T^2 = \frac{1}{\mathcal{E}_x}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |x(t)|^2 dt$

- Banda : $B^2 = \frac{4\pi^2}{\mathcal{E}_x}\int_{-\infty}^{+\infty} f^2 |X(f)|^2 df$

È : $\boxed{BT \geq \frac{1}{2}}$ ← principio

Definiamo: $p(t) = \frac{|x(t)|^2}{\mathcal{E}_x}$

(1) $\boxed{p(t) \geq 0}$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} p(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x(t)|^2}{\mathcal{E}_x} dt = \frac{1}{\mathcal{E}_x}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt}_{\mathcal{E}_x} = \boxed{1}$!

$p(t)$ è una densità di probabilità

9/10/12

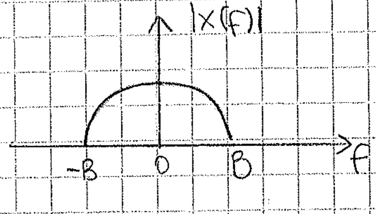
9 VARIABILITA' NEL TEMPO

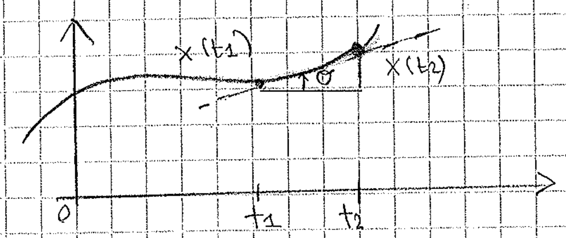
Dato un segnale $x(t)$ a energia finita e banda limitata B, e'

$$\left| \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \right| \leq 2\pi B \int_{-B}^{+B} |X(f)|\, df$$

per $t_1 \neq t_2$

Nota $x(t)$ e' a banda limitata B se $|X(f)| = 0$ per $|f| > B$

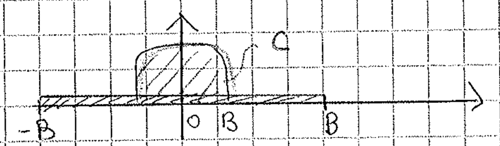




$$\left| \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \right| = |\,tg\,\theta\,|$$

Supponiamo di fissare

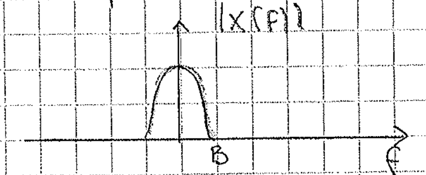
$$\int_{-B}^{B} |X(f)|\, df = C$$

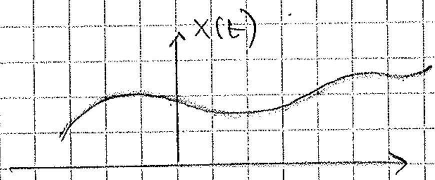


$$\left| \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \right| \leq 2\pi B C$$

↳ massima velocita' di variazione ammessa

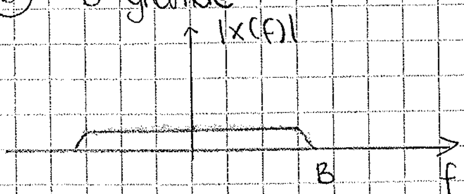
(A) B piccolo

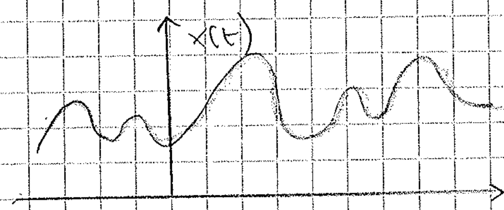




Variazioni lente (smooth)

(B) B grande

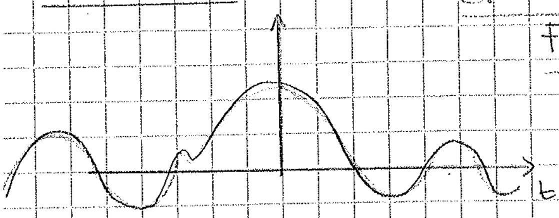




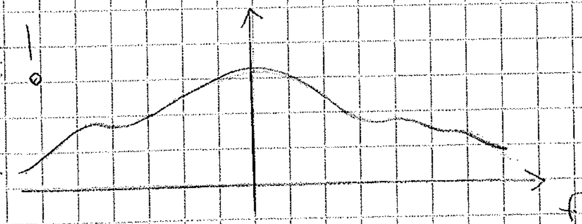
Supponiamo di fissare B :

Posso far variare $|X(f)|$

Domandone 2



SI PUO' FARE!



(11) DUALITA'

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-i2\pi ft}\, dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{+i2\pi ft}\, df$$

ESEMPIO:

→ TAVOLE DELLA TRASFORMATA

ESEMPIO: $y(t) = kx(t)$

$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

$y(t) = k[x_1(t) + x_2(t)]$

$= \underbrace{kx_1(t)}_{y_1(t)} + \underbrace{kx_2(t)}_{y_2(t)}$

$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ lineare!

ESEMPIO: $y(t) = kx^2(t)$

$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

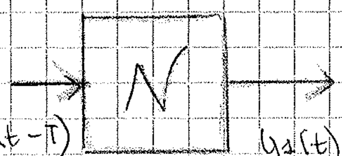
$y(t) = k[x_1(t) + x_2(t)]^2$

$= \underbrace{kx_1^2(t)}_{y_1(t)} + \underbrace{kx_2^2(t)}_{y_2(t)} + \underbrace{2kx_1(t)x_2(t)}_{\text{termine interferente}}$

10/10/12

② TEMPO - INVARIANZA

$y(t) = N[x(t)]$



$x_1(t) = x(t-T)$

$y_1(t) = N[x_1(t)] = N[x(t-T)]$

Se $y_1(t) = y(t-T)$ allora il sistema (N) e' detto tempo-invariante.

Altrimenti e' detto tempo-variante

Altro modo di scrivere la tempo-invarianza $\underline{y(t-T) = N[x(t-T)]}$

ESEMPIO: $y(t) = kx(t)$

① $x_1(t) = x(t-T)$

$y_1(t) = kx_1(t) = kx(t-T)$

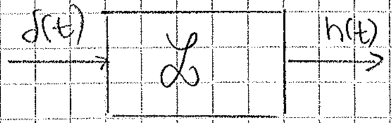
② $y(t-T) = kx(t-T)$

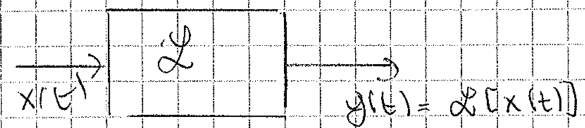
$y_1(t) = y(t-T)$

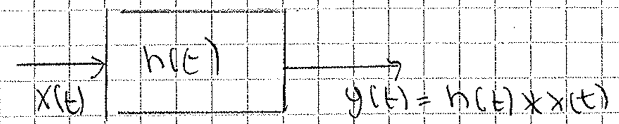
Sistema tempo-invariante

$$\boxed{y(t) = h(t) * x(t)}$$

Risposta all' impulso
↓ USCITA ↓ $\delta(t)$







$h(t)$ è una rappresentazione equivalente di $\mathcal{L}$.

Real-time processing

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-t')\,x(t')\,dt'$$

$$= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t')\,h(t')\,dt' =$$

$$= \overbrace{\int_{-\infty}^{0} \underbrace{x(t-t')} h(t')\,dt'}^{y_1(t)} + \overbrace{\int_{0}^{+\infty} x(t-t')\,h(t)\,dt'}^{y_2(t)}$$

$t-t' > t$! $\qquad\qquad$ $t-t' < t$

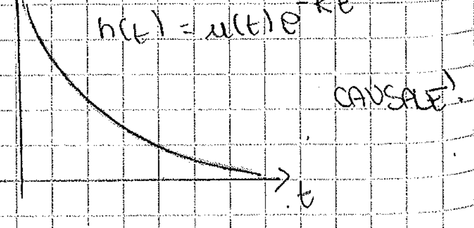
$t' < 0 \Rightarrow -t' > 0$ $\qquad\qquad$ $t' > 0 \Rightarrow -t' < 0$

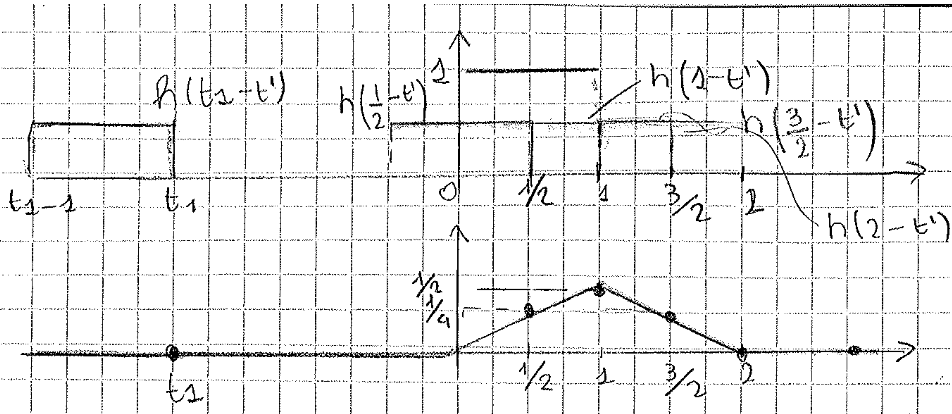
Il futuro! Elaboriamo il futuro! $\qquad$ il passato

(Magari!! ☺)

Se la risposta di impulso $h(t')$ si annulla tra $-\infty$ e 0, $y_1(t)$ si annulla allora elaboriamo solo il passato e il presente

$$\boxed{\begin{array}{l} h(t) \text{ è detta causale se} \\ \quad h(t) = 0 \;,\; t<0 \end{array}}$$



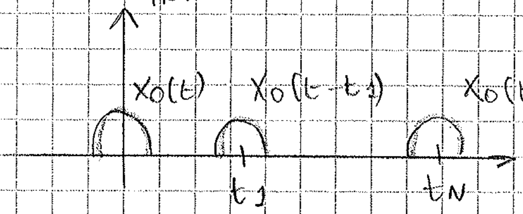


$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-t')\, x(t')\, dt'$$

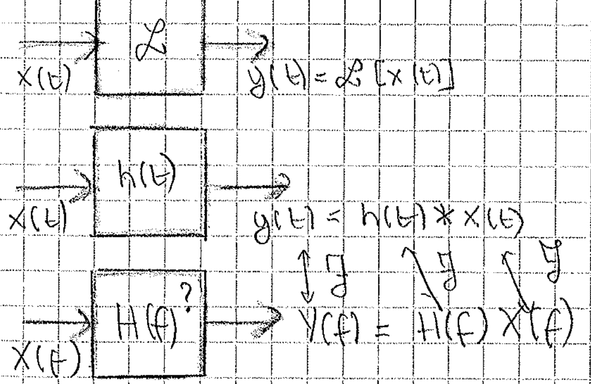
<u>Nota</u> : Convoluzione con impulsi $[\delta(t')]$ (senza usare la definizione)

$$y(t) = \delta(t-t_0) * x(t) = x(t-t_0)$$

ESEMPIO: $x(t) = \sum_{n=1}^{N} x_0(t-t_n)$



$$= \sum_{n=1}^{N} x_0(t) * \delta(t-t_N) = x_0(t) * \sum_{n=1}^{N} \delta(t-t_N)$$



$$\boxed{Y(f) = H(f)\, X(f)}$$

$H(f)$ è la funzione di trasferimento

$$H(f) = \mathcal{F}\{h(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, e^{-i2\pi ft}\, dt$$

CONDIZIONI DI REALIZZABILITA'

[con componenti fisici e in tempo reale]

Condizioni fondamentali:

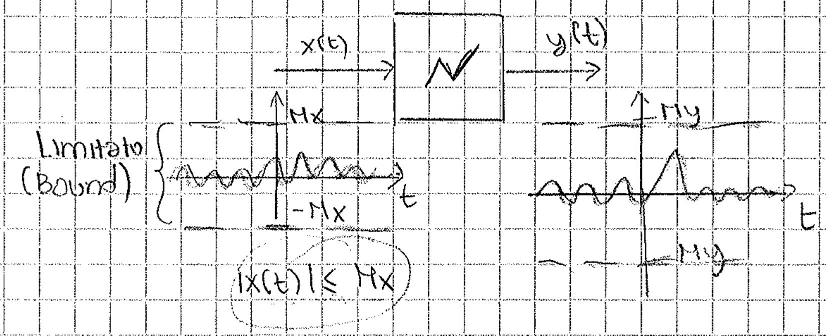
(1) $h(t)$ deve essere causale

(2) $h(t)$ deve essere reale $\Rightarrow \begin{cases} |H(f)| \text{ pari} \\ \angle H(f) \text{ dispari} \end{cases}$

Stabilità

Stabilita' BIBO: Bounded Input Bounded Output

[Bounded = limitato]



Se l'ingresso e' limitato e l'uscita e' limitata, cioè se esistono due costanti Mx ed My e valgono le 2 disuguaglianze, allora il sistema e' stabile in senso BIBO.

