NUMERO: 875

DATA: 12/03/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Lacirignola

MATERIA: Fisica I

Prof. Scalerandi

MARCO SCALERANDI

- MECCANICA → moto dei corpi
  - cinematica
  - dinamica
    - corpi
    - punti
    - sistemi
    - corpo rigido

TERMODINAMICA : trasformaz. di energia

- FLUIDO DINAMICO
- GRAVITAZIONE

FISICA ⇒ STUDIO GRANDEZZE MISURABILI E MODELLI DEI FENOM.

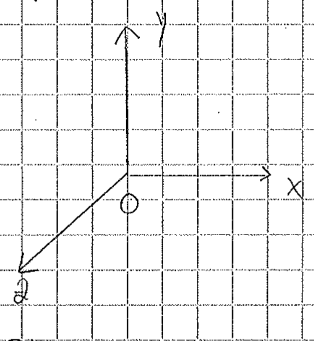
⇒ SPERIMENTALE

⇒ MODELLO / TEORIA

La grandezza fisica è qualcosa che può essere confrontato con un riferimento

$\vec{V}$ = velocità

Sistema di riferimento cartesiano



BISOGNA SEMPRE SPECIFICARE IL SISTEMA DI RIFERIMENTO !

Classificazione grandezze

(1) Fondamentali

m = MASSA   t = TEMPO

l = LUNGHEZZA ..   T = Temperatura

massa ⇒ Kg   lunghezza ⇒ m   tempo ⇒ s   temp ⇒ °K

(2) Derivate

Definite partendo da grandezze fondamentali

$V_{media} = \frac{s}{t}$

no vettore

MISURA MAI ESATTA

- sempre affetta da ERRORE → calcolabile

La misura è incompleta se non metto l'errore.

GRANDEZZA q

q = (valore ± errore) (unità di misura)

t = (13,2 ± 0,1) s

MODELLIZZ ⇒ TEORIA

1) DEFINIZIONI
2) POSTULATI – IPOTESI (aff. vera senza dimostrazione)
3) TEOREMI : si ricavano dai postulati

La velocità è una grandezza derivata e vettoriale e la sua formula_

③ GRANDEZZE COSTANTI ⟶ NON DIPENDE DAL TEMPO

FUNZIONI DEL TEMPO ⇒ $y = f(t)$

$\forall t$ ⇒ TROVO UN y

MISURA ⟸ $t = t_0 \Rightarrow y = y_0 = f(t_0)$

ES FUNZIONI

y = FUNZIONE LUNGO ASSE y

$y = 4t^2 + 1 \Rightarrow y(t) = 4t^2 + 1$

$t = 1\,s \quad y = 5\,m$

④ OMOGENEA se non dipende dalla posizione dell'oggetto

NON OMOGENEA se la variabile y è funzioni di

$y = f(\vec{r})$ $\quad \vec{r}$ = vettore posizione

ATTENZIONE

$\vec{r} = f(t) \qquad y = g(\vec{r})$ → $\vec{r}$ varia con il tempo e quindi

$= g[f(t)] = h(t)$

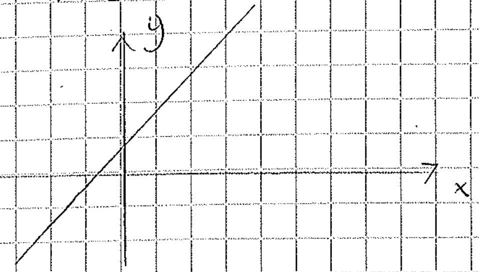
i due concetti omogeneo e costante sono collegati

iii) DIPENDENZA LINEARE

$$y = a + bx$$

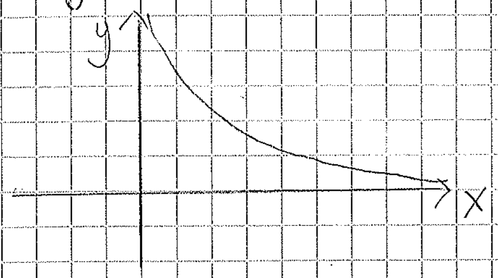
se $b > 0$ $\begin{cases} \cdot\ x \uparrow \\ \cdot\ y \uparrow \end{cases}$

se $b < 0$ $\begin{cases} \cdot\ x \uparrow \\ \cdot\ y \downarrow \end{cases}$



iv) ESPONENZIALE DECRESCENTE

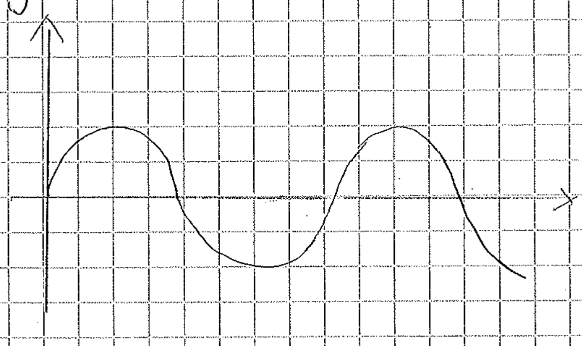
$$y = Ae^{-kx}$$ (slz eq diff, omogenea associata)



v) DIPENDENZA OSCILLANTE

$$y = A\,\text{sen}(kx)$$

COSA SUCCEDE AL VARIARE DI K?



ANALISI DIMENSIONALE

FP VARIAZ y FUNZIONE DI X

$y = Kx$ ∀ FUNZIONE

GRAND 1 = GRAND 2 — devono essere uguali! stesse proprietà

ES ≠ ENTRAMBE MASSE

GRANDEZZE FONDAMENTALI

MASSA = [M]

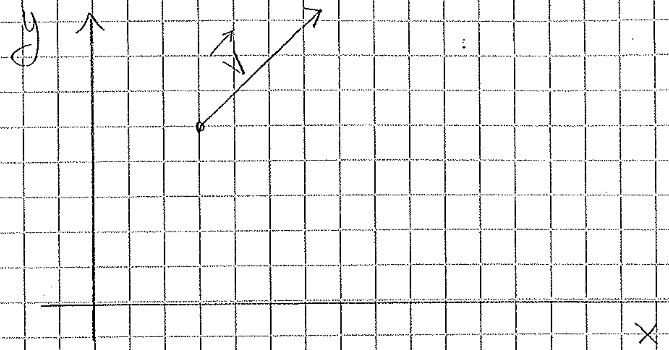
TEMPO = [T]

LUNGHEZZA = [L]

RICHIAMI SUI VETTORI

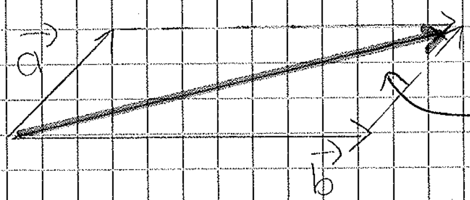
per definire un vettore:
- P.TO DI APPLICAZIONE
- INTENSITA'
- DIREZIONE
- VERSO

SPAZIO A 2-D



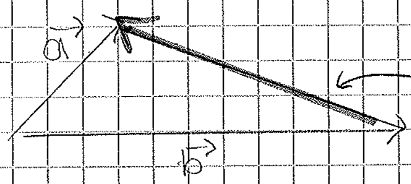
OPERAZIONI SUI VETTORI IN MODO GRAFICO

- $\vec{w} = \vec{a} + \vec{b}$ somma



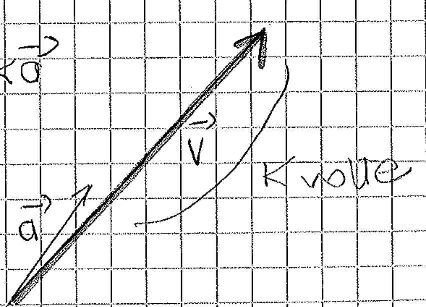
diagonale maggiore

- $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$ differenza



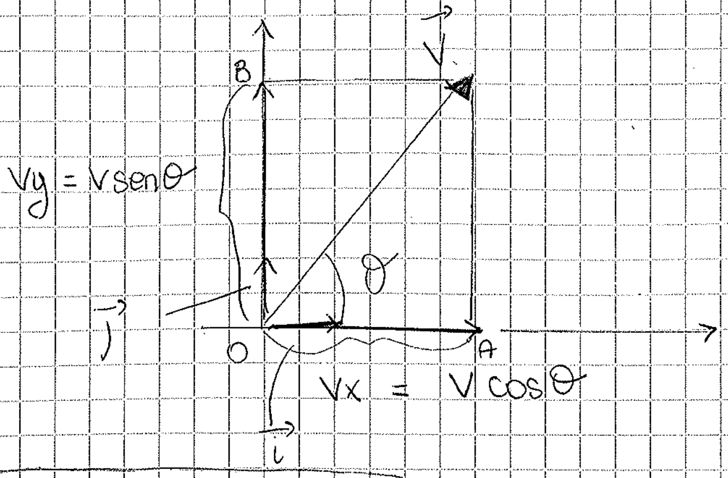
diagonale minore

- $\vec{v} = k\vec{a}$



prodotto vettore per scalare
STESSA DIREZIONE
E VERSO $(k>0)$
INT. PER K
cambia solo il modulo

⟹ COORD. CARTESIANE



$\vec{OA} = (V_x ; 0)$

$\vec{OB} = (V_y ; \frac{\pi}{2})$

Quindi:

$\vec{V} = \vec{OA} + \vec{OB}$

$\vec{OA} = V_x \vec{i}$

$\vec{OB} = V_y \cdot \vec{j}$

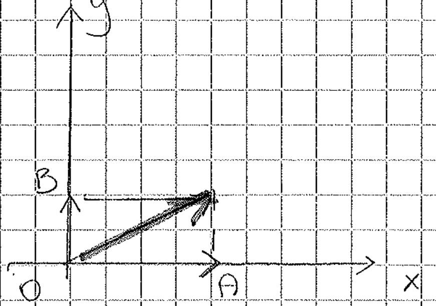
$\boxed{\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \cdot \vec{j}}$ somma delle componenti del vettore

$V_x = V\cos\theta$
$V_y = V\,\text{sen}\,\theta$
} componenti del vettore in coord. cartesiane

$\vec{V} = (V_x, V_y) \Rightarrow \vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j}$

EX: $\vec{V} = (2,1)$

$\vec{V} = (V, \theta) \Rightarrow \vec{V} = V\vec{u}_\theta$



$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$

$\theta = \text{arctg}\,\frac{V_y}{V_x}$

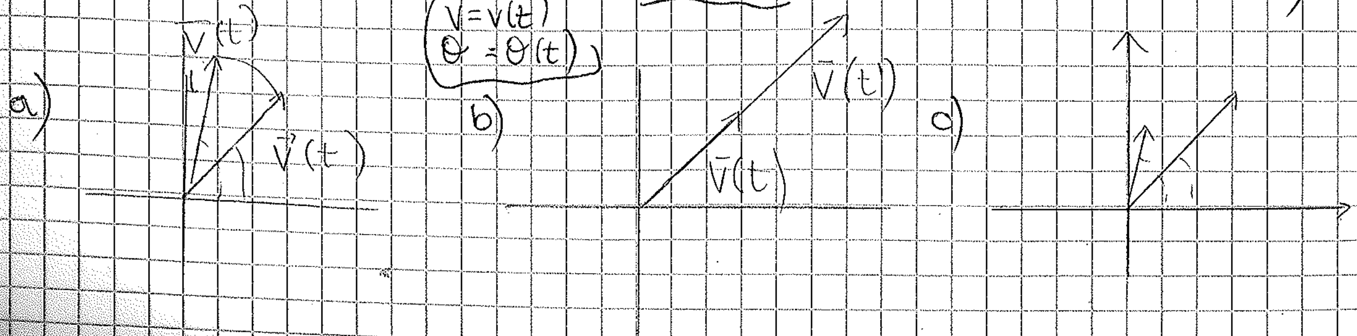
$\vec{V} \Rightarrow \vec{V} \Rightarrow$ non costante, $\underbrace{\vec{V} = \vec{V}(t) = ?}$

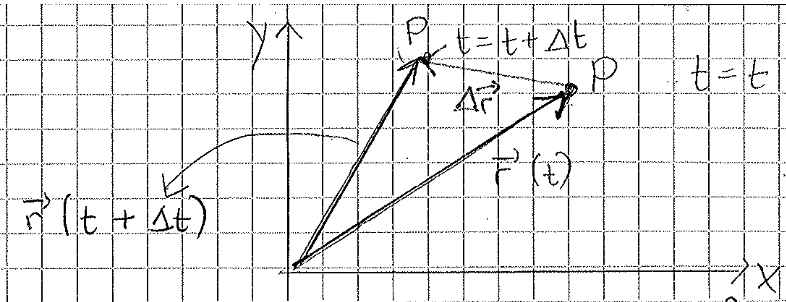
$\left(y = f(x) \Rightarrow y = y(x) \right)$

Puo' variare:

il p.to di applicazione e la direzione e il modulo

$\vec{V} = \vec{V}(t)$ — a) $\underline{\theta = \theta(t)}$ (solo direzione)
b) $\underline{V = V(t)}$ (solo il modulo)
c) $\boxed{V = v(t) \\ \theta = \theta(t)}$





Di quanto si è spostata la particella? ⟹ VETTORE SPOSTAMENTO

Eseguo la differenza: $\Delta \vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$

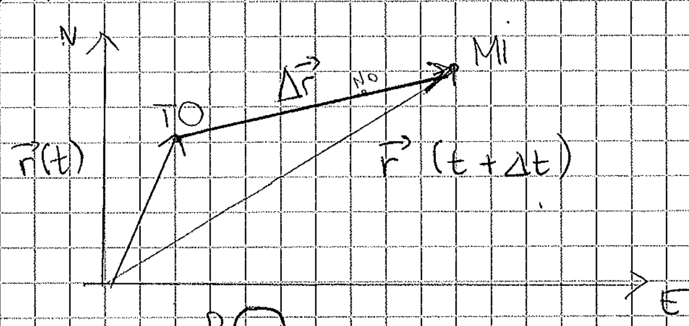
di quanto si è spostato l'oggetto?

$$\Delta \vec{r} = \Delta \vec{r}(t)$$

$\Delta \vec{r}$ ⟹ P.TO DI APPLICAZIONE, POSIZIONE DI PARTENZA

FRECCIA POS. DI ARRIVO

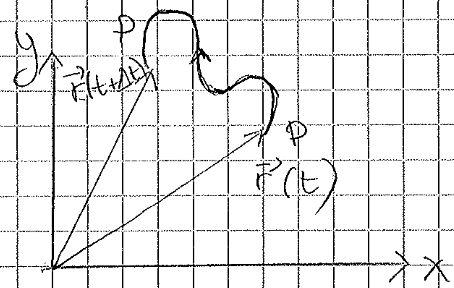
ES. TO - Mi



$\Delta \vec{r}$ ≠ spazio percorso

perché è calcolato in linea d'aria

perché scelgo una certa traiettoria



TRAIETTORIA = CURVA γ

DESCRITTA DA P. LUNGO IL MOTO

Δs = SCALARE = SPAZIO PERCORSO = LUNGHEZZA PERCORSO CURVA

integr. curvilineo

$$\Delta s = \int_{\gamma} \vec{r}(t)\, dt$$

$$\Delta s \neq \Delta \vec{r}$$

$\vec{r}(t)$ ⟹ EQ. DEL MOTO

$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ TRAIETTORIA $y = f(x)$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$ Rappr. parametrica di una curva

RICAVO t dalla prima e lo sostituisco nella seconda

$\Delta\vec{r}$ = vett = corda sottesa alla traiettoria

$\Delta t \to 0 \Rightarrow \Delta\vec{r} \to$ tangente alla curva

$\Delta t \to 0 \quad |\Delta\vec{r}| \to \Delta s$ DIREZIONE $\to$ tg alla TRAIETTORIA

VELOCITA' FISICA - VETTORE

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

definizione $\Rightarrow$ INTENSITA' O MODULO

$$|\vec{V}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}$$

$\vec{V} = \vec{V}(t)$

$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}(t)$

DIREZIONE DI $\vec{V}$ STESSA DIREZIONE DI $\Delta\vec{r} \Rightarrow \vec{V} \Rightarrow$ tg alla TRAIETTORIA

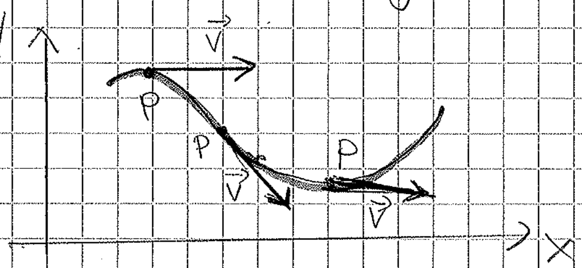
ALTRE FORME

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

limite del rapporto incrementale

la velocità è un vettore tangente alla traiettoria



$\vec{u}_T$ NON COSTANTE $\quad \vec{u}_T = \vec{u}_T(t)$

versore (lungo 1) tangente ad ogni t alla traiettoria

il vettore non sarà costante $\to$ quindi è funzione del tempo

$$\vec{V} = \underbrace{V}_{|\vec{V}|} \cdot \vec{u}_T \Rightarrow \vec{V} = \vec{V}(t) = V(t)\,\vec{u}_T(t)$$

c) ACCELERAZIONE

$$\vec{a} \overset{def}{=} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{V}(t+\Delta t) - \vec{V}(t)}{\Delta t}$$

$\vec{r}$ = vettore posizione = $\vec{r}(t)$ posizione

$\Delta\vec{r}$ = vettore spostamento $\neq \Delta s$ (diverso dallo spazio percorso)

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ $\neq$ Vmedia ← scalare

velocità istantanea

vettore che descrive come varia $\vec{r}$ nel tempo.

velocità

$\vec{v}$ ⇒ tangente alla traiettoria

→ $\vec{v} = \vec{v}(t)$ * modulo $[L][T^{-1}]$

* direzione

Nel moto rettilineo il vettore $\vec{v}$ non cambia mai direzione, non cambia la tangente.

accelerazione

$\vec{a} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ $[L][T]^{-2}$

descrive come varia $\vec{v}$ nel tempo.

PROBLEMI:

- $\vec{r}(t)$ nota (traiettoria nota) ⇒ trovo $\vec{a}$
- $\vec{a}(t)$ NOTA ⇒ traiettoria { bisogna aggiungere le condizioni iniziali

es° $t = 0$ ⇒ POSIZIONE NOTA
VELOCITA' NOTA

Quindi: la posizione è

$$\vec{r}(t) = \left(-t^3 + 3\right)\vec{i} + \left(\frac{4}{15} t^{5/2} + 2\right)\vec{j}$$

iii) Quanto vale la traiettoria?

$$\begin{cases} x = -t^3 + 3 \\ y = \frac{4}{15} t^{5/2} + 2 \end{cases}$$

le componenti del vettore danno le coordinate del punto

$$t = \sqrt[3]{3 - x}$$

$$y = \frac{4}{15} (3-x)^{5/6} + 2$$

→ è possibile fare il grafico che descrive la traiettoria su cui si muove il punto

TEOREMA SCOMPOSIZIONE DEI MOTI

i) $\vec{a} = (-6t)\vec{i} + \sqrt{t}\,\vec{j}$ $\quad a = x\vec{i} + y\vec{j}$ $\quad t = 0$ $\begin{cases} \vec{v} = 0 = 0x\vec{i} + 0y\vec{j} \\ \vec{r} = 3\vec{i} + 2\vec{j} \end{cases}$

Ragionando in componenti:

ASSE X	ASSE Y
$a_x = -6t$	$a_y = \sqrt{t}$
$t = 0 \quad V_x = 0$	$t = 0 \quad V_y = 0$
posizione: $x = 3$	$y = 2$
$V_x = \int a_x\, dt = \underset{\substack{t=0 \quad V_x=0 \\ c_1 = 0}}{-3t^2 + c_1}$	$V_y = \int a_y\, dy$
$x = \int V_x\, dt = -t^3 + 3$	$y = \int V_y\, dt$

$\vec{V} = (-t^3 + 3)\vec{i} + V_y\vec{j}$

$|\vec{V}| = V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$

Risolvendo in questo modo, trovo lo stesso risultato

ii) DEF ⇒ UN MOTO A n DIMENSIONI ⇒ È LA COMBINAZIONE DI n MOTI A 1-D LUNGO GLI ASSI DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO, PURCHÉ:

i) I DUE MOTI AVVENGANO NELLO STESSO INTERVALLO DI TEMPO

ii) LE COMPONENTI DI $\vec{a}$ LUNGO UN ASSE NON DIPENDANO DA COMPONENTI SULL'ALTRO ASSE.

