NUMERO: 877

DATA: 12/03/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Lacirignola

MATERIA: Metodi Matematici per l'Ingegneria

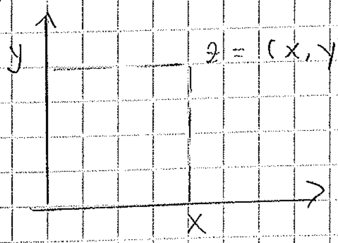
Prof. Fagnani

6/3/12

ANALISI COMPLESSA AC

RICHIAMI

AC1. Richiami sui numeri complessi



$z = (x, y) = x + iy$ $\quad 1 = (1, 0)$ unità reale

$i = (0, 1)$ unità immaginaria

$x = \mathrm{Re}\, z \qquad y = \mathrm{Im}\, z$

• SOMMA E PRODOTTO

$z_1 = x_1 + iy_1 \qquad z_2 = x_2 + iy_2$

$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

$i^2 = -1$

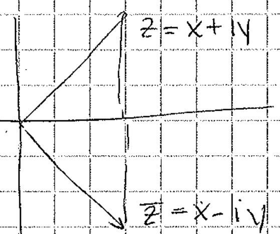
$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$

$= x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2 y_1y_2$

$= \underbrace{(x_1x_2 - y_1y_2)}_{\mathrm{Re}(z_1 z_2)} + i\underbrace{(x_1y_2 + y_1x_2)}_{\mathrm{Im}(z_1, z_2)}$

$+$ e $\cdot$ rendono i numeri complessi un campo indicato con $\mathbb{C}$

• CONIUGATO E MODULO



$z = x + iy \qquad \bar{z} = x - iy$

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) =$

$= x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2 \qquad \Rightarrow \quad z \cdot \bar{z} = |z|^2$

$\Downarrow$ IMPORTANTE

se $z \neq 0 \Rightarrow z \cdot \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} = 1$

cioè $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$

ESEMPIO: Calcolare $\dfrac{1+i}{1-i} = (1+i)(1-i)^{-1}$

Altre proprietà del modulo e del coniugato:

- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- $|\bar{z}| = |z|$
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
- $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$

$f \longleftrightarrow (u(x,y), v(x,y))$

Si osservi che $u(x,y)$ e $v(x,y)$ sono due "normali" funzioni di due variabili reali a valori reali

ES: $\underset{(z = x+iy)}{e^z} = \underbrace{e^x \cos y}_{u(x,y)} + i \underbrace{e^x \sin y}_{v(x,y)}$

ES: $f(z) = z^2 \qquad z = x+iy$

$z^2 = (x+iy)^2 = x^2 + (iy)^2 + 2ixy = (x^2 - y^2) + 2ixy$

$= \underbrace{(x^2 - y^2)}_{u(x,y)} + i \underbrace{2xy}_{v(x,y)}$

TOPOLOGIA DI $\mathbb{C}$

$\underset{\text{sottoinsieme}}{A \subseteq \mathbb{C}}$, $\underset{\text{punto}}{z_0 \in \mathbb{C}}$ $\longrightarrow$ Possono succedere solo due cose:

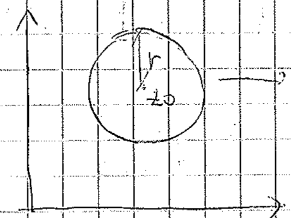
$z_0 \in A$ oppure $z_0 \notin A$

SECONDO L'INSIEMISTICA

Invece, secondo la TOPOLOGIA ho 3 casi: (classificazione più fine)

$z_0 \in \mathbb{C}$

$B_r(z_0) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r \}$

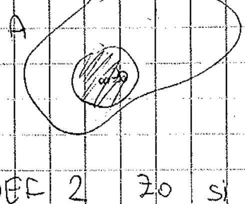


privato del bordo

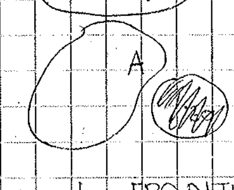
BORDO NON COMPRESO

- CERCHIO APERTO centrato in z_0, raggio r
- INTORNO APERTO
- PALLA APERTA

- DEF 1 z_0 si dice INTERNO ad A se $\exists\, r > 0$ tale che $B_r(z_0) \subseteq A$



- DEF 2 z_0 si dice ESTERNO ad A se è interno al complementare di A (A^C)



- DEF. 3 z_0 si dice di FRONTIERA per A se non è né interno, né esterno ad A.

$B_r(z_0) \cap A \neq \emptyset$

$B_r(z_0) \cap A^c \neq \emptyset$ $\quad \forall r > 0$

AC-2 Funzioni su $\mathbb{C}$ e elementi di topologia

$f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ $\qquad D \subseteq \mathbb{C}$ dominio

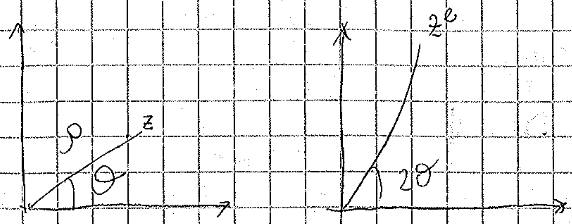
Altri esempi di funzioni

(0) $f(z) = \gamma z - z_0$ Affini

(1) $f(z) = \bar{z}$ riflessione rispetto all'asse reale

(2) Polinomi $f(z) = \underbrace{a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^m}$ $\in \mathbb{C}$, parametri fissati

$f(z) = z^2$



(3) Funzioni razionali

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^m}{\underbrace{b_0 + b_1 z + \ldots + b_m z^n}_{b(z)}}$$

$f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ $\qquad$ Es: $f(z) = \dfrac{z - 2i}{z(z+1)}$

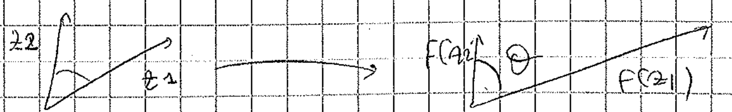
$D := \{ z \in \mathbb{C} \mid b(z) \neq 0 \}$ $\qquad$ $D: \{ z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0, -1 \}$

$f(z) = \dfrac{a_0 + a_1 z}{b_0 + b_1 z}$

caso + generale

Trasformazioni conformi $\longrightarrow$ Trasformazioni affini

PRESERVANO GLI ANGOLI (come le omotetie)



(4) Funzione esponenziale

$f(z) = e^z \qquad (z = x + iy) \qquad f(z) = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$

$$\begin{cases} |f z| = e^x = e^{\mathrm{Re}\, z} \\ \arg(f(z)) = y = \mathrm{Im}\, z \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{Re}\, f(z) = e^x \cos y \\ \mathrm{Im}\, f(z) = e^x \sin y \end{cases}$$

$\left(e^0 = 1 \qquad e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} e^{z_2} \right) \longrightarrow$ Solite proprietà

NOTAZIONE:

$f: D \to \mathbb{C} \qquad z = x + iy$ $\qquad$ P. REALE $\qquad$ P. IMMAGINARIA

$(D \subseteq \mathbb{C}) \qquad f(z) = u(z) + i v(z) = u(x,y) + i v(x,y)$

Esistono sottoinsiemi che non sono né aperti, né chiusi

ES: $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}\,z > 0\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}\,z = 0 \quad \text{Re}\,z \geq 0\}$

pezzo di semiretta positiva

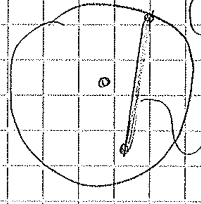
$\partial A = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}\,z = 0\}$

retta reale

$\boxed{\partial A \not\subset A, \quad \partial A \cap A \neq \emptyset}$

DEFINIZIONE 3 $A \subseteq \mathbb{C}$ è detto dominio se è aperto e se è CONNESSO (cioè se $\forall\, v, w \in A$, esiste una spezzata lineare che li connette e sta tutta dentro A)

Tutti gli esempi di aperti visti fino ad ora sono domini, ad esempio:



($B_r(z_0)$)

segmento

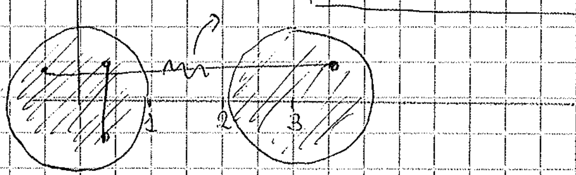
ELEMENTI DI TO

ES

$A = \underbrace{B_1(0)}_{\text{centrato in } 0} \cup \underbrace{B_1(3)}_{\text{centrata in } 3}$ raggio

L'unione delle due sfere non è connesso

NO $\boxed{\text{INSIEME NON CONNESSO}}$



DEF: $A \subseteq \mathbb{C}$ è detto REGIONE se si può ottenere partendo da un dominio aggiungendo una parte della frontiera.

$A = \{z_0\}$

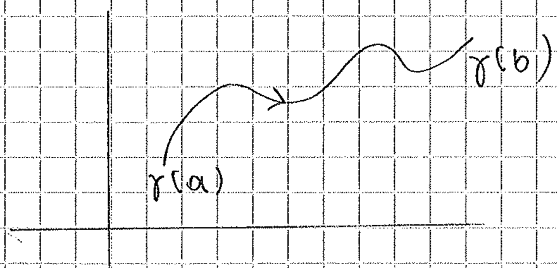
$\mathring{A} = \emptyset$ (pti interni) $\quad \partial A = \{z_0\}$ (pti di frontiera) $\quad \bar{A}^c = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ (pti esterni)

A è chiuso (perché $\partial A = A$) ⚠ // non ha punti interni

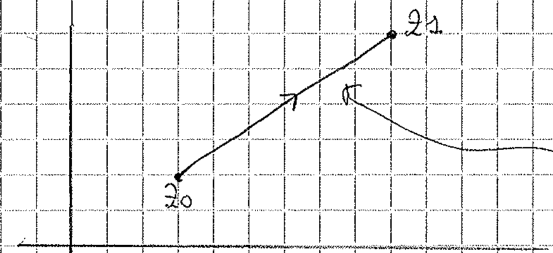
non è aperto! non è un dominio! non è una regione!