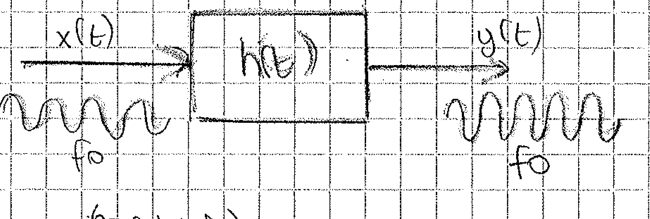
Condizione equivalente:

Un sistema e' stabile in senso BIBO se e solo se:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt < \infty$$

$\hookrightarrow$ si evita una divergenza dell'uscita

SEGNALI SINUSOIDALI



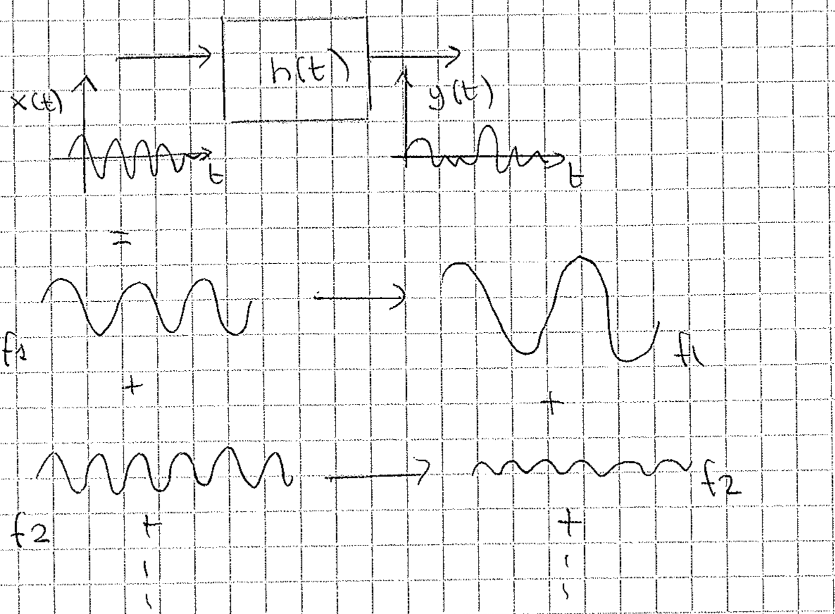
$$x(t) = A_x e^{+i(2\pi f_0 t + \varphi_x)}$$

$$= A_x e^{i\varphi} \cdot e^{+i2\pi f_0 t}$$

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

$$= h(t) * A_x e^{+i\varphi_x} e^{+i2\pi f_0 t}$$

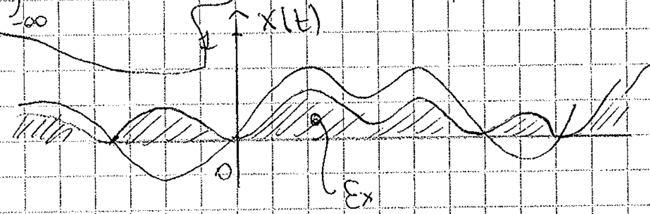
$$Y(f) = H(f)\, X(f)$$



15/10/12

ENERGIA

$$\boxed{\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt}$$ [definizione]



$|x(t)|^2 = x^2(t)$ [segnale reale]

PROPRIETA':

- Somma: Dato $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$
  allora $\mathcal{E}_x \neq \mathcal{E}_{x_1} + \mathcal{E}_{x_2}$ | NO! l'energia della somma non è la somma delle energie
  perchè $|x(t)|^2 \neq |x_1(t)|^2 + |x_2(t)|^2$

$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x_1(t) + x_2(t)|^2 \, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} [x_1(t) + x_2(t)][x_1(t) + x_2(t)]^* \, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} [x_1(t) + x_2(t)][x_1^*(t) + x_2^*(t)] \, dt$$

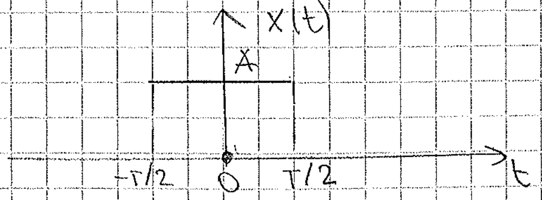
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} [|x_1(t)|^2 + |x_2(t)|^2 + x_1(t)x_2^*(t) + x_2(t)x_1^*(t)] \, dt$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |x_1(t)|^2 dt}_{\mathcal{E}_{x_1}} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |x_2(t)|^2 dt}_{\mathcal{E}_{x_2}} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)x_2^*(t)}_{\mathcal{E}_{x_1,x_2}} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x_1^*(t)x_2(t) \, dt}_{\mathcal{E}_{x_1^*,x_2}}$$

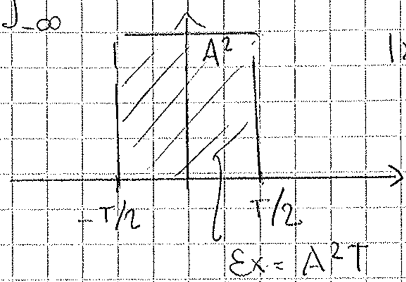
$$= \mathcal{E}_{x_1} + \mathcal{E}_{x_2} + \underbrace{\mathcal{E}_{x_1,x_2} + \mathcal{E}_{x_1,x_2^*}}_{2\,\mathrm{Re}\{\mathcal{E}_{x_1,x_2}\}}$$

ESERCIZI:

1) $x(t) = A p_T(t)$



$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |A p_T(t)|^2 dt =$$



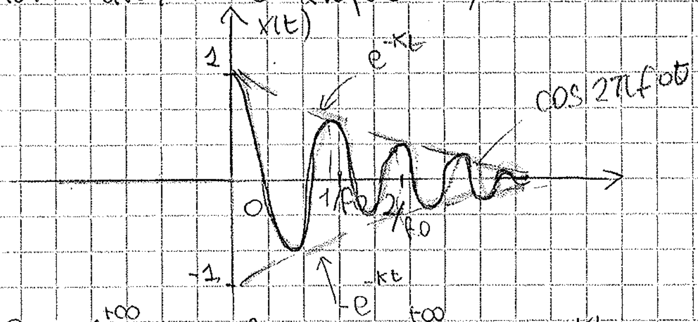
$|x(t)|^2 = x^2(t) = A^2 p_T(t)$

$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 p_T(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} A^2 dt$$

$$= A^2 t \Big|_{-T/2}^{T/2} = A^2 [T/2 + T/2] = A^2 T$$

2) $x(t) = u(t) e^{-kt} \cos 2\pi f_0 t \quad , \quad k > 0$

(per $k<0$ sarebbe ad energia infinita)



$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t) e^{-kt} \cos 2\pi f_0 t|^2 dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} [u(t) e^{-kt} \cos 2\pi f_0 t]^2 dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{u^2(t)}_{u(t)} e^{-2kt} \cos^2 2\pi f_0 t \, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-2kt} \cos^2 2\pi f_0 t \, dt$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-2kt} \cos^2 2\pi f_0 t \, dt$$

Nota:
- Sostituisco le formule di Eulero
- $\cos^2 2\pi f_0 t = \dfrac{1 + \cos 4\pi f_0 t}{2}$

$$\left[\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \right]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{u^2(t)}_{u(t)} A^2 e^{-2t/\tau}\, dt = \int_0^{+\infty} A^2 e^{-2t/\tau}\, dt$$

$$= A^2 \int_0^{+\infty} e^{-2t/\tau}\, dt$$

$$= A^2 \frac{e^{-2t/\tau}}{-2/\tau} \Big|_0^{+\infty}$$

$$= A^2 \cdot \left(\frac{-1}{-2/\tau} \right) = A^2 \frac{\tau}{2} = \mathcal{E}_x$$

4). Dato un segnale $x(t)$ a energia finita ($\mathcal{E}_x$) calcolare l'energia del segnale

$$y(t) = x(t/2)$$

$$\mathcal{E}_y = \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t/2)|^2 dt$$

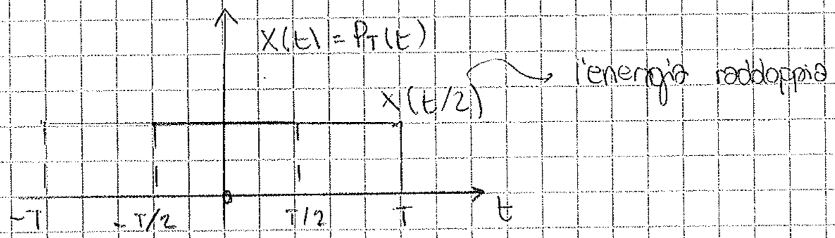
Pongo $t' = t/2$

$dt' = \frac{1}{2} dt$

$t = -\infty \Rightarrow t' = -\infty$

$t = +\infty \Rightarrow t' = +\infty$

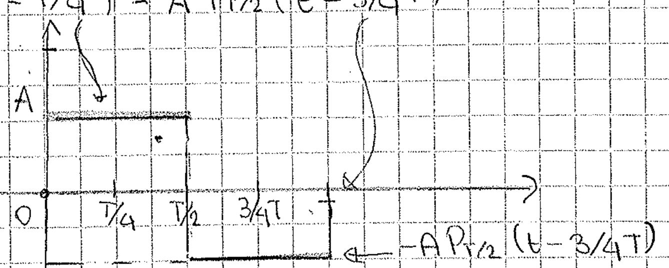
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t')|^2 2\, dt' = 2 \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t')|^2 dt'}_{\mathcal{E}_x} \qquad \boxed{\mathcal{E}_y = 2\mathcal{E}_x}$$



5) Calcolare la potenza del segnale

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r(t - nT) \quad \text{dove}$$

$$r(t) = A\, p_{T/2}(t - T/4) - A\, p_{T/2}(t - 3/4T)$$



$x(t)$ e' un segnale periodico:

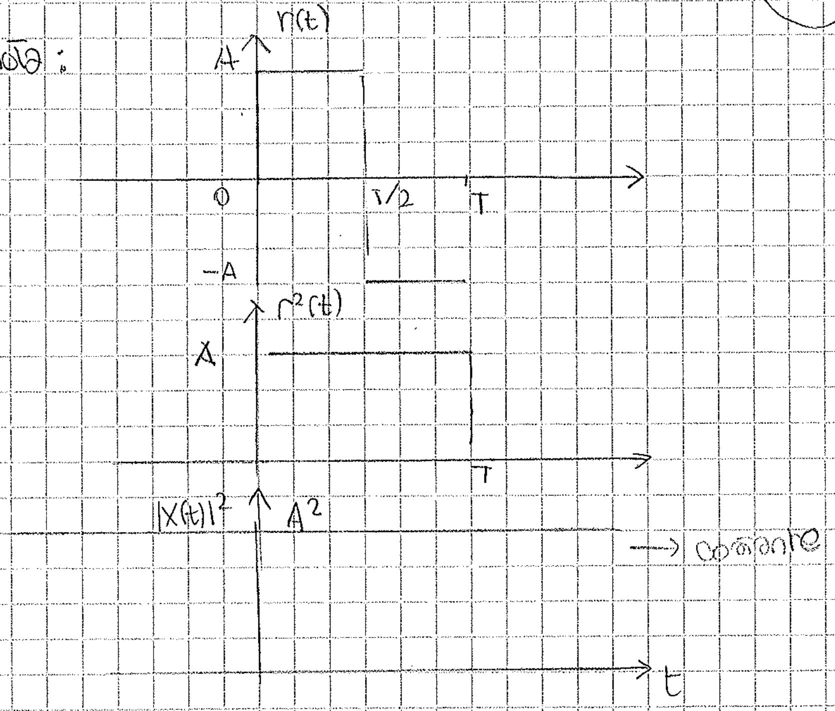
$$x(t+T) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r(t+T-nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r(t-(n-1)T)$$

Potenza

$$P_x = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

Per $x(t)$ che è un segnale periodico, è: $P_x = \frac{E_r}{T}$

Nota:



Abbiamo capito che $|x(t)|^2 = A$

Sostituendo $P_x = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A^2 dt =$

$$= \lim_{T \to +\infty} \frac{A^2}{T} \, t \Big|_{-T/2}^{T/2} = A^2$$

la potenza di un segnale costante è la costante al quadrato

Dato un segnale $x(t)$, tale per cui $|x(t)|^2 = K^2$, la potenza di $x(t)$ è

$$P_x = K^2$$

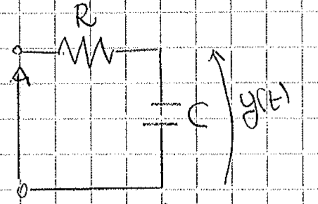
1) ESERCIZIO: Dato un segnale $x(t)$ reale a potenza finita si consideri il segnale $z(t) = A e^{j[2\pi f t + K x(t)]}$, $K > 0$

- Quanto vale l'energia o la potenza?
- $z(t)$ è a energia finita o potenza finita?