$V = \int a\,dt = (a \cdot t + V_0)$ $\quad \vec{V} = \frac{d\vec{x}}{dt} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$ ricavo la posizione

integrando ulteriormente

$$x = \int V\,dt = \int (at + V_0)\,dt = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t + x_0$$

VALE SOLO CON a COSTANTE E A $t = 0$ $\begin{cases} x = x_0 \\ V = V_0 \end{cases}$

iii) a = costante $\quad \left(t = t_0 \quad V = V_0,\ x = x_0 \right)$

$V = \int a\,dt = at + C_1$ $\quad$ con le condizioni iniziali

$t = t_0 \Rightarrow V = at_0 + C_1 = V_0$

$$V = V_0 + a(t - t_0)$$

$x = \int V\,dt \longrightarrow \int V_0 + a(t - t_0)$

$= V_0 t + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 + C_2$

$t = t_0 \quad x = V_0 t_0 + C_2 = x_0$

$$x = x_0 + V_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

iv) $a = -K\cos(\omega t)$ $\quad$ MOTO ARMONICO SEMPLICE

C.I. $\quad t = 0 \quad \begin{cases} V = 0 \\ x = A = \frac{K}{\omega^2} \end{cases}$

$V = \int a\,dt$

$= -K\int \cos(\omega t)\,dt = -\frac{K}{\omega}\,\text{sen}(\omega t) + C_1$ $\quad t = 0,\ V = 0$

$V = -\frac{K}{\omega}\,\text{sen}(\omega t)$ $\quad C_1 = 0$

posizione:

$x = \int V\,dt = -\frac{K}{\omega}\int \text{sen}(\omega t)\,dt = \frac{K}{\omega^2}\cos(\omega t) + C_2$

C.I. $\left(t = 0 \quad x = \frac{K}{\omega^2} \right) \Rightarrow \frac{K}{\omega^2} + C_2 = \frac{K}{\omega^2}$

$C_2 = 0$ $\quad x = \frac{K}{\omega^2}\cos(\omega t)$

$$\int_0^v v\,dv = -\int_1^{x_0} 6x\,dx$$

$$\frac{v^2}{2}\Big|_0^v = -\frac{6}{2}x^2\Big|_1^{x_0} \Rightarrow \frac{v^2}{2} = -3 + 3x_0^2$$

$$v^2 = -6 + 6x_0^2$$

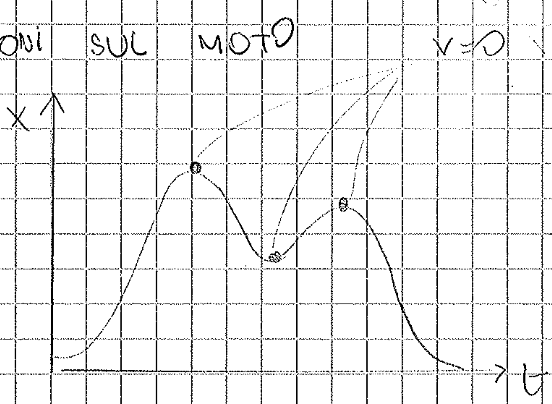
$$v = \sqrt{-6 + 6x_0^2}$$

$x = f(t)$ (1-D) FUNZIONE

TRAIETTORIA $\Rightarrow$ 2-D ...

$y = f(x)$

INFORMAZIONI SUL MOTO



x crescente $v>0$

è possibile ricavare il segno della velocità

$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow v = 0 \Rightarrow x$ max / min

- $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$

x FLESSO $\Rightarrow a = 0$

x CONCAVITÀ VERSO L'ALTO $\Rightarrow a > 0$

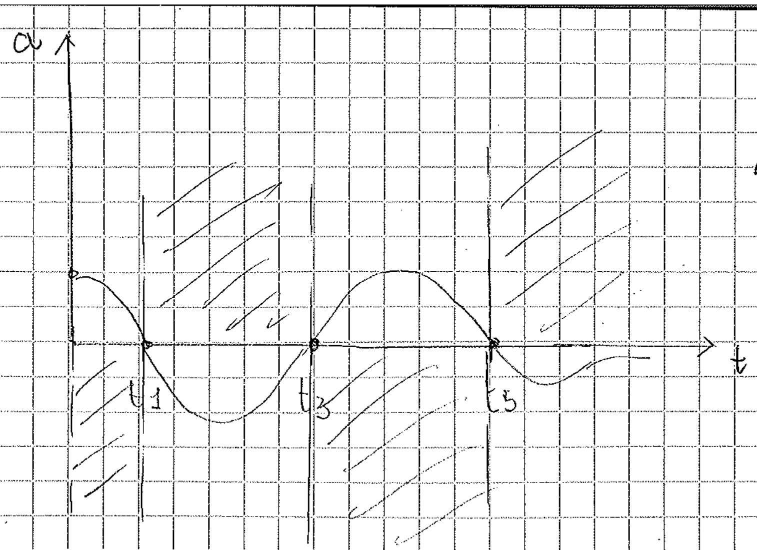
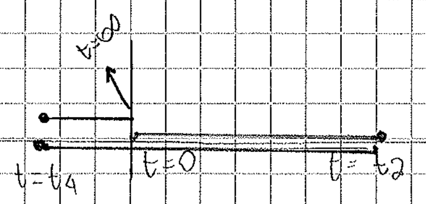


GRAFICO DI a

Se volessi avere informazioni riguardo la traiettoria:



$0 < t < t_2$ x cresce

$t_2 < t < t_4$ x DECRESCE

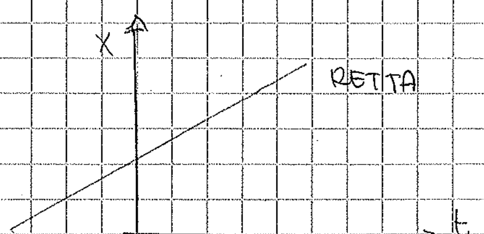
Direzione data da $\vec{v}$ (SEGNO DI $\vec{v}$) , SEGNO DI a NON CENTRA

Solo la velocità ci dice il verso in cui si muove l'oggetto!

Moti 1-D particolari con grafici

i) $a = 0$ $v = v_0$ ~~x = x_0 + v_0 t~~ $x = x_0 + v_0 t$

moto rettilineo



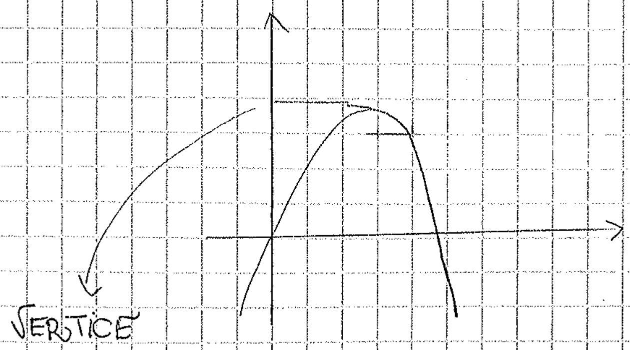
ii) $a = cost$ $t = 0$ $x = x_0$
$v = v_0$

$v = v_0 + at$

$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

moto unif. accelerato

PARABOLA $a \neq 0$



$a < 0$

CONCAVITÀ VERSO IL BASSO

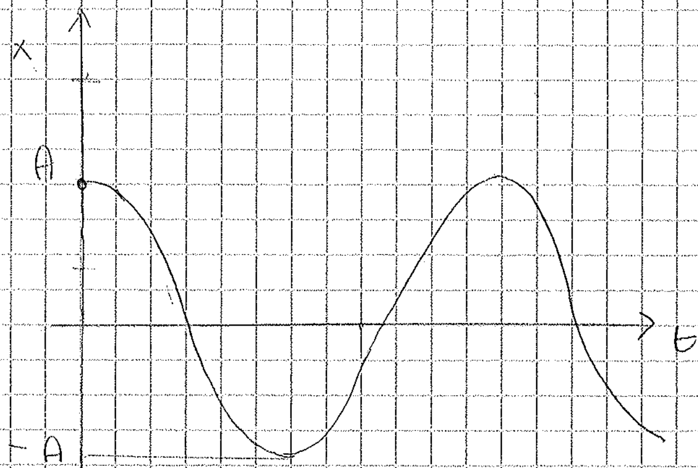
$$V = \frac{-b}{2a}$$

MOTO ARMONICO SEMPLICE

$$x = A \cos \omega t$$

$$v = -A\omega \,\text{sen}\, \omega t$$

$$\underline{a = -\omega^2 x}$$



Proprietà:

a) LIMITATO $-A < x < A$

b) PERIODICO

x, v e a assumono lo stesso valore ad un tempo t e $t+T$

T = PERIODO

$$x(t) = x(t+T)$$

$$v(t) = v(t+T)$$

$$a(t) = a(t+T)$$

$$\cancel{A}\cos(\omega t) = \cancel{A}\cos[\omega(t+T)]$$

$$\cos \omega t = \cos(\omega t + \omega T)$$

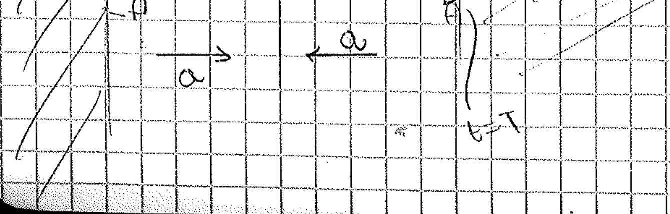
$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \text{PERIODO}}$$

c) $a < 0$ se $x > 0$

l'accel. ha segno opposto rispetto a spostamento

d) $V = 0$ se x max/min

TRAIETTORIA

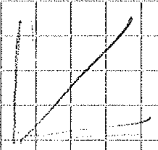


MOTI A 2-D - COMBINAZIONI DI 2 MOTI A 1-D.

=> NELLO STESSO TEMPO t, quello che risulta è un moto a 2-D.

A) 2 MOTI RETTILINEI UNIFORMI

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x} t \\ y = y_0 + v_{0y} t \end{cases}$$



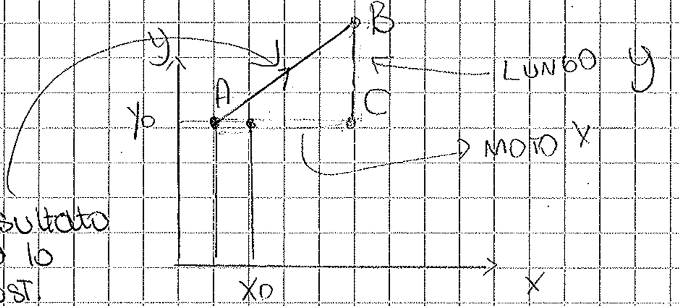
Come posso ricavare la traiettoria?

$$t = \frac{x - x_0}{v_{0x}}$$

$$\boxed{y = y_0 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}(x - x_0)} \rightarrow \text{RETTA (DI CUI CONOSCIAMO IL COEFF. ANG.)}$$

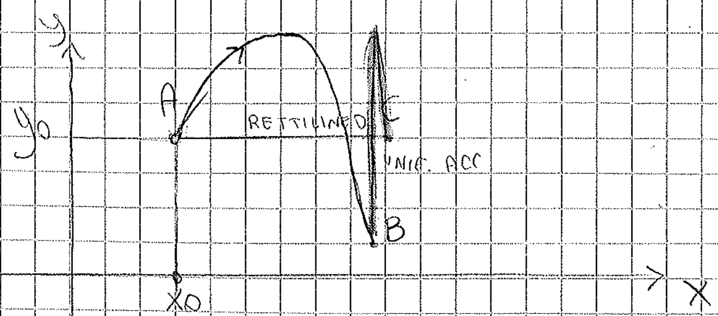
$$m = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}$$

Risultato tra lo spost. dovuto ai 2 moti



B)
RETTILINEO UNIFORME LUNGO x
UNIFORM. ACCEL. LUNGO y

$$\begin{cases} x = x_0 + v_0 t \\ y = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a t^2 \end{cases}$$



AC = r LUNGO x

CB = r LUNGO y

$$t = \frac{x - x_0}{v_{0x}}$$

$$y = y_0 + v_{0y}\left(\frac{x - x_0}{v_{0x}}\right) + \frac{1}{2} a \left(\frac{x - x_0}{v_{0x}}\right)^2 \leftarrow \text{PARABOLA}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 276

MOTI A 2-D

INTERPRETAZIONE FISICA DI $\vec{v}$ ED $\vec{a}$

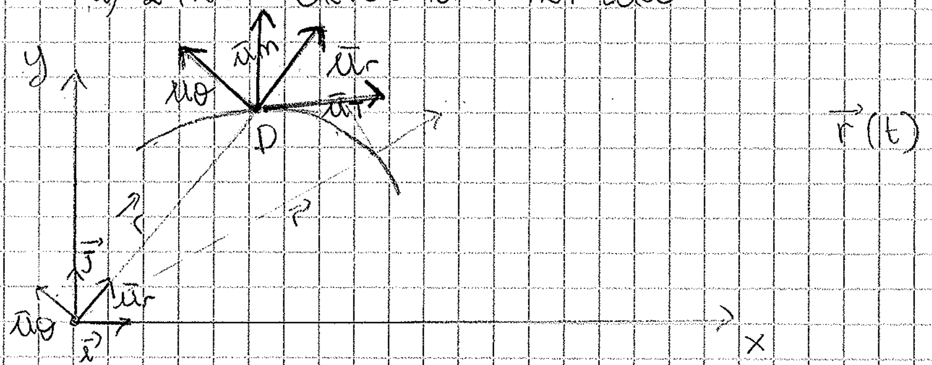
- Definire sistemi di riferimento interessanti
- Componenti di $\vec{a}$ e $\vec{v}$ nei S.R.
- Casi particolari
- Moto Circolare

  ↳ Rotazioni dei corpi

A) DEFINIZIONE DI S.R.

i) ORIGINE

ii) 2 ASSI ORTOGONALI TRA LORO



$\vec{r}(t) = r\,\vec{u}_r$

a) SR CARTESIANO (invariante)

O NEL CENTRO

i e J sono costanti (in modulo $= 1$, direzione e verso)

b) $\vec{u}_r =$ ASSE lungo $\vec{u}_r$

Definisco $\bar{u}_\theta \perp \bar{u}_r$ $|\bar{u}_\theta| = 1$ → versore

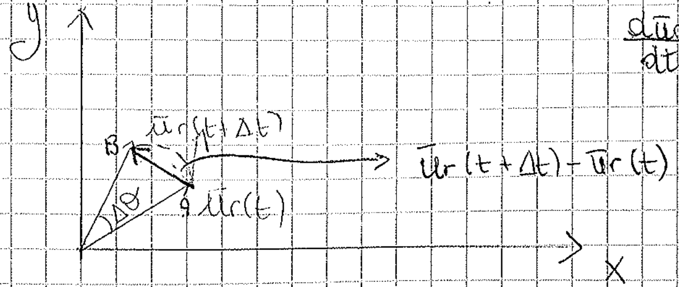
S.R. POLARE ORIGINE IN P

$\bar{u}_r$ e $\bar{u}_\theta$ MODULO COSTANTE ; la loro direzione dipende da t.

$\bar{u}_r \Rightarrow$ DIREZIONE RADIALE $\parallel \vec{r}$

$\parallel$ AL VETTORE POSIZIONE

$\bar{u}_\theta \Rightarrow$ DIREZIONE TRASVERSA



$$\frac{d\bar{u}_r}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{u}_r(t+\Delta t) - \bar{u}_r(t)}{\Delta t}$$

AB = ARCO DI CIRCONFERENZA DI RAGGIO $= |\bar{u}_r| = 1$

Lim $\Delta t \to 0 \Rightarrow$ ARCO $\to$ CORDA

CORDA tangente alla circonferenza

$\hookrightarrow \perp \bar{u}_r$ e quindi $\parallel \bar{u}_\theta$

ARCO = $\underset{\substack{\| \\ 1}}{\text{RAGGIO}} \cdot \Delta\theta$ — Quindi ARCO $= \Delta\theta$

$$\frac{d\bar{u}_r}{dt} = \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}}_{\text{lim del rapp incrementale}} \bar{u}_\theta = \frac{d\theta}{dt}\bar{u}_\theta$$

$\bar{u}_\theta$: direzione

POLARI: $\vec{v} = \underbrace{\frac{dr}{dt}\bar{u}_r}_{V\text{radiale}} + \underbrace{r\frac{d\theta}{dt}\bar{u}_\theta}_{\text{velocità trasversa}}$

VELOCITA' RADIALE:

$$V_r = \frac{dr}{dt}$$

descrive le variazioni del modulo del vett. posizione

Se $|\vec{r}| = \text{cost} \Rightarrow$ MOTO CIRCOLARE

$V_r = 0$

Se $V_r = 0 \Rightarrow |\vec{r}| = \text{cost}$

$\downarrow$

MOTO CIRCOLARE

VELOCITA' TRASVERSA

$$V_{TR} = r\frac{d\theta}{dt}$$

dipende SOLO da come varia la direzione del vettore

Se $\theta = \text{cost} \Rightarrow$ MOTO RETTILINEO

$\Rightarrow V_{TR} = 0$

Se $V_{TR} = 0 \Rightarrow \theta = \text{cost}$

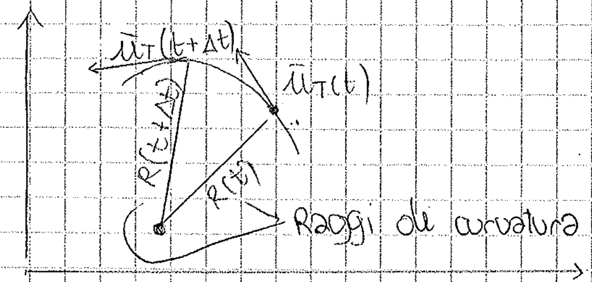
Vedere bene,

a chi merita 30 [...]