$\gamma(a)$ punto di partenza

$\gamma(b)$ punto di arrivo



ESEMPIO



$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$

con supporto

È come parametrizzare il segmento

parametrizzazione di segmento

$\gamma(t) = z_0 + t(z_1 - z_0)$ $\quad t \in [0,1]$

$\gamma(0) = z_0 \quad , \quad \gamma(1) = \cancel{z_0} + z_1 - \cancel{z_0} = z_1$

Descrivo una direzione, un moto che va da z_0 a z_1

$\to \gamma(t) = z_1 + t(z_0 - z_1)$ stesso supporto

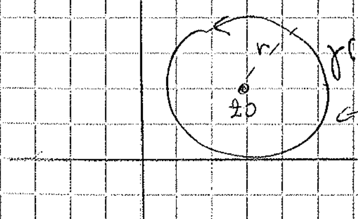
curva percorsa in senso inverso

$\gamma(t) = z_0 + t^2(z_1 - z_0) \longrightarrow$ in questo modo è

$t \in [0,1] \Rightarrow t^2 \in [0,1]$ cambiata la velocità di percorrenza

ES: Circonferenze

parametrizzazione circonferenza



$\gamma(0) = \gamma(2\pi)$ supporto

$\gamma(t) = z_0 + re^{it} \longrightarrow$ parametrizzazioni

centrata in z_0

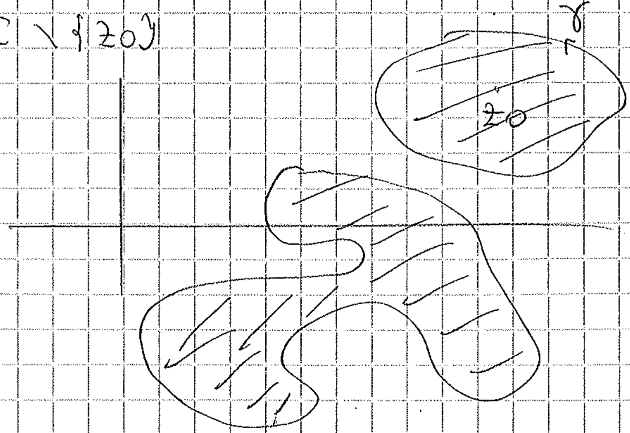
$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$

Dato che $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$ CURVA CHIUSA

- DEF Una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ si dice CHIUSA se $\gamma(a) = \gamma(b)$
- DEF: Una curva si dice semplice se (non passa due volte per lo stesso punto) $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ si dice SEMPLICE se

$\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2) \quad \forall\, t_1 \neq t_2$. (tranne nei punti di partenza)

$A = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$



$z_0 \in Int(\gamma)$

$z_0 \notin A$!!!

⇓

non è semplicemente connesso

8/3/12

MODULO DI PROBABILITA'

METODI — ANALISI COMPLESSA

Franco Pellerey — DISMAT

- RICEVIMENTO — GIOVEDI' 14.30/16.30

franco.pellerey@polito.it

- MATERIALE:
  - Ross "Calcolo delle probabilità" Apogeo 2004 o 2007.
  - Baldi "Introduzione alla probabilità e statistica matematica" McGRAW 2003, 07

STATISTICA
- DESCRITTIVA — metodi sintesi dati
- INFERENZIALE — strum. matematici — dedurre informazioni su popolazione tramite campione

CALCOLO PROB

- Disciplina matematica che serve per descrivere il comportamento di fenomeni o esperimenti il cui esito non è noto a priori.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 236

- ESEMPIO : 10 partecipanti ($n = 10$, $k = 3$)

n° di possibili podi (risultati per 1°, 2°, 3° posto)

$$D_{10,3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

- PERMUTAZIONI // se non ho vincoli

$n = k \longrightarrow$ (se $n = k$)

$$\boxed{D_{n,n} = n! = P_n} \rightarrow \text{permutazioni}$$

- Disposizioni con ripetizione ⚠

$$\boxed{D^{(r)}_{n,k} = \underbrace{n \cdot n \dots n}_{k \text{ volte}} = n^k}$$

Probabilità: prime

- ESEMPIO : TOTOCALCIO : $3^{13} \rightarrow$ individui

NUM BINARI k-BIT

n° rappresentabili $= 2^k$

- PERMUTAZIONI CON ELEMENTI INDISTINGUIBILI

parola ALA

anagrammi : AAL, ALA, LAA } 3 ⚠ ← $\tilde{P}_n$

$P_n = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$?

MA! $A_1 A_2 L$

$A_1 A_2 L$
$A_2 A_1 L$
$A_1 L A_2$
$A_2 L A_1$
$L A_1 A_2$
$L A_2 A_1$

} 6 $\longrightarrow$ Distinguo le lettere A

$$\boxed{\tilde{P}_n = \frac{3!}{2!} = \frac{6}{2} = 3}$$ ⚠

ESEMPI : Consideriamo coppie (i,j) $i,j \in \{0,1,\dots,9\}$

a) Quante sono possibili coppie?

b) Quante con $i \neq j$?

c) " " $i < j$?

d) " " $i \leq j$?

i : 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9
j =

a) $x = 10^2 = 10 \cdot 10$

scelte x la prima — scelta per la seconda

b) $x = 10 \cdot 9 = 90 = D_{10,2}$

c) $x = \frac{90}{2} = 45 = C_{10,2}$

d) $x = 45 + 10 = 55$

coppie in cui i, j sono uguali

• ES : Anagrammi parola PALLA

$n_1 = 1$ (P)

$n_2 = 2$ (A) $n = 5$

$n_3 = 2$ (L)

$$\tilde{P}_n = \frac{5!}{1!\,2!\,2!} = \frac{5!}{4} = \frac{5 \cdot \cancel{4} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{\cancel{4}} = \boxed{30}$$

• ES Urna con 20 palle numerate $1 \longrightarrow 20$

• 5 estrazioni con reimbussolamento

Quante possibili sequenze nell'estrazione?

$x = 20 \cdot 20 \cdot \dots = 20^5$

• ES : Come prima, senza reimbussolamento

$$x = D_{20,5} = \frac{20!}{15!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \dots}{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}$$

$n = 20$
$k = 5$ $D = \frac{20!}{(20-5)!} = \frac{20!}{15!}$

tolgo quello che ho pescato

PROBABILITÀ

- Esperimento Ω = insieme possibili risultati

$A \subseteq \Omega$

$P(A) \longrightarrow$ probabilità del sottoinsieme

- CONCEZIONE CLASSICA

Def: $P(A)$ = rapporto tra casi favorevoli ad A e casi possibili,

$$\boxed{P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega}}$$

⚠ supponendo i casi tutti equiprobabili!

(Consideriamo la probabilità che io domattina esca di casa e vengo schiacciato da un camion ☺) [cit. Pellerey]

- CONCEZIONE FREQUENTISTA

Def: $P(A)$ = limite (supposto esistente) del rapporto tra casi favorevoli ad A sul totale di prove effettuate, nell'ipotesi di poter replicare l'esperimento in condizioni identiche

$$\boxed{P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}}$$ $n \rightarrow$ num. tot. di prove

- correttezza del limite ?
- ripetibilità perché l'oggetto cambia nel tempo

- CONCEZIONE SOGGETTIVISTA

Def: $P(A)$ = misura del grado di fiducia che un individuo coerente attribuisce al verificarsi di A

- grado di fiducia: cifra che sono disposto a scommettere per guadagnare 1 se A si verifica
- individuo coerente: disposto ad essere sia lo scommettitore che il bookmaker.

- CONCEZIONE ASSIOMATICA

- Kolmogorov ~1930

Ω = insieme possibili risultati SPAZIO CAMPIONE

ESEMPIO

$\Omega = \{a, b, c, d\}$

$\mathcal{A} = \{\{a\}, \{b, c, d\}, \Omega\}$

1) OK
2) NO: manca l'insieme vuoto
3) OK

$\mathcal{A}$ non è un algebra

- $\mathcal{A} = \{\{a\}, \{b, c, d\}, \Omega, \emptyset\}$

SI E' UN ALGEBRA

- $\mathcal{A} = \{\{a, b\}, \{c, d\}, \Omega, \emptyset\}$

- $\Omega = \{a, b, c, d\}$ $\quad \mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ SÌ

- $P(\Omega) = \mathcal{A}$

$\Omega = \mathbb{R}$

- $\mathcal{A} = \{A_i\}_i, \ A_i \in \Omega$

ALGEBRA SE

i) $\Omega \in \mathcal{A}$

ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$

iii) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

equivalenti

OSSERVAZIONI

1) iii) $\longrightarrow$ iii') $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$

DE MORGAN $\begin{cases} \bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B} \\ \bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B} \end{cases}$

Infatti (se sono vere i), ii))

iii) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

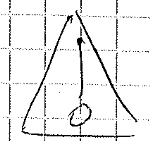
iii') $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$

Definizione

Un' applicazione $P: \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$

immagini

$P: A \in \mathcal{A} \longmapsto P(A) \in \mathbb{R}$



è detta probabilità se gode:

1) $P(A) \in \mathbb{R}^+$, $P(A) \geq 0$

2) $P(\Omega) = 1$

3) Data famiglia $\{A_i, i \in \mathbb{N}\}$ di eventi incompatibili, se $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$,

eventi incompatibili

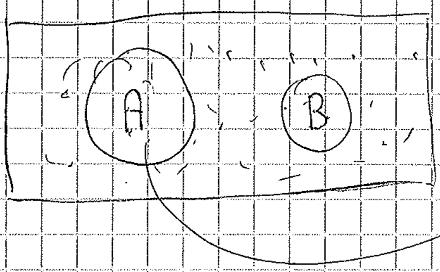
allora la probabilità $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ σ - addititività

NOTA: Caso particolare di 3:

3') $A, B \in \mathcal{A}$, $A \cap B = \emptyset$ (incompatibili), allora $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Additività

NUTELLA



$\Omega \longrightarrow$ con i possibili risultati

$P(A) =$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

con A e B incompatibili

TERNA DI PROBABILITÀ $\longrightarrow$ (Spazio di probabilità)

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$

$$\lim_{z \to z_0} |f(z) - \ell| = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \underbrace{\sqrt{(u(x,y) - \operatorname{Re}\ell)^2 + (v(x,y) - \operatorname{Im}\ell)^2}}_{A(x,y)} = 0 \quad (A)$$

(vecchio limite per funzioni di 2 variabili)

EQUIVALENZA

$$0 \le |u(x,y) - \operatorname{Re}\ell| \le A(x,y)$$

$$0 \le |v(x,y) - \operatorname{Im}\ell| \le A(x,y)$$

$$(A) \iff \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = \operatorname{Re}\ell \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = \operatorname{Im}\ell$$

Limiti, continuità, ... funzioni co...

Riassumendo

PROP Sono fatti equivalenti:

(1) $\lim_{z\to z_0} f(z) = \ell$

(2) $\lim_{z\to z_0} |f(z) - \ell| = 0$

(3) $\begin{cases} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = \operatorname{Re}\ell \\ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = \operatorname{Im}\ell \end{cases}$

Il limite di f si può "leggere" — Guardo separatamente parte reale e parte immaginaria

Per questo concetto di limite valgono le usuali proprietà algebriche.

CONTINUITA' Ω regione, $z_0 \in \Omega$

DEF. $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ si dice continua in z_0 se

$$\exists \lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0) \quad (1)$$

(Anche in questo caso nessuna novità)

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ $\qquad z = x+iy$, $z_0 = x_0+iy_0$

$$(1) \iff \begin{cases} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u(x_0,y_0) \\ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v(x_0,y_0) \end{cases} \iff u \text{ e } v \text{ continue in } (x_0,y_0)$$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} (z + z_0) = 2z_0$$

z^2 ?

derivata di f in z_0.

$$\boxed{f'(z_0) = 2z_0}$$

Valgono le usuali regole di derivazione come nel caso reale:

> derivata di somma, prodotto, quoziente.

> derivata funzione composta

ed in molti esempi la derivata è esattamente la stessa:

$$f(z) = z^k \qquad f'(z) = k\, z^{k-1}$$

$$f(z) = e^z \quad , \quad f'(z) = e^z$$

? Differenziabilità

$f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$

$z = x + iy \qquad z_0 = x_0 + iy_0$

Derivabilità di f in z_0

$\Updownarrow$?