16/10/2012

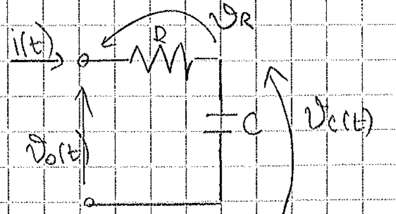
FILTRO RC

modello del 1° ordine



il filtro RC e' governato dall'equazione differenziale

$$RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$



$$v_o(t) = v_R(t) + v_C(t)$$

$$v_R(t) = R\cdot i(t)$$

$$dq = C dv_C$$

$$\underbrace{\frac{dq}{dt}}_{i(t)} = C\frac{dv_C}{dt}$$

$$i(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt}$$

$$v_R(t) = R\cdot i(t)$$

$$v_R(t) = RC\frac{dv_C(t)}{dt}$$

$$v_o(t) = RC\frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t)$$

Poniamo:

$$v_o(t) = x(t)$$

$$y(t) = v_C(t)$$

$$\boxed{RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)}$$

$$\mathcal{F}\left\{RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t)\right\} = \underbrace{\mathcal{F}\{x(t)\}}_{X(f)}$$

$$RC\,\underbrace{\mathcal{F}\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\}}_{i2\pi f Y(f)} + \underbrace{\mathcal{F}\{y(t)\}}_{Y(f)} = X(f)$$

$$RC\, i2\pi f Y(f) + Y(f) = X(f)$$

$$Y(f)\left[1 + i2\pi f RC\right] = X(f) \qquad Y(f) = \overbrace{\frac{1}{1+i2\pi f RC}}^{H(f)} X(f)$$

- Risposta all'impulso (PER VALUTARE LA RISPOSTA ALL'IMPULSO FACCIO L'ANTITRASF. DELLA FDT)

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f)\, e^{+i2\pi ft}\, df$$

Dalle tabelle delle trasform. di Fourier:

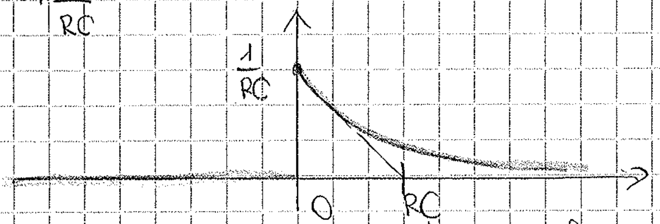
$$u(t)\, e^{-at} \longleftrightarrow \frac{1}{a + i2\pi f}, \quad a > 0$$

$$\frac{1}{1 + i2\pi RCf} = H(f)$$

$$\frac{1}{RC\left(\frac{1}{RC} + i2\pi f\right)} = \frac{1}{RC} \cdot \underbrace{\frac{1}{\underbrace{\frac{1}{RC}}_{a} + i2\pi f}}_{\text{adesso posso antitrasformare}}$$

$$h(t) = \frac{1}{RC}\, u(t)\, e^{-t/RC}$$

$$h(t) = u(t)\, \frac{1}{RC}\, e^{-t/RC}$$



RC ↳ cost. di tempo che si misura in s

$h(t)$ e' causale $\Rightarrow$ possiamo usare il filtro RC in real-time processing.
(nulla per tempi negativi)

- Stabilita'

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\, \frac{1}{RC}\, e^{-t/RC}\, dt = \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{RC}\, e^{-t/RC}\, dt$$

$$= \frac{1}{RC} \cdot \left.\frac{e^{-t/RC}}{-\frac{1}{RC}}\right|_0^{+\infty} = \left. -e^{-t/RC}\right|_0^{+\infty} = 1$$

Area unitaria

il sistema e' stabile in senso BIBO

In realta e' anche stabile in senso stretto

$h(t)$ reale + $h(t)$ ~~stabile~~ causale [+ stabilita']

$\Downarrow$

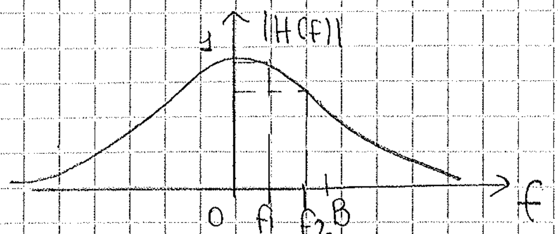
RC e' un sistema fisicamente realizzabile. Ovvio!!!

① DISTORSIONE DI AMPIEZZA

Quando $|H(f)|$ non e' costante $\neq K$ [nella banda del sistema]

Ⓔ

Filtro RC



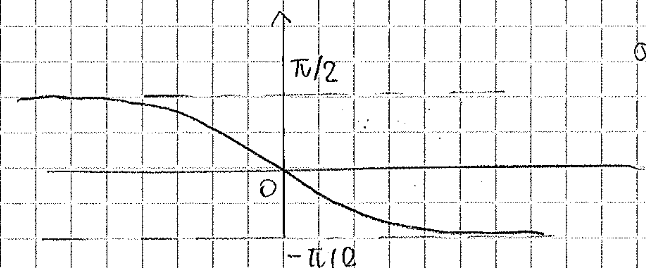
[Non così grave]

② DISTORSIONE DI FASE

Quando la fase non e' lineare nella banda del sistema

Ⓔ

Filtro RC



chiaramente non lineare

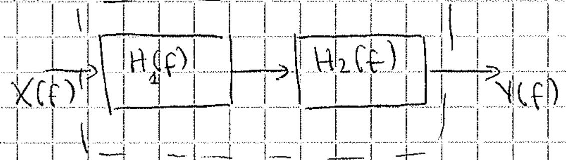
Sistema non distorcente: $y(t) = Kx(t-T)$

Lo si vede nella ricomposizione del segnale [Grave!]

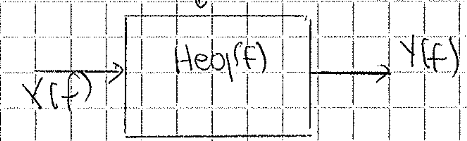
17/10/2012

Connessione di sistemi

① SERIE



↓ e' rimpiazzabile con un sistema equivalente



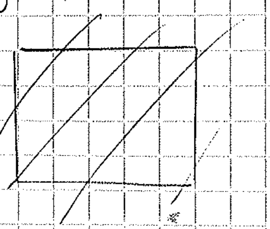
$Y(f) = H_2(f)\, Y_1(f)$

$Y(f) = \underbrace{H_2(f) H_1(f)}_{Heq} X(f)$

$\boxed{Heq(f) = H_1(f) H_2(f)}$ SERIE

↳ con bande compatibili però!

② PARALLELO



In questo caso possiamo definire la banda come lo "spazio" in cui è contenuto il 99% ~~p~~ del segnale.

$$\int_{-B}^{B} S_x(f)\,df = 0.99\,\mathcal{E}_x \qquad [0.999,\ 0.9999, \ldots]$$

(II) DEVIAZIONE STANDARD [Principio di indeterminazione]

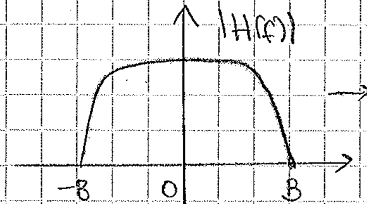
$$B = \sqrt{\frac{4\pi^2}{\mathcal{E}_x}\int_{-\infty}^{+\infty} f^2\,|X(f)|^2\,df}$$

(Dato che il segn. è pari, B è anche la varianza)

2) • SISTEMI

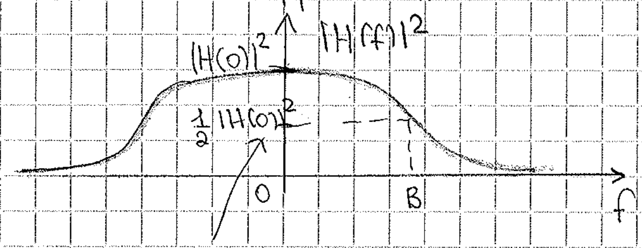
Dato che siamo nel dominio della frequenza il sistema è rappresentato dalla funz. di trasferimento.

(A) F.d.s con supporto limitato in frequenza.



$\rightarrow$ B è la banda

(B) F.d.s. con supporto illimitato



Si considera quel valore di H in cui si dimezza

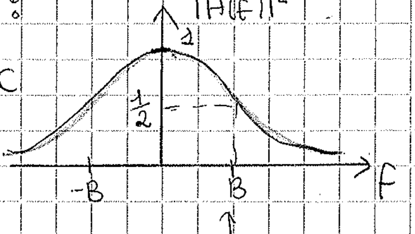
Quindi B è quel valore di frequenza per cui $|H(B)|^2 = \frac{1}{2}|H(0)|^2$

B è detta banda a -3 dB.

(dimezzamento)

ESEMPIO:

FILTRO RC



$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1+f^2/B^2}$$

$$|H(B)|^2 = \frac{1}{2}|H(0)|^2$$

Banda a -3 dB

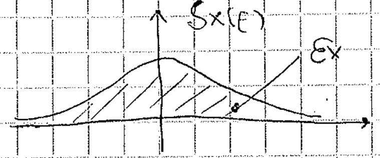
SPETTRO DI ENERGIA

Definizione: $S_x(f) = |X(f)|^2$

dove: $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt$

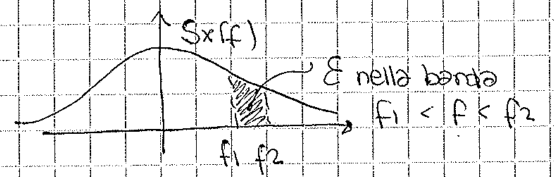
Proprietà che desideriamo da uno spettro di energia:

1. $S_x(f) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)\, df = \mathcal{E}_x$



3. $\int_{f_1}^{f_2} S_x(f)\, df$

deve rappresentare l'energia di $x(t)$ nella banda $f_1 < f < f_2$.



i singoli pezzi devono rappresentare l'energia nella banda

Analizziamo:

1. $S_x(f) = |X(f)|^2 \geq 0$ OK
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)\, df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2\, df \overset{\text{Teorema di Parseval}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt = \mathcal{E}_x$ OK

3. PROPRIETÀ DEI SISTEMI LTI: (ci serve per dimostrare la 3)

$X(f) \longrightarrow \boxed{H(f)} \longrightarrow Y(f) = H(f)X(f)$

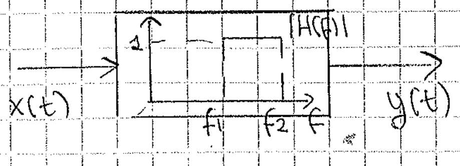
$S_x(f) \longrightarrow \boxed{|H(f)|^2} \overset{?}{\longrightarrow} S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f)$

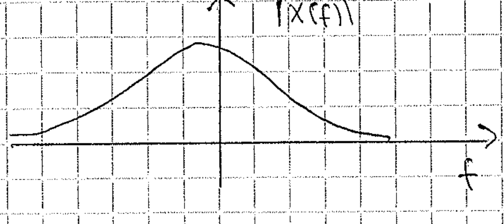
$Y(f) = H(f)X(f)$

$\underbrace{|Y(f)|^2}_{S_y(f)} = |H(f)|^2 \underbrace{|X(f)|^2}_{S_x(f)}$

PROPRIETÀ

$$S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f)$$





Proprietà:

* Ved. bene autocorrelazione!

① Per segnali reali

$$R_x(\tau) = R_x(-\tau)$$

cioè l'autocorrelazione è una funzione pari.

② Quanto vale $R_x(0) = ?$

Infatti $$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)\, x^*(t)\, dt$$

$$R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = E_x$$

(Ovviamente i segnali (sono ad energia finita))

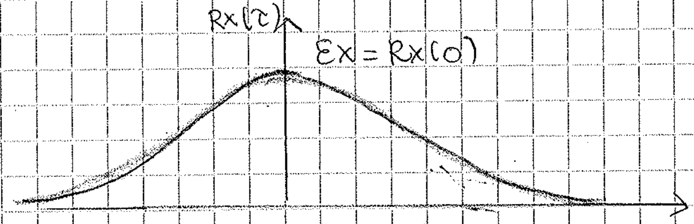
Dalla definizione con lo spettro di energia:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 e^{+j2\pi f\tau} df$$

$$R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = E_x$$

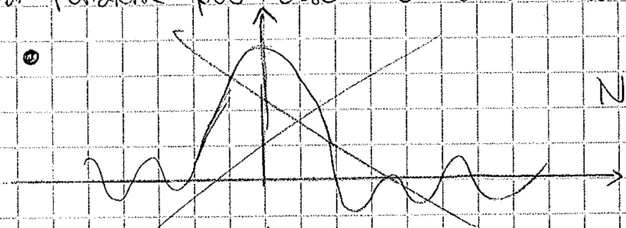
③ $R_x(0) \geq R_x(\tau)$ [segnale $x(t)$ reale]

↑ è un massimo assoluto

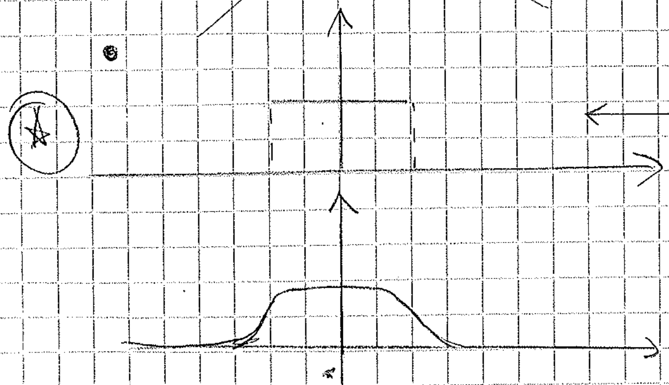


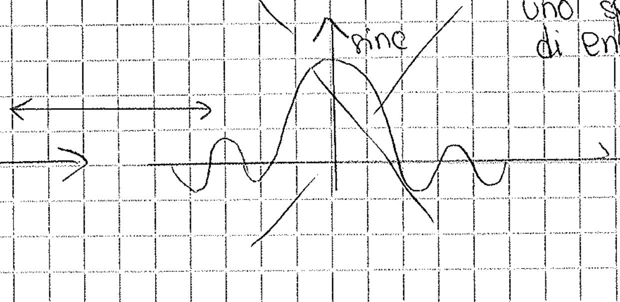
• Domanda:

Qualsiasi funzione può essere un'autocorrelazione?



NON E' PARI

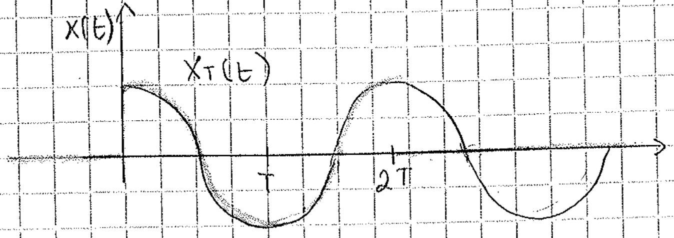




il suo duale non e' uno spettro di energia!