D) DEFINIZIONE DI $\vec{a}$

$$\vec{a} \underset{\text{def}}{=} \frac{d\vec{v}}{dt}$$

CARTESIANE: $\vec{a} = \underbrace{\frac{dv_x}{dt}}_{a_x}\vec{i} + \underbrace{\frac{dv_y}{dt}}_{a_y}\vec{j}$



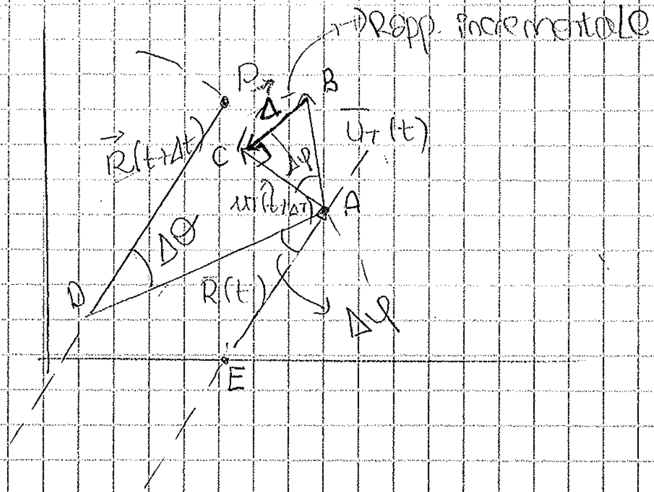
$\Delta t \to 0$

$R(t+\Delta t) \to R(t)$

DIREZIONE $\perp$ alla tangente $\Rightarrow$ direzione del raggio di curvatura

R = raggio della massima circonferenza tangente alla curva

$$\frac{d\bar{u}_T}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{u}_T(t+\Delta t) - \bar{u}_T(t)}{\Delta t}$$



$\vec{\Delta} = \vec{u}_T(t+\Delta t) - \vec{u}_T(t)$

$\downarrow$

corda , $\lim \Delta t \to 0$ CORDA = ARCO

$\hookrightarrow$ tangente alla circonferenza

Lunghezza arco = raggio $\cdot\, \Delta\varphi$

$\downarrow$

1

$|\vec{\Delta}| = \Delta\varphi$

DIR $\perp$ $\bar{u}_T \Rightarrow \parallel \bar{u}_n$

VERSO $\Rightarrow$ OPPOSTO a $\bar{u}_n$, diretto verso il centro di curvatura

$\hat{E} = 90°$

$B\hat{A}D = 90°$

$D\hat{A}E = 90° - C\hat{A}D$

~~$B\hat{A}C = 90°$~~

descrive come varia $\vec{V}$ in direzione (a_n)

L'unico caso in cui $a_n = 0$ $\Rightarrow$ direzione di $\vec{V}$ costante,

moto rettilineo $\Rightarrow$ $a_n = 0$

Conclusione

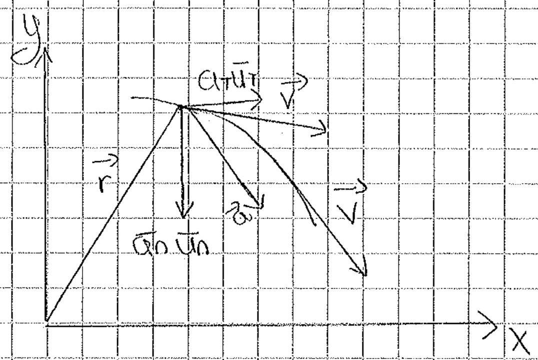
Un oggetto è descritto da:

$\vec{r}(t)$ POSIZIONE

$\vec{V}(t) = V\,\vec{u}_T$ Tangente alla traiettoria

$\vec{a}(t) = a_T\,\vec{u}_T + a_n\,\vec{u}_n$

└> VERSO IL CENTRO (CENTRIPETA)



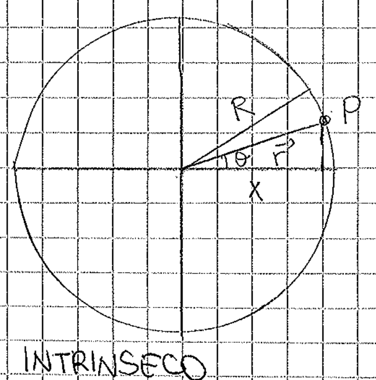
$\vec{V}$ fa muovere e decide il verso

$a_T\,\vec{u}_T$ $\Rightarrow$ fa variare il modulo di V (allunga o accorcia il vettore)

$a_n\,\vec{u}_n$ $\Rightarrow$ piega il vettore $\vec{V}$, fa cambiare la sua direzione

MOTO CIRCOLARE

è un particolare moto a 2-D, in cui la traiettoria è una circonferenza centrata sull'Origine.



VETTORE POSIZIONE $\vec{r}$

$|\vec{r}| \equiv R \equiv$ RAGGIO DI CURVATURA

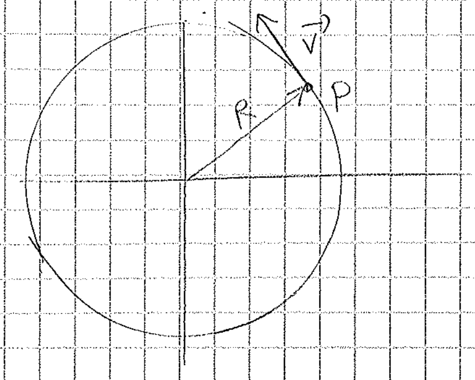
$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

SR POLARI $\equiv$ SR INTRINSECO

$= \quad \vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{R}$

↳ SIGNIFICATO DI VETTORE

Consistente con $v = \omega R$ se e solo se $\omega \perp R, V$



$\vec{\omega}$ vettore $\perp$ al quaderno

VERSO USCENTE

$\vec{a}$

POLARI

$$\vec{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - \left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] \bar{u}_r + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2 \frac{d\theta}{dt}\right) \bar{u}_\theta \quad \Bigg\} \text{ def. generale di } \vec{a}$$

nel caso particolare del moto circolare:

$r = R = \text{cost}$

$\bar{u}_r = \bar{u}_n \qquad \bar{u}_\theta = \bar{u}_T$

$$\vec{a} = -R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 u_n + R\,\frac{d^2\theta}{dt^2}\,\bar{u}_T =$$

$$= -R\omega^2 \vec{u}_n + R\frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\vec{u}_T = \underbrace{-R\omega^2}_{a_n} \vec{u}_n + \underbrace{R\frac{d\omega}{dt}}_{a_T} \vec{u}_T$$

$\omega^2 R$

$\frac{v^2}{R}$

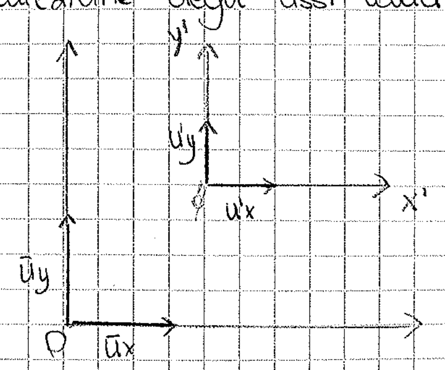
$\gamma = \frac{d\omega}{dt}$ acc. angolare

$a_T = \gamma \cdot R$

$\vec{a}_T = \vec{\gamma} \wedge \vec{R}$

TRAIETTORIA DI O' $\Rightarrow$ qualsiasi.

2) La direzione degli assi varia nel tempo



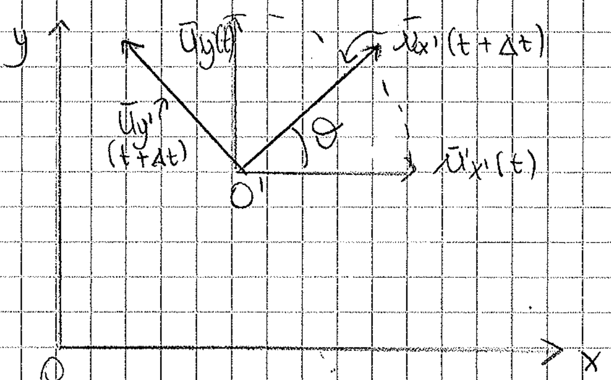
Moto rotazione:

$\bar{u}'_x(t)$, $\bar{u}'_y(t)$ $\qquad |\bar{u}'_x| = |\bar{u}'_y| = 1$

può cambiare solo la direzione dei versori

O' SIA FERMO

$\vec{r}_{O'}$ = COSTANTE



θ angolo che descrive la variazione

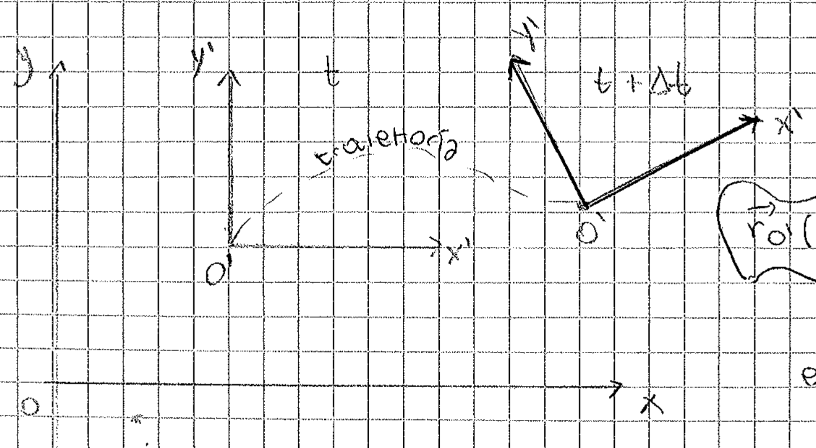
Usiamo la cinematica del MOTO CIRCOLARE

$\theta_{O'} = \theta_{O'}(t)$ $\qquad$ θ ANGOLO FRA ASSE X E ASSE X'

$\omega_{O'} = \dfrac{d\theta_{O'}}{dt}$ $\qquad$ $\gamma_{O'} = \dfrac{d\omega_{O'}}{dt}$

L'ORIGINE È FISSA!

3) ROTO - TRASLAZIONE

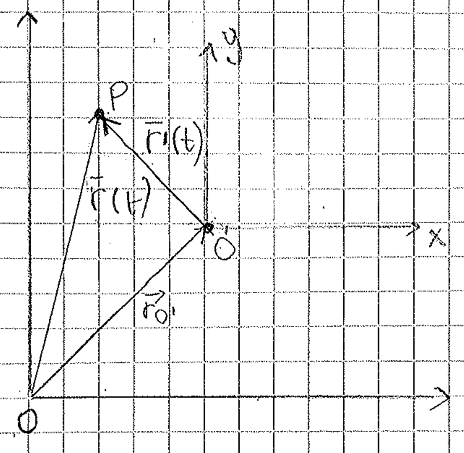


$\vec{r}_{O'}(t)$; $\theta(t)$

è possibile disegnare S'R'

(3) S'R' IN TRASLAZIONE

$\Rightarrow$ DEFINITA DALLA POSIZIONE DI O' $\vec{r}_{O'}(t)$



MOTO DI P IN SR E IN S'R' ?

$\vec{r}$ = VETTORE POSIZIONE DI P IN SR

$\vec{r}'$ = VETTORE POSIZIONE DI P IN S'R'

$\vec{r}(t) \neq \vec{r}'(t)$

$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_{O'} + \vec{r}'}$ GEOMETRICAMENTE

POSIZIONE

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ velocità di P in SR

$\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt}$ velocità di P in S'R'

VELOCITÀ

Che legame c'è tra $\vec{v}'$ e $\vec{v}$?

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(\vec{r}_{O'} + \vec{r}')}{dt} = \frac{d\vec{r}_{O'}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v}_{O'} + \vec{v}'$$

$\vec{v}_{O'}$: velocità di O' in SR

$\vec{v}_{O'}$ in S'R' = 0

$\vec{v}' \neq \vec{v}$ diversa traiettoria

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ accel. di P in SR

$\vec{a}' = \frac{d\vec{v}'}{dt}$ accel. di P in S'R'

ACCELERAZIONE

$\vec{a} = \vec{a}_{O'} + \vec{a}'$ $\quad$ $\vec{a}_{O'}$: accel. di O' in SR

$\vec{a}' \neq \vec{a}$

CASO PARTICOLARE in cui in S'R'

$\vec{a}_{O'} = 0 \implies \vec{a} = \vec{a}'$ SISTEMA S'R' INERZIALE

pura traslazione.

O' si muove di moto rettilineo uniforme

Moti relativi

SR $\Rightarrow$ FISSO

S'R' $\Rightarrow$ MOTO RISPETTO A S.R.

* TRASLAZIONE PURA

O' $\Rightarrow$ $\vec{r}_{O'}(t)$ IN SR

ASSI $\Rightarrow$ DIREZ. FISSA

* ROTAZIONE

O' $\Rightarrow$ FISSO

ASSI $\Rightarrow$ DIREZIONE NON COSTANTE

$\vec{u}_{x'}(t)$ ......

TRASLAZIONE

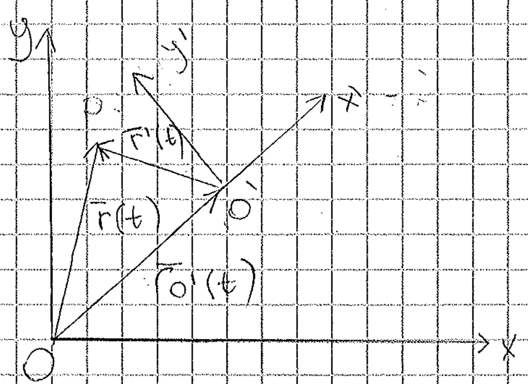
$\vec{a} \neq \vec{a}'$

$\Downarrow$ IN SR, $\Downarrow$ IN S'R'

$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{O'}$

- S'R' RUOTA E TRASLA
- MOTI RELATIVI ALLA TERRA

(1) S'R' RUOTA E TRASLA



$\vec{r}_{O'} = \vec{r}_{O'}(t)$ $\left.\begin{matrix}\vec{v}_{O'} \\ \vec{a}_{O'}\end{matrix}\right\}$ IN SR

$\vec{u}_{x}' = \vec{u}'_x(t) \Rightarrow$

$\theta(t)$ (per definire la rotazione di tutti i versori) $\Rightarrow \vec{\omega}(t)$ velocità angolare

$\vec{\gamma}(t)$ acceleraz. angolare

VETTORE POSIZIONE

$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{r}_{O'}(t)$

$\vec{r}(t) = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \underbrace{\frac{dx'}{dt}\bar{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\bar{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt}\bar{u}_{z'}}_{\substack{\vec{V}' \\ \text{CALCOLATO IN } S'R'}} + x' \cdot \vec{\omega}\wedge\bar{u}_{x'} + y'\,\vec{\omega}\wedge\bar{u}_{y'} + z'\,\vec{\omega}\wedge\bar{u}_{z'} =$$

$$= \vec{V}' + \vec{\omega} \wedge \underbrace{\left\{ x'\bar{u}_{x'} + y'\bar{u}_{y'} + z'\bar{u}_{z'} \right\}}_{\vec{r}'}$$

Quindi:

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{V}' + \vec{\omega}\wedge\vec{r}'$$

Conclusione:

$$\vec{V} = \vec{V}_{O'} + \vec{V}' + \vec{\omega}\wedge\vec{r}'$$

$\vec{V}$ => velocità di P in SR

$\vec{V}_{O'}$ => velocità di O' in SR

$\vec{V}'$ => velocità di P in S'R'

$\vec{r}'$ => posizione di P in S'R'

ACCELERAZIONE

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\vec{V}_{O'} + \vec{V}' + \vec{\omega}\wedge\vec{r}' \right]$$ Derivando i vari pezzi...

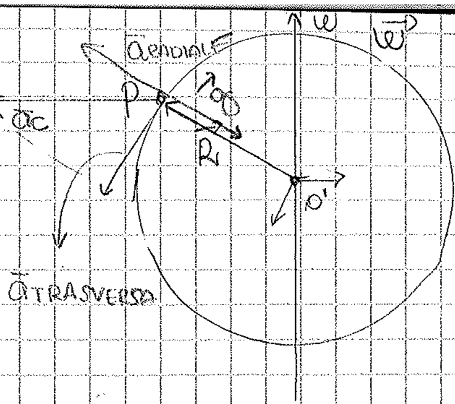
① $\dfrac{d\vec{V}_{O'}}{dt} = \vec{a}_{O'}$ (IN SR)

② $$\frac{d(\vec{\omega}\wedge\vec{r}')}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{r}' + \vec{\omega}\wedge\underbrace{\frac{d\vec{r}'}{dt}}_{\vec{V}' + \vec{\omega}\wedge\vec{r}'} =$$

$$= \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{r}' + \vec{\omega}\wedge\vec{V}' + \underbrace{\vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\vec{r}'}_{\text{prodotto Triplo}}$$

③ $$\frac{d\vec{V}'}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{ \frac{dx'}{dt}\bar{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\bar{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt}\bar{u}_{z'} \right\}$$

$$= \underbrace{\frac{d^2x'}{dt^2}\bar{u}_{x'} + \frac{d^2y'}{dt}\bar{u}_{y'} + \frac{d^2z'}{dt}\bar{u}_{z'}}_{\vec{a}'} + \underbrace{\frac{dx'}{dt}\cdot\frac{d\bar{u}_{x'}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\bar{u}_{y'}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\bar{u}_{z'}}{dt}}_{\text{lo so}}$$



$\vec{a}$ di P in

S'R' = TERRA

SR FISSO ⇒ STELLE FISSE

TERRA $\vec{r}_{o'}$ = costante APPROSSIMATO

$\vec{\omega} \neq 0$ RUOTA SU SÈ STESSA

il punto P è identificato con il vettore $\vec{R}$

$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0$ (la velocità con cui ruota la Terra è costante)

$$\vec{a} = \vec{a}' + \underbrace{\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{R}}_{\text{CENTRIFUGA}} + \underbrace{2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'}_{\text{CORIOLIS}}$$

$\vec{a}_c = \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{R}$

$\cancel{\frac{d\vec{\omega}}{dt}}$ $\cancel{\vec{a}_{o'}}$

SE P ⇒ POLO vett ⊥ a $\vec{\omega}$ e a $\vec{R}$

→ USCENTE DALLA LAVAGNA

$\vec{\omega} \parallel \vec{R}$ MODULO = 0

SE P = EQUATORE

$\vec{\omega} \perp \vec{R}$ ⇒ MODULO MAX

Ora : $\vec{a}_c = \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{R}$

$\vec{a}_c$ ⇒ ⊥ a $\vec{\omega}$

⊥ a $\vec{\omega} \wedge \vec{R}$

deve stare nel piano della lavagna

$\vec{a}_R$ ⇒ diminuisce il modulo di $\vec{g}$

$\vec{a}_{TRASV}$ ⇒ fa deviare verso l'equatore

A P = POLO entrambe nulle

A P = equatore

a_{RAD} = MAX

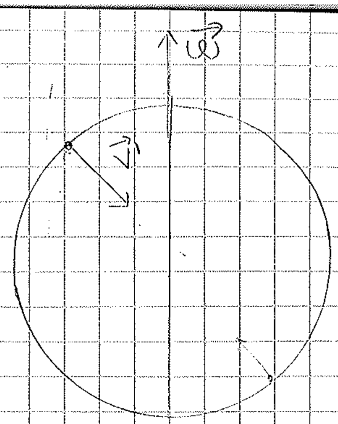
a_{TRASV} = 0

CORIOLIS

$-2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'$

↓

dato che c'è lo ⊖ quello che ottengo è un vettore uscente



vettore ⊥ ALLA LAVAGNA (entrante)

⇒ VETTORE LUNGO EST (perché la terra ruota ↺)

CENTRIFUGA : modifiche correzioni

⇒ $|\vec{g}|$ ↓ RADIALE

DEVIAZ. SUD

CORIOLIS ⇒ DEVIAZIONE VERSO EST

Cade al suolo da $h = 100m$

45° PARALLELO

⇒ VERSO SUD 17.3 cm

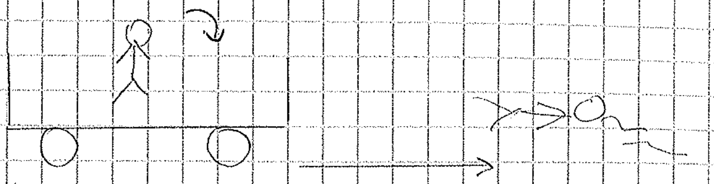
⇒ VERSO EST 1.6 cm

Effetti trascurabili quanto più h è piccola

$\vec{F} = 0 \;\cancel{\Rightarrow}\; \vec{v} = 0$ È SBAGLIATO !!! Imprimilo.

$\vec{F} \Rightarrow$ CAMBIARE IL TIPO DI MOTO

Esempio



PULLMAN FRENA $\qquad \vec{v}$

 VIAGGIA CON $\vec{v}$

2° principio della dinamica

La causa del moto (forza) è direttamente proporzionale alla accelerazione del corpo a cui la forza è applicata.