Differenziabilità di $u(x,y)$ e $v(x,y)$ in (x_0,y_0)

Differenziab

Richiami : Concetto di differenziabilità

$D \subseteq \mathbb{R}^2 \qquad u(x,y)$ definita su D $(u: D \to \mathbb{R})$

DEF: u si dice DIFFERENZIABILE in (x_0,y_0) $\in D$ se $\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\boxed{u(x,y) = u(x_0,y_0) + \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \omega(x,y)}$$

$$\omega(x,y) = o\left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\right) \qquad (x,y) \to (x_0,y_0)$$

Inoltre,
$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) \\ \beta = \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \end{cases}$$

Se esistono le der. parziali non è detto che esista la differenziabilità, ma non è valido il contrario

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\sqrt{\omega_1(x,y)^2+\omega_2(x,y)^2}}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0$$

$$0 \le \frac{|\omega_i(x,y)|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \le \frac{\sqrt{\omega_1(x,y)^2+\omega_2(x,y)^2}}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$$

$i = 1,2$

Quindi

$$u(x,y) = u(x_0,y_0) + \operatorname{Re} f'(z_0)(x-x_0) - \operatorname{Im} f'(z_0)(y-y_0) + \omega_1(x,y)$$

$$v(x,y) = v(x_0,y_0) + \operatorname{Im} f'(z_0)(x-x_0) + \operatorname{Re} f'(z_0)(y-y_0) + \omega_2(x,y)$$

$$\left.\begin{matrix}\omega_1(x,y)\\ \omega_2(x,y)\end{matrix}\right\} = o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)$$

per $(x,y) \to (x_0,y_0)$

$\Downarrow$ u, v sono entrambi differenziabili in (x_0,y_0) e

NUOVE PROPRIETÀ ⚠

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \operatorname{Re} f'(z_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \\[2ex] -\dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = \operatorname{Im} f'(z_0) = \dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \end{cases}$$

→ derivate accoppiate

La derivabilità complessa non implica soltanto la differenziabilità di u e v, ma anche un accoppiamento delle loro derivate.

Il ragionamento fatto si può invertire, e si ha il seguente risultato conclusivo.

⚠

TEO 1. $f: D \to \mathbb{C}$ $\quad z_0 \in D$

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y) \qquad z = x+iy,\quad z_0 = x_0 + i y_0$$

Sono equivalenti:

TEOREMA DI CAUCHY-REIMANN

(1) f è derivabile in z_0

(2) u e v sono differenziabili in (x_0,y_0) e valgono le relazioni

CR (Cauchy-Reimann)

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\ ;\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)}$$

Inoltre vale: $f'(z_0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$

(2) $f(z) = \bar{z}$ $\quad f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\quad (z = x+iy)$

$\bar{z} = x - iy$

$f(z) = \underbrace{u(x,y)}_{x} + i\underbrace{v(x,y)}_{-y}$ $\Rightarrow$ ~~f(z) =~~

entrambi di classe C^1

(CR) ?
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} = 1 & \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} = 0 & \frac{\partial v}{\partial y} = -1 \end{bmatrix}$$

⚠ $\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$ sempre!

$\downarrow$

f non è mai derivabile in senso complesso in nessun punto del piano $\mathbb{C}$.

⚠

(Poiché non sono soddisfatte condizioni CR)

- $f(z) = \gamma z + z_0$

$f(z) = \bar{z}$ $\rightarrow$ ISOMETRIA ma ha bisogno della 3ª dimensione per realizzarsi le rotazioni $\quad |\gamma| = e^{i\tau}$

$e^{i\tau}(z) = e^{i\tau}(x + iy) = \begin{pmatrix} \cos\tau & -\sin\tau \\ \sin\tau & \cos\tau \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\longrightarrow$ derivabili

---

$f(z) = \bar{z} = x - iy = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\longrightarrow$ non derivabile in senso complesso

---

$S(z)$:

$z = x+iy$

$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$

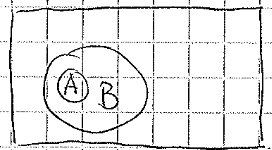
$u(x,y) = e^x\cos y$ $\longrightarrow$ di classe C^1

$v(x,y) = e^x\sin y$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} = e^x\cos y & \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x\cos y \\ \frac{\partial v}{\partial x} = e^x\sin y & \frac{\partial v}{\partial y} = e^x\cos y \end{bmatrix}$$

OK!

$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x\cos y + ie^x\sin y = e^x(\cos y + i\sin y) = e^z$

Ω 

$B = A \cup \tilde{A}$

$\tilde{A} = B - A$

$$P(B) = P(A \cup \tilde{A})$$
$$= P(A) + P(\tilde{A}) \geq P(A)$$
$$P(\tilde{A}) \geq 0$$

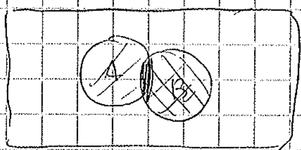
5) PRINCIPIO DI INCLUSIONE - ESCLUSIONE

(TEOREMA DELLA SOMMA)

$A, B \in \Omega$

valido per due elementi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Ω

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$A \cup B = \tilde{A} \cup C \cup \tilde{B}$$

dove $\tilde{A} = A - B$

$\tilde{B} = B - A$

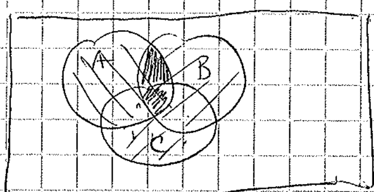
$C = A \cap B$

$$P(A \cup B) = P(\tilde{A} \cup C \cup \tilde{B}) = P(\tilde{A}) + P(C) + P(\tilde{B})$$
$$= (P(\tilde{A}) + P(C)) + (P(\tilde{B}) + P(C)) - P(C)$$
$$= P(A) + P(B) - P(C)$$

Se gli eventi invece sono 3,

$P(A \cup B \cup C)$

$= P(A) + P(B) + P(C) -$
$- P(A \cap B) - P(A \cap C) -$
$P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$



valido per 3 elementi

Quindi: $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

$\Omega = \{(g_1, g_2), (g_1, f_1), \dots\}$ tutte le possibili coppie $\#\Omega = ?$

numero di possibili coppie $= 5 \cdot 4 = 20$ $\left(\frac{5!}{2!}\right)$

$P(\{(a,b)\}) = \frac{1}{20} \rightarrow$ 1 coppia

$P(\{(g_1, f_1), (g_1, f_2)\}) = P(\{(g_1, f_1)\}) + P(\{(g_1, f_2)\}) = \frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{1}{10}$

- $A = \{$entrambi guasti$\}$ 2 entrambe

$A = \{(g_1, g_2), (g_2, g_1)\}$? $\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

$P(A) = \frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{1}{10}$

$P(A) = \frac{m_A}{m} = \frac{2}{5 \cdot 4} = \frac{1}{10}$

$\binom{2}{1}$

- $B = \{$esattamente 1 guasto$\}$

$= \{(g_1, f_1), (g_1, f_2), (g_1, f_3), (g_2, f_1), (g_2, f_2), (g_2, f_3), (f_1, g_1),$
$(f_2, g_1), (f_3, g_1), (f_1, g_2), (f_2, g_2), (f_3, g_2)\}$

$P(B) = \frac{m_B}{m} = \frac{12}{20} = \frac{6}{10}$

n. coppie

n poss. coppie

- $C = \{$almeno uno sia guasto$\}$

$C = A \cup B$

esattamente 1 guasto

$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{10} + \frac{6}{10} - P(\emptyset) = \frac{7}{10}$

entrambi guasti

$P(C) = 1 - P(\bar{C})$

$= 1 - P($nessuno guasto$)$

$\bar{C} = \{(f_1, f_2)(f_1, f_3)(f_2, f_1)(f_2, f_3)(f_3, f_1)(f_3, f_2)\}$

$P(\bar{C}) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$ $P(C) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$

nessuno guasti

$\#\bar{C} = D_3$ disposizione di 2 oggetti su 3

$D_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 6$

ES lancio dado

$\Omega = \{1, 2, \dots 6\}$

B = esce pari $\longrightarrow$ (evento aggiuntivo)

A = esce il num 2

$P(A) = 1/6$

(2 ∩ num pari)

$P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{1/6}{3/6} = \boxed{\dfrac{1}{3}}$

$\Omega_B = \{2, 4, 6\}$ $\longrightarrow$ considerando il sottoinsieme

$P(A|B) = \dfrac{1}{3}$

Relazioni tra P(A) e P(A|B)

- **Es 1**

A = esce 2

B = esce pari

$P(A) = 1/6$

$P(A|B) = 1/3$

$\Longrightarrow P(A) \leq P(A|B)$ prob. condizionata

- **Es 2** $\longrightarrow$ Probabilità pari a zero

A = esce 2

B = esce dispari

la loro intersezione è l'insieme vuoto

$P(A) = 1/6 \qquad P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(\emptyset)}{P(B)} = 0$

Probabilità con

- **Es 3** $\longrightarrow$ Probabilità costante

A = esce n° ≤ 2 = {1, 2}

B = {esce dispari}

$P(A) = \dfrac{2}{6} \qquad P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{1}{6}}{3/6} = \dfrac{1}{3}$

$\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{1/6}{3/6} = \dfrac{1}{3}$

ESTENSIONE DELL' INDIPENDENZA AL CASO DI PIU' EVENTI

$A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{Q} \longrightarrow$ Algebra

Potremmo dire che sono indipendenti se

i) $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$

ii) $\begin{cases} P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) \\ P(A_2 \cap A_3) = P(A_2) \cdot P(A_3) \\ P(A_1 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_3) \end{cases}$

NON SONO EQUIVALENTI!

esempio in cui dimostrazione che i) $\not\Rightarrow$ ii)

i) $\not\Rightarrow$ ii)

Ω — consideriamo uno spazio in cui

A_1 e A_2 tali che $A_1 = A_2$ $\quad P(A_1) < 1$

$A_3 = \emptyset$

- verifichiamo la prima condizione

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(\emptyset) = 0$

$P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0$

1° OK

- Verifichiamo la seconda ii)

$\begin{cases} P(A_1 \cap A_3) = P(\emptyset) = 0 \\ P(A_1) \cdot P(A_3) = P(A_1) \cdot 0 = 0 \end{cases}$ sì

$\begin{cases} P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \\ P(A_1) \cdot P(A_2) = (P(A_1))^2 \end{cases}$ diversi (poiché $P(A_1) \neq 1$) NON SODDISFATTA

---

esempio in cui dimostriamo che ii) $\not\Rightarrow$ i)

esperimento $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$

$A_1 = \{1, 2\}$

$A_2 = \{2, 3\}$

$A_3 = \{3, \cancel{4}1\}$

Vale ii)

$P(A_1 \cap A_2) = P(\{2\}) = 1/4$

$P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

le altre proprietà sono diverse

Non vale i)

$P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ Ma! $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0$ NON SODDISF.