• SEGNALI A POTENZA FINITA → SEGNALI PERIODICI

Fenomeni che si ripetono ciclicamente



$x(t)$ è un segnale ciclico

$$x(t) = \sum_{n=0}^{2} x_T(t - nT)$$

Dal pto di vista matematico è molto conveniente effettuare un'estensione periodica del segnale ciclico.

$$\boxed{x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x_T(t - nT)} \leftarrow \text{ESTENS. PERIODICA}$$

Si studia lo spettro in frequenza del segnale periodico

Sappiamo già fare l'analisi in frequenza di un segnale periodico tramite la serie di Fourier

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n e^{+i\frac{2\pi}{T}nt} \quad , -\infty < t < +\infty$$

vale per segnali periodici il cui segnale sul periodo base (x_T) ha energia finita

$$\mu_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{-i\frac{2\pi}{T}nt}\, dt$$

Valutiamo la trasf. di Fourier di $x(t)$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} \mu_n e^{+i\frac{2\pi}{T}nt}\right) e^{-i2\pi ft} dt$$

$f_0 = \frac{1}{T}$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+i2\pi n f_0 t} e^{-i2\pi ft} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi(f-nf_0)t} dt}_{\delta(f-nf_0)}$$

SPETTRO

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n \delta(f - nf_0)$$

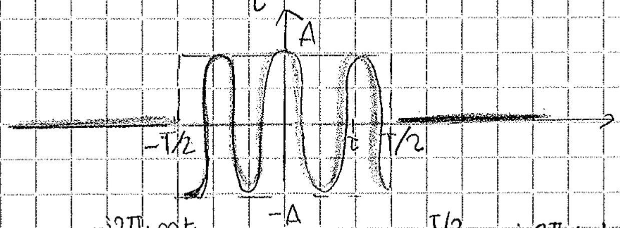
(1) Calcolare lo sviluppo in serie di Fourier del segnale

$$x(t) = \begin{cases} A e^{j2\pi/\tau \, t} & , \; -T/2 < t < T/2 \\ 0 & , \; \text{altrove} \end{cases}$$

Sviluppo in serie $\Rightarrow$ calcolare i coeff. μ_n

$$\mathrm{Re}\{x(t)\} = A \cos \frac{2\pi}{\tau} t$$

Frequenza $= \frac{1}{\tau} \Rightarrow$ Periodo τ



$$\mu_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i\frac{2\pi}{T}nt}\, dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A e^{i2\pi/\tau \, t} e^{-i\frac{2\pi}{T}nt}\, dt =$$

$$= \frac{A}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{i2\pi\left(\frac{1}{\tau}-\frac{n}{T}\right)t}\, dt$$

$$= \frac{A}{T} \cdot \left. \frac{e^{i2\pi\left(\frac{1}{\tau}-\frac{n}{T}\right)t}}{i2\pi\left(\frac{1}{\tau}-\frac{n}{T}\right)} \right|_{-T/2}^{T/2} = \frac{A}{T} \, \frac{e^{i2\pi\left(\frac{1}{\tau}-\frac{n}{T}\right)\frac{T}{2}} - e^{-i2\pi\left(\frac{1}{\tau}-\frac{n}{T}\right)\frac{T}{2}}}{i2\pi\left(\frac{1}{\tau}-\frac{n}{T}\right)}$$

$$= A \, \frac{e^{i\pi\left(\frac{T}{\tau}-n\right)} - e^{-i\pi\left(\frac{T}{\tau}-n\right)}}{2i\pi\left(\frac{T}{\tau}-n\right)} \rightarrow \operatorname{sen} \pi\left(\frac{T}{\tau}-n\right)$$

$$\mu_n = A \, \frac{\sin \pi\left(\frac{T}{\tau}-n\right)}{\pi\left(\frac{T}{\tau}-n\right)}$$

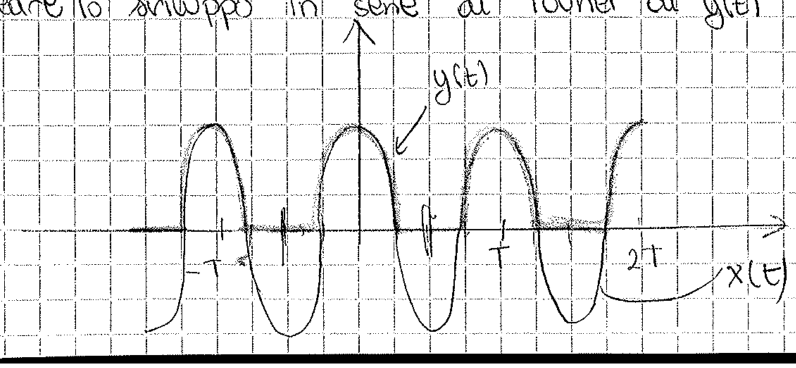
i μ_n sono reali! Perchè i segnali sono reali e pari

(2) Il segnale $x(t) = A \cos \frac{2\pi t}{T}$ $\quad -\infty < t < +\infty$

viene trasformato nel segnale $y(t)$ in base alla regola

$$y(t) = \begin{cases} x(t) & , \; x(t) \geq 0 \\ 0 & , \; x(t) < 0 \end{cases}$$

Calcolare lo sviluppo in serie di Fourier di $y(t)$



Il periodo di $x(t)$ è T

il periodo di $y(t)$ è ancora T

Nota:

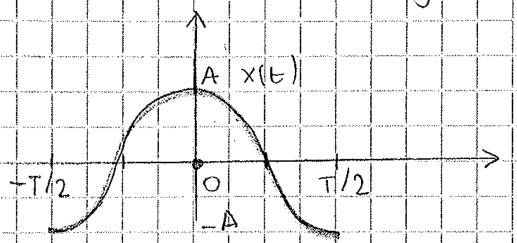
$\cos\frac{\pi}{2}n$	n
1	0
0	1
-1	2
0	3

$$\boxed{\mu_0 = \frac{A}{\pi}}$$

$$\mu_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt$$

↑ valore medio

(3) Valutare la serie di Fourier del segnale $x(t) = A\cos\frac{2\pi}{T}t$, $-T/2 < t < T/2$



(1) $$\mu_n = \frac{A}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \cos\frac{2\pi}{T}t\, e^{-i\frac{2\pi}{T}nt}\,dt$$

$$= \frac{A}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \left[\frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{T}t} + \frac{1}{2}e^{-i\frac{2\pi}{T}t}\right] e^{-i\frac{2\pi}{T}nt}\,dt =$$

$$= \frac{A}{2T}\Big[\underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} e^{i\frac{2\pi}{T}(1-n)t}\,dt}_{I_1} + \underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} e^{-i\frac{2\pi}{T}(1+n)t}\,dt}_{I_2}$$

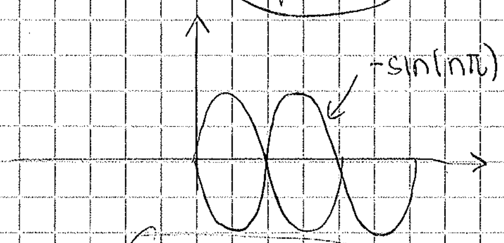
Risolviamo separatamente:

$$I_1 = \frac{A}{2T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{i2\pi/T(1-n)t} = \left.\frac{e^{i\frac{2\pi}{T}(1-n)t}}{i\frac{2\pi}{T}(1-n)}\right]_{-T/2}^{T/2} = \frac{e^{i\frac{2\pi}{T}(1-n)\frac{T}{2}} - e^{-i\frac{2\pi}{T}(1-n)\frac{T}{2}}}{i\frac{2\pi}{T}(1-n)}$$

$$= \frac{e^{i\pi(1-n)} - e^{-i\pi(1-n)}}{i\frac{2\pi}{T}(1-n)} \rightarrow \sin\pi(1-n) \qquad = \frac{\sin\pi(1-n)}{\frac{\pi}{T}(1-n)}$$

Nota:

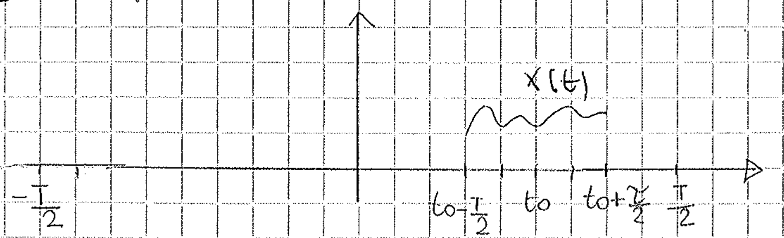
$$\sin\pi(1-n) = -\sin(n\pi - \pi)$$
$$= -(-\sin(n\pi))$$
$$= \sin(n\pi) = 0$$



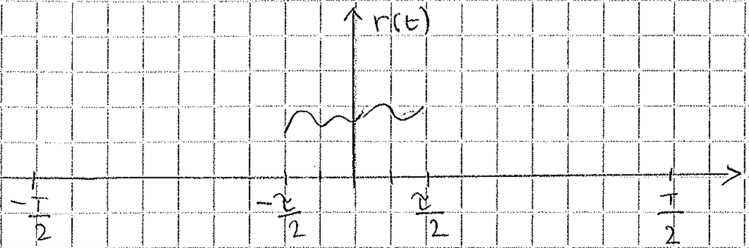
$\boxed{\text{Quindi } I_1 = 0 \text{ (quando } n \neq 1)}$

$$I_1 \begin{cases} 0 & \text{per } n \neq 1 \\ T & \text{per } n = 1 \end{cases}$$

4 (Proprietà della serie di Fourier)



$x(t) = r(t-t_0)$



$$\mu_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{-i\frac{2\pi}{T}nt}\, dt = \frac{1}{T}\int_{t_0-\frac{\tau}{2}}^{t_0+\frac{\tau}{2}} x(t)\, e^{-i\frac{2\pi}{T}nt}\, dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{t_0-\tau/2}^{t_0+\tau/2} r(t-t_0)\cdot e^{-i\frac{2\pi}{T}nt}\, dt$$

Poniamo $t' = t - t_0$; $t = t_0 - \tau/2$ $\underline{t' = -\tau/2}$

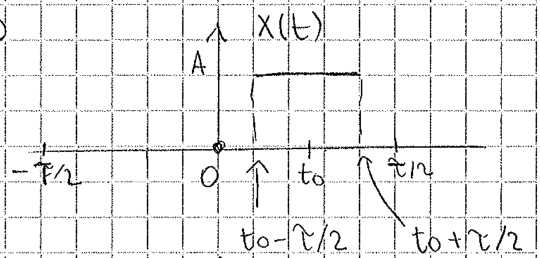
$dt' = dt$ $\quad t = t_0 + \tau/2$ $\underline{t' = \tau/2}$

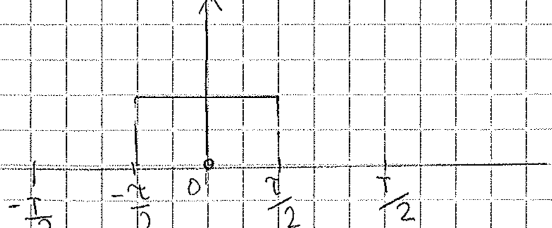
$t = t' + t_0$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} r(t')\, e^{-i\frac{2\pi}{T}n(t'+t_0)}\, dt' = e^{-i\frac{2\pi}{T}nt_0}\cdot \underbrace{\frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} r(t')\, e^{-i\frac{2\pi}{T}nt'}\, dt'}_{\mu_n^{(r)}}$$

$$\mu_n = e^{-i\frac{2\pi}{T}nt_0}\, \mu_n^{(r)}$$ → PROPRIETÀ

ESEMPIO





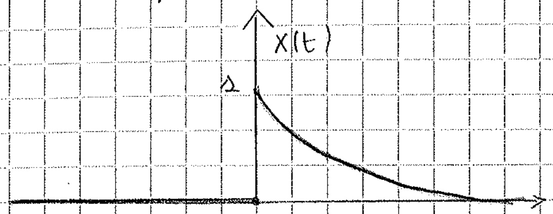
$$\mu^{(r)} = \frac{\sin \pi n \tau/T}{\pi n}$$

Usando la proprietà: (di ritardo della serie di Fourier)

$$\mu_n = e^{-i\frac{2\pi}{T}nt_0}\, \mu_n^{(r)}$$

(5) Valutare la trasformata di Fourier del segnale:

$x(t) = u(t) e^{-at}, \quad a > 0$



$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-i2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\, e^{-at}\, e^{-i2\pi f t}\, dt$$

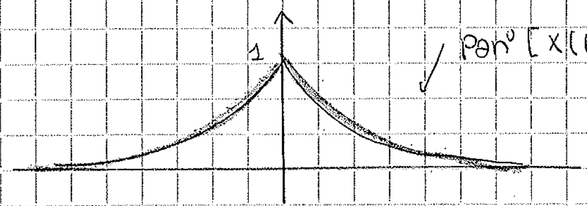
$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-(a+i2\pi f)t}\, dt$$

$$= \left. \frac{e^{-(a+i2\pi f)t}}{-(a+i2\pi f)} \right|_{0}^{+\infty} = \frac{-1}{-(a+i2\pi f)} = \frac{1}{a+i2\pi f}$$

$$\boxed{u(t) e^{-at} \longleftrightarrow \frac{1}{a+i2\pi f}}$$

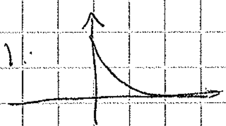
(6) Valutare la trasf. di Fourier del segnale

$x(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0$



Pari $[x(t) = x(-t)]$

Nota: $x(t) = r(t) + r(-t)$, dove $r(t)$



$r(t) = u(t) e^{-at}$

$$X(f) = R(f) + \mathcal{F}\{r(-t)\} = R(f) + \frac{1}{|-1|} R\left(f/-1\right)$$

$$\downarrow$$

scalamento

$r(kt), \; k = -1$

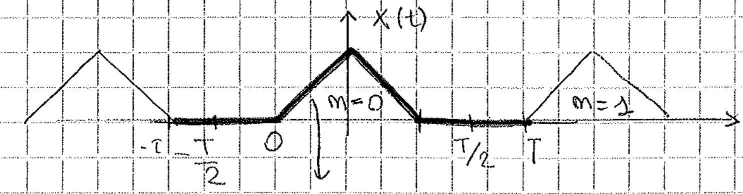
$$= R(f) + R(-f)$$

$$= \frac{1}{a+i2\pi f} + \frac{1}{a-i2\pi f} = \frac{a - i2\pi f + a + i2\pi f}{a^2 + 4\pi^2 f^2} = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^3}$$

$$\boxed{e^{-a|t|} \longleftrightarrow \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}}$$

23/10/13

Segnali periodici



$X_T(t) \rightarrow$ segnale sul periodo base

$$x(t) = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} x_T(t - nT)$$

$$X(f) = f_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_T(nf_0)\,\delta(f - nf_0) \rightarrow \text{spettro}$$

$f_0 = \frac{1}{T}$ freq. fondamentale

$$X(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_T(n/T)\,\delta(f - n/T) \leftarrow \text{Spettro di un segn. periodico}$$

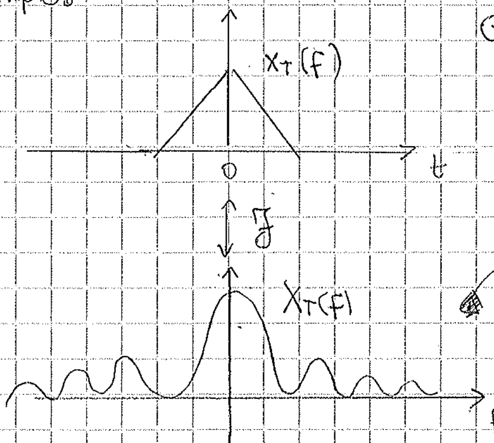
<u>Nota</u>: $X_T(f) = \mathcal{F}\{x_T(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t) e^{-j2\pi f t}\, dt$

Esempio:

Qual è il suo spettro di Fourier?