La costante di proporzionalità è la MASSA m.

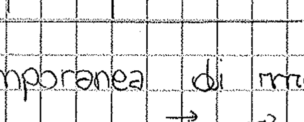
$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = m \cdot \vec{a}}$$

Conseguenze:

(1) - $\vec{F}$ è un vettore

- Ha un punto di applicazione che coincide con il punto.

pto di applicazione



(2) azione contemporanea di molte forze

$\Rightarrow$ RISULTANTE $\underbrace{\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \_\,\_ + \vec{F}_m}$

somma vettoriale

(3) Componenti:

$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} \qquad$ (A 2-D)

3° Principio della dinamica

Se un corpo A esercita una forza su B, allora B esercita una forza uguale e contraria su A.

Principio di azione e reazione

OSSERVAZIONI:

i) 2 CORPI:

- A - SORGENTE ⟹ oggetto che causa la forza
- B - SONDA ⟹ oggetto che sente la forza

Bisogna specificare!

$\vec{F}_{AB}$ — sorg, sonda

$\vec{F}_{AB}$

il punto di applicazione su B.

ii) FORZE VANNO A COPPIE (SEMPRE!)

$\vec{F}_{AB} \neq 0$

$\exists$ sempre $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$

$\vec{F}_{AB}$ e $\vec{F}_{BA}$ applicate in punti $\neq$

⟹ II PRINCIPIO

A ⟹ $\vec{F}_{BA} = m_A \vec{a}_A$

B ⟹ $\vec{F}_{AB} = m_B \vec{a}_B$

$\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$ (vale solo per le forze!)

$\cancel{\vec{a}_A = -\vec{a}_B}$ NO!

$$\boxed{\vec{a}_A = \frac{\vec{F}_{BA}}{m_A} = -\frac{\vec{F}_{AB}}{m_A}} \qquad \vec{a}_B = \frac{\vec{F}_{AB}}{m_B} = -\frac{m_A}{m_B}\vec{a}_A$$

Per V_y, SONDA = CASSA

, SORGENTE = PAVIMENTO

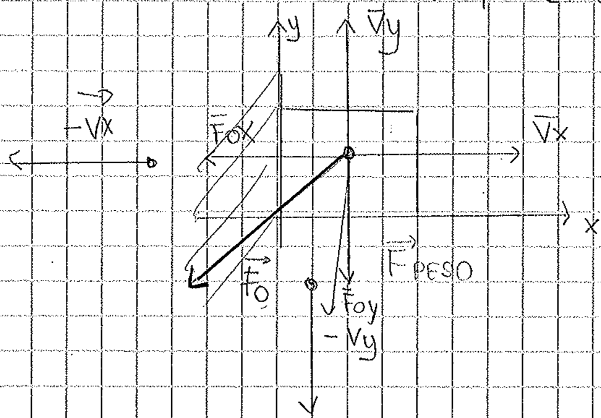
$\vec{V_y} + \vec{F}_{PESO} = 0$ relazione vettoriale

$\Longrightarrow V_y - F_{peso} = 0$ relazione lungo y.

negativa

Reazioni vincolari

- Servono per mantenere in equilibrio
- Direzione $\perp$ alla sup di contatto fra i corpi
- modulo = somma tutte forze attive lungo quella direzione



dato che spingo verso il muro, $\vec{V_x}$ e' contraria al muro

CASSA:

equilibrio si ha quando $\vec{R} = 0$ $\quad \vec{F_o} + \vec{V_x} + \vec{V_y} + \vec{F}_{PESO} = 0$

$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0$ (nulle entrambe le componenti)

$\vec{F_o}$ ha componenti lungo x e y. $\longrightarrow$ scomponiamolo

$+ \; V_x - F_{ox} = 0$ PER L'ASSE (x)

$\underline{V_x = F_{ox}}$

$+ \; V_y - F_{PESO} - F_{oy} = 0$ PER L'ASSE (y)

$\underline{V_y = F_{PESO} + F_{oy}}$ per l' equilibrio

$S'R' = \wedge \; O' \Rightarrow$ MOTO CIRCOLARE

ω = COST $\quad V_T$ = cost

$a_T = 0$

RUOTANO GLI ASSI $\omega \neq 0 \left\{ \frac{d\omega}{dt} = 0 \right.$ velocità angolare costante

$$\vec{a}' = \vec{a} - \cancel{\vec{a}_{O'}} - \underbrace{\cancel{\frac{d\omega}{dt} \wedge \vec{r}'}}_{\text{nulla}} - \underbrace{\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}'}_{\text{acc centrifuga}} - \cancel{2\vec{\omega} \wedge \vec{V}'}$$

ω costante

• OSS. SR

Per l'osservatore, P avrà un moto circolare uniforme:

ω = vel. angolare

$V_T = \omega \cdot R$

$\gamma = 0$ no acc. angolare $\quad a_T = \gamma \cdot R = 0$ no acc. Tg

$\underbrace{a_c = \frac{V^2}{R} = \omega^2 R}$ acc. centripeta

IN SR:

$\vec{F} = m\vec{a}$

FISICA

$\vec{F}_{elastica} = m\vec{a}_c \qquad F_{elast} = m a_c$

$F_{el} = m\omega^2 R$ in forma scalare

IN SR':

P FERMO $\quad \vec{V}' = 0 \quad \vec{a}' = 0$

$\vec{F}' = m\vec{a}'$ I principio

$\vec{F}_{FISICHE} + \vec{F}_{APP} = 0$

$\vec{F}_{APP} = -\vec{F}_{FISICHE} = m\omega^2 R$

$|\vec{F}_{el}|$

$|\vec{F}_{APP}| = m\omega^2 R$ direzione opposte alla forza elastica

verso l'esterno

FORZA CENTRIFUGA

FORZE

(A) $\vec{F} = m\vec{a}$

$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$ ~~F~~ Forze fisico

(B) EQUILIBRIO $\vec{F} = 0$

$\Rightarrow \vec{V} =$ REAZ. VINCOLARI $\quad F_x = F_y = F_z = 0$

Se non ho equilibrio, reazione vincolare nulla.

(C) $\vec{F} \neq \vec{F'}$

S'R' NON INERZIALE (RISPETTO ALLE STELLE FISSE)

$\vec{F'} = \vec{F}_{FISICHE} + \vec{F}_{APPARENTI}$

ORIGINE ~~X~~ S'R'

(D) Azione dinamica delle forze

Punto di partenza: $\vec{F} = m\vec{a}$ SR INERZIALE (forze fisiche)

$\vec{F}$ produce $\vec{a}$

$\vec{F} = m\vec{a}_T + m\vec{a}_C$ (le produce la forza)

$\vec{F} \neq 0 \Rightarrow$
- $m\vec{a}_T \neq 0$ $(\vec{a}_C = 0) \Rightarrow |\vec{V}|$ cambia $\vec{F}_T = m\vec{a}_T$ forza tangenziale
- $\vec{a}_C \neq 0$ $(\vec{a}_T = 0) \Rightarrow \vec{V}$ cambia in direzione $\vec{F}_C = m\vec{a}_C$ forza centripeta
- $\vec{a}_T, \vec{a}_C \neq 0$

$\Downarrow$

La forza ha entrambe le componenti: $|\vec{V}|$ e $\vec{V}$ (direzione) cambiano.

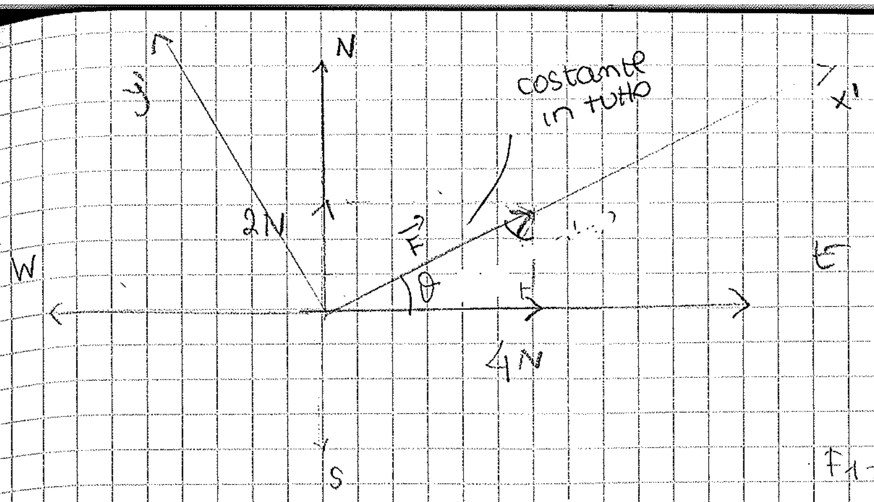
COMPONENTI PARTICOLARI DELLA FORZA FISICA

ESEMPI:

1) $m = 1\,kg$ LUNGO x $F = 3\,N$ $V_{iniz} = 0$

V_{finale} dell'oggetto dopo 3 s?

1-D (lungo asse x)



$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$

$= 4\vec{i} + 2\vec{j}$

$a = \frac{4}{m}\vec{i} + \frac{2}{m}\vec{j}$

$\vec{v} = \int \vec{a}\, dt$

$F_1 = \vec{F} \cos\theta$

$\arccos\theta = \frac{4}{\sqrt{20}}$ =

$\vec{F}$ = direzione costante

S'R' $O' \equiv O$ $\vec{u}_{x'} \,//\, \vec{F}$ $\longrightarrow$ INERZIALE A SR

moto a 1 dimensione

$|F| = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$

$a = \frac{F}{m} = \frac{\sqrt{20}}{1} = \sqrt{20}\ m/s^2$

DIREZ $x' \Rightarrow \theta$

(E) FORZE FISICHE

INTRODUZIONE

$\Rightarrow$ INTERAZIONE A DISTANZA

* m_1 con m_2 (1)

↓

GRAVITAZIONALE $\longrightarrow$ ATTRATTIVA

$\Rightarrow$ INTERAZ. TRA 2 CARICHE

* ELETTRODEBOLE $+q$ / $-q$ ATTRATTIVA O REPULSIVA (2)

$\Rightarrow$ INTERAZ. TRA QUARKS (3)

* INT. FORTE O NUCLEARE COLORI

F $\Rightarrow$ PROPORZIONALI AL PRODOTTO DELLE CAUSE

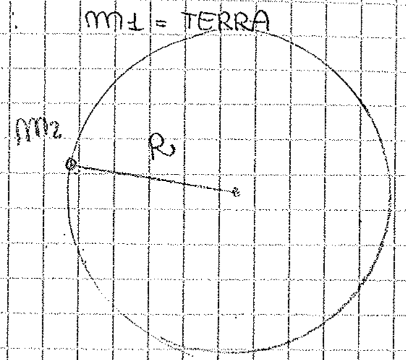
↳ INVERSAM. PROPORZIONALI AL QUADRATO DELLA DISTANZA

DIR RETTA LUNGO I DUE OGGETTI

L'accelerazione dipende solo da m_1

$$\vec{a}_2 = -\gamma \frac{m_1}{r^2} \bar{u}_r$$

Caso particolare : m_1 = TERRA



$r = R_T$

$$\vec{a}_2 = \underbrace{-\gamma \frac{M_T}{R_T^2}}\, \bar{u}_r$$

$$|\vec{a}_2| = g = 9,\ldots\ m/s^2$$

direzione vs centro terra

CASO PARTICOLARE

$$\vec{F}_{peso} = \underbrace{-\gamma \frac{M_T}{R_T^2}}_{g} \cdot m \cdot \vec{u}_r = -m g \vec{u}_r = -m\vec{g}$$

direzione verso il centro della terra

Ogni oggetto ha la sua forza peso

PESO ≠ MASSA

Sulla luna

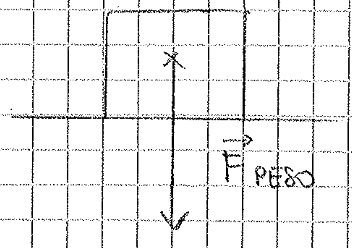
$$\vec{F}_p = m\vec{g}_{LUNA}$$

$\rightarrow$ 1/10 $\vec{g}$

1/6 ?

P.to di applicazione

$\longrightarrow$ COINCIDE CON IL BARICENTRO DELL'OGGETTO



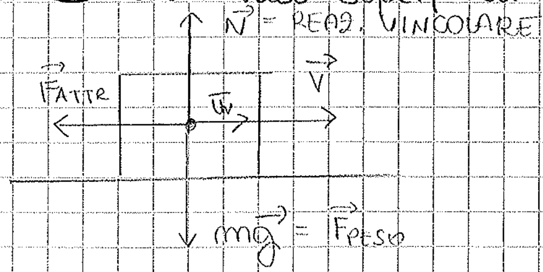
ii) FORZE DI ATTRITO

compare quando A possiede una velocità relativa rispetto a B

(*) A e B hanno velocità diverse eccetto attrito statico

Modulo ⇒

Dirett. proporzionale alla forza di contatto ⇒ forza che (attiva) agisce sul corpo A in direzione $\perp$ alla sua superf. di contatto.



$|\vec F_{ATTR}| \propto |mg|$ $\quad mg = N \quad$ (eq. lungo y)

$\downarrow$

$|F_{ATTR}| \propto |\vec N|$

$\uparrow$ forza attiva che agisce $\perp$ al piano

$$\boxed{\vec F_{ATTR} = -|\mu_D \vec N|\, \vec u_v}$$

μ_D costante di proporzionalità.

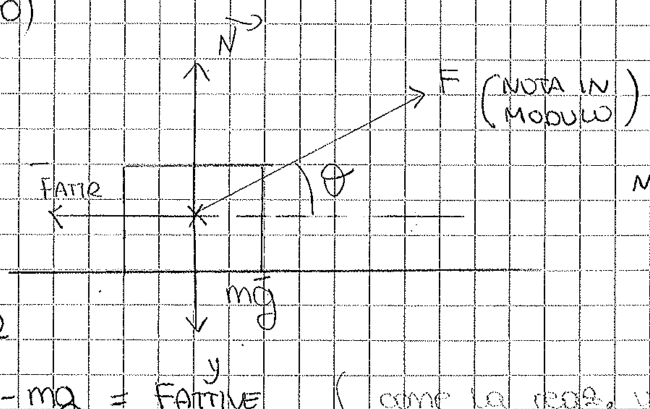
μ_D coefficiente di attrito dinamico (adimensionale)

$\downarrow$

proprietà dei materiali A e B

P.TO DI APPLICAZIONE ⇒ SULLA SUPERFICIE DI CONTATTO (e non nel baricentro)

ESEMPI



$\vec v = 0$

MOTO AL VARIARE DI θ

$\mu_D = 0.2$

(y) $F\sin\theta - mg = F_{ATTIVE}$ (come la reaz. vincolare)

ESCLUDO:
- SE $F\sin\theta - mg > 0$ L'oggetto viene trascinato verso l'alto
  $N = 0 \quad \vec F_{ATTR} = 0$
- SE $F\sin\theta - mg < 0$ L'oggetto si schiaccia

$F\sin\theta - mg + N = 0$ EQUILIBRIO

$N = -F\sin\theta + mg \geq 0$

L'attrito è sempre opposto alla velocità:

$F - F_{ATTR} = m a_x$

$\mu_d N$ se $a_x > 0$

se $a_x < 0 \Rightarrow$ l'oggetto è fermo!

iii) ATTRITO STATICO

Tiene in equilibrio gli oggetti, compare solo quando $V_A = 0$

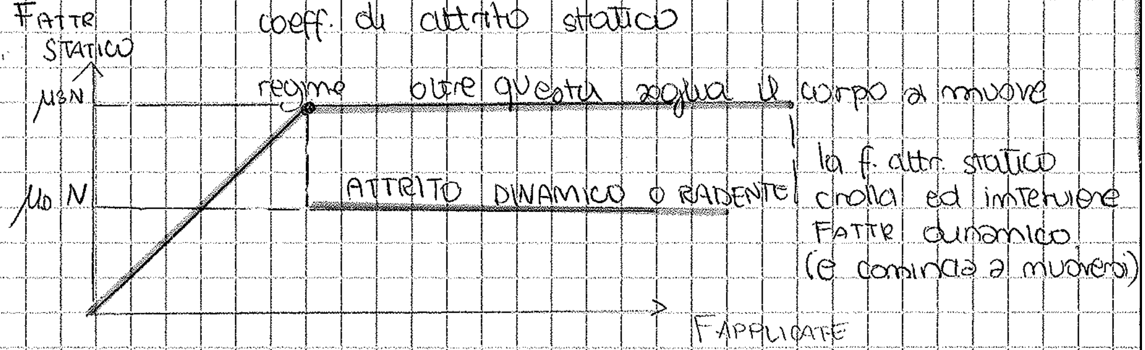
$\vec{F}_{ATTR}$ (statico) $\neq 0$

$\vec{F}_{ATTR}$ (radente) $= 0$

MODULO = SOMMA FORZE ATTIVE // SUP. CONTATTO

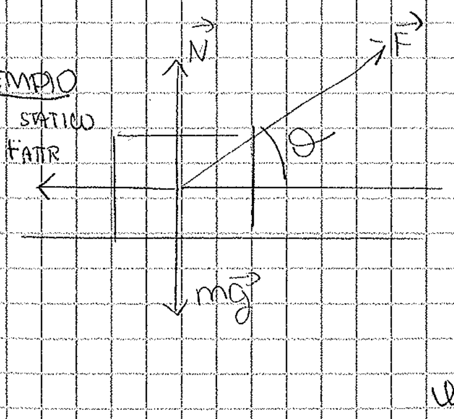
Al massimo vale $\mu_s N$

coeff. di attrito statico



Quando la forza applicata è uguale a $\mu_s N$, e accade $\mu_D < \mu_s$ sempre, l'attrito crolla: l'oggetto comincia a muoversi

ESEMPIO



$\vec{N} = mg - F\sin\theta$

$|\vec{F}^{STAT}_{ATTR}| = F\cos\theta = F_x$

Se $F_x > \mu_s N$

il corpo si muove $\Rightarrow$ si usa l'attr. dinamico

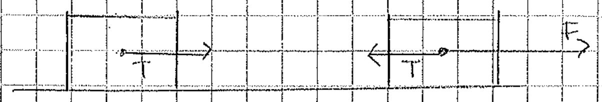
- INESTENSIBILE → non si può allungare

$\bar{V}_A = \bar{V}_B$ ⇒ distanza fra i due costante

⇓ lunghezza fissa

$\bar{a}_A = \bar{a}_B$ accel. identiche.

Semplificazione:



$$\begin{cases} F - T = m_A a \\ T = m_B a \end{cases}$$

V) FORZA ELASTICA

Agisce in presenza di oggetti elastici

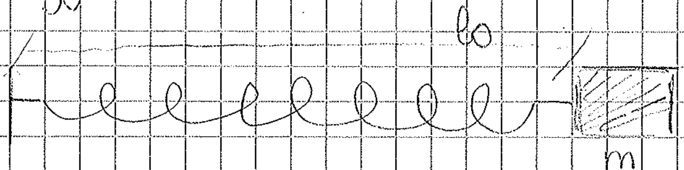
↳ "MOLLA" ⇒ DEFORMATA

VARIA LA LUNGHEZZA ⇐ MODULO

direttamente proporzionale alla deformazione dell'oggetto che la causa.