Analogamente:

A, B indipendenti $\Rightarrow \begin{cases} A, \bar{B} \text{ indip} \\ \bar{A}, B \text{ indip} \end{cases}$

TEOREMA DEL PRODOTTO

Data fam $\{A_1, A_2, \dots A_n, A_i \in \mathcal{A}\}$ vale la seg. relazione:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots P(A_n|A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n)$$

<u>Dim</u> per induzione

$n = 2$ $\quad P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1)$

$$P(A_2|A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)}$$

$n > 2$

supponiamo sia vero per $n-1$ $\quad P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$

$$= P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \dots P(A_{n-1}|A_1 \cap \dots A_{n-2})$$

$$P(A_1 \cap \dots A_n) = P(B \cap A_n)$$

dove $B = A_1 \cap A_2 \dots \cap A_{n-1}$

$$= P(B) \cdot P(A_n|B)$$

$$= P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \dots P(A_{n-1}|\dots) \cdot P(A_n|\dots A_{n-1})$$

<u>ESEMPIO</u>

$U = \{R_1, R_2, B\}$

esp. estrazione 2 palle con reimbussolamento

B = estraggo 2 rosse $\qquad A_1 \cap A_2$

C = estraggo 1 rossa, 1 bianca in sequenza $\qquad A_1 \cap \bar{A}_2$

D = estraggo una rossa, una bianca $\qquad (A_1 \cap \bar{A}_2) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2)$

$\Omega = \{(r,r), (r,b), (b,r), (b,b)\}$

A_1 = 1° estratta rossa

A_2 = 2° estratta rossa

TEOREMA PROBABILITA' TOTALI

Sia $\{A_1, A_2, \dots A_m\}$ una partizione di Ω

$A_i \in \mathcal{a}$ $\quad A_i \cap A_j$

$$\bigcup_{i=1}^{m} A_i = \Omega$$

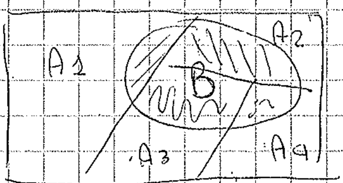
Sia $B \in \mathcal{a}$. Allora

$$P(B) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i) \cdot P(B|A_i)$$

<u>Dim</u> $\quad B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right)$

$= \bigcup_{i=1}^{m} (B \cap A_i)$ $\quad$ Osserviamo che $B \cap A_i$ incompatibili

$$P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{m} (B \cap A_i)\right) = \sum_{i=1}^{m} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i) \cdot P(B|A_i)$$



$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) + P(B \cap A_4)$$

$$= P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) \dots$$

ESEMPIO

2 monete (indistinguibili)

- M_1: T $1/2$, C $1/2$
- M_2: T $1/3$, C $2/3$

Esp: estrazione moneta a caso, lancio della moneta e osservazione

$\Omega = \{T, C\}$

$\Omega = \{(M_1, T), (M_2, T), (M_1, C), (M_2, C)\}$

B = esce Testa $\quad P(B) = ?$ $\quad$ prob di far uscire Testa prendendo una moneta

$= \{(M_1, T), (M_2, T)\}$

A_1 = esce la moneta M_1

A_2 = esce la moneta M_2 $\quad \{A_1, A_2\}$

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \boxed{5/12}$$

(+ = oppure)

TEOREMA BAYES

$P(B) \neq 0$

Siano la famiglia $\{A_1, A_2 \ldots A_m\}$ e B come nel teorema precedente.
Allora, per ogni $\forall i = 1 \ldots m$, la :

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{m} P(A_j) P(B|A_j)}$$

Dim

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{m} P(A_j) P(B|A_j)}$$

ESEMPIO

→ 2 monete come prima

Sapendo che esce la testa calcolare prob che la moneta estratta sia M_1 ?

$A_1 \longmapsto$ estraggo M_1

$A_2 \longmapsto$ estraggo M_2

$B \longrightarrow$ esce testa

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1) \cdot P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{5}{12}} = \boxed{\frac{3}{5}}$$

P(B) calcolato prima

$$P(A_2|B) = 1 - P(\bar{A_2}|B) = 1 - \frac{3}{5} = \boxed{\frac{2}{5}}$$

↓ Probabilità che sia M_2

TEOREMA di

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{12}}$$

$$\frac{P(A_1) \cdot P(B)}{P(B)}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{6+4}{24} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$$

Come si fa a rendere olomorfa una funzione armonica?

Supponiamo ora di partire da una funzione armonica $u: D \to \mathbb{R}$ e chiediamoci se è possibile individuare una (o più) funzioni armoniche $v: D \to \mathbb{R}$ tale che $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ $\quad z = x+iy$ sia olomorfa su D.

Questo si può sempre fare e $v(x,y)$ è unica a meno di costanti additive.

$v(x,y)$ è detto il COMPLETAMENTO ARMONICO di u.

ESEMPIO: $u(x,y) = x^2 - y^2 + x - 7y$

è armonica su $\mathbb{C}$

Come si determina $v(x,y) = ?$ $\longrightarrow$ Impongo le condizioni di CR:

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial y}} = \frac{\partial u}{\partial x} = \boxed{2x - 1}$$

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial x}} = -\frac{\partial u}{\partial y} = \boxed{2y + 7}$$

1

$$v(x,y) = \int \frac{\partial v}{\partial y}\,dy = \int (2x-1)\,dy = (2x-1)y + C(x)$$

$$(2xy - y + C(x))$$

PER TROVARE LA COSTANTE:

Usando ora la seconda condizione otteniamo:

$$\cancel{2y} + 7 = \cancel{2y} + C'(x)$$

derivata di (2xy − y + C(x)) derivando rispetto a x eguagliato a $\frac{\partial v}{\partial x}$

$$C'(x) = 7$$

$$C(x) = 7x + C$$

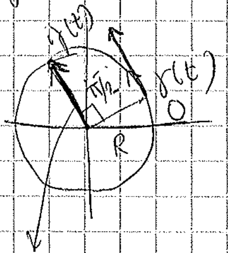
Quindi:

$$v(x,y) = (2x-1)y + 7x + C$$

← famiglia dei completamenti armonici della funz. u.

3) $\gamma(t) = Re^{it} = R\cos t + iR\sin t$

$t \in [0, 2\pi]$ curva di Jordan



$\gamma'(t) = -R\sin t + iR\cos t$

$\gamma'(t) = i\gamma(t)$

⚠ il vettore velocità è $i\gamma(t)$

sfasamento di $\pi/2$

Se lo traslo nel pto che mi interessa si può notare che è tangente alla traiettoria.

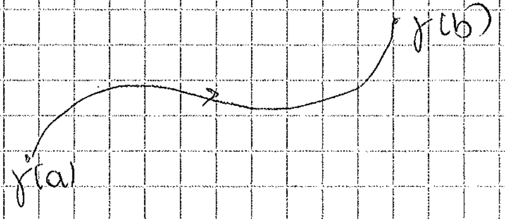
NOT.: Curva = Cammino

Alcune operazioni sulle curve.

1) Invertire il senso di percorrenza:

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$

$-\gamma : [-b, -a] \to \mathbb{C} \qquad (-\gamma)(t) = \gamma(-t)$

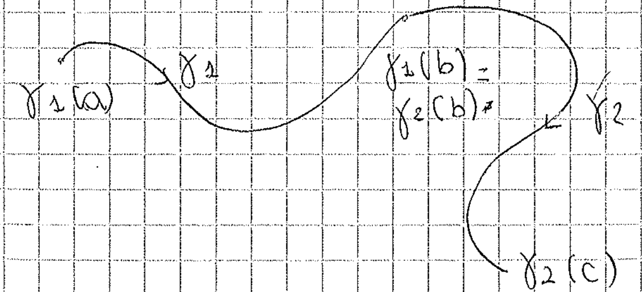


stesso supporto di γ ma percorsa in senso inverso

2) Concatenare curve:

$\gamma_1 [a, b] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [b, c] \to \mathbb{C}$

$\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$



È possibile considerarle insieme: CONCATENAZIONE

$\gamma_1 \vee \gamma_2 : [a, c] \to \mathbb{C}$

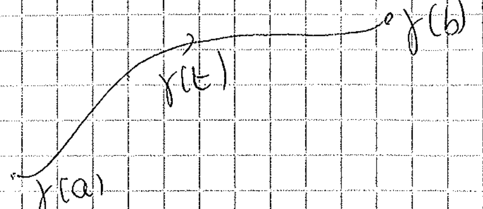
$$(\gamma_1 \vee \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{se } t \in [a, b] \\ \gamma_2(t) & \text{se } t \in]b, c] \end{cases}$$

γ_1, γ_2 regolari $\Rightarrow \gamma_1 \vee \gamma_2$ regolare

se le curve sono regolari, allora lo è anche la loro concatenazione

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 236

Definiamo l' integrale di $f(z)$ lungo γ ma non come "normale" integrale di linea. Definiamo invece nel modo seguente, facendo entrare in gioco la moltiplicazione complessa.



DEF

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

NON FACCIO IL PRODOTTO SCALARE
prodotto in $\mathbb{C}$!

La definizione ha senso poiché $f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ è continua a tratti

Vediamo come si esprime in componenti:

$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y) \qquad z = x+iy$

$\gamma(t) = x(t) + i\,y(t)$

$$f(\gamma(t))\,\gamma'(t) = [u(x(t),y(t)) + i\,v(x(t),y(t))]\,[x'(t) + i\,y'(t)]$$

$$= \underbrace{[u(x(t),y(t))\,x'(t) - v(x(t),y(t))\,y'(t)]}_{\text{Reale}} + i\,\underbrace{[u(x(t),y(t))\,y'(t) + v(x(t),y(t))\,x'(t)]}_{\text{Imm}}$$

$$\int_\gamma f(t)\,dt = A + iB$$

Dove: $$A = \int_a^b [u(x(t),y(t))\,x'(t) - v(x(t),y(t))\,y'(t)]\,dt$$

$$B = \int_a^b [u(x(t),y(t))\,y'(t) + v(x(t),y(t))\,x'(t)]\,dt$$

Nel linguaggio degli integrali di linea

$A = \int_\gamma (\overrightarrow{u,-v})\,d\vec{e} \longrightarrow$ campo $(\overrightarrow{u,-v})$

$B = \int_\gamma (\overrightarrow{v,u})\,d\vec{e} \longrightarrow$ campo $(\overrightarrow{v,u})$

(3) Invarianza rispetto alle riparametrizzazioni

$f: D \to \mathbb{C}$ cont

$\gamma: [a,b] \to D$ reg.