$\downarrow$

sinc^2



SPETTRO DI FOURIER DEL SEGNALE TRIANGOLARE È LA SINC^2

$$X(f) = f_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_T(nf_0)\,\delta(f - nf_0)$$

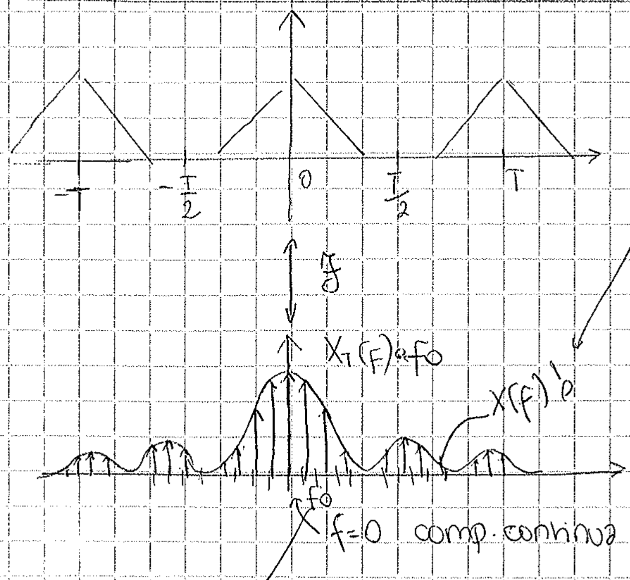
$\uparrow$

agiscono da inviluppo

X(f)

SPETTRO A RIGHE $\rightarrow$ Delta

line spectrum



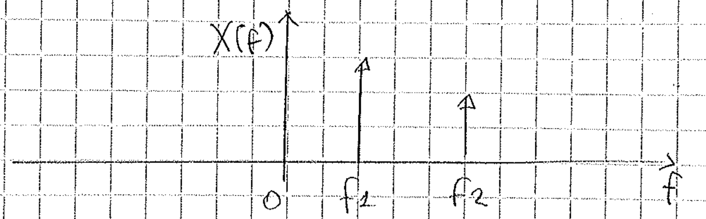
f=0 comp. continua

f_0: fondamentale

le freq. restanti sono le armoniche

Domanda:

- Dato il segnale $x(t)$ il cui spettro $X(f)$ e' rappresentato in figura



$x(t)$ e' periodico?

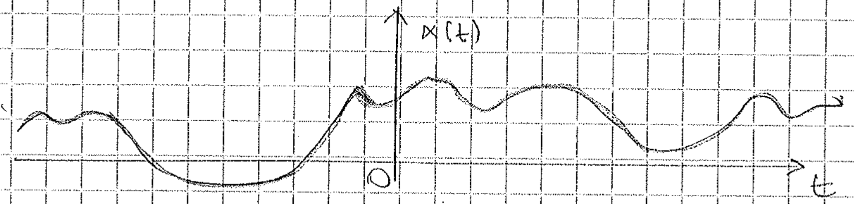
NO. Perche'? f_1 e f_2 devono essere multiple di una freq base ($n f_0$), in questo caso il segnale e' periodico

Rapporto razionale: $\frac{f_1}{f_2} = \frac{n_1 f_0}{n_2 f_0} = \frac{n_1}{n_2}$

- Cosa succede se abbiamo un segnale a pot finita ma non periodico?

↓

ANALISI ARMONICA GENERALIZZATA



$\mathcal{E}_x = +\infty$ ma $P_x < +\infty$ e $x(t)$ non periodico!

In questo caso si introduce lo spettro di potenza:

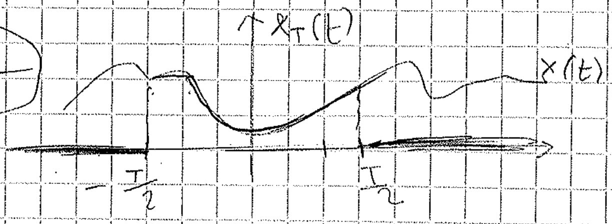
LO SPETTRO DI POTENZA SI INTRODUCE QUANDO $P_x < \infty$ E $x(t)$ NON PERIODICO

$$P_x = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2\,dt = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |x_T(t)|^2\,dt}_{\mathcal{E}_{x_T}}$$

$$P_x = \lim_{T\to+\infty} \frac{\mathcal{E}_{x_T}}{T}$$

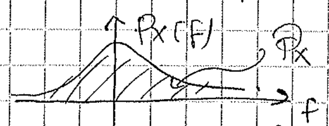
$$P_x(f) = \lim_{T\to+\infty} \frac{S_{x_T}}{T}$$

$$P_x(f) = \lim_{T\to+\infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T}$$

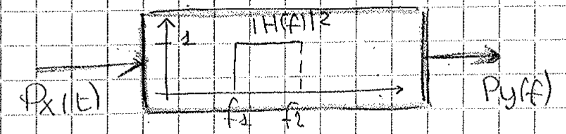


Proprieta che desideriamo da uno spettro in potenza

(1) $P_x(f) \geq 0$



(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} P_x(f)\,df = P_x$



$$P_y = \int_{-\infty}^{+\infty} P_y(f)\,df = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 P_x(f)\,df = \int_{f_1}^{f_2} P_x(f)\,df$$

Potenza di $x(t)$ su $f_1 < f < f_2$

Quanto vale lo spettro di pot. di un segnale periodico?

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r(t - nT) \qquad X(f) = f_0 \sum R(nf_0)\,\delta(f - nf_0)$$

Si dimostra che: $$P_x(f) = f_0^2 \sum_{n=+\infty}^{+\infty} |R(nf_0)|^2 \delta(f - nf_0)$$

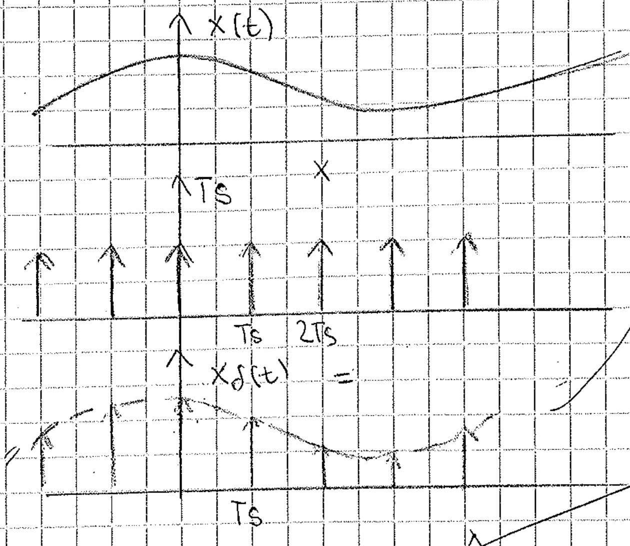
NOTA:

$$x(t) = A e^{i2\pi f_0 t} \longleftrightarrow X(f)\ A\delta(f - f_0)$$

$$P_x(t) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

$$= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} A^2 \underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} dt}_{T} = \lim_{T\to+\infty} A^2 = A^2$$

La potenza di una sinusoide è A^2. $\Leftarrow$ RICORDA !!



$$x_\delta(t) = x(t)\, T_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT_s)$$

$$= T_s \sum x(t)\,\delta(t-nT_s)$$

$$x_\delta(t) = T_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\,\delta(t-nT_s)$$

$$X_\delta(f) = \mathcal{F}\{x_\delta(t)\}$$

$$= \mathcal{F}\{x(t)\, T_s \sum \delta(t-nT_s)\}$$

Quindi:

$$X_\delta(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} * \mathcal{F}\{T_s \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT_s)\}$$

$$= X(f) * \cancel{T_s}\,\frac{1}{\cancel{T_s}} \sum \delta\left(f-\frac{n}{T_s}\right) = X(f) * \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(f-nF_s)$$

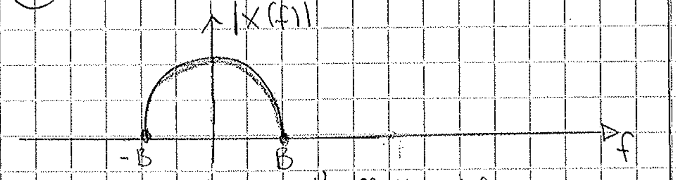
(dove $F_s = \frac{1}{T_s}$ → frequenza di campionamento)

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f) * \delta(f-nF_s)$$

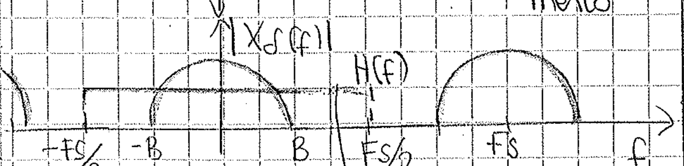
$$\boxed{X_\delta(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f-nF_s)} \leftarrow \text{IMPORTANTE}$$

$X_\delta(f)$ è periodico di periodo F_s !

① $X(f)$ è a banda limitata

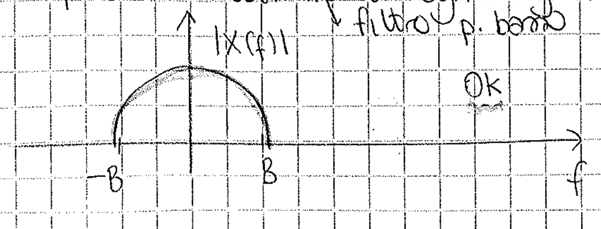


per l'effetto del campionamento



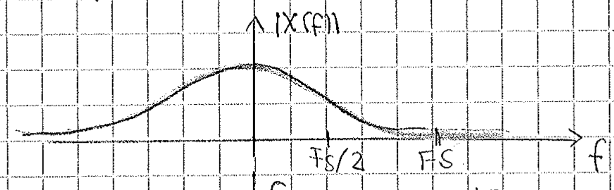
è possibile ricostruire il segn. originale?

filtro p. basso

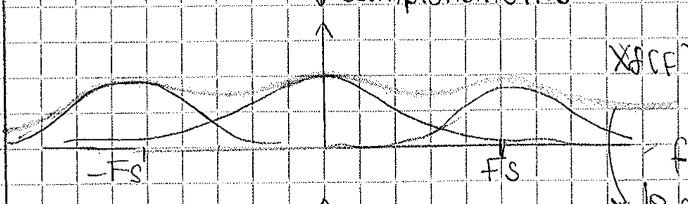


Ok

② $X(f)$ è a banda illimitata



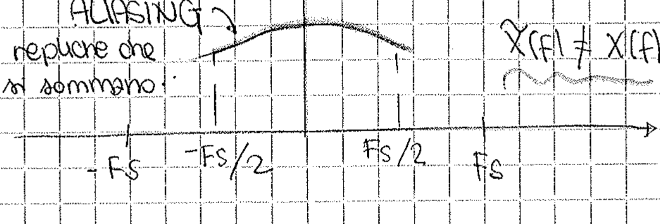
Campionamento



le repliche si sommano

ALIASING ?

repliche che si sommano



$\tilde{X}(f) \neq X(f)$!

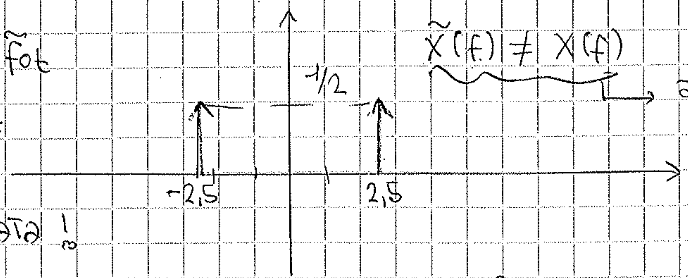
Ricostruzione

$\tilde{x}(f) = \cos 2\pi \tilde{f}_0 t$

$\tilde{f}_0 = 2.5\,kHz$

↓

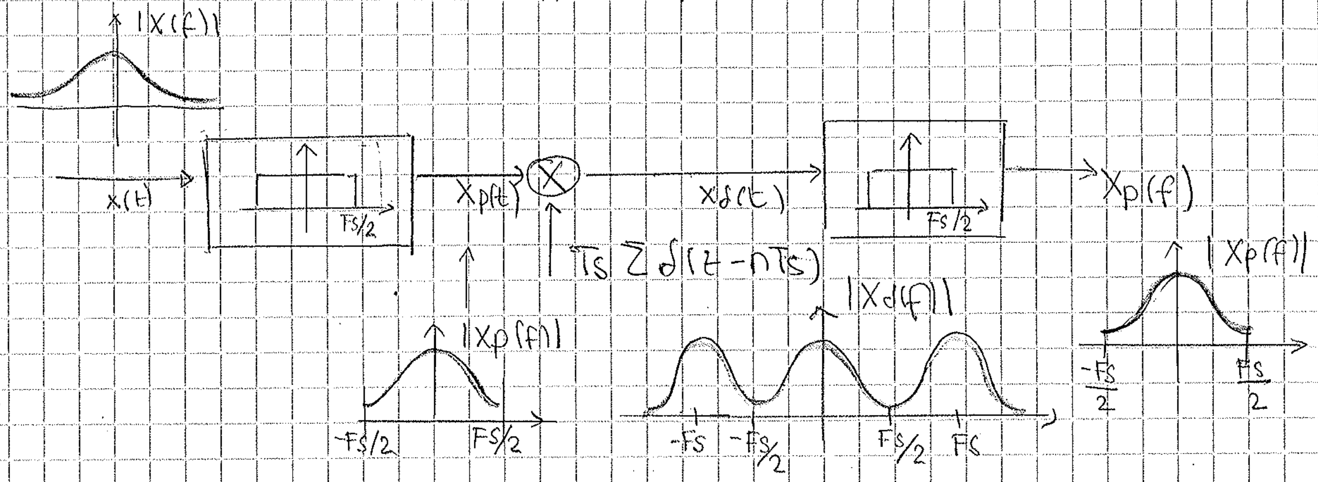
freq. sballata!