La direzione // alla deformazione

verso opposto ⇒ forza di richiamo, perché tende a riportare l'oggetto nello stato iniziale



lo = lungh. a riposo $F_{el} = 0$ NO DEFORMAZIONE

$l > l_0$ DEF: $(l - l_0)$ variazione di lunghezza

Fel, stessa direzione e verso opposto di $l - l_0$

$$|\vec{F}_{el}| = -K(l - l_0)$$ (forza di richiamo)

↳ K: COSTANTE ELAST DELLA MOLLA

Riepilogo dinamica

A) PRINCIPI DELLA DINAMICA

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

B) COND. EQUILIBRIO

$$\vec{R} = \sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{v}$$

C) SR FISSO → S'R'

$\vec{F}_{FISICHE}$ $\quad \vec{F} = \vec{F}_{FISICHE} + \vec{F}_{APP}$

$\vec{F}_{APP} \Rightarrow \vec{F}_{centrifuga} = m\omega^2 R \bar{u}_R$

S'R' = RUOTA CON a = costante

D) $\vec{F} = m\vec{a}$ $\quad$ Azione dinamica

$\vec{F}$ produce → $\vec{a}$, quindi una variazione di velocità

$\vec{F} \Rightarrow F_T \Rightarrow$ TANGENZIALE $\quad$ cambia il modulo di $|\vec{v}|$

$F_{centripeta} \Rightarrow$ varia la direzione di $\vec{v}$

⇓

a_T , a_c

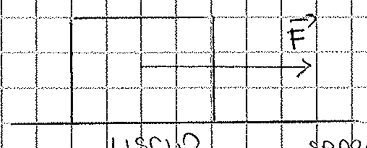
E) ELENCO DI FORZE

⇒ modulo, direzione, verso, pto di applicazione

⇒ PROPRIETÀ

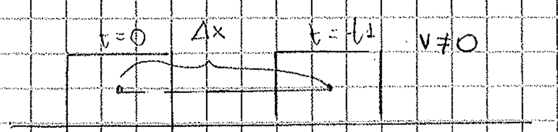
F) Azione delle forze nel tempo e lungo una traiettoria

i) INTRODUZIONE



$F \equiv F_x = ma_x$

LISCIO , senza attrito



$a_x = \dfrac{F}{m}$ costante se F = cost.

moto unif. accelerato $\quad v = at \quad v_0 = 0$

Questa forza agendo nell'intervallo di tempo produce una variazione di velocità:

LEGAME $\vec{J}$ e variaz. di $\vec{v}$

$$\vec{J} \stackrel{def}{=} \int_{t_0}^{t} \vec{F}\, dt = \int_{t_0}^{t} m\vec{a}\, dt = \int_{t_0}^{t} m \frac{d\vec{v}}{dt}\, dt \Rightarrow$$

Se m e' costante :

$$\vec{J} = m\int_{t_0}^{t} d\vec{v} = m\left[\vec{v}(t) - \vec{v}(t_0)\right]$$

$$\underbrace{\vec{J} = m\Delta\vec{v}}\ = \underbrace{m\vec{v}(t)}_{\text{quantità di moto}} - m\vec{v}(t_0)$$

$m\Delta\vec{v} = \Delta\vec{q}$ (variazione della quantità di moto)

$\vec{q} = m\vec{v}$

Quindi :

$\vec{J} = \Delta\vec{q}$ Quindi, una forza che agisce nel tempo provoca una variazione della quantità di moto

$\vec{q} \Rightarrow$ dir. di $\vec{v}$, verso di $\vec{v}$, $|\vec{q}| = m \cdot v$

ESTENSIONE IN FORMA INFINITESIMALE

$$\vec{J} = \Delta\vec{q}$$

$$\int_{t_0}^{t} \vec{F}\, dt = \int_{t_0}^{t} d\vec{q}$$ due integrali che hanno gli stessi estremi, hanno gli stessi argomenti

$$\vec{F}\, dt = d\vec{q}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{q}}{dt}$$ La forza e' la derivata della quantità di moto rispetto al tempo (alternativa al II princ. della dinamica)

↑ vale anche quando la massa non e' costante.

Perche' sostituisce il II principio?

$$\vec{F} = \frac{d\vec{q}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \underbrace{\frac{dm}{dt}\vec{v}}_{} + \underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt} m}_{m\vec{a}}$$

↑ se la massa e' variabile l'effetto della forza e' duplice

$m_0 v_0 = (m_0 + 0{,}03 \cdot 50)\, v$

↑ Trovo la velocità finale

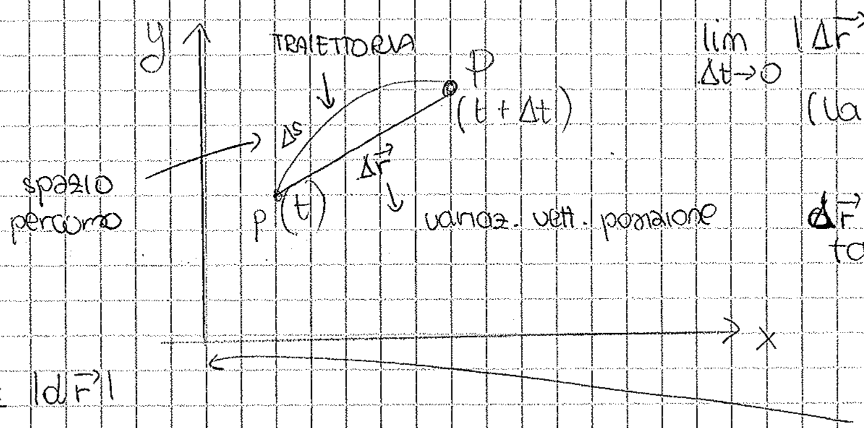
Relazioni tra vettori

↳ valgono tra le singole componenti

$$F_x = \frac{dq_x}{dt}$$

Se $F_x = 0 \Rightarrow q_x =$ costante

III) AZIONE LUNGO UNA TRAIETTORIA   CONCETTO DI LAVORO



$\lim_{\Delta t \to 0} |\Delta \vec{r}| \Rightarrow \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta s)$

(la corda coincide con l'arco)

$\Delta \vec{r}$ tende ad essere tang. alla traiettoria
↓
quindi alla stessa direzione di $\vec{v}$.

$ds \equiv |d\vec{r}|$

⇓ NUOVO CONCETTO NEL LIMITE INFINITESIMO

$d\vec{s} = d\vec{r}$ (VETT. SPOSTAMENTO)

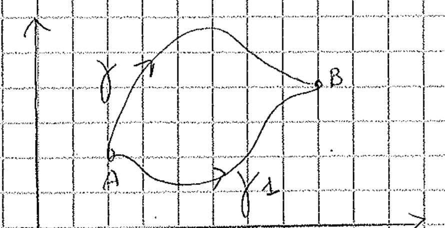
EFFETTO FORZA LUNGO TRAIETTORIA

L'effetto infinitesimo $\Rightarrow$ $\vec{F} \cdot d\vec{s}$ (prodotto scalare)

NB. $\vec{F} \times d\vec{r}$ (prodotto vettoriale)
↓ LA VEDREMO ?!? BOH

L'effetto finito $\Rightarrow$ faccio l'integrale che dipende dalla traiettoria dell'oggetto

INTEGRALE CURVILINEO →



p.to di arrivo

$$W = \int_{A\,\gamma}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{s} \neq \int_{A\,\gamma_1}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

LAVORO   PERCORSO

mi interessa il modo in cui vado da A a B.

$W_{AB} = \int_{A\gamma_1}^{B} \vec{F}\, d\vec{s} = \int_{A\gamma_1}^{B} \underbrace{F\cos\theta}_{\text{non e' costante}}\, ds$

Anche se F e' costante non posso portarla fuori

* 1-D traiettoria rettilinea (CASO PARTICOLARE MOTO UNIDIMENS)

$a_c = 0 \Rightarrow F_{centrip} = 0$

$dW = F_x\, dx$ (c'e' solo la componente tangenziale)

$W_{AB} = \int_A^B F_x\, dx$ 1 sola traiettoria → retta

Se F_x = costante!

$W_{AB} = F_x \int_A^B dx = F_x (x_B - x_A) = F_x \cdot \Delta x$

LEGAME LAVORO E $\vec{v}$

↳ TEOREMA ENERGIA - LAVORO

$W_{AB} = \int_{A\gamma}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{s}$

$\vec{F} = F_x \cdot \bar{u}_x + F_y \cdot \bar{u}_y$

$d\vec{s} = d\vec{r} = dx\,\bar{u}_x + dy \cdot \bar{u}_y$

$\vec{F} \cdot d\vec{s} = F_x\, dx + F_y\, dy$ (prodotto scalare = prodotto tra componenti)

$= m a_x\, dx + m a_y\, dy =$

$= m \frac{dv_x}{dt} dx + m \frac{dv_y}{dt} dy$

$v_x \qquad v_y$

$= m v_x\, dv_x + m\, v_y\, dv_y$

$W_{AB} = \int_{A\gamma}^{B} \vec{F}\, d\vec{s} = \int_{A\gamma}^{B} (m v_x\, dv_x + m v_y\, dv_y) =$

$= \left(\frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} m v_y^2\right)\Big|_A^B = \frac{1}{2} m \underbrace{(v_x^2 + v_y^2)}_{v^2}\Big|_A^B = \frac{1}{2} m v^2 \Big|_A^B$

$W_{AB} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$

$W_{AB} \neq 0 \longrightarrow v_B \neq v_A$ (come moduli)

↳ l'azione di una forza e' quello di cambiare il modulo di $\vec{v}$

IN MECCANICA $W > 0$ vuol dire che l'energia va dalla sorgente di $\vec{F}$ al punto P

EFFETTO DELLE FORZE (Riepilogo)

i) in funzione del tempo

$\vec{J} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}\, dt$ $\boxed{\vec{q} = m\vec{v}}$ $\vec{J} = \Delta\vec{q} = \vec{F}_m \Delta t$

$\vec{F} = \frac{d\vec{q}}{dt} \Rightarrow \vec{F} = 0$ $\vec{q}$ = costante (teorema di conservazione della quantità di moto)

ii) $W = \int_{A\gamma}^{B} \vec{F}\, ds$ il lavoro dipende dalla traiettoria

→ effetto della forza → ENERGIA

$$\boxed{K = \frac{1}{2} m v^2}$$ energia cinetica

$W_{AB} = K_B - K_A$

Si osserva che: Relazione tra quantità di moto ed energia cinetica

$$K = \frac{|\vec{q}|^2}{2m} = \frac{m^2 v^2}{2m}$$

(G) FORZE CONSERVATIVE (*)

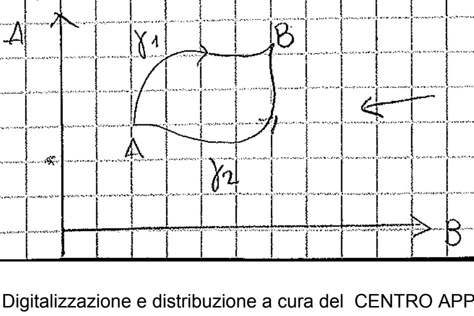
(H) GRAND. FISICA ENERGIA

FORZE CONSERVATIVE

i) CAMPO DI FORZE

{È una regione di spazio nella quale in ogni punto, potenzialmente è possibile definire una forza.}

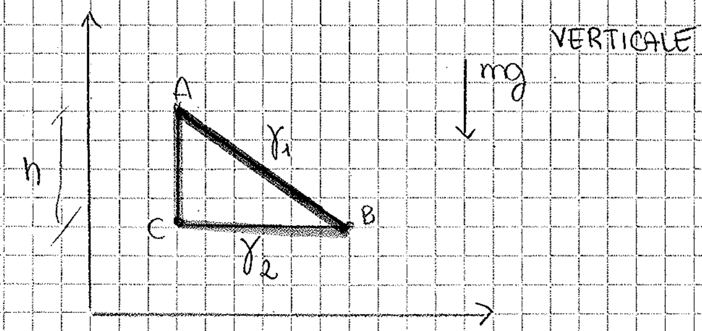
ii) Un campo di forza o una è conservativo se il lavoro che deve compiere per spostare un punto da una posizione all'altra (da A a B) non dipende dalla traiettoria: questo è vero solo per un tipo particolare di forze, quelle conservative.



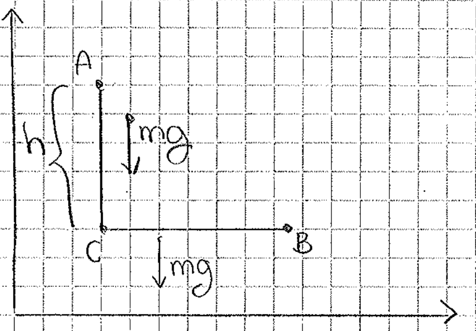
← {Le forze lungo γ_1 sono diverse dalle forze lungo γ_2.

A

2) LAVORO FORZA PESO



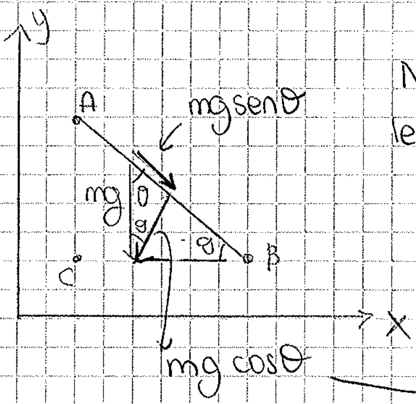
γ_2



la direzione della forza peso è indipendente dalla traiettoria dell'oggetto (sempre rivolta verso il basso)

$$W_{AB\,\gamma_2} = \underset{\text{Forza peso // spostamento}}{W_{AC}} + \underset{\text{forza peso } \perp \text{ spostamento, quindi lavoro nullo.}}{W_{CB}} = \int_A^C mg\,dy + 0 = mg\overline{AC} = mg\cdot h$$

γ_1



Non sono più in 1-D perché le direzioni sono diverse, quindi scompongo la $\vec{F}_{PESO}$

mg senθ : componente // spostamento
↑ TANGENZIALE

mg cosθ → componente $\perp$ traiettoria CENTRIPETA non dà lavoro

FATTO 2 $W_{AB\,\gamma_1} = \int_{A\,\gamma_1}^{B} m\vec{g}\,d\vec{s} =$

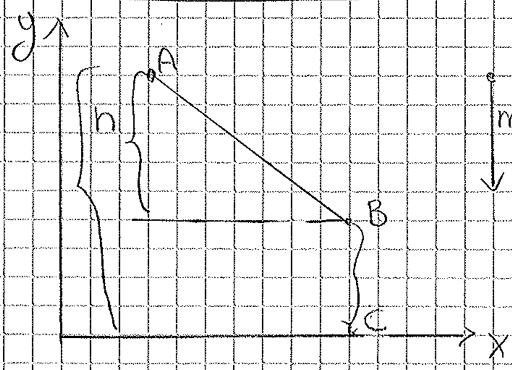
$$= \int_{A\,\gamma_1}^{B} \underbrace{mg\,\text{sen}\theta\,ds}_{F_T\cdot ds} = mg\,\text{sen}\theta\int ds = mg\,\overbrace{\text{sen}\theta\cdot AB}^{\text{ipotenusa AC}} = mgAC = mg\cdot h$$

AB ↑ S

$$Ep^B + K - (Ep^A + K) = Ep^B - Ep^A = -W_{AB}$$

c) La variazione di energia e' sempre la stessa.

SI SCEGLIE UN PUNTO IN CUI ASSEGNA $Ep = 0$.



$W_{AB} = mg \cdot h$

RIFERIMENTO B $\Rightarrow$ $Ep^B = 0$

$Ep^B - Ep^A = -W_{AB}$

$\| $

$0 \quad Ep^A = W_{AB} = mgh$ — h: QUOTA RISPETTO A RIF.

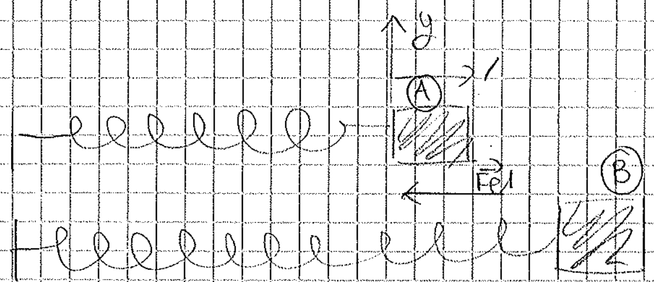
Cambio il riferimento $Ep^C = 0$. (scelta arbitraria)

$Ep^B - Ep^A = -mgh$

$mg\,y_B - mg\,y_A = mgh$

d) Es. MOLLA \ F elastica CONSERVATIVA

RIF $Ep = 0$ MOLLA A RIPOSO



$Ep^B - Ep^A = -W_{AB}$ } Perche' la Fel e' conservativa

$\|$

$0 \rightarrow$ (perche' ho scelto il SR in quel punto)

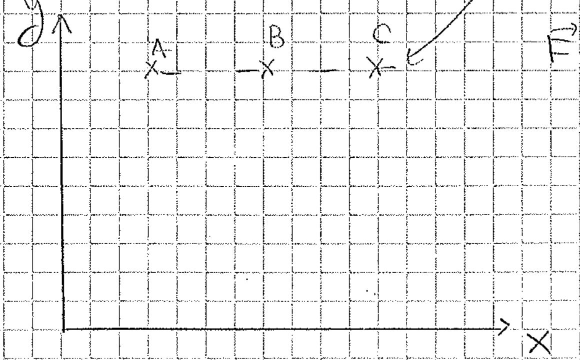
$$Ep^B = -W_{AB} = -\int F_{el}\, dx = -\int_A^B (-Kx)\, dx = \frac{1}{2} K x^2 \Big|_A^B = \frac{1}{2} K x_B^2$$

(parallela in segno opposto allo spostamento)

La componente della forza (x, y, z) ci dice come varia l'Ep nelle direzione di x, y, e z.

$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$ $\quad \vec{\nabla}$ = GRADIENTE $\int$ matematicamente

Applicazione



$\vec{F}_{PESO} = m\vec{g}$ COMPONENTI DI F

$F_y = -mg$ } Rivolta verso il basso
$F_x = 0$

$F_x = 0$

$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} = 0 \Rightarrow E_p$ costante lungo x

(6) ENERGIA

W = LAVORO = $\int \vec{F}\, d\vec{s}$

$K = \frac{1}{2} m v^2$ energia di m, m si muove

$K \geq 0$

Energia potenziale

m in un campo di forze conservativo

PROPRIETA' DI m LEGATA ALLA POSIZIONE

$\Delta E_p \stackrel{def}{=} -W_{CONSERVATIVE}$

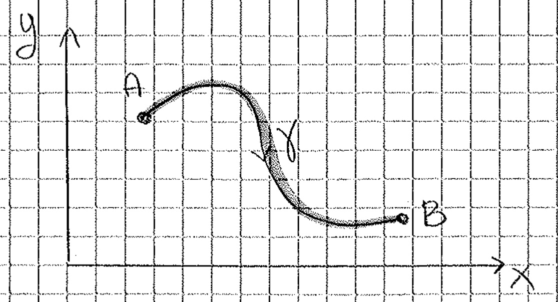
$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$

1-D $\Rightarrow F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}$

EQUILIBRIO SE $F_x = 0$ quindi $\frac{\partial E_p}{\partial x} = 0$

Quindi il sistema si trova in equilibrio quando l'energia potenziale è massima o minima.