$\zeta: [c,d] \to [a,b]$ $\quad t = \zeta(s)$

surr cresc C^1

$$\int_{\gamma \circ \zeta} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz$$

DIM
$$\int_{\gamma\circ\zeta} f(z)\,dz = \int_c^d f(\gamma(\zeta(s)))\,(\gamma\circ\zeta)'(s)\,ds$$

$$= \int_c^d f(\gamma(\zeta(s)))\,\gamma'(\zeta(s))\,\zeta'(s)\,ds$$

$\zeta(s) = t$ Sostituzione

$dt = \zeta'(s)\,ds$

$$= \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_\gamma f(t)\,dz$$

(4) Disparità rispetto alle inversioni di cammini

$f: D \to \mathbb{C}$ continua

$\gamma: [a,b] \to D$ $\quad -\gamma: [-b,-a] \to D$

$(-\gamma)(t) = \gamma(-t)$

$$\int_{-\gamma} f(t)\,dt = -\int_\gamma f(t)\,dz$$

DIM
$$\int_{-\gamma} f(z)\,dz = \int_{-b}^{-a} f((-\gamma)(t))\,(-\gamma)'(t)\,dt$$

$$= -\int_{-b}^{-a} f(\gamma(-t))\,\gamma'(-t)\,dt = \text{SOSTIT } \boxed{-t = s}$$

$$= +\int_b^a f(\gamma(s))\,\gamma'(s)\,ds = -\int_a^b f(\gamma(s))\,\gamma'(s)\,ds =$$

$$= -\int_\gamma f(z)\,dz$$

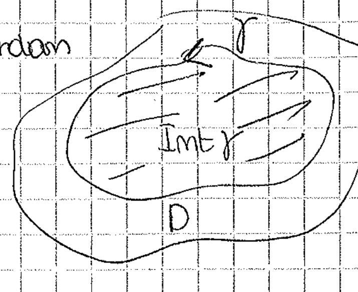
TEOREMA DI GREEN

$\vec{F} : D \to \mathbb{R}^2$ $\quad \vec{F}(x,y) = (\alpha(x,y), \beta(x,y))$ di classe C^1

campo di forze

$\gamma : [a,b] \to D$ curva di Jordan

$\text{Int}\,\gamma \subseteq D$



curva regolare chiusa semplice

Allora: $\boxed{\displaystyle\int_\gamma \vec{F}\, d\vec{e} = \iint_{\text{Int}\,\gamma} \underbrace{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial x}\right)}_{} dx\, dy}$

(Scambio int. di linea con int. doppio) $\quad$ rotore di $\vec{F} \Rightarrow \text{rot}(\vec{F})$

$f : D \to \mathbb{C}$ $\qquad D \subseteq \mathbb{C}$ dominio

$f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ curva regolare

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = A + iB$$

$$A = \int_\gamma (\overrightarrow{u, -v})\, d\vec{e} \quad , \quad B = \int_\gamma (\overrightarrow{v, u})\, d\vec{e}$$

Se f è olomorfa e γ è di Jordan si può applicare il Teorema di Green ad A e B!

TEOREMA (CAUCHY - GOURSAT)

$f : D \to \mathbb{C}$ olomorfa, $\gamma : [a,b] \to D$ Jordan e tale che $\text{Int}\,\gamma \subseteq D$

Allora: $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 0$

<u>DIM</u>: $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = A + iB$

$$A = \int_\gamma (\overrightarrow{u, -v})\, d\vec{e} \underset{\text{Green}}{=} \iint_{\text{Int}\,\gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx\, dy$$

$= 0$ (per CR poiché $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$)

$$B = \int_\gamma (\overrightarrow{v, u})\, d\vec{e} \underset{\text{Green}}{=} \iint_{\text{Int}\,\gamma} \underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\right)}_{} dx\, dy$$

$= 0$ $\left\{ \text{per CR } \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x} \right\}$

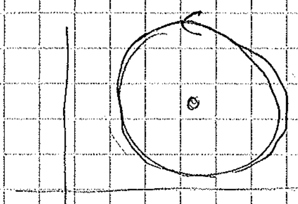
DOMINI CON BORDO. ESTENSIONE DI CAUCHY-GOURSAT

DEF $D \in \mathbb{C}$ dominio si dice DOMINIO CON BORDO se la sua frontiera ∂D è l'unione di supporti disgiunti di curve di Jordan cioè se esistono $\exists\ \gamma_1, \dots \gamma_s$ curve di Jordan in $\mathbb{C}$ tale che

$$\begin{cases} \partial D = \bigcup_{i=1}^{s} \mathrm{supp}(\gamma_i) \\ \mathrm{supp}(\gamma_i) \cap \mathrm{supp}(\gamma_j) = \emptyset \quad i \neq j \end{cases}$$

insieme vuoto

ES I $D = B_R(z_0)$



DOMINIO CON BORDO

frontiera

$\partial D = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = R \}$

$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$

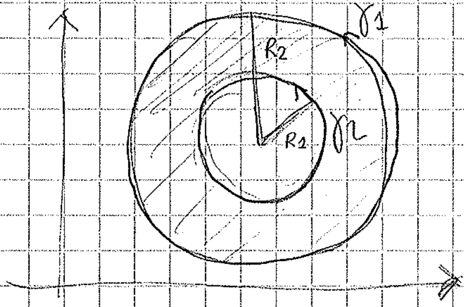
$\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$

$\mathrm{supp}(\gamma) = \partial D$

ES II

$D = \{ z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z - z_0| < R_2 \} \qquad R_1 < R_2$

$\partial D = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = R_1 \} \cup \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = R_2 \}$



$\begin{cases} \gamma_1(t) = R_1 e^{it} \\ t \in [0, 2\pi] \end{cases}$

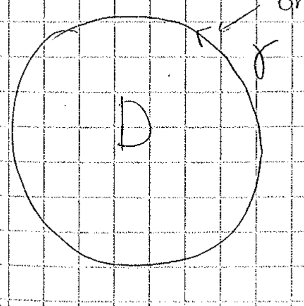
$\begin{cases} \gamma_2(t) = R_2 \cdot e^{it} \\ t \in [0, 2\pi] \end{cases}$

$\mathrm{supp}(\gamma_1) \cup \mathrm{supp}(\gamma_2) = \partial D$

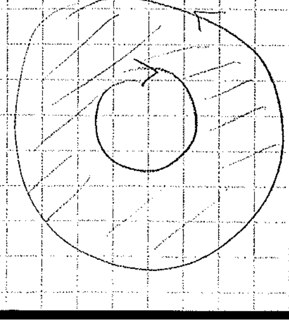
DOMINIO CON BORDO

DEF: Se D è un dominio con bordo e $\gamma_1, \dots \gamma_s$ sono le curve di Jordan che parametrizzano la sua frontiera, si dice che sono orientate positivamente se percorrendo ciascuna di esse, l'insieme D risulta trovarsi alla sinistra.

orientata positivamente



ESEMPI DI ORIENTAMENTI POSITIVI

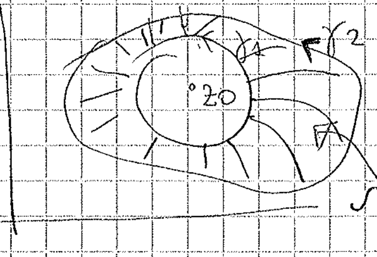


CONSEGUENZE IMPORTANTI:

$f: \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa

γ_1, γ_2 curve di Jordan in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$

$z_0 \in \operatorname{Int} \gamma_1$, $z_0 \in \operatorname{Int} \gamma_2$



Allora: $\displaystyle\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$.

$\Omega = \operatorname{Int} \gamma_2 \cap (\operatorname{Int} \gamma_1)^c$

DIM:

Si consideri $\Omega = \operatorname{Int} \gamma_2 \cap (\operatorname{Int} \gamma_1)^c$

Ω è dominio con bordo e le curve di Jordan che ne parametrizzano la frontiera orientate positivamente sono $-\gamma_1, \gamma_2$. Quindi

$$0 = \int_{\partial\Omega_1} f(z)\,dz = \int_{-\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz \Rightarrow \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

ES

$z = 0$

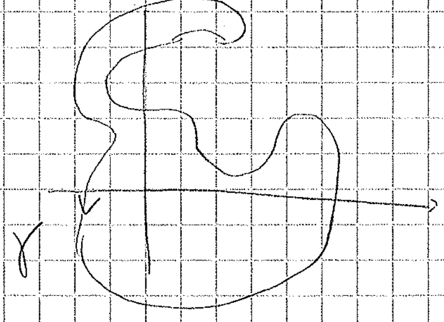
$\gamma(t) = Re^{it}$

$t \in [0, 2\pi]$

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i$$

Se γ è una qualunque curva di Jordan tale che $0 \in \operatorname{Int}(\gamma)$

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i$$



ES Più in generale se $z_0 \in \mathbb{C}$ qualunque e γ è una curva di Jordan tale che $z_0 \in \operatorname{Int} \gamma$, allora

$$\int_\gamma (z - z_0)^k\,dz = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq -1 \\ 2\pi i & \text{se } k = -1 \end{cases}$$

Formula di Cauchy

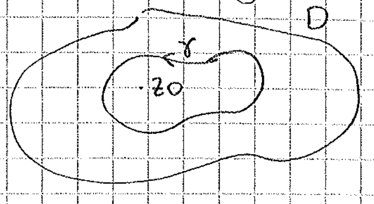
28-3-12

TEO: D dominio semplicemente connesso

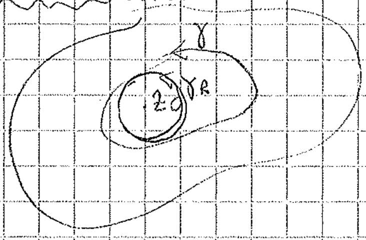
$f: D \to \mathbb{C}$ olomorfa

γ curva di Jordan in D, $z_0 \in \operatorname{Int}\gamma$

$\Rightarrow f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{z-z_0}$ ← formula di Cauchy



DIMOSTRAZIONE:



Sappiamo dalle conseguenze di C.G. di domini con bordo, che l'integrale che interviene nella formula di Cauchy non dipende dalla particolare γ scelta.

Considero quindi $\gamma^R(t) = z_0 + Re^{it}$ $t \in [0, 2\pi]$ → (scelto altre γ + comoda x me)

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \int_{\gamma^R} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz \quad (R \text{ abbastanza piccolo})$$

Quindi adesso dimostro la formula di Cauchy su una circonferenza.

$$\boxed{\int_{\gamma^R} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz} = \int_{\gamma^R} \left[\frac{f(z_0)}{z-z_0} + \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right] dz$$

$$= \underbrace{f(z_0)\int_{\gamma^R} \frac{1}{z-z_0}\,dz}_{} + \underbrace{\int_{\gamma^R} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz}_{I} = \boxed{2\pi i f(z_0) + I}$$

non dipende da R

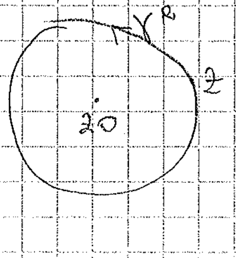
Rimane da far vedere che $I = 0$

$I = 0$?

$$|I| = \left|\int_{\gamma^R} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right| \leq \sup_{z \in \operatorname{supp}(\gamma^R)} \left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| \underbrace{L(\gamma^R)}_{= 2\pi R} =$$

$$= \sup_{z \in \operatorname{supp}(\gamma^R)} \frac{|f(z)-f(z_0)|}{\cancel{R}} \cdot 2\pi \cancel{R}$$

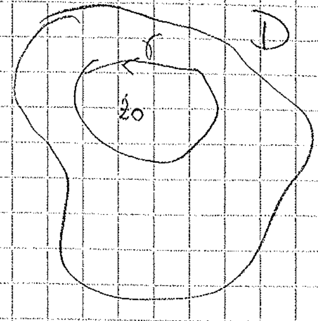
Quindi:



$$|I| \leq 2\pi \sup_{z \in \operatorname{supp}(\gamma^R)} |f(z) - f(z_0)|$$

$$\operatorname{Re} f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(z_0 + Re^{it})\, dt$$

Quindi la proprietà della media vale anche per le FUNZIONI ARMONICHE.