$\tilde{X}(f) \neq X(f)$ → aliasing

Cosa succede se la banda è illimitata?

FILTRO ANTI-ALIASING



Si dimostra che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{x}(t) - x(t)|^2 dt \geq \int_{-\infty}^{+\infty} |x_p(t) - x(t)|^2 dt$$

↑ Segnale ricostruito senza pre-filtro

↑ Segnale ricostruito con pre-filtro

Il filtro anti-aliasing è sempre più vantaggioso!

NOTA:

$$X(f) = H(f)\, X_\delta(f) = H(f) \sum_{-\infty}^{+\infty} X(f - nF_s)$$

$$x(t) = h(t) * T_s \sum_{-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\, \delta(t - nT_s)$$

$$= T_s \sum_{-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\, \underbrace{h(t) * \delta(t - nT_s)}_{} \rightarrow \text{TRASLAZIONE}$$

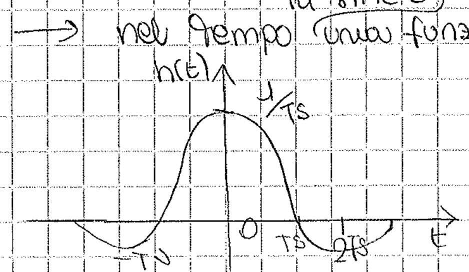
$$x(t) = T_s \sum_{-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\, h(t - nT_s)$$

sinc
↓

$\dfrac{\sin \pi t / T_s}{\pi t} \leftrightarrow P_{F_s}(f) = H(f) \longrightarrow$ nel tempo la sinc è una funzione interpolante.

$\|$

$h(t)$



DFT

$$\bar{x}(mT_s) = \frac{1}{T}\sum_{n=0}^{N-1} \bar{X}(nf_0)\, e^{+i\frac{2\pi}{N}mn}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots N-1$$

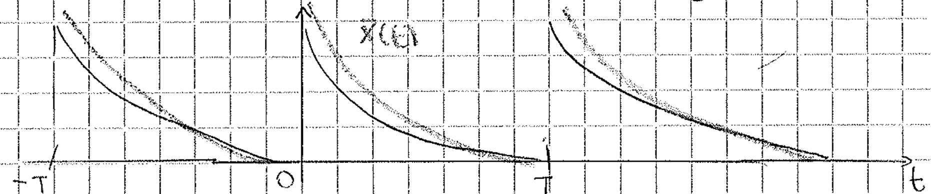
$$\bar{X}(nf_0) = \frac{T}{N}\sum_{m=0}^{N-1} \bar{x}(mT_s)\, e^{-i\frac{2\pi}{N}mn}, \quad n = 0, 1 \ldots N-1$$

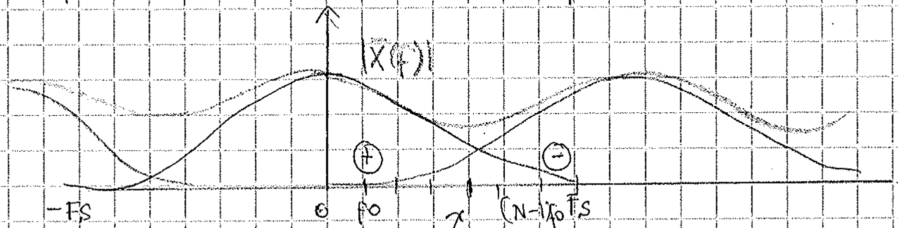
$$\begin{cases} F_s = \dfrac{1}{T_s} \\ f_0 = \dfrac{1}{T} \\ N = \dfrac{F_s}{F_0} = \dfrac{T}{T_s} \end{cases}$$

Sia tempo che frequenza sono campionati (quantizzati)

Come si risolve Aliasing in frequenza? Allontano le repliche → si aumenta la freq di campionamento.

<u>Nota</u>: Se $x(t)$ è un segnale reale, il modulo è pari (la fase è dispari) e siamo interessati alle frequenze non negative





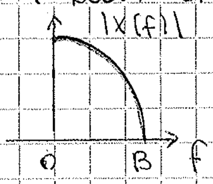
$\frac{F_s}{2} = \frac{N}{2}f_0$

freq non negative: $\underbrace{\bar{X}(0), \bar{X}(f_0), \ldots \bar{X}\left(\frac{N}{2}f_0\right)}$

Quanti sono i campioni? $\frac{N}{2}+1$

Scelta dei parametri della DFT

① $x(f)$ è a banda limitata B



$F_s = 2B$ → DFT vale il teorema del campionamento

$T_s = \frac{1}{F_s}$

Ⓐ Scegliamo N $\quad f_0 = \frac{F_s}{N} \quad T = NT_s$

Costo computazionale:

- DFT: $\bar{X}(nf_0) = \frac{T}{N} \sum \bar{x}(mT_s)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}$, $n = 0, 1, \dots N-1$

COSTO: N^2

$\boxed{DFT \sim N^2}$

FFT Fast Fourier Transform

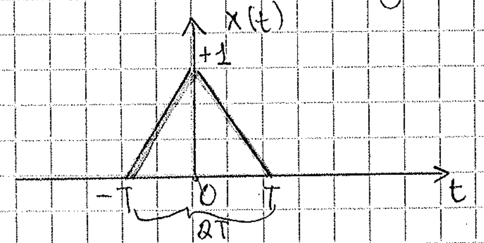
Se $N = 2^N$ [N è potenza di due], allora

$FFT \sim N \log_2 N$

N	DFT	FFT
10^2	10^4	10^3
10^3	10^6	10^4
10^6	10^{12}	10^7

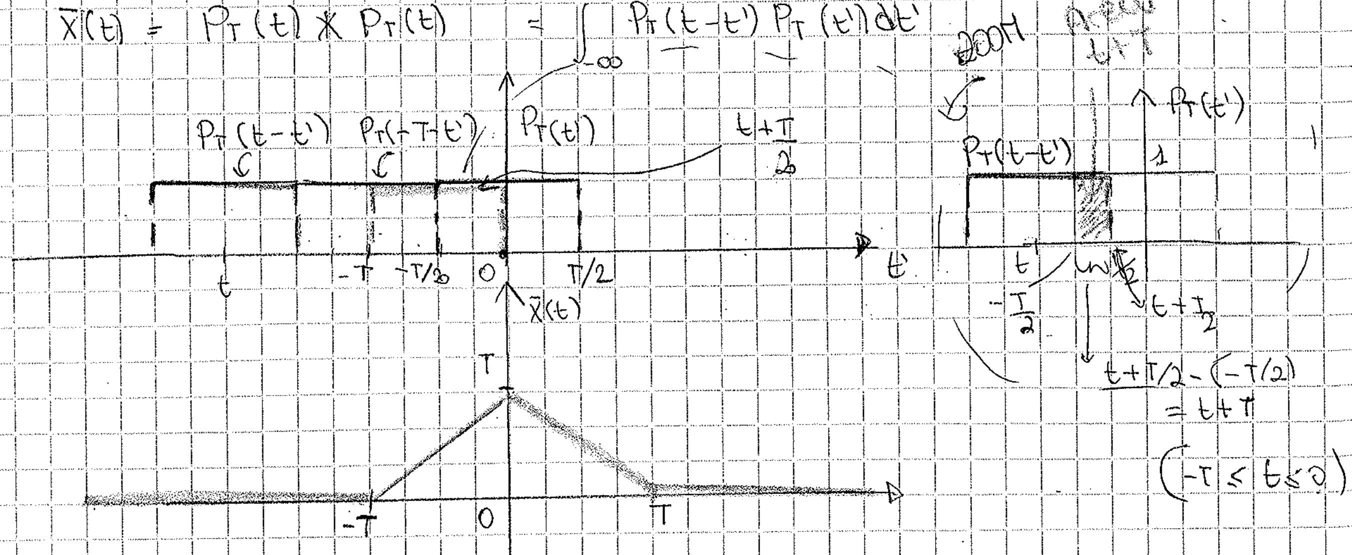
29/10/12 ESERCITAZIONE

(1) Valutare la trasformata di Fourier del segnale $x(t)$



Proviamo a scrivere $x(t)$ tramite il prodotto di convoluzione.

$$\bar{x}(t) = P_T(t) * P_T(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_T(t-t')\, P_T(t')\, dt'$$



(3) Determinare i valori di A e f_A che rendono sempre valida la seguente relazione:

$$\frac{\sin 2\pi f_1 t}{2\pi f_1 t} * \frac{\sin 2\pi f_2 t}{2\pi f_2 t} = A \frac{\sin 2\pi f_A t}{2\pi f_A t}$$

Scegliere f_A affinché sia vera

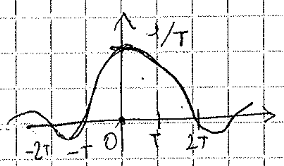
Trasformiamo la relazione nel dominio delle frequenze

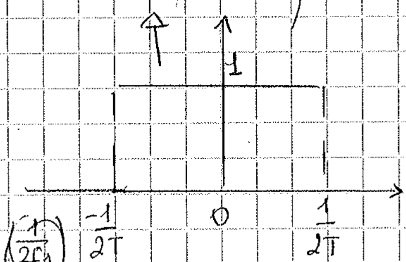
$$\mathcal{F}\left\{\frac{\sin 2\pi f_1 t}{2\pi f_1 t}\right\} \cdot \mathcal{F}\left\{\frac{\sin 2\pi f_2 t}{2\pi f_2 t}\right\} = A\,\mathcal{F}\left\{\frac{\sin 2\pi f_A t}{2\pi f_A t}\right\}$$

$$\frac{\sin 2\pi f_1 t}{2\pi f_1 t} = \;?$$

periodo: 2T

Nota: dalla tavola 24: $\frac{\sin \pi t/T}{\pi t} \longleftrightarrow P_{\frac{1}{T}}(f)$





$$\frac{\sin 2\pi f_1 t}{2\pi f_1 t} = \frac{1}{2f_1} \cdot \frac{\sin\left(\pi t \left(\frac{1}{2f_1}\right)\right)}{\pi t} \quad \frac{1}{2f_1} \to T$$

$$= \frac{1}{2f_1} \cdot \frac{\sin \pi t/T}{\pi t} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2f_1} P_{2f_1}(f)$$

$$\frac{\sin 2\pi f_1 t}{2\pi f_1 t} \longleftrightarrow \frac{1}{2f_1} P_{2f_1}(f)$$

$$\frac{\sin 2\pi f_2 t}{2\pi f_2 t} \longleftrightarrow \frac{1}{2f_2} P_{2f_2}(f)$$

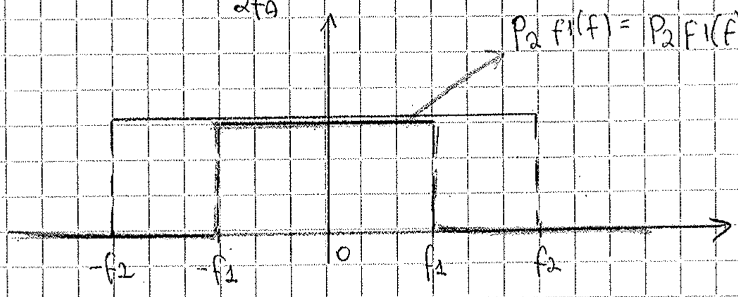
$$\frac{\sin 2\pi f_A t}{2\pi f_A t} \longleftrightarrow \frac{1}{2f_A} P_{2f_A}(f)$$

$$\frac{1}{2f_1} P_{2f_1}(f) \cdot \frac{1}{2f_2} P_{2f_2}(f) = \frac{A}{2f_A} P_{2f_A}(f)$$

$$\frac{1}{4f_1 f_2} P_{2f_1}(f) \cdot P_{2f_2}(f) = \frac{A}{2f_A} P_{2f_A}(t)$$

(1) $f_1 < f_2$

$P_2 f_1(f) = P_2 f_1(f) P_2 f_2(f)$



(4) Si consideri un segnale $a(t)$ a energia finita con spettro $A(f)$ nullo per $|f| > B$, ed il segnale $x(t) = a(t)\cos 2\pi f_0 t + a(t)\sin 2\pi f_0 t$ con $f_0 > 2B$. Quale delle seguenti relazioni è corretta?