↓ EQ. INSTABILE ↓ EQ. STABILE



$W_{AB}^{\gamma} = \Delta K = K_B - K_A$

(effetto della forza che agisce sulla traiettoria)

FORZE CONSERVATIVE

FORZE NON CONSERVATIVE

$$W_{AB}^{\gamma} = \int_{A\,\gamma}^{B} \underbrace{\vec{F}\,d\vec{s}}_{(\vec{F}_C + \vec{F}_{NC})}$$

$$W_{AB}^{\gamma} = \int_{A}^{B} \vec{F}_C\,d\vec{s} + \int_{A\,\gamma}^{B} \vec{F}_{NC}\,d\vec{s} = -\Delta E_p + W_{NC} = \Delta K$$

non c'è γ perché non dipende dalla traiettoria

W_{NC}: lavoro non conservativo

$$= -(E_p^B - E_p^A) + W_{NC} = K^B - K^A \qquad -E_p^B + E_p^A + W_{NC} = K^B - K^A$$

$$\underbrace{K^A + E_p^A}_{\text{energia meccanica della massa m}} + W_{NC} = K^B + E_p^B \longrightarrow \text{TEOREMA DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA}$$

W_{NC}: non è una proprietà della massa

$K + E_p \Rightarrow$ ENERGIA MECCANICA DELLA MASSA

$W_{NC} \Rightarrow$ ENERGIA SCAMBIATA DA m

$$E_{meccanica}^{iniz} + W_{NC} = E_{meccanica}^{finale} \quad \text{della massa m}$$

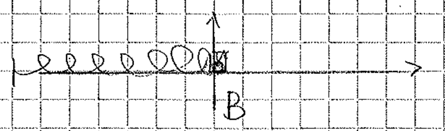
SIGNIFICATO FISICO AL CONC. DI ENERGIA

$E_{mecc}^{iniz} \neq 0$ se la usa tutta $\Rightarrow E_{mecc}^{fin} = 0$

Energia che un corpo possiede — Ha usato la sua energia per produrre lavoro

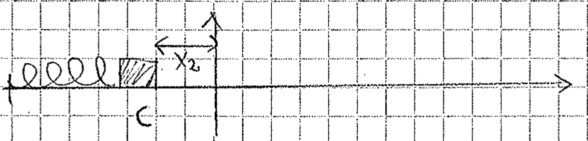
La sua energia è stata usata per generare una "forza" con cui interagisce con l'esterno. (CAPACITA' CHE IL CORPO HA PER INTERAGIRE CON L'ESTERNO)

(2)



$Ep^B = 0 \quad K^B = \frac{1}{2} m V_B^2$

(3)



$K^C = 0$

$Ep^C = \frac{1}{2} K X_2^2$

$W_{NC} \Rightarrow$ AB $\rightarrow$ $F_{ATTR} = \mu d m g$ (COSTANTE CON VERSO OPPOSTO A dx)

$W_{AB} = \underbrace{-\mu d\, m g}_{\text{forza}} \underbrace{X_1}_{\text{spazio percorso}} \Rightarrow$ lavoro dissipativo

verso opposto allo spostamento

$\Rightarrow$ AC $\Rightarrow$ stessa cosa F_{ATTR} sempre negativa.

$$W_{AC} = -\mu d\, m g (X_1 + X_2)$$

Per il teorema:

conservazione

$$AB \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2} K X_1^2}_{Ep} + \underset{K^A}{0} - \mu d\, m g X_1 = \underset{Ep^B}{0} + \underbrace{\frac{1}{2} m V_B^2}_{K^B}$$

da A a C vale lo stesso il teorema:

$$AC \Rightarrow \frac{1}{2} K X_1^2 + 0 - \mu d\, m g (X_1 + X_2) = \frac{1}{2} K X_2^2 + 0$$

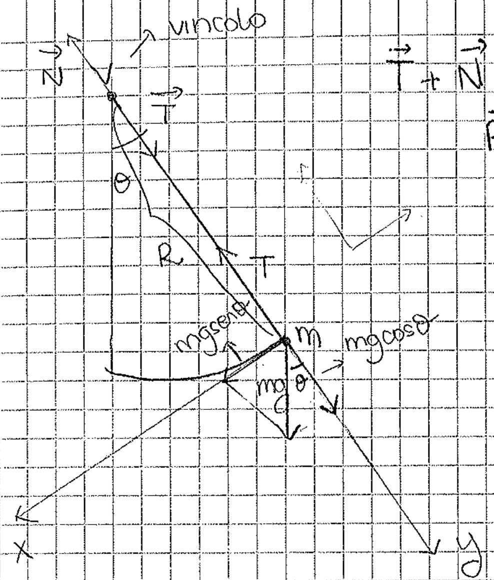
fino al punto finale

(H) VARIE

- moto del pendolo
- Potenza
- Momento angolare
- Forze centrali

i) PENDOLO

PENDOLO SEMPLICE è una fune ideale, con una massa appesa al suo estremo.



$\vec{T} + \vec{N} = 0$

$\vec{P} = m\vec{g} = mg\,sen\theta\,\bar{u}_x + mg\cos\theta\,\bar{u}_y$

$\vec{T} = T\,\bar{u}_y$

Queste forze producono delle accelerazioni:

$a_T \Rightarrow$ acc. TANGENZIALE

$a_C = \omega^2 R = \frac{V_T^2}{R}$ Traiett. circolare

$F_T = ma_T$

$mg\,sen\theta = ma_T$

$T - mg\cos\theta = ma_C$

$F_C = ma_C$

$-\cancel{m}g\,sen\theta = \cancel{m}a_T$

$-g\,sen\theta = \gamma \cdot R$

$\hookrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2}$ = Acc. ANGOLARE

$-g\,sen\theta = \frac{d^2\theta}{dt^2} R$

FORZA → RIDURRE θ DI RICHIAMO

Approssimazione per piccole oscillazioni θ piccolo $\theta \leq 15-20°$

$sen\theta \simeq \theta$

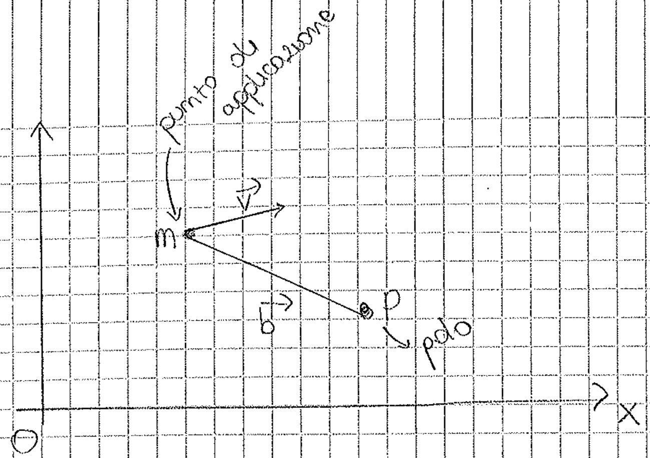
$-\frac{g}{R}\theta = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ $\qquad -\omega^2\theta = \frac{d^2\theta}{dt^2}$

MOTO ARMONICO

$\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$ $\qquad$ R = lunghezza del filo

$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$

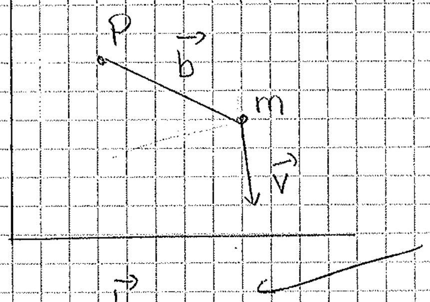
$T = mg\cos\theta + m\omega^2 R = mg\cos\theta + m\frac{V_T^2}{R}$



$$\vec L \overset{def}{=} \vec b \times m\vec v$$

momento angolare

- POLO = P PUNTO ∀
- BRACCIO ⇒ vettore che unisce il punto P alla massa m.



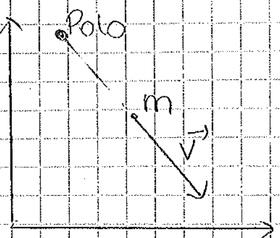
$\vec L$ entrante ⊥ lavagna

$$\vec L = \vec b \times \vec q = \vec b \wedge m\vec v$$

- $\vec L \perp \vec b$ e a $\vec v$
- VERSO MANO DESTRA

$|\vec L| = bmv \cdot sen\theta$

$|\vec L| = 0$ se $\begin{cases} b = 0 \\ v = 0 \\ \vec b \parallel \vec v \end{cases}$ ⇒ il polo appartiene alla retta su cui si trova $\vec v$.



$$|\vec L| = bmv\ sen\theta = mv \cdot \underbrace{b \cdot sen\theta}_{d}$$ → componente di $\vec b$ ⊥ a $\vec v$

Legame tra mom. angolare e momento della forza ($\neq P \equiv O$)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{M} \rightarrow \text{momento della forza} \overset{def}{=} \vec{r} \wedge \vec{F}$$

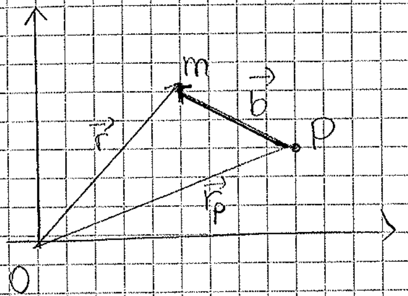
Polo $\equiv O$

iii) • Se $\vec{M} = 0$

$(\vec{F} = 0,\ \vec{F} = 0,\ \vec{r} \parallel \vec{F}) \Rightarrow \vec{L} = \text{costante}$

$\bar{L}_{in} = \bar{L}_{fin}$ — il momento angolare non cambia nel tempo

iv) • $\vec{L}$ rispetto a $P \neq O$ $(P \neq O)$



$\vec{b} = \vec{r} - \vec{r}_p$

$\bar{L}_p = \vec{b} \times m\vec{v}$

$= \vec{r} \wedge m\vec{v} - \bar{r}_p \wedge m\vec{v}$

$= \bar{L}_O - \bar{r}_p \wedge m\vec{v}$

$$\frac{d\vec{L}_p}{dt} = \frac{d\bar{L}_O}{dt} - \frac{d\bar{r}_p}{dt} \wedge m\vec{v} - \bar{r}_p \wedge m\vec{a}$$

$$= \bar{M}_O - \bar{v}_p \wedge m\vec{v} - \bar{r}_p \wedge \vec{F}$$

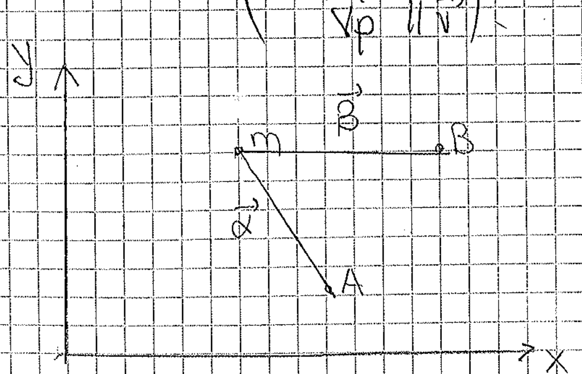
$$= (\vec{r} - \bar{r}_p) \wedge \vec{F} - \bar{v}_p \wedge m\vec{v}$$

$$= \vec{b} \wedge \vec{F} - \bar{v}_p \wedge m\vec{v}$$

$$\frac{d\bar{L}_p}{dt} = \vec{M}_p - \underbrace{\bar{v}_p \wedge m\vec{v}}_{=0} \quad \text{(legame tra momento angolare e mom della forza)}$$

$\neq \bar{M}_O$

$\left(\text{se } \bar{v}_p = 0,\ \bar{v}_p \parallel \vec{v}\right)$



$\vec{L} = \vec{\alpha} \wedge m\vec{v}$

unisce m con A

il polo e' A

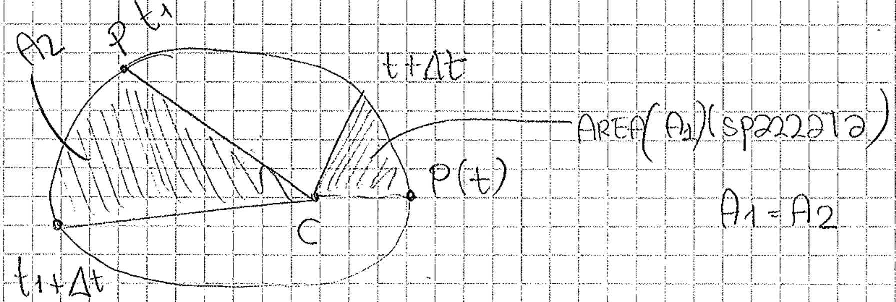
$= \bar{L}_A$

$$dA = \frac{1}{2} CP \cdot PP' = \frac{1}{2} r \cdot dr = \frac{1}{2} r \, r d\theta = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} \rightarrow \text{COSTANTE} \qquad 2° \text{ Legge di Keplero}$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{2} |\vec{L_c}|$$

{ L'area spazzata rispetto al tempo (dal vettore $\vec{r}$) è costante. }



$A_1 = A_2$?

RIEPILOGO DINAMICA

- PRINCIPI

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow F_x = ma_x \ \_ \ \_$$
$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

- DEFINIZIONI

$$\vec{q} = m\vec{v}$$
$$\vec{L}_P = \vec{b} \times m\vec{v}$$
$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

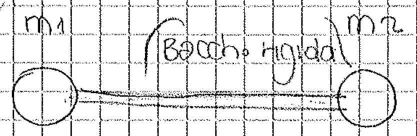
- EFFETTI FORZA
  - $\vec{F} \Rightarrow$ produce $\vec{a}$ (riguarda un istante di tempo al tempo t infinitesimo)
  - $\vec{F} \Rightarrow$ PRODUCE $\Delta\vec{v}$ la forza produce una variazione di velocità
    ↳ nel tempo Δt (tempo finito)
    Tramite l'impulso $\vec{J} = \int \vec{F} dt = \Delta\vec{q}$
  - $\vec{F} \Rightarrow$ PRODUCE VARIAZIONE $|\vec{v}|$
    quando agisce lungo una traiettoria

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 99 di 276

DINAMICA SISTEMI DI PUNTI

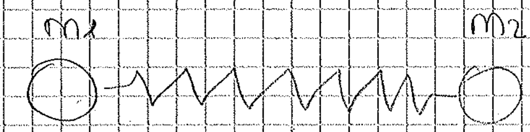
Definizione: numero N finito e discreto di masse puntiformi
il moto delle masse e' indipendente
distanza fra 2 masse non e' costante nel tempo.

$N \geq 2$ (con $N = 1$ avrei un punto)



$N = 2$, DISCRETO } MA DISTANZA TRA 1 E 2 FISSA.

NON E' UN SISTEMA, BENSI' UN CORPO RIGIDO.



SISTEMA

$N = 2$
DISCRETO
d_{12} varia nel tempo

* Per ogni punto (INDICE i per definire il punto) valgono le proprietà della dinamica e della cinematica.

massa m_i di quel punto materiale
posizione $\vec{r_i}$
velocità $\vec{v_i} = \frac{d\vec{r_i}}{dt}$
accelerazione: $\vec{a_i} = \frac{d\vec{v_i}}{dt}$

$\vec{F_i}$ APPLICATE AL PUNTO legate all' accelerazione:

$$\vec{F_i} = m\vec{a_i} = \frac{d\vec{q_i}}{dt}$$

$$\vec{q_i} = m_i \vec{v_i}$$

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

$$\vec{L}_{O_i} = \vec{r_i} \wedge m_i \vec{v_i}$$

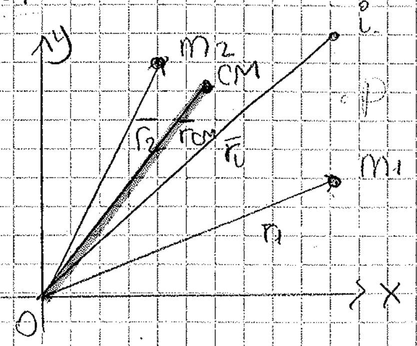
$\vec{F}_1^{\,esterna} = m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{F}_{ATTR1}$

$\vec{F}_1^{\,interna} = \vec{F}_{el12} + \vec{F}_{el13}$

2) PROPRIETA' SISTEMA

- massa $\Longrightarrow$ $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$

- posizione del sistema $\Longrightarrow$



introduciamo il centro di massa (baricentro)

$\Rightarrow$ un punto materiale (matematico) a cui associo la massa M.

La posizione è definita come la media pesata delle posizioni.

$$\left\{ \vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \right\}$$ $\longrightarrow$ il raggio vettore che descrive la posizione del centro di massa

Se $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t)$ (se la posizione varia col tempo, anche

$\vec{r}_{CM} = \vec{r}_{CM}(t)$ $\quad$ $\vec{r}_{CM}$ varia col tempo)

$\hookrightarrow$ CM percorre una traiettoria.

Per il CM, applico la dinamica del punto:

i) $\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt}$ (media delle velocità dei punti materiali)

$$= \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i}{\sum m_i}$$

ii) $\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a}_i}{\sum m_i}$

Traduzione

A) Singoli punti

m_1 ⇒ moto circolare $\quad a_T = \alpha \cdot R$

$\vec{\gamma}_1 = 0 \qquad \vec{a}_1^T = 0$

$\omega_1 =$ costante $\qquad \vec{a}_1^c = \omega^2 R = \frac{V_T^2}{R}$

m_1 ha $\vec{V_T} = \vec{R} \wedge \vec{\omega}$

$\theta_1 = \pi - \omega t \qquad \theta = \int \omega \, dt$

$\vec{q}_1 = m_1 \vec{V}_T$

$\vec{L} = \vec{R} \wedge m_1 \vec{V}_T$

$\perp$ LAVAGNA entrante

m_2 $\quad \vec{\gamma}_2 = 0$

$\omega_2 = \omega = \text{cost}$

$\theta_2 = -\omega t$

$\vec{q}_2 = m_2 \vec{V}_T^2 = -m_1 \vec{V}_T^1$ (V_T^2 ha lo stesso modulo, ma verso opposto)

$= -\vec{q}_1$

$\vec{L}_2 = \vec{R} \wedge \vec{q}_2 = \vec{L}_1$ (mantiene verso costante)

B) con il centro di massa.

$\vec{r}_{CM} = 0$

$\vec{V}_{CM} = 0$

$\vec{q}_{CM} = 0 \quad \to \quad \vec{L}_{CM} = 0$

se guardo il c. di m. non succede niente, non descrive il sistema completamente.

C) SISTEMA NEL SUO COMPLESSO.

$\vec{r}_{CM} = 0$ centro di massa nell'origine

$\vec{q} = \sum_{i=1}^{N} q_i = \vec{q}_1 + \vec{q}_2 = 0$

$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = 2\vec{L}_1 \neq \vec{L}_{CM}$

Dinamica Sistemi

$i \rightarrow$ numero della particella

$i = 1 \dots N$

$m_i, \vec{r_i}, \vec{q_i} = m_i \vec{v_i}$ POLO O $\vec{L_i} = \vec{r_i} \wedge m_i \vec{v_i}$

$\vec{F_i} = m_i \vec{a_i}$ $\vec{F} = \frac{d\vec{q_i}}{dt}$ $\vec{M_i} = \frac{d\vec{L_i}}{dt}$

$\vec{F_i} = \vec{F_i}^{ext} + \vec{F_i}^{int}$

- BARICENTRO ≡ CD MASSA
- Proprietà globali

CDM		PR. GLOBALI
M	$=$	M
$\vec{r}_{CM}$	$=$	$\dots = \vec{r}_{CM}$
$\vec{q}_{CM} = M \vec{v}_{CM}$	$=$	$\vec{q} = \sum_i \vec{q_i}$ → le due $\vec{q}$ sn uguali
$\vec{L}_{CM} = \vec{r}_{CM} \wedge \vec{q}_{CM}$	$\neq$	$\vec{L} = \sum \vec{L_i}$

I legge cardinale

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F_i}^{est} = M \vec{a}_{CM}$$ la sommatoria delle forze esterne e' $M \cdot a_{CM}$

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F_i}^{est} = \frac{d\vec{q}_{CM}}{dt}$$ → se la sommatoria è nulla $\frac{d\vec{q}}{dt} = 0$

Conservazione quantità di moto

Se $\sum \vec{F_i}^{est} = 0 \Rightarrow$

i) $\frac{d\vec{q}}{dt} = 0$ $\vec{q}$ costante $\cancel{\Rightarrow}$ $\vec{q_i} = cost$ (le singole particelle possono non essere costanti) ma la loro somma e' costante

ii) $\frac{d\vec{q}_{CM}}{dt} = 0$

Se $M =$ costante

$\vec{v}_{CM} =$ costante

Se non esistono forze esterne, il baricentro si muove con velocità costante $\Rightarrow$ I° principio della dinamica.