$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \boxed{\frac{f(z)}{z - w}}\, dz$$

Deriviamo questa formula rispetto a w:

$$\frac{d}{dw} f(w) = \frac{d}{dw} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\, dz$$

$$f'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d}{dw} \frac{f(z)}{z-w}\, dz$$

! SCAMBIO $\frac{d}{dw}\int_\gamma = \int_\gamma \frac{d}{dw}$

Si osservi che:

$$\frac{d}{dw}\left(\frac{f(z)}{z-w}\right) = f(z) \frac{d}{dw} \frac{1}{z-w} = f(z) \frac{d}{dw} (z-w)^{-1} = f(z)(-1)(z-w)^{-2}$$

$$= \frac{f(z)}{(z-w)^2}$$

Quindi:

$$f'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left(\frac{f(z)}{(z-w)^2}\right) dz \longrightarrow \text{Per calcolare la derivata prima}$$

è derivabile infinite volte rispetto a w!

Usando i Teoremi di scambio tra integrale e derivate, si può mostrare che la regolarità in w della integranda $f(z)/(z-w)$ si trasporta nella funzione integrale

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-w)}\, dw$$

ed inoltre, $\frac{d^k}{dw^k} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\, dz = \int_\gamma \left(\frac{d^k}{dw^k} \frac{f(z)}{z-w}\right) dz$

$$\frac{d^k}{dw^k} \frac{f(z)}{z-w} = f(z) \frac{d^k}{dw^k} (z-w)^{-1}$$

$$= f(z)(-1)(-2)(-3)\ldots(-k)(z-w)^{-k-1}(-1)^k = \frac{k!}{(z-w)^{k+1}} f(z)$$

29-03-12

P6 - Probabilità - ESERCIZI PROB. ELEMENTARE

E1 - Tre cacciatori A, B, C tirano bersaglio

→ prob. p_A p_B p_C

1) Prob. tutti centro
2) Prob. almeno un centro
3) Prob. esattamente un centro
4) Prob. A faccia centro sapendo che c'è stato esatt. un centro
5) " " " " " " almeno un centro

Soluzione

Tre eventi: E_A, E_B, E_C

E_A = "il cacc. A fa centro"

$p_A = P[E_A]$

1) $P[E_A \cap E_B \cap E_C]$ = intersezione eventi → TEOREMA DEL PRODOTTO

$$= P[E_A] \cdot P[E_B | E_A] \cdot P[E_C | E_A \cap E_B]$$

$$= p_A \cdot P[E_B] \cdot P[E_C] = p_A \cdot p_B \cdot p_C$$

2) $P[\text{"almeno 1 centro"}] = P[(E_A \cap E_B \cap E_C) \cup (\bar{E}_A \cap E_B \cap E_C) \cup \ldots]$

$$= 1 - P[\underbrace{\bar{E}_A \cap \bar{E}_B \cap \bar{E}_C}]$$

negazione che gli altri non facciano centro

$$= 1 - [(1-p_A)(1-p_B)(1-p_C)]$$

3) $P[\text{"esattamente 1 centro"}] =$

$$= P[(E_A \cap \bar{E}_B \cap \bar{E}_C) \cup (\bar{E}_A \cap E_B \cap \bar{E}_C) \cup (\bar{E}_A \cap \bar{E}_B \cap E_C)]$$

$$= P[E_A \cap \bar{E}_B \cap \bar{E}_C] + P[\_\_\_] + P[\_\_\_]$$

$$= p_A(1-p_B)(1-p_C) + (1-p_A)\,p_B(1-p_C) + (1-p_A)(1-p_B)\,p_C$$

4) $P[\text{" } \overset{E_A}{\text{A centro}} \text{ | esatt. un centro"}]$

$$= \frac{P[E_A \cap \text{"esatt. 1 centro"}]}{P[\text{"esatt. un centro"}]} = \frac{P[E_A] \cdot P[\text{"esatt. 1 centro"} | E_A]}{p_A(1-p_B)(1-p_C) + \ldots}$$

$$= \frac{p_A(1-p_B)(1-p_C)}{p_A(1-p_B)(1-p_C) \ldots}$$

2) A_i eventi = i-esimo estratto funzionante

$P[A_3]$

Considero la seguente partizione $\{A_1 \cap A_2, \bar{A_1} \cap A_2, A_1 \cap \bar{A_2}, \bar{A_1} \cap \bar{A_2}\}$

4 possibili estrazioni dei primi 2 componenti

$$P[A_3] = P[A_1 \cap \bar{A_2}] \cdot P[A_3 | A_1 \cap \bar{A_2}] + P[A_1 \cap A_2] \cdot P[A_3 | A_1 \cap A_2]$$
$$+ P[\bar{A_1} \cap A_2] \cdot P[A_3 | \bar{A_1} \cap A_2]$$
$$+ P[\bar{A_1} \cap \bar{A_2}] \cdot P[A_3 | \bar{A_1} \cap \bar{A_2}]$$

$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{3}{5}$$

3) $$P[\bar{A_1} \cap \bar{A_2} | A_3] \overset{def}{=} \frac{P[\bar{A_1} \cap \bar{A_2} \cap A_3]}{P[A_3]} = \frac{2/5 \cdot 1/4 \cdot 1}{3/5} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Tengo conto della presenza del condizionamento

{due esperimenti eseguiti contemporaneamente}

E3 -

componenti: 3 guasti, 3 funzionanti

1op) prendo 3 componenti

2op) Tiro un dado $\longrightarrow$ porto a casa un numero di comp. uguale al num. ottenuto

A = "Averne almeno uno funzionante"

$\uparrow$ obiettivo

QUAL È LA MIGLIORE?

Soluzione:

1 opz: prendo 3 $\quad P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}}_{3\ guasti} = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$

($\frac{3}{6}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{4}$)

2 opz: D_i = "dado = i" $\quad P[D_i] = \frac{1}{6}$

$\{D_1, \dots D_6\} \longrightarrow$ partizione $\qquad \frac{P(A \cap D_1)}{P(D_1)} =$

$$P[A] = \sum_{i=1}^{6} P(D_i) \, P(A|D_i) = P(D_1) \underset{3/6}{P(A|D_1)} + \dots$$
$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{19}{20}\right) +$$

c'erano di prenderne uno funzion.: $+\frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{105}{120}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 236

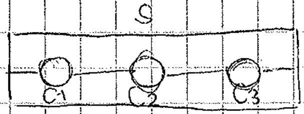
$= \left(\frac{1}{4}\right)^5 + \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) \cdot \binom{5}{1} + \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \binom{5}{2} = \frac{106}{4^5} = \sim 0,1$ (D)

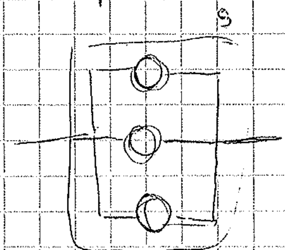
ne prendo 5 — ne prendo 4 — non la prendo (sbaglio l'ultima) — 5 possibilità di prendere 4 giuste e 1 sbagliata

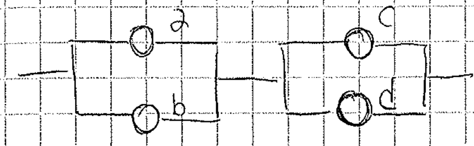
$\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{4}{25}$

$\frac{1}{4} \cdot \frac{25}{4} = \cancel{\frac{25}{16}}$

E6 -







S sistema

A, B, C, D — A = il comp. a è funzionante

B = il comp b è funzionante

S = "il sistema è funz"

$p_A = P[A]$ $p_B = P[B]$ ... $P[S] = ?$

indipendenza tra i funzionamenti

1) $P[S] = ?$

2) probabilità sistema funzioni sapendo che d guasto

3) probab d guasto sapendo che S funziona

Soluzione

1) $P[S] = P[(A \cup B) \cap (C \cup D)] = P[A \cup B] \cdot P[(C \cup D) | A \cup B]$

devono funzionare entrambi e indipendenti

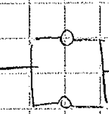
$= P[A \cup B] \cdot P[C \cup D]$

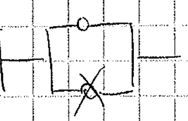
Teorema della somma

$= (P[A] + P[B] - P[A \cap B])(P(C) + P(D) - P(C \cap D))$

$= (p_A + p_B - p_A p_B)(p_C + p_D - p_C \cdot p_D)$

2) $P[S | \bar{D}]$





Posso scriverla come:

$= P[(A \cup B) \cap C] = (p_A + p_B - p_A \cdot p_B)\, p_C = \frac{P[S \cap \bar{D}]}{P[\bar{D}]} =$

funz contemporaneamente

$= \frac{P[\bar{D}]\, P[S | \bar{D}]}{1 - p_D}$

Confrontando:

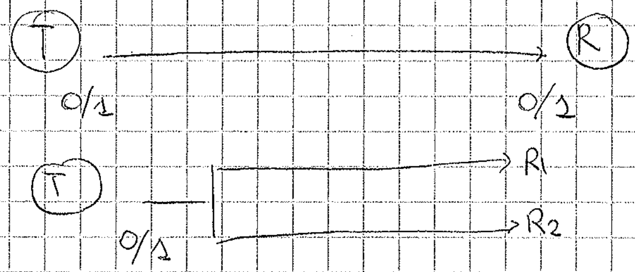
$p[S_1] \quad \overset{?}{\geq} \quad p[S_2]$

$= p_1^2 + p_2^2 \quad \overset{?}{\geq} \quad = 2p_1 p_2$

$p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2 \overset{?}{\geq} 0$

$(p_1 - p_2)^2 \geq 0 \longrightarrow$ la probabilità del I° è maggiore

E8 - CANALE TRASMISSIONE



Accetto 0 (opp 1) se $(R_1, R_2) = (0,0)$ $(=(1,1))$

se $(R_1, R_2) = (0,1), (1,0)$

$\longrightarrow$ T ritrasmette, R_1 legge, accetto quanto riceve R_1

P[transizione] $0 \to 1$
$1 \to 0$

ipotesi $\to$ 2 canali indipendenti, uguali $p : \begin{cases} 0 \to 1 \\ 1 \to 0 \end{cases}$ simmetria

P[Transiz | spedito 0]

T_0 = "evento spedisco 0"

$Z_{1,0}$ = "R_1 riceve 0 alla 1° trasmissione"

$Z_{2,0}$ = "R_2 " " " " "

$\tilde{Z}_{1,0}$ = "R_1 " " " 2° trasm

T = "errore di ricezione"

$$P[T|T_0] = P[((\overline{Z_{10}} \cap \overline{Z_{20}}) \cup ((\overline{Z_{10}} \cap Z_{2,0}) \cup (Z_{10} \cap \overline{Z_{20}})) \cap \overline{\tilde{Z}_{10}}) / T_0]$$

$$= P[(\text{—})/T_0] + P[\text{—} | T_0]$$

$$= p \cdot p + (p \cdot (1-p) + (1-p) \cdot p) \cdot p$$ ← probabilità che 0 diventa 1

E-11 - OVETTI — 10% ovetti contiene TJ — "le creature" cit. [Pellegay]

n? n. ovetti da comprare per garantirmi al 95% la presenza almeno 1 TJ.