(A) L'energia $\mathcal{E}_x = 0.5\,\mathcal{E}_a$ (B) $\mathcal{E}_x = 2\mathcal{E}_a$

(C) $\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_a$ (D) Nessuna

Spostiamoci nel dominio delle frequenze

$$x(t) = a(t)\left[\frac{1}{2}e^{i2\pi f_0 t} + \frac{1}{2}e^{-i2\pi f_0 t}\right] + a(t)\left[\frac{1}{2i}\cdot e^{i2\pi f_0} - \frac{1}{2i}e^{-i2\pi f_0 t}\right]$$

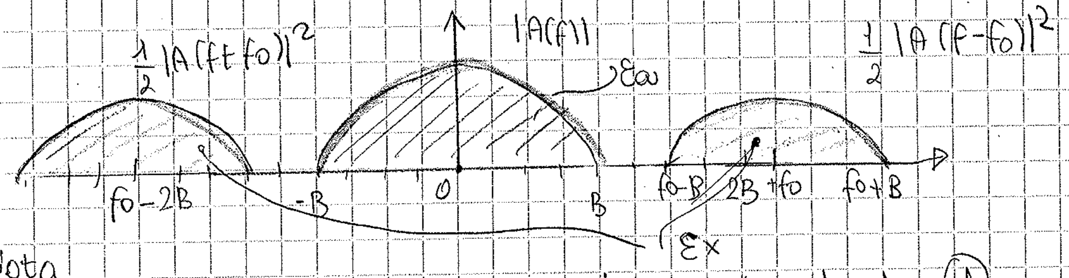
$$= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2i}\right)a(t)e^{i2\pi f_0 t} + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2i}\right)a(t)e^{-i2\pi f_0 t}$$

$$\Big\downarrow \mathcal{F}$$

$X(f) \Rightarrow$ Proprietà della modulazione $x(t)e^{i2\pi f_0 t} \Leftrightarrow X(f-f_0)$

$$X(f) = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2i}\right)A(f-f_0) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2i}\right)A(f+f_0)$$

Dobbiamo valutare $S_x(f) = |X(f)|^2$:



Nota

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2i} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i \qquad \left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right| = \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2i} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$

$$\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right|^2 = \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$|X(f)|^2 = \frac{1}{2}|A(f-f_0)|^2 + \frac{1}{2}|A(f+f_0)|^2$$

$$\boxed{\mathcal{E}_a = \int_{-\infty}^{+\infty}|A(f)|^2\,df} \qquad \boxed{\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty}|X(f)|^2\,df}$$

$\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_a$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|A(f-f_0)|^2\,df + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|A(f+f_0)|^2\,df$$

L'energia di A rimane invariata per traslazione

$$= \frac{1}{2}\mathcal{E}_a + \frac{1}{2}\mathcal{E}_a = \mathcal{E}_a$$

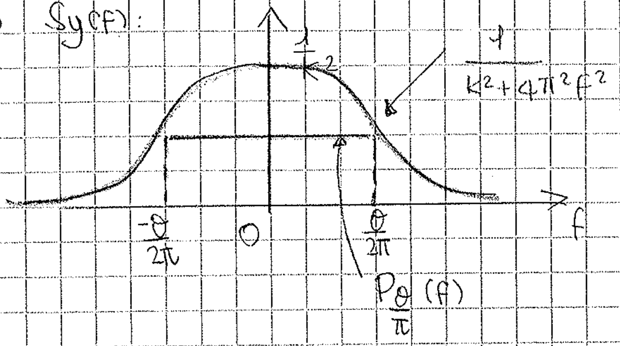
Quindi:

$$S_y(f) = \frac{1}{K^2 4\pi^2 f^2} \, P_{\frac{\theta}{\pi}}(f)$$

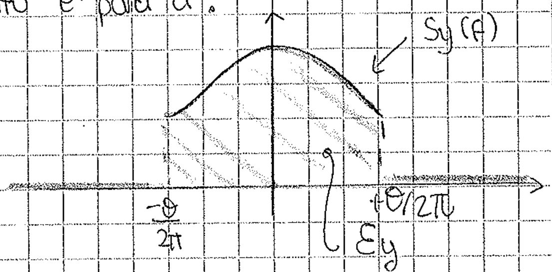
Dobbiamo valutare l'area di $S_y(f)$:

$$\mathcal{E}_y = \int_{-\infty}^{+\infty} S_y(f)\, df$$

Disegnamo $S_y(f)$:



Il prodotto è pari a:



$$\mathcal{E}_y = \int_{-\frac{\theta}{2\pi}}^{\frac{\theta}{2\pi}} \frac{1}{K^2+4\pi^2 f^2}\, df = \int_{-\frac{\theta}{2\pi}}^{\theta/2\pi} \frac{1}{K^2\left[1+\left(\frac{4\pi^2}{K^2}\right) f^2\right]}\, df =$$

$$= \frac{1}{K^2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{2\pi f}{K}\right)^2}\, df$$

Poniamo: $f_1 = \frac{2\pi f}{K}$ $\quad f = \frac{f_1 K}{2\pi}$

$df = \frac{K}{2\pi}\, df_1$ $\quad f = -\frac{\theta}{2\pi} \Rightarrow f_1 = -\frac{\theta}{K}$

$f = \frac{\theta}{2\pi} \Rightarrow f_1 = \frac{\theta}{K}$

Quindi:

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{K}{K^2}\int_{-\theta/K}^{\theta/K} \frac{1}{1+f_1^2}\, df_1 = \frac{1}{2\pi K}\Big[\operatorname{arctg}(f_1)\Big]_{-\frac{\theta}{K}}^{\frac{\theta}{K}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi K}\Big[\operatorname{arctg}\left(\frac{\theta}{K}\right) - \underbrace{\operatorname{arctg}\left(-\frac{\theta}{K}\right)}_{-\operatorname{arctg}\left(\frac{\theta}{K}\right) \text{ perché dispari}}\Big]$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}\pi K}\Big[\cancel{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\theta}{K}\right)\Big] = \underbrace{\frac{1}{\pi K}\operatorname{arctg}\left(\frac{\theta}{K}\right)}_{\mathcal{E}_y}$$

Quindi: per avere $\mathcal{E}_y = \frac{1}{2}\mathcal{E}_x$

$\Downarrow$

Federica

(7) Si consideri il segnale $x(t)$ il cui spettro e':

$$X(f) = \cos 2\pi f \; P_{\frac{1}{2}}(f)$$

Si costruiscono i segnali:

$$y(t) = x(t)\left[1 - e^{-i\pi t}\right]$$

$$z(t) = y(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-n) \longrightarrow \text{campionamento}$$

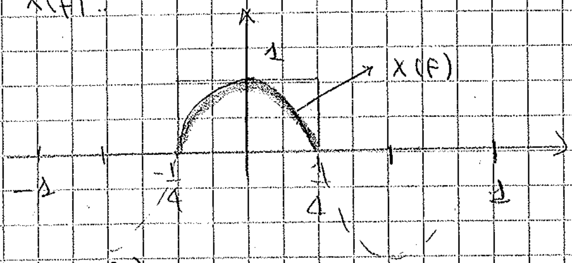
Valutare $z(t) = ?$

Disegniamo $X(f)$:

il periodo di $\cos 2\pi f$

$\cos 2\pi \, \underset{\uparrow \frac{1}{T}}{1} \cdot f$

(I)



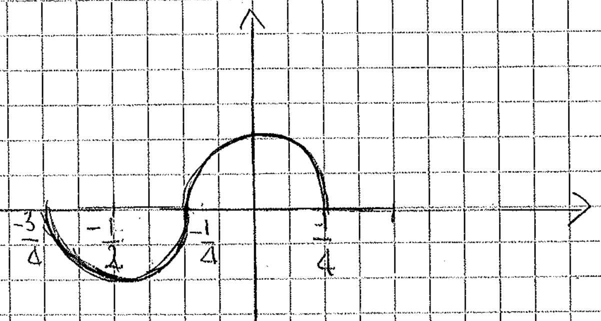
(II) Otteniamo $y(t)$

$$y(t) = x(t)\left[1 - e^{-i\pi t}\right] = x(t) - x(t)e^{-i\pi t}$$

$$Y(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} - \mathcal{F}\{x(t)e^{-i\pi t}\} =$$

$$= X(f) - \mathcal{F}\{x(t)e^{-i2\pi \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{f_0} t}\} =$$

$$Y(f) = X(f) - X\left(f + \frac{1}{2}\right)$$



(III) Otteniamo $z(t)$ $\qquad z(t) = y(t) \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-m)$

Proprietà:

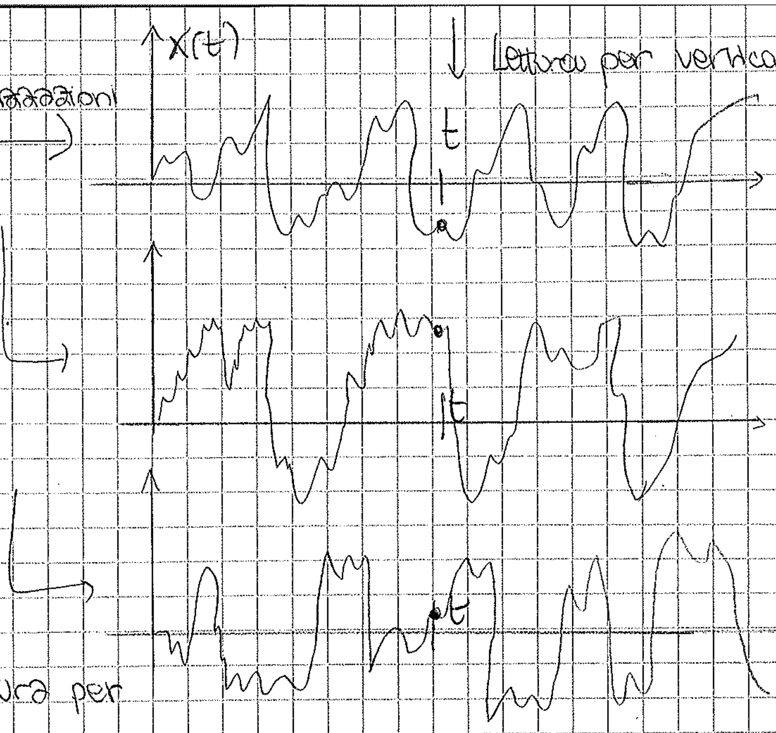
$$x(t) T_s \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) \longleftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - n\underbrace{F_s}_{\frac{1}{T_s}})$$

$$z(t) = y(t) \cdot 1 \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - m \cdot 1) \qquad [T_s = 1]$$

Realizzazioni

↓ Lettura per verticali : $X(t)$ con t fissato

$X(t)$ è una variabile casuale.



Lettura per orizzontali

Definizioni di processo casuale

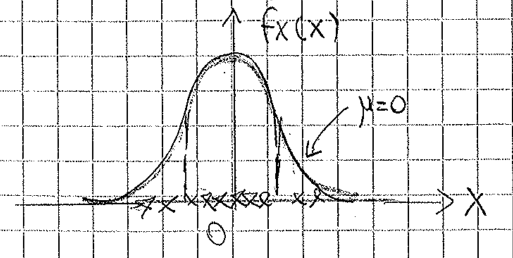
① È un insieme di segnali descritto da leggi probabilistiche

② È un insieme di infinite variabili casuali che sono, in generale, statisticamente dipendenti.

DOMANDA: ~~...~~

~~...~~ Che cosa descrive completamente una variabile casuale X?

La sua densità di probabilità $f_X(x)$.



$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f_X(x)\,dx$$

DOMANDA Cosa descrive completamente due var. casuali X_1 e X_2?

La densità di prob. congiunta $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$

② VARIANZA

$$\sigma^2(t) = E\left[(X(t) - \mu(t))^2\right]$$

$$= E\left[X^2(t) + \mu^2(t) - 2\mu(t)X(t)\right]$$

$$= \underbrace{E[X^2(t)]}_{\text{mom del } 2^\circ \text{ ordine}} + \underbrace{E[\mu^2(t)]}_{\mu^2(t) \text{ (perché deterministica)}} - \underbrace{2E[\mu(t)X(t)]}_{-2\mu(t)\underbrace{E[X(t)]}_{\mu(t)}}$$

$$\sigma^2(t) = E[X^2(t)] + \mu^2(t) - 2\mu(t)^2 = E[X^2(t)] - \mu^2(t)$$

<u>Noto</u>: Se $\mu(t) = 0$, allora

$$\sigma^2(t) = E[X^2(t)]$$

③ DEVIAZIONE STANDARD

$$\sigma(t) = \sqrt{E[(X(t) - \mu(t))^2]}$$

La deviazione standard $\sigma(t)$ ha la stessa unità di misura di $x(t)$

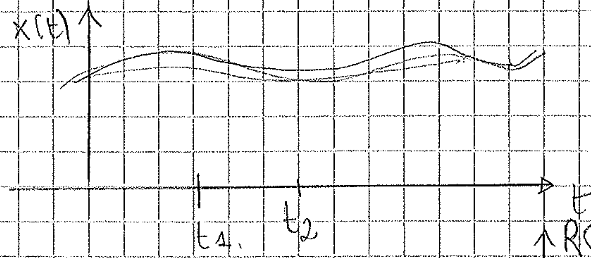
DOMANDA: Cosa succede a $t + \Delta t$?

Come va la temperatura con t?

31/10/12

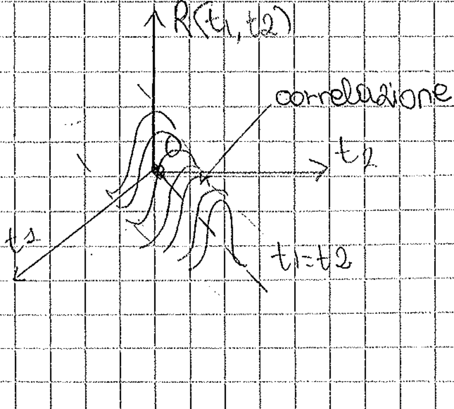
PROCESSI CASUALI

Autocorrelazione



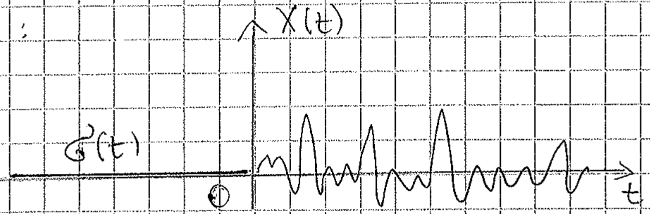
$$R(t_1, t_2) = E[X(t_1) X^*(t_2)]$$

autocorrelazione (a due tempi)



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 132

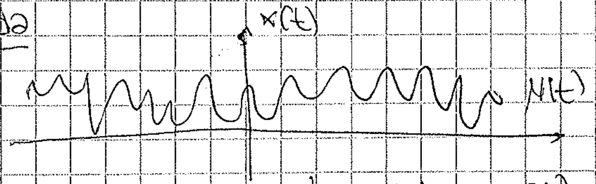
Domanda :



E' una realizzazione tipica di un processo WSS ?