$\bar{b}_i = \bar{r}_i - \bar{r}_p$

$\underbrace{\frac{d\bar{r}_i}{dt}}_{\bar{v}_i} \wedge m_i \bar{v}_i - \underbrace{\frac{d\bar{r}_p}{dt}}_{\bar{v}_p} \wedge m_i \bar{v}_i$

I pezzo) $\frac{d\bar{b}_i}{dt} \wedge m_i \bar{v}_i = \frac{d}{dt}(\bar{r}_i - \bar{r}_p) \wedge m_i \bar{v}_i$

$= \underbrace{\bar{v}_i \wedge m_i \bar{v}_i}_{=0} - \underbrace{\bar{v}_p}_{\text{velocità del polo.}} \wedge m_i \bar{v}_i$

i due vettori sono paralleli

II pezzo) $\underbrace{\bar{b}_i \wedge m_i \bar{a}_i}_{} =) \; \bar{b}_i \wedge \vec{F}_i = \bar{b}_i \wedge \vec{F}_i^{est} + \bar{b}_i \wedge \vec{F}_i^{int}$

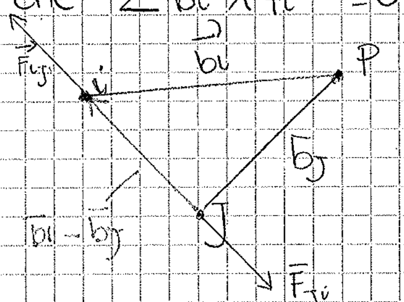
$\frac{d\vec{L}}{dt} = \Sigma(-\vec{v}_p \wedge m_i \bar{v}_i) + \Sigma \bar{b}_i \wedge \vec{F}_i^{est} + \underbrace{\Sigma \bar{b}_i \wedge \vec{F}^{int}}$

$= -\vec{v}_p \wedge \Sigma m_i \bar{v}_i + \Sigma M_{i\,(\text{POLO } P)}^{est} + 0^*$

↳ DIMOSTRARLO

$\frac{d\vec{L}}{dt} = -\vec{v}_p \wedge \vec{q}_{CM} + \vec{M}_{est\,TOTALE}$ II legge cardinale

Dimostraz. che $\Sigma \vec{b}_i \wedge \vec{F}_i^{int} = 0$



$\bar{b}_i - \bar{b}_j \,//\, \vec{F}_{ij}$

MOMENTO DELLE 2 FORZE

~~$\vec{F}_{ij} \wedge \vec{b}_i$~~

$\bar{b}_i \wedge \vec{F}_{ij} + \vec{b}_j \wedge \underbrace{\vec{F}_{ji}}_{= -\vec{F}_{ij}} = \underbrace{(\vec{b}_i - \vec{b}_j)}_{} \wedge \underbrace{\vec{F}_{ij}}_{}$ //

Dato che sono paralleli, il loro prodotto è nullo.

Teorema conservazione momento angolare

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{TOT}^{est} - \bar{v}_p \wedge \bar{q}_{CM}$

I condiz.

i) $\bar{v}_p \wedge \bar{q}_{CM} = 0$

$\Rightarrow \bar{v}_p = 0$ POLO FISSO

$\bar{v}_{CM} = 0$ (con polo mobile)

$\bar{v}_p \parallel \bar{v}_{CM}$

ci dà l'idea di come e dove scegliere il polo

$\overline{M'} = \overline{M}$ POLO $\equiv$ CM

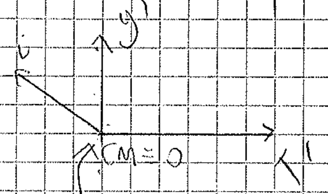
$\overline{q}_{CM} = \overline{q}$

$\vec{q}\,' = 0$

IN S'R' CM e' FERMO

$\vec{L}' =$

POLO $\equiv$ CM



$\vec{L} = \sum \vec{r_i}' \wedge m_i \vec{v_i}$

POLO $\equiv$ CM IN SR

$\vec{L}' = \sum \vec{r_i}' \wedge m_i \vec{v_i}'$ (GISP)

S'R'

$\vec{L}' = \vec{L}$

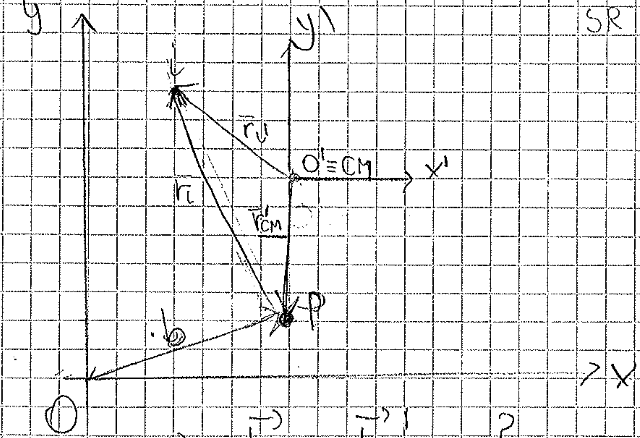
OSSERVAZ.

POLO $\neq$ CM

$\vec{L} \neq \vec{L}'$

$\overline{M} \neq \overline{M'}$

(*)



1) $\vec{L}$ $\vec{L}'$?

2) $P \equiv O$?

Rispetto a P

$= \sum \vec{r_i}' \wedge m_i \vec{v_i}' + \sum \vec{r_i}' \wedge m_i \vec{v}_{CM} + \sum \vec{r}_{CM} \wedge m_i \vec{v_i}' + \sum \vec{r}_{CM} \wedge m_i \vec{v}_{CM}$

Porto fuori quello che non dipende dall'indice i

è 0 perché siamo nel sistema del centro di massa.

$= \sum \vec{r_i}' \wedge m_i \vec{v_i}' + \sum (m_i \vec{r_i}') \wedge \vec{v}_{CM} + \vec{r}_{CM} \wedge \sum m_i \vec{v_i}' +$

$\vec{r}_{CM} \wedge \sum m_i \vec{v}_{CM} =$

SR ≡ CDM
$r_{CM} = 0$
$v_{CM} = 0$

$= \vec{L}'^{CM} + \vec{L}_{O,CM}$

momento angolare totale in SR' rispetto al CM.

momento angolare del CM rispetto al polo O in SR.

Quindi:

$$\boxed{\vec{L}_O = \vec{L}_{O,CM} + \vec{L}'^{CM}}$$ 1° Teorema di Konig

Ricordo che $\vec{q} = \vec{q}^{CM}$

II Teorema di König

Relazione tra energia cinetica totale ed energia cinetica del centro di massa.

$v_i = v_i' + v_{CM}$

$K = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i (v_i' + v_{CM})^2$

K: en. cinetica totale

$= \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2 +$

$\sum m_i v_i' v_{CM}$

$\left(\frac{1}{2} m_i 2 v_i' v_{CM}\right)$

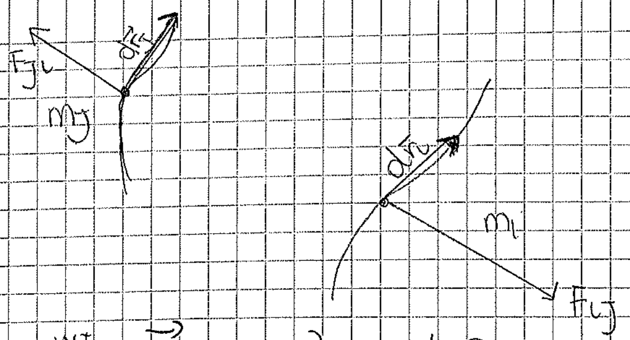
$= K' + K_{CM} + 0$

K': K nel SR'

$K_{CM} = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 = K$ del CM

Quindi:

$$\boxed{K = K_{CM} + K'}$$ 2° teorema di Konig



$$dW_{ij}^{int} = \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i + \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_j$$

$$dW_{ij}^{INT} = \vec{F}_{ij}\, d\vec{r}_i - \vec{F}_{ij}\, d\vec{r}_j = \vec{F}_{ij} \cdot (d\vec{r}_i - d\vec{r}_j)$$

$\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$

$$dW_{ij}^{INT} = \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij} \neq 0$$

$\Downarrow$ SPOST. RELATIVO TRA i e j

Caso particolare

$$d\vec{r}_{ij} = 0$$

SISTEMA RIGIDO $\Rightarrow$ DISTANZA FRA PART. COSTANTE

$$W^{INT} = \sum W_{ij}^{INT} = 0$$

Conclusioni

da cosa è definita una particella?

$\vec{q}$	$\vec{L}$
$\vec{R} = \sum \vec{F}_i^{EXT}$	$\vec{M} = \sum \vec{M}_i^{EXT}$
$\vec{R} = \frac{d\vec{q}}{dt}$	$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ (se il polo è fisso)

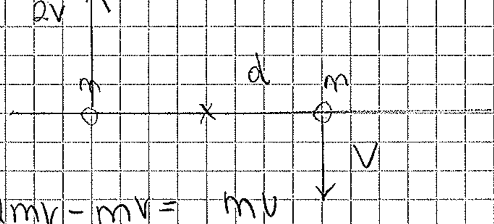
i) $\vec{q}$ ed $\vec{L}$ sono indipendenti

per un punto fissato $\vec{q}_i$ $\exists!$ $\vec{L}_i$ rispetto a un polo fissato

SISTEMA

fissato $\vec{q}$ e il polo $\exists$ molti $\vec{L}$

ES:



$$|\vec{q}| = 2mv - mv = mv$$

$$|\vec{L}| = 3m \cdot v \cdot d$$

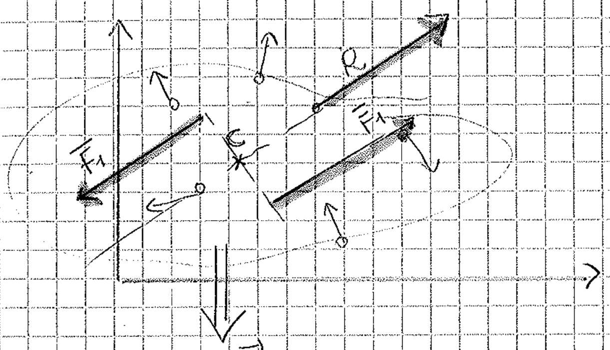
$\bar{M} = \bar{b} \wedge \bar{F}_1$

Caso Completo

Ho tante $\vec{F_i}$ in tutte le direzioni, ho tanti $\bar{M}$ dipendenti dal polo scelto

$$\bar{M}_O = \bar{M}_Q + \bar{r}_P \wedge \vec{R}$$

Teorema ⇒ Qualsiasi sistema di forze equivale a una R(isultante) e una coppia purché il centro della coppia stia sulla retta di $\vec{R}$



$\vec{R}$ NON BASTA

Ricavo C

↓

e le due forze $\bar{F}_1$

$\vec{R}$ = traslazioni

MOM di $\vec{R} = 0$ Rispetto a C

COPPIA ⇒ RISULTANTE NULLA

↳ $\bar{M}_C \neq 0$ ⇒ Opera sul $\vec{L}$

⇒ ROTAZIONI

$\vec{F}_{am} = m\vec{G}_M$

$\vec{G}_m =$ campo generato da m

$= -\gamma \frac{m}{r^2} \bar{u}_r$

r va da m a M

$\vec{F}_{aM} = M\vec{G}_m$

$\vec{G}_M \neq \vec{G}_m$

$\vec{F}_M = -\vec{F}_m$ (azione e reazione)

Energia potenziale

forzoi conservative: $\underline{W = -\Delta E_p}$

$\vec{F} = -\nabla \vec{E}_p$

$E_p = -\gamma \frac{mM}{r}$ (se derivo trovo la forza)

- POTENZIALE

(Scalare che definisce l'energia potenziale in ogni punto dello spazio indipendente dalla massa m.)

$\boxed{V_M = -\gamma \frac{M}{r}}$ $\vec{G}_M = -\nabla V_M$

Campo elettrostatico

$\vec{F}_{COULOMB} =$ INTERAZIONE TRA DUE CARICHE ELETTRICHE

$$\boxed{\vec{F}_{COULOMB} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq'}{r^2} \cdot \bar{u}_r}$$

CENTRALE

Conservativo

$\vec{L} =$ cost

$|\vec{L}| = mr^2 \frac{d\theta}{dt}$

MOTO PIANO

Nonostante la stella sia esplosa, io vedo comunque la luce della stella. (campo, onda generata molti milioni di anni fa).

NEL CAMPO GRAVITAZIONALE INVECE:

$$\vec{G} = \vec{G}(x, y, z)$$

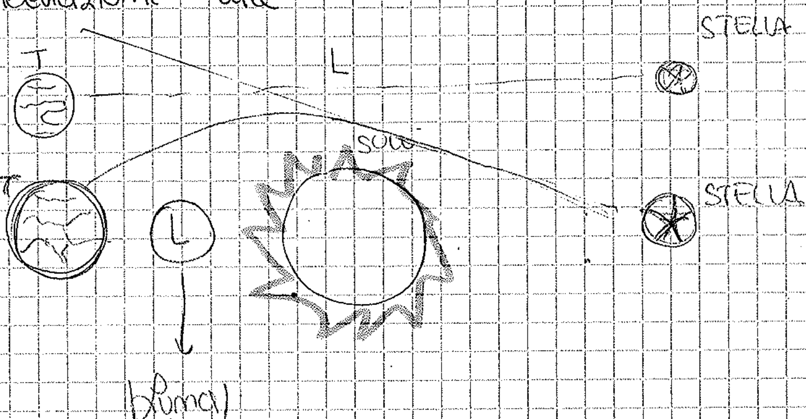
Possono essere onde gravitazionali? BOH.

Nessuno le ha viste.

CURIOSITA'?

- Evidenza sperim. di $\vec{G}$

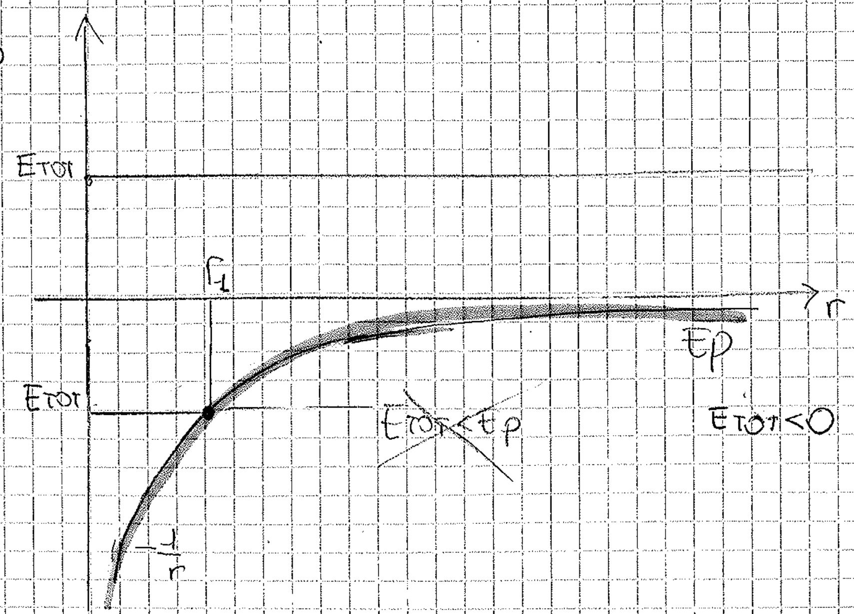
Deviazione luce



② ENERGIA $m\ m\ \vec{G}$

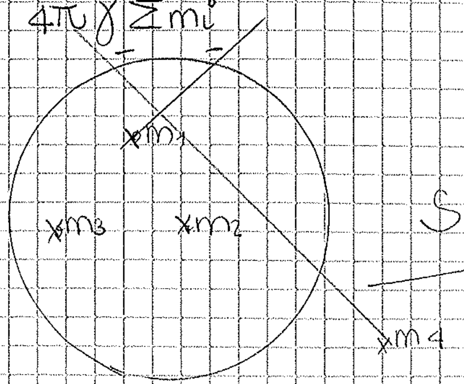
$E_{TOT} = K + E_p$ — costante se $W_{NC} = 0$

$K \geq 0 \Rightarrow E_{TOT} > E_p$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 121 di 276

$\phi = 4\pi\gamma \sum m_i$



m_1 : verso uscente sempre negativo

$\phi = 4\pi\gamma\,(m_1 + m_2 + m_3)$

è nulla

il contributo di m_4 è zero

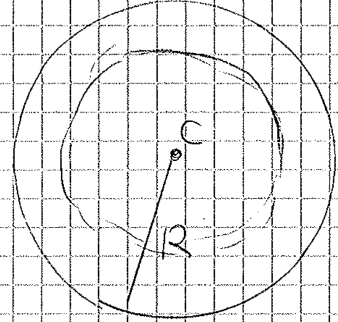
$\phi_E = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$

ESEMPIO :

M = sfera di raggio R

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$ VOLUME

$\rho = \frac{M}{V} \Rightarrow$ densità



a) $S \Rightarrow$

sup. chiusa sfera centro in C

$r < R$

$\phi = 4\pi\gamma\, m_{int} = 4\pi\gamma\,(\rho \cdot V_s)$

$= 4\pi\gamma \underbrace{\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}}_{\rho} \underbrace{\frac{4}{3}\pi r^3}_{V_s} = 4\pi\gamma M \frac{r^3}{R^3}$

ma! $\Rightarrow \phi = G \cdot S$ (definiz)

$4\pi\gamma M \frac{r^3}{R^3} = G \cdot 4\pi r^2$

$G = \gamma \frac{M}{R^3} r$

b) $S \Rightarrow r > R$

$$a_r = -\frac{L^2}{m^2 r^2} \cdot \frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) - r\left(\frac{L}{mr^2}\right)^2$$ formula di Binet

$$a_r = -\frac{L^2}{m^2r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{L^2}{m^2r^3} = \frac{-L^2}{m^2r^2}\left\{\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right\}$$

- EQ. DELLA DINAMICA

$$\bar{F}_{G,m} = m\bar{a}_m \qquad \bar{F}_{GM} = -\bar{F}_{Gm}$$

$$\bar{F}_{G,M} = M\bar{a}_M$$

$$\bar{a}_m - \bar{a}_M = \frac{\bar{F}_{G,m}}{m} - \frac{\bar{F}_{G,M}}{M} = \frac{\bar{F}_{G,m}}{m} + \frac{\bar{F}_{G,m}}{M} = \bar{F}_{Gm}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)$$

$$\bar{a}_{RELATIVA} = \bar{a}_m - \bar{a}_M$$

$$= \bar{F}_{G,m}\underbrace{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)}_{1/\mu \,=\, \text{massa ridotta}} \qquad \mu = \frac{mM}{m+M}$$

TRAIETTORIA

$$\boxed{\bar{F}_{G,m} = \mu\vec{a}}$$

COORD. POLARI

$$-\gamma\frac{mM}{r^2}\bar{u}_r = \mu \cdot a_r \bar{u}_r$$

$$-\gamma\frac{mM}{r^2} = \mu\left[-\frac{L^2}{\mu^2 r^2} \cdot \left\{\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right\}\right]$$

$$\gamma mM = \frac{L^2}{\mu} \cdot \left\{\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right\}$$ EQ. DIFFERENZIALE di $r = r(\theta)$

traiettoria perché mi lega r con θ. (posizione con angolo)

SOLUZIONE:

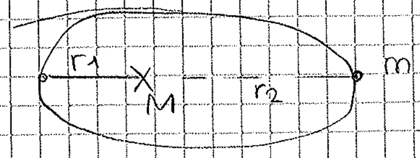
$$\frac{1}{r} = K + A\cos(\theta + \varphi)$$

$A, \varphi \Rightarrow$ CONDIZ. INIZIALI

SOSTIT.