$n=1 \quad P[\text{almeno } 1\ TJ] = 1 - P[\text{no } TJ] = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$

$n=2 \quad P[\quad " \quad] = 1 - P[\text{no } TJ] = 1 - 0{,}9^2$

$n \longrightarrow P[\ " \ ] = 1 - 0{,}9^n$ Trovare n : $\geq 0{,}95$

$1 - 0{,}95 \geq 0{,}9^n$

$0{,}05 \geq 0{,}9^n \longrightarrow \ln 0{,}05 \geq \ln 0{,}9^n$

$\ln 0{,}05 \geq n \ln 0{,}9$

$n \geq \dfrac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}9} = 29$

↳ $e^{in} \cdot e^{-n}$

$$\left.\begin{array}{l} |e^{in}| = 1 \quad \forall n \\ e^{-n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \end{array}\right\} \longrightarrow \text{Quindi: } 1 \cdot 0 = 0$$

La conclusione è quindi che

$$z_n \longrightarrow 0 + 0 = 0$$

• **SERIE**

(z_n) successione complessa

$\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)$ successione delle somme parziali serie

Se una serie ammette limite, tale limite si chiama SOMMA DELLA SERIE e si indica:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} z_k \quad (*)$$

Come nel caso reale, il simbolo $(*)$ si utilizza anche per indicare la serie stessa.

La teoria della serie complessa è analoga a quella delle serie reali (proprietà algebriche)

Convergenza assoluta

(z_n) succ. complessa

Si dice che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ converge assolutamente se converge la serie dei moduli:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|$$

Vale: $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ converge

ESEMPIO $z \in \mathbb{C}$

Consideriamo la successione z^n. Si noti che $|z^n| = |z|^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Quindi $z^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Consideriamo ora la serie associata $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 236

ES: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{i^k z^{2k}}{2^k}$ ⟶ geometrica mascherata

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{i^k z^{2k}}{2^k} = \sum \Big(\underbrace{\frac{i z^2}{2}}_{w}\Big)^k$$

Converge se $\left|\frac{iz^2}{2}\right| < 1$ $\quad \frac{|z|^2}{2} < 1$

$|z^2| < 2$ $\quad |z| < \sqrt{2}$ ⟶ z per i quali converge la serie

$$= \frac{1}{1-w} - 1 =$$

$$= \frac{1}{1-\frac{iz^2}{2}} - 1 =$$

Gli esempi visti sono casi particolari di serie di potenze

(a_k) successione complessa assegnata $z_0 \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$

QUESTIONI:

(1) Per quali z converge?

(2) Calcolare la somma

SERIE DI POTENZE

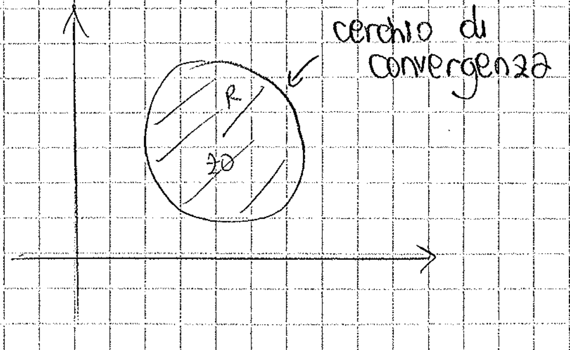
TEOREMA: $\exists\, R \in [0, +\infty]$ tale che

$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k$ converge assolutamente se z è tale che $\boxed{|z-z_0| < R}$ $z \in B_R(z_0)$

Non converge se $|z-z_0| > R$

Inoltre, se $\exists \lim_{n \to +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$

allora, $R = \frac{1}{l}$



R raggio di convergenza

$B_R(z_0)$ cerchio di convergenza

SERIE DI POTENZE E FUNZIONI OLOMORFE

$\sum a_k (z-z_0)^k$ con raggio di convergenza $R>0$

SERIE POTENZ

TEOREMA:

Sia $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(z-z_0)^k$ la somma della serie di potenze per $z \in B_r(z_0)$

TEOREMA: f è olomorfa in $B_r(z_0)$ e vale che:

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cdot k (z-z_0)^{k-1}$$ serie di potenze con stesso raggio di conv. R

Il procedimento si può iterare derivando ancora $f'(z)$ ottenendo:

$$f''(z) = \sum_{k=2}^{+\infty} a_k \cdot k(k-1)(z-z_0)^{k-2}$$

$k \to m$ // cambio indice

e, più in generale,

$$f^{(k)}(z) = \sum_{m=k}^{+\infty} a_m\, m(m-1) \dots (m-k+1) \, (z-z_0)^{m-k}$$

→ tutte serie di potenze con raggio di converg. R

Si osservi ora che valutando queste derivate nel punto z_0, otteniamo:

$$\boxed{f^{(k)}(z_0) = a_k \cdot k!}$$ → derivata k-esima calcolata in z_0 ⚠

Quindi $a_k = \dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$

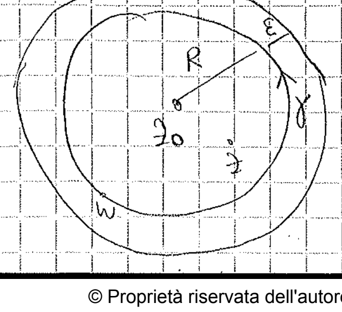
$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z-z_0)^k$$ ← SERIE DI TAYLOR di f

Vale in realtà anche una sorta di inverso del TEOREMA precedente:

TEOREMA: Supponiamo che $f: B_R(z_0) \to \mathbb{C}$ sia una funzione olomorfa.
Allora f è somma della sua serie di Taylor:

$$f(z) = \sum \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z-z_0)^k \quad \forall z \in B_R(z_0)$$

DIM: (utilizzando formula di Cauchy e risultati di scambio tra integrali e limiti)



Per semplicità supponiamo che f sia olomorfa in $B_{R+\varepsilon}(z_0)$ $(\varepsilon > 0)$

$\frac{z-z_0}{w-z_0}$

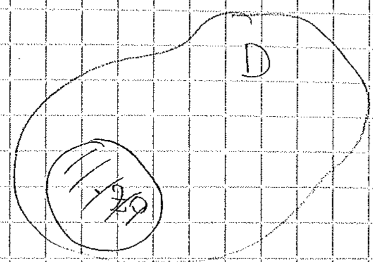
γ curva di Jordan che ha come supporto la circonferenza $\partial B_r(z_0)$ (Bordo) percorsa in senso antior.

Questa rigidità si osserva nel fenomeno degli zeri di una funzione olomorfa.

$f: D \to \mathbb{C}$ olomorfa in D. Sia $z_0 \in D$ tale che $f(z_0) = 0$

Supponiamo che f non sia la funzione nulla.

Sia $R > 0$ tale che $B_R(z_0) \subseteq D$



$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k$$

$z \in B_r(z_0)$ $\qquad f(z_0) = a_0 = 0$

Sia $\bar{m} = \text{minimo} \{ m \in \mathbb{N} \mid a_m \neq 0 \}$

$$f(z) = a_{\bar{m}} (z - z_0)^{\bar{m}} + a_{\bar{m}+1} (z - z_0)^{\bar{m}+1} + \dots = \sum_{k=\bar{m}}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k$$

Poiché f non è nulla su tutto D sicuramente $\bar{m}$ è ben definito

$$f(z) = (z - z_0)^{\bar{m}} \underbrace{\sum_{k=\bar{m}}^{+\infty} a_k (z - z_0)^{k - \bar{m}}}_{g(z)} \qquad g(z_0) = a_{\bar{m}} \neq 0$$

$$f(z) = (z - z_0)^{\bar{m}} g(z)$$

$g(z)$ olomorfa $\quad g(z_0) \neq 0$

$|g(z_0)| > 0$

per il teorema di permanenza del segno

$\exists r > 0$ tale che $|g(z)| > 0 \quad \forall z \in B_r(z_0)$

$\Rightarrow g(z) \neq 0 \quad \forall z \in B_r(z_0)$

$(z - z_0)^{\bar{m}}$ si annulla soltanto in z_0!

Quindi abbiamo dimostrato che in $B_r(z_0)$, f ha come unico zero il punto z_0

GLI ZERI DELLE FUNZIONI OLOMORFE NON NULLE, SONO SEMPRE ISOLATI!

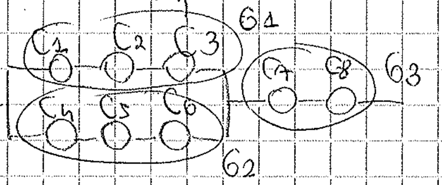
$$= \frac{n!}{(n-n_1)!\,n_1!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{(n-n_1-n_2)!\,n_2!} \cdots \frac{n_r!}{n_r!\,0!} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_r!}$$

coeff. multinomiale

$$\binom{n}{n_1\ n_2\ \ldots\ n_r}$$

COMP

<u>Es</u> 8 componenti elettronici



(# di possibili disposizioni di 8 componenti ?) ?

$n = 8$

$G_1 \longrightarrow \#3$

$G_2 \longrightarrow \#3$

$G_3 \longrightarrow \#2$

$$\#\ \text{disposizioni} = \frac{8!}{3!\,3!\,2!} = 280$$

TEOREMA MULTINOMIALE

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

<u>DIM</u>:

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{n \text{ volte}}$$

$(a^2+ab+ab+b^2)$ ... 2^n addendi (termini che si sommano tra loro)

$a^i b^{n-i}$ fissato $i \longrightarrow$ quanti termini che : $a^i b^{n-i}$?