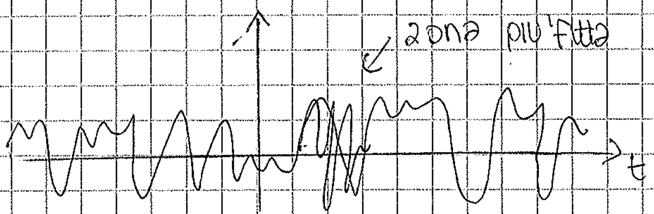
No perché $\sigma(t)$ cambia nel tempo

Domanda

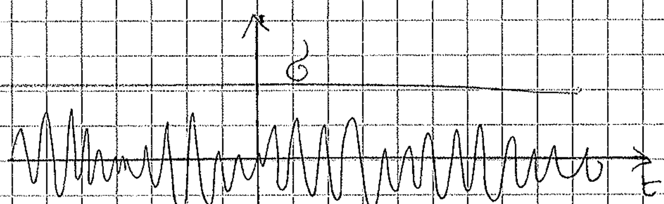


Non è un processo WSS! media $\mu(t)$ che cambia nel tempo

Domanda

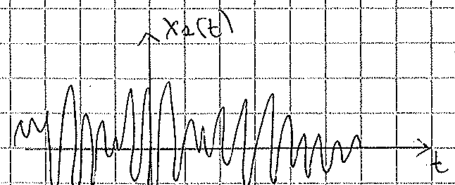


Nota:



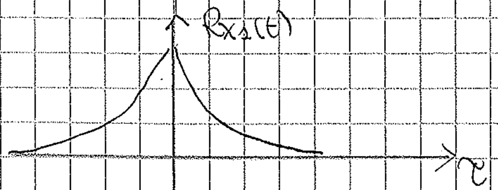
Processo WSS:

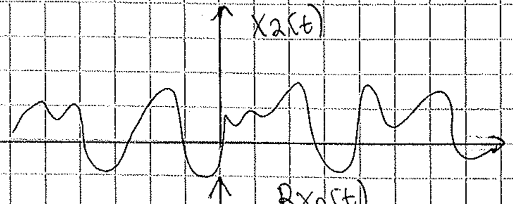
E



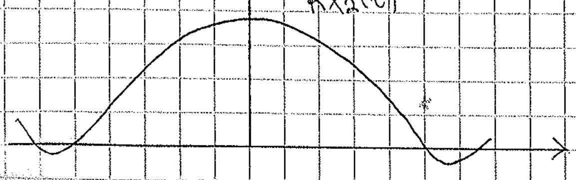
com'è la sua autocorrelazione?

CONCENTRATA





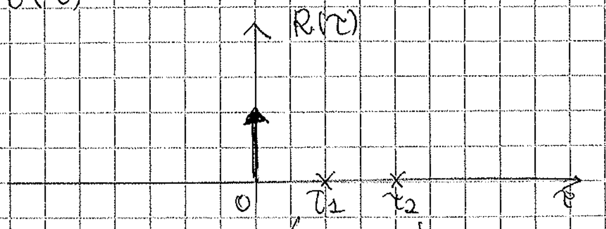
PIÙ LENTA



RUMORE BIANCO

Un processo casuale è un rumore bianco se:

1. $\mu = 0$
2. $R(\tau) = \delta(\tau)$



$R(\tau_1) = 0$ $\quad R(\tau_2) = 0$

L'autocorrelazione è sempre nulla per $\tau \neq 0$

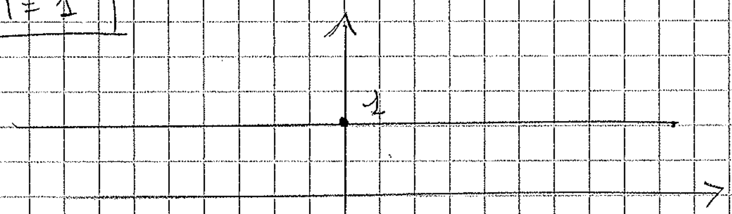
$\Downarrow$

Non c'è correlazione tra due istanti di tempo.

$$P(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) \cdot e^{-i2\pi f \tau} d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) e^{-i2\pi f \tau} d\tau = e^{-i2\pi f \tau} \Big|_{\tau=0}$$

$$\boxed{P(f) = 1}$$



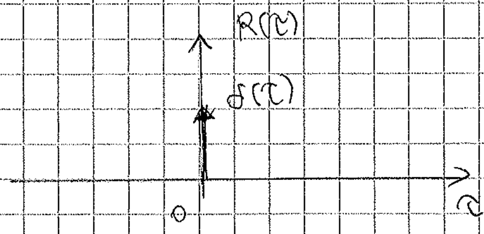
Rumore Gaussiano Bianco

(White Gaussian Noise)

Un processo casuale è un rumore gaussiano bianco se:

1. $\mu = 0$
2. $R(\tau) = \delta(\tau)$
3. Ad ogni istante di tempo t, $x(t)$ è una variabile casuale gaussiana

<u>Nota</u>:

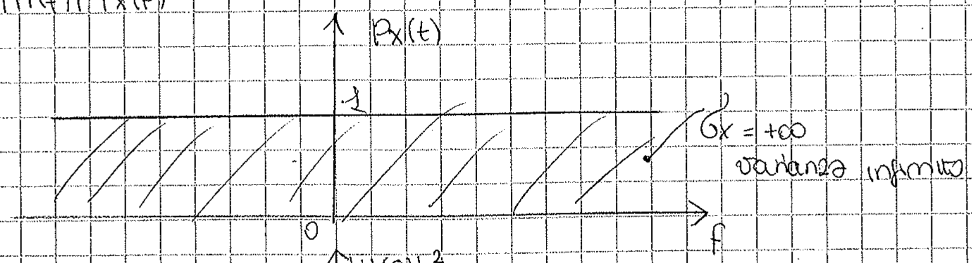


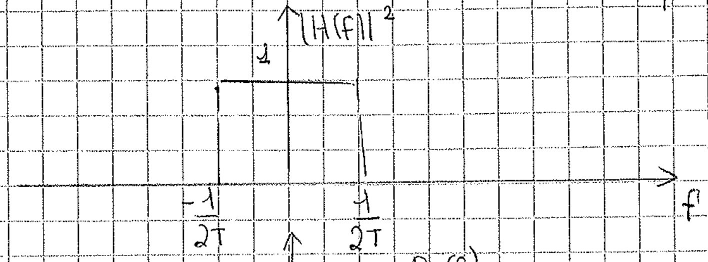
Se $\tau \neq 0$, $x(t)$ e $x(t+\tau)$ sono scorrelati, ma $x(t)$ è Gaussiano

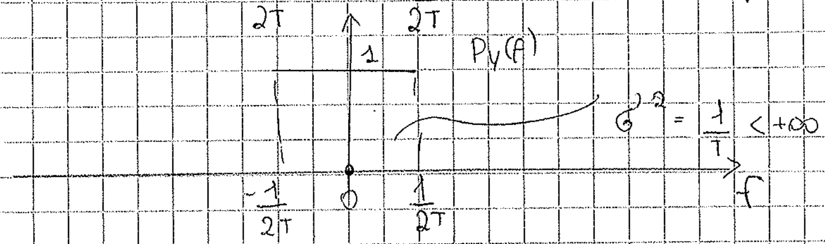
$\Downarrow$

<u>$x(t)$ e $x(t+\tau)$ sono stocasticamente indipendenti</u>

$P_Y(f) = |H(f)|^2 P_X(f)$







$P_Y(f) = P_{\frac{1}{T}}(f)$

PROCESSI CICLOSTAZIONARI

Le proprietà cambiano, variano ciclicamente

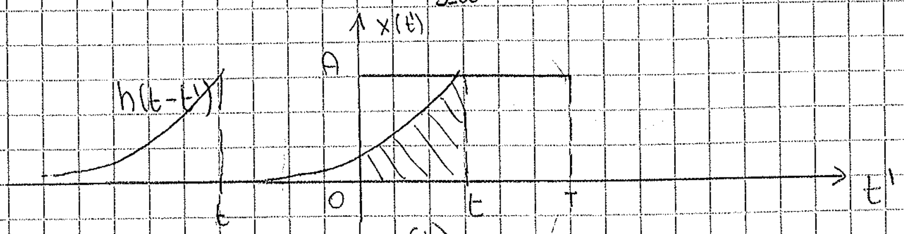
Un processo $x(t)$ è detto ciclostazionario in senso lato se:

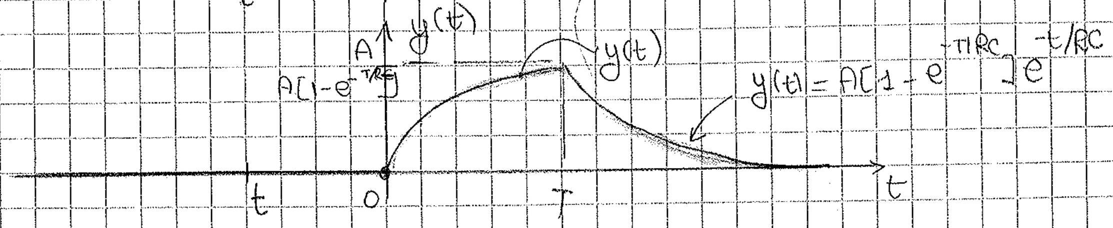
1. $\mu(t) = \mu(t+\tau)$
2. $R(t_1, t_2) = R(t_1+\tau, t_2+\tau)$

PROCESSI NON STAZIONARI

In generale i processi casuali del mondo fisico sono non stazionari

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-t')\,x(t')\,dt'$$

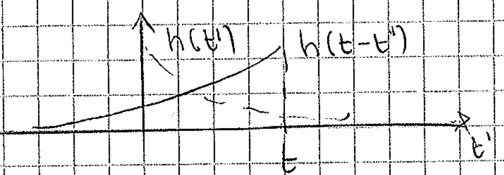




Nota:

$h(t-t')$ e' ribaltato e trasiato rispetto ad $h(t)$

$$t - t' = 0 \Rightarrow t' = t$$



- Quando $0 \le t \le T$: $y(t) = ?$

$$y(t) = \int_0^t h(t-t')\,x(t')\,dt' \text{ , dove}$$

$$h(t-t') = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t-t'}{RC}} u(t-t')$$

$$= \int_0^t \frac{1}{RC} e^{-(t-t')/RC} u(t-t') =$$

$$= \int_0^t \frac{1}{RC} e^{-(t-t')/RC} A\,dt' = \frac{A}{RC} \cdot e^{-t/RC} \int_0^t e^{t'/RC} dt'$$

$$= \frac{A}{\cancel{RC}} \cdot \frac{e^{-(t-t')/RC}}{\cancel{1/RC}} \Big|_0^t =$$

$$= A e^{-t/RC} \cdot e^{t'/RC} \Big|_0^t = A e^{-t/RC} \left(e^{t/RC} - 1 \right)$$

$$= A\left(1 - e^{-t/RC}\right) \rightarrow y(t)$$

$$0 \le t \le T$$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(T) = A\left[1 - e^{-T/RC}\right] \end{cases} \qquad \text{Se } \frac{T}{RC} \gg 1 \Rightarrow y(T) \simeq A$$

- Quando $t \ge T$

$$y(t) = \int_0^T h(t-t')\,x(t')\,dt' = \int_0^T \frac{1}{RC} e^{-(t-t')/RC} A\,dt' =$$

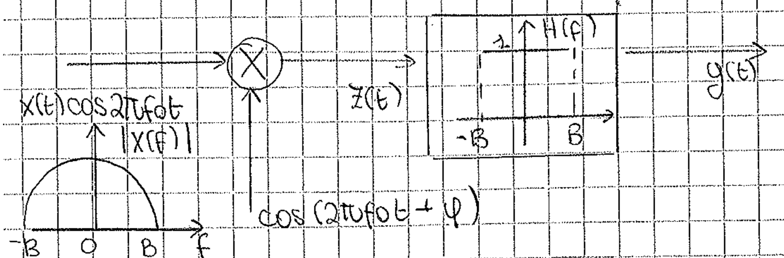
$$= \frac{A}{RC} e^{-t/RC} \int_0^T e^{t'/RC} dt' =$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 132

cioè, per : $2\pi f_0 T = n 2\pi$

$$\boxed{f_0 = \frac{n}{T}} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

3. Si consideri lo schema in figura: filtro p. basso ideale



dove $x(t)$ è un segnale strettamente limitato in banda, cioè $X(f) = 0$ per $|f| > B$. Si supponga $f_0 = 10B$.

Si chiede di:

(A) Ricavare un'espressione analitica per $y(t)$

(B) È possibile trovare un valore φ affinché $y(t) = 0$ per ogni valore di tempo t?

(A) Iniziamo scrivendo $Z(t)$:

$$Z(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t) \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

$$= x(t)\left[\frac{1}{2}e^{i2\pi f_0 t} + \frac{1}{2}e^{-i2\pi f_0 t}\right]\left[\frac{1}{2}e^{i(2\pi f_0 t + \varphi)} + \frac{1}{2}e^{-i(2\pi f_0 t + \varphi)}\right]$$

$$= x(t)\left[\frac{1}{4}e^{i(4\pi f_0 t + \varphi)} + \frac{1}{4}e^{-i\varphi} + \frac{1}{4}e^{i\varphi} + \frac{1}{4}e^{-i(4\pi f_0 t + \varphi)}\right]$$

$$\frac{1}{2}\cos(4\pi f_0 t + \varphi) \qquad \frac{1}{2}\cos\varphi$$

$$Z(t) = \frac{1}{2}x(t)\left[\cos(4\pi f_0 t + \varphi) + \cos\varphi\right] \rightarrow \text{uscita del nodo moltiplicatore.}$$

Valutiamo lo spettro $Z(f)$ ...

$$Z(t) = \frac{1}{2}x(t)\cos\varphi + \frac{1}{4}e^{i(4\pi f_0 t + \varphi)}x(t) + \frac{1}{4}e^{-i(4\pi f_0 t + \varphi)}x(t)$$

$$Z(f) = ?$$

Proprietà di modulazione:

$$x(t)e^{i2\pi f_0 t} \longleftrightarrow X(f - f_0)$$