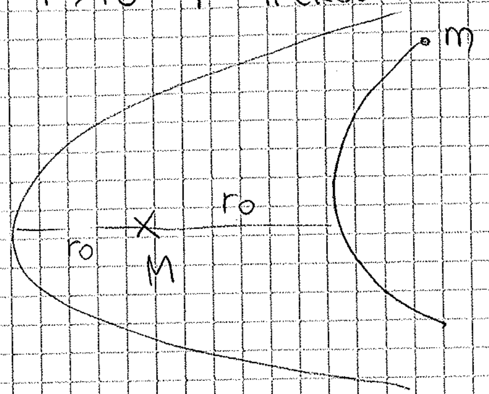
$$\gamma mM = \frac{L^2}{\mu}\left\{-A\cos(\theta+\varphi) + K + A\cos(\theta+\varphi)\right\}$$

$r_1 < r < r_2 \Rightarrow$ ELLISSE



$E_{tot} > 0$

$r > r_0 \Rightarrow$ IPERBOLE



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 127 di 276

$$\vec{b} = \vec{r_i}$$

$$\vec{L}_O = \sum \vec{r_i} \wedge m_i \vec{v_i} = \sum m_i \vec{r_i} \wedge \vec{v_i}$$

$$= \sum m_i \vec{r_i} \wedge (\omega \wedge \vec{r_i})$$

$$= \underbrace{\sum (m_i r_i^2)} \cdot \vec{\omega}$$

$$\left(\sum m_i r_i^2\right) \cdot \vec{\omega}$$

$\Rightarrow$ I descrive le rotazioni attorno al POLO

L è legato al momento della forza.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

- $\vec{R} \neq 0 \Rightarrow$ V_{CM} non è costante
- se $\vec{M} \neq 0 \Rightarrow$ la rotazione non è costante

$\vec{\omega} \neq$ costante.

URTI

Sistemi a 2 particelle

Sempre (se non ci sono vincoli) $\Rightarrow$ $\vec{P}$ si conserva

Esistono:

i) URTO ELASTICO

Oltre a conservarsi $\vec{P}$, si conserva anche l'energia cinetica

K = costante

ii) URTO COMPLETAMENTE ANELASTICO (solo q.d.m)

da m_1 a m_2 $\Rightarrow$ $(m_1 + m_2)$

- ESERCIZIO 1

$m_1 = 500$ gr $\quad m_2 = 300$ g $\rightarrow$ ferma

$V_1 = 5$ m/s $\rightarrow$ EST (direzione)

Tra le due particelle avviene un urto elastico:

m_1 deviata di $30°$ verso N

- trovare V_2 ?

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 129 di 276

ESERCIZIO 2

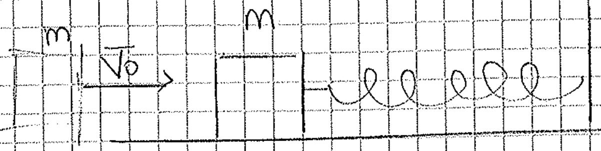
$m = 40\,g$ collegata ad una molla

$K = 10\ N/m$ su piano orizz.

$\mu d = 0.1$ urtata da massa identica

$V_{iniz} = 8\ m/s$ URTO ANELASTICO.

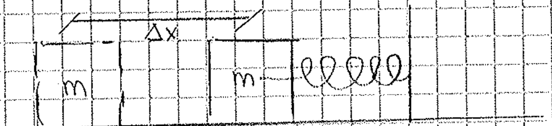
max compress molla. Dove finisce l'energia? (1-D)



$t_0 = 0^-$ ⇒ IST. PRIMA URTO

$t_1 = 0^+$ ⇒ IST. DOPO URTO } Tempo infinitesimo

$t_2 = ?$ → la molla avrà raggiunto la max compressione.



MAX COMPRESSIONE → Vel nulla

$t_0 \rightarrow t_1$ ⇒ URTO (NO VINCOLI)

in un t infinitesimo la faatto non influisce

$$\Rightarrow \quad \vec{P} = \vec{P'}$$

$$mV_0 = (m+m)V_1$$

↓ ANELASTICO

$t_1 \rightarrow t_2$ ⇒ dopo l'urto applico la cons. dell'energia

$$K + E_p + W_{NC} = K' + E_p'$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}(m+m)V_1^2 + 0 - \underbrace{\mu d(m+m)g \cdot \Delta x}_{F_a} = 0 + \frac{1}{2}K(\Delta x)^2}_{\text{Trovo } \Delta x}$$

t_0 (prima dell'urto) ⇒ $\frac{1}{2}mV_0^2$

t_1 (urto) ⇒ $\frac{1}{2}(m+m)V_1^2$

$\Delta E_{URTO} = \Delta K = \underbrace{\frac{1}{2}(2m)V_1^2 - \frac{1}{2}mV_0^2}_{\text{energia dissipata}}$

↓ energia dissipata

ESEMPI

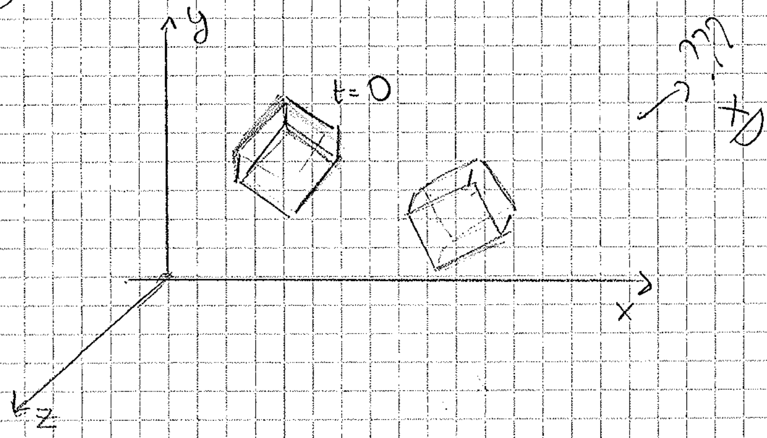
i) Punto materiale

* 3 COORDINATE SPAZIALI
* 3 GRADI DI LIBERTA'

ii) SISTEMA n. PARTICELLE

* 3 coordinate per ogni particella
* 3 N GRADI LIBERTA'

iii) CORPO RIGIDO



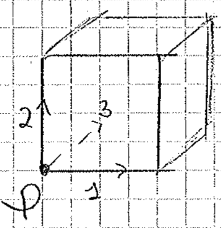
Informazioni sul corpo:

- Coordinate baricentro = posizione
- Orientamento => 3 assi $\perp$ tra loro

↓

Orientazione

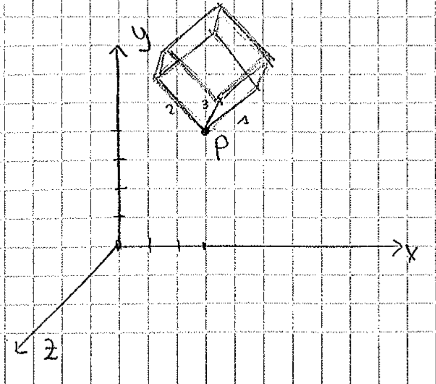
ESEMPIO:



① CM => $x = 3$, $y = 4$, $z = 0$ } posizione del baricentro

② Assi:

Ora posso definire il cubo e disegnarlo.



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 133 di 276

04/05/2011 Corpo rigido

(A) Def

(B) 6 GRADI DI LIBERTA'

$\vec{r}_{CM}(t)$ ⇒ 3 coordinate, 3 gradi di libertà

3 assi $\perp$ tra loro

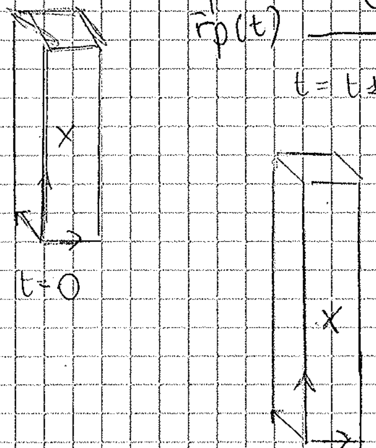
ORIENTAMENTO CORPO RIGIDO

(1) MOTO 1 ⇒ r è in funzione del tempo

$\vec{r}_{CM}(t)$ ⇒ TRASLAZIONE DEL CORPO

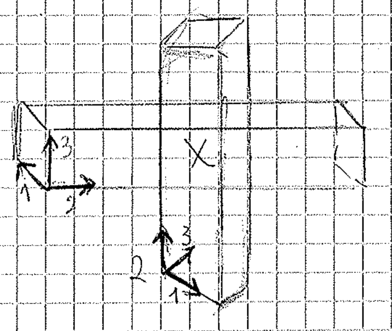
$\uparrow$

$\vec{r}_p(t) \xrightarrow{\text{Or. assi costante}} \forall$ per corpo



Orientamento degli assi è costante

(2) MOTO 2 ⇒ orientamento funz. del tempo



→ Rotazione:

la posizione del centro di massa non è cambiata, ma l'orienta degli assi sì.

$\vec{r}_p \neq \vec{r}_p(t)$ le coordinate del punto non devono essere funzione del tempo

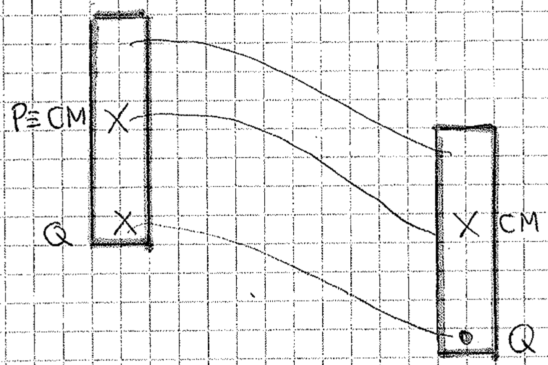
C) MOTI CORPO RIGIDO

1) Traslazione

Punto P ∀ ⟹ P ≡ CM

$\bar{r}_p(t)$ ⟹ PERCORRE UNA CERTA TRAIETTORIA

Si ha PURA TRASLAZIONE SE ∀ ALTRO PUNTO PERCORRE TRAIETTORIA PARALLELA A QUELLA DI P, CON LA STESSA VELOCITA'!
Se la velocita' fosse diversa, vuol dire che la distanza tra 2 punti e' diversa

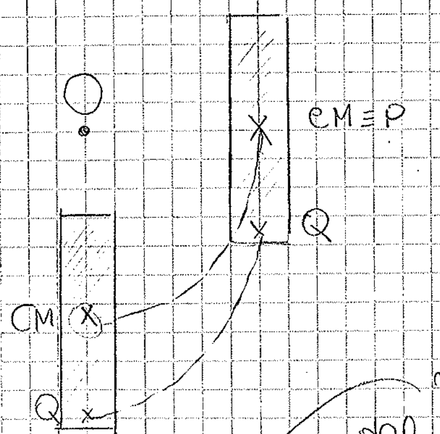


la traslazione non e' detto che sia un moto rettilineo!

$\bar{V}_P = \bar{V}_Q$

$\bar{r}_p(t)$
$\bar{V}_p(t)$
$\bar{a}_p(t)$

hanno le stesse dipendenze dal tempo



Questo moto "potrebbe" essere una pura traslazione.
(il suo orientamento rimane costante)

Tutto il moto e' descritto dal moto del centro di massa quindi, dal punto di vista delle traslazioni, il corpo rigido e' uguale ad punto

CORPO RIGIDO = PUNTO

EQ. DINAMICA

$$\bar{R} = M\bar{a}_{CM}$$

$\vec{V}_Q^{\,Tang} = \vec{\omega}_Q \wedge \vec{R}_Q \neq \vec{V}_P^{\,Tang}$ (perché è diversa la velocità descritta)

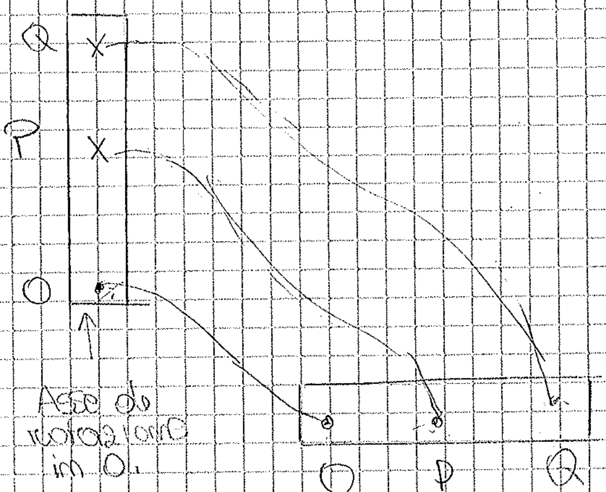
$\left\{ \begin{array}{l} \vec{V}_S^{\,TANG} = 0 \\ S \in \text{asse rotazione} \end{array} \right.$

(3) Roto - Traslazione

Combinazione dei due moti

ASSE ROTAZ. IN O

⊥ LAVAGNA



PUNTO O $\Rightarrow$ $\vec{V}_O^{\,TR} = \vec{V}_O$

$\vec{V}_O^{\,TANG} = 0$ (perché distanza = 0)

dal punto di vista della traslaz. tutti i punti hanno la stessa vel.

$\vec{V}_O = \vec{V}_O$

il punto P: $\vec{V}_P^{\,TR} = \vec{V}_O$

$\vec{V}_P^{\,TANG} = \vec{\omega} \wedge \vec{OP}$ → distanza PUNTO P - ASSE

la vel tangenziale dipende dalla distanza del pto dall'asse

$\vec{V}_P = \vec{V}_O + \vec{\omega} \wedge \vec{OP}$ $\quad V^{TR} + V^{TANG}$ = VELOCITÀ DEL PUNTO

PUNTO Q $\quad \vec{V}_Q^{\,TR} = \vec{V}_O$

$\vec{V}_Q^{\,TANG} = \vec{\omega} \wedge \vec{OQ}$

punto rispetto a cui faccio la rotazione

$\underbrace{\vec{V}_Q = \vec{V}_O}_{\text{traslazione}} + \underbrace{\vec{\omega} \wedge \vec{OQ}}_{\text{rotazione}}$ → ROT ATT. AD O

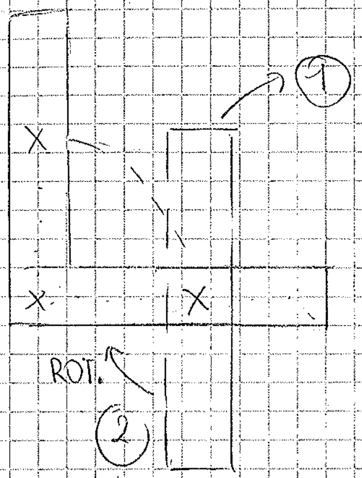
TR DI O

VELOCITÀ RELATIVE

$\vec{V}_Q - \vec{V}_P = \vec{\omega} \wedge \vec{OQ} - \vec{\omega} \wedge \vec{OP}$

$\vec{V}_Q = \vec{V}_P + \vec{\omega} \wedge (\vec{OQ} - \vec{OP}) = \underbrace{\vec{V}_P}_{\text{TRASL. in } P} + \underbrace{\vec{\omega} \wedge \vec{PQ}}_{\text{rotazione}}$ → rot att a P

$$\vec{V}_P = \vec{V}^{TR} + \vec{\omega} \wedge \vec{d}$$



Eseguo prima la traslazione, poi la rotazione, ed impongo che avvengano nello stesso tempo.

CONCLUSIONE 2

MOTO ROTO-TRASL EQUIVALE ALLA SOMMA DI ROTAZIONE PURA E TRASLAZIONE PURA NELLO STESSO TEMPO.

D) QUANTITA' DI MOTO

$$\vec{P} = M \cdot \bar{V}_{CM}$$

ASSE DI ROTAZIONE PER IL C.M

$$\vec{P} = M \cdot \bar{V}^{TR}$$

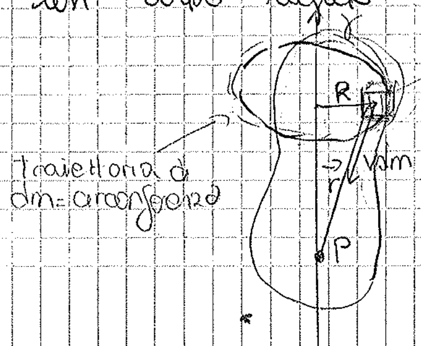
$$\bar{R} = \frac{d\vec{P}}{dt} = M\,\bar{a}_{CM}$$

E) MOMENTO ANGOLARE

$$\vec{L}_{PUNTO} = \vec{r} \wedge \vec{p}$$

CORPO RIGIDO = INSIEME DI PUNTI dm

Calcoliamo il mom. angolare di una massa dm di un corpo rigido



γ = ASSE ROTAZIONE

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 141 di 276

$|d\vec{L}_\gamma| = \omega \cdot R^2 \cdot dm$ contributo della massa infinitesimale alla direz. // rispetto all'asse

$|\vec{L}_\gamma| = \int \omega R^2 dm = \omega \cdot \underbrace{\int R^2 dm}_{I}$ $|\vec{L}_\gamma| = \omega \cdot I$

I : momento di inerzia

$I > 0$ (sempre)

Quanto vale $d\vec{L}_\perp$?

$|d\vec{L}_\perp| = r \cdot v \, dm \, \text{sen}\theta$

$= \omega \cdot r \cdot R \cdot dm \cdot \text{sen}\theta$ $(v = \omega \cdot R)$

$|\vec{L}_\perp| = \omega \cdot \underbrace{\int r \cdot R \, \text{sen}\theta \, dm}$ sono variabili con la posizione

potrà essere: $= 0, < 0, > 0$

in base alla posizione.

Quindi il momento angolare avrà:

- $L_\gamma = I \cdot \omega \Rightarrow // \text{ a } \gamma$. (mai non nullo)

$L_\gamma \neq 0$ se $\omega \neq 0$

- $L_\perp = \omega \int r \cdot R \cdot \text{sen}\theta \cdot dm \Rightarrow \perp a \gamma$.

× Se $L_\perp \neq 0 \Rightarrow$ MOTO DI PRECESSIONE

× Se $L_\perp = 0 \;\; \forall \omega \Rightarrow$ MOTO SENZA PRECESSIONE

SENZA PRECESSIONE

$\vec{L} = L_\gamma \bar{u}_\gamma = I \omega \cdot \bar{u}_\gamma$

versore lungo γ

ω è un vettore $\perp$ al piano della circonferenza e $// \gamma$

$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$

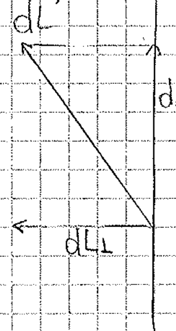
DIREZIONE: $// \text{ a } \vec{\gamma}$

DIREZIONE COSTANTE NEL TEMPO se γ FISSO

CON PRECESSIONE

$$\vec{L} = \underbrace{I\vec{\omega}}_{L_\gamma} + \underbrace{\vec{L}_\perp}_{\perp\, a\, \gamma}$$

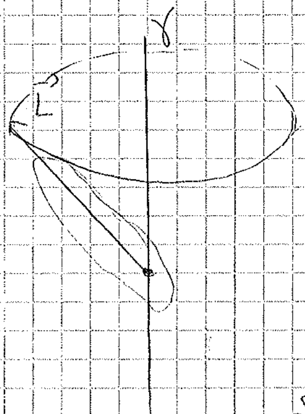
$\vec{L}$ non è // a γ.



dL_γ rimane sempre lo stesso, $dL_\perp$ ruota.

⇓

$\vec{L}$ è un vettore che ruota intorno a γ.



$\vec{L}$ ruota insieme al corpo