$\longrightarrow \binom{n}{i}$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

$$(x_1+x_2+x_3+\ldots x_r)^n = \sum_{\substack{(n_1,\ldots n_r)\in \mathbb{N}^r \\ \text{t.c. } (n_1+n_2+\ldots+n_r)=n}} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots n_r} x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r}$$

- ES n persone scelte a caso (1)

Probabilità che almeno 2 con stesso compleanno

Sia N = n° persone con stesso compleanno

$P[N \geq 2] = 1 - P[$nessuna prob. che 2 persone compiano stesso g.$]$

- $n = 2$ (ipotesi che le probabilità associate giorni di nascita equidistribuite nell'arco dell'anno)

$$\text{prob} = 1 - \frac{1 \cdot 364}{365}$$

- $n = 3$

$$\text{prob} = 1 - \frac{1 \cdot 364}{365} \cdot \frac{363}{365} = 1 - \frac{364 \cdot 363}{365^{n-1}} = 1 - \frac{365!}{365^n (365-n)!}$$

$$= 1 - \frac{\cancel{365} \cdot 364 \cdot 363 \cdot \cancel{362!}}{\cancel{365} \cdot \cancel{362!}}$$

$n = 3$

$=$

$n = 23$

$pr = 0.567 \longrightarrow p = 0.97$

- ES OVERBOOKING (*)

ipotesi $\rightarrow$ indipendenza tra i passeggeri

// $\rightsquigarrow$ $p \in (0,1)$ prob. che il singolo pass. non si presenti

Pellerair AO $\rightarrow$ CN 20

Prenotaz $\longrightarrow$ 22

$P[\text{overbook}]$

Sia N num. individui presenti alla partenza

$P[\text{overbook}] = P[N \geq 21] = P[\{N = 21\} \cup \{N = 22\}]$

$= P[\{N = 22\}] + P[\{N = 21\}]$

$= (1-p)^{22} + p(1-p)^{21} \cdot 22$ $= \binom{22}{22}(1-p)^{22} p^0 + \binom{22}{21} \cdot (1-p)^{21} p^1 + \dots$

22 scelte

p

$= \lim_{m \to \infty} P(A'_m) = \lim_{m \to \infty} P\left(\bigcup_{n=1}^{m} A'_n\right) = \lim_{m \to \infty} P(A_m)$

Variabili casuali

$(\Omega, \mathcal{a}, P)$ ⇝ spazio standard (su cui lavorare)

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P)$ $\quad\quad \Omega = \mathbb{R}$

$\mathcal{B}$ = algebra di Borel

VARIAB
CA

- Si considerano intervalli $I \in (a, b]$

$-\infty \leq a < b < \infty$

- Si considerano tutte le loro possibili unioni, intersezioni (eventualmente ∞), tutti i possibili complementari
- Si considera la più piccola famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che contiene tutti gli insiemi definiti (come sopra) e che soddisfa la proprietà di σ-additività.
- $\mathcal{B}$ - σ algebra di Borel

$(\Omega, \mathcal{a})$ $\quad\quad (\mathbb{R}, \mathcal{B})$

$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$X : \omega \longmapsto x \in \mathbb{R}$

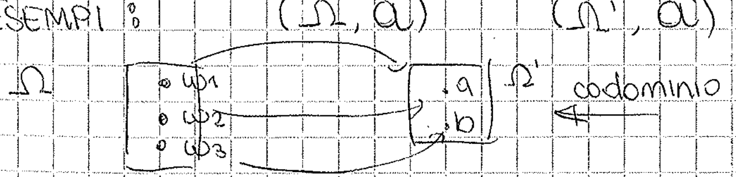
// è detta misurabile se la controimmagine appartiene all'algebra ⚠

funzioni misurabili

Def: Una funzione $h : \Omega \to \mathbb{R}$, che relaziona uno spazio misurabile $(\Omega, \mathcal{a})$ con $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, è detta misurabile se

$\forall B \in \mathcal{B}$, la controimmagine $h^{-1}(B) \in \mathcal{a}$ ⚠

ESEMPI: $\quad$ dominio $(\Omega, \mathcal{a})$ $\quad (\Omega', \mathcal{a}')$



$\mathcal{a} = \{\emptyset, \Omega, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3\}\}$ → algebra

$\mathcal{a}' = \{\emptyset, \Omega, \{a\} \{b\}\}$

$h : \omega_1 \longmapsto a$

$\omega_2 \longmapsto a$

$\omega_3 \longmapsto b$ $\quad$ misurabile?

X = valore carta estratta
variab. casuale

valore carta ($J = 11$, $Q = 12$, $K = 13$)
di tipo numerico !

Exp (Ω, $\mathcal{A}$, P)

$P(\{\omega\}) = 1/52$ → probabilità uniform. distribuita

$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$

$X : \Omega \to \mathbb{R}$

$\omega \longmapsto$ valore carta

$X : 10♡ \longmapsto X(10♡) = 10$

P_X ? $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$

Sia B un evento in $\mathcal{B}$

$B = (5, 10]$

$P_X(B) = P[X^{-1}(B)] = P[\{$carte il cui valore $\in (5, 10]\}]$

$= P[\{6♡, 6♣, \dots 10♣, 10♠\}]$

$= \frac{20}{52}$

NOTA: Una variabile casuale ($X, Y, Z, W \dots$) è una grandezza che descrive il risultato di un esperimento prima di effettuarlo.

X = ris. lancio dado

realizzazione della var. casuale: il valore eff. assunto dopo aver effettuato esp.

notaz: lettere minuscole ($x, y, z, w \dots$)

Come descrivere una variabile casuale

FUNZIONE DI RIPARTIZIONE (o DISTRIBUZIONE CUMULATA)

Def: Data una variabile casuale X, è detta funzione di ripartizione di X la:

$F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$F_X(t) = P_X[(-\infty, t]]$$

$$= P[\{\omega : X(\omega) \in (-\infty, t]\}]$$

$$= P[X \le t] \qquad t \in \mathbb{R}$$

$t \in [2,3)$ $\quad F_X(t) = \cancel{\frac{2}{6}} \frac{1}{3}$

$t \in [5,6)$ $\quad F_X(t) = \frac{5}{6}$

$t \geq 6$ $\quad F_X(t) = 1$

proprietà delle f_X

1) $\sum_{t_i \in S} f_X(t_i) = 1$

2) $f_X(t) \geq 0$

ESEMPIO:

Esperimento:

Urna $\{R, R, B, B, B\}$

estraggo 2 palle (senza reimbussolamento)

Per ogni R guadagno 10 €

Per ogni B perdo 5 €

X = cifra guadagnata (ev. persa) dopo aver giocato una volta

$S = Supp(X) = \{-10, 5, 20\}$

$f_X(t) = 0$ se $t \neq -10, 5, 20$

$t = -10$

$f_X(-10) = P[X = -10] = P[\{\omega \in \Omega : X(\omega) = -10\}]$

$= P[\text{"estraggo 2 B"}] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$

$f_X(5) = P[X = 5] = P[\text{"estraggo 1B e 1R"}]$

$= \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{10}$

$f_X(20) = P[X = 20] = P[\text{"estrarre 2 rosse"}]$

$= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 236

$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(s)\,ds$ $\qquad f_X(t) = F'_X(t)$

1) $f_X(t) \geq 0$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(s)\,ds = 1$

è possibile dove non esiste $\exists F'_X$, definirla $f_X(t)$ a nostro piacere

<u>Osservazione</u>

Sia X assolutamente continua. Sia $t \in \mathbb{R}$

$$P[X = t] = P[X \leq t] - P[X < t]$$
$$= F_X(t) - P_X[(-\infty, t)] =$$
$$= F_X(t) - P_X[\lim_{s \to t^-} (-\infty, s]]$$
$$= F_X(t) - \lim_{s \to t^-} F_X(s) = F_X(t) - F_X(t) = 0$$

Quindi la prob. di assumere un det. valore è sempre nulla.

<u>Osservazione</u> Sia X come sopra.

$$P[X \in (a,b]] = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(t)\,dt$$

$$P[X \in [a,b]] = P[X \in (a,b]] + P[X = a] =$$
$$= P[X \in (a,b]]$$

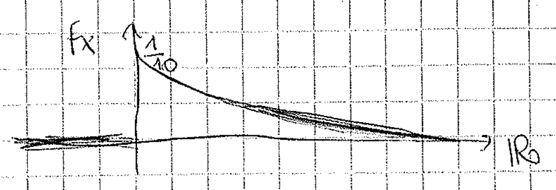
ES:

Vespino

? sopravvive almeno 10 anni

X = tempo di vita vespino assol. continua

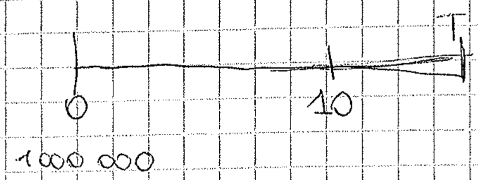
$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{10} e^{-t/10} & t \geq 0 \end{cases}$$



$P[X > 10] = ?$

$F_X(t)$ densità?

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 236



$X = 1\,000\,000 - 1\,000\,000 = 0$ €

$T = 11{,}2$

$F_X(t) = ?$

$F_X(t) = P[X \le t] = \{$

$\boxed{t<0}$

$F_X(t) = P[X \le 0] = P[X<0] + P[X=0]$

$= P[T>10] = 0{,}36$

$\boxed{t > 1M€}$

$F_X(t) = P[X \le 1M€] = 1$

$\boxed{t \in [0, 1M€]}$

$F_X(t) = P[X \le t] = P[1\,000\,000 - 100.000\,T \le t]$

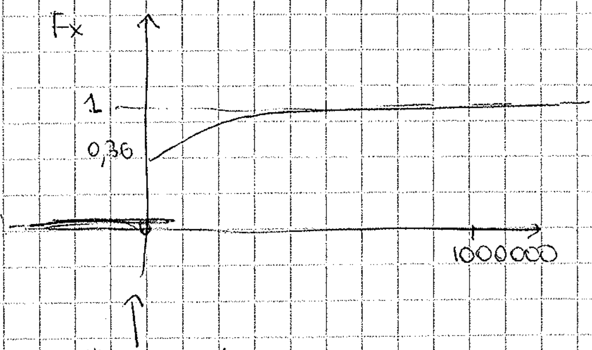
$= P[100\,000\,T \ge 1\,000\,000 - t]$

$= P\left[T \ge \frac{1\,000\,000 - t}{100\,000}\right]$

$= 1 - P[T < \ldots]$

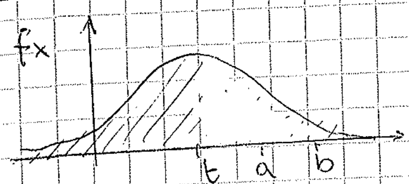
$= 1 - \left(1 - e^{-\frac{1\,000\,000 - t}{100\,000}}\right)$

$= e^{-\frac{1\,000\,000 - t}{100\,000}}$



pto singolare

Rivedere



$$\int_{\mathbb{R}} f_X(t)\,dt = 1$$

$$f_X(t) \geq 0$$

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(s)\,ds$$

$$P[X \in (a,b]] = \int_a^b f_X(t)\,dt$$

→ INDICI — POSIZIONE (MEDIA)

VARIABILITÀ quanto è variabile la variabile casuale? (VARIANZA)

VARIABILI CASUALI DOPPIE (CENNI)

VETTORI CASUALI

$(\Omega, \mathcal{a}, P)$

$X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad X: \omega \longmapsto X(\omega) \in \mathbb{R}$

$(X,Y): \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\quad (X,Y): \omega \longmapsto (X(\omega), Y(\omega)) \in \mathbb{R}^2$

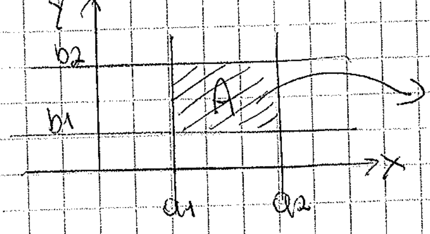
assegnazione di una coppia di valori numerici

V.C. DOPPIE ⟶ misurabilità $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^2, P_{(X,Y)})$

FUNZIONE DI RIPARTIZIONE CONGIUNTA

Def: $F_{(X,Y)}(t,s) = P[X \leq t, Y \leq s]$

° ESEMPIO



⟶ Probabilità di cadere in un det. rettangolo

$P[(X,Y) \in (a_1, a_2] \times (b_1, b_2]]$

$= \cancel{P[(X,Y) \leq ...]}$

$= P[X \leq a_2, Y \leq b_2] - P[X \leq a_2, Y \leq b_1]$

$\quad - P[X \leq a_1, Y \leq b_2] + P[X \leq a_1, Y \leq b_1] =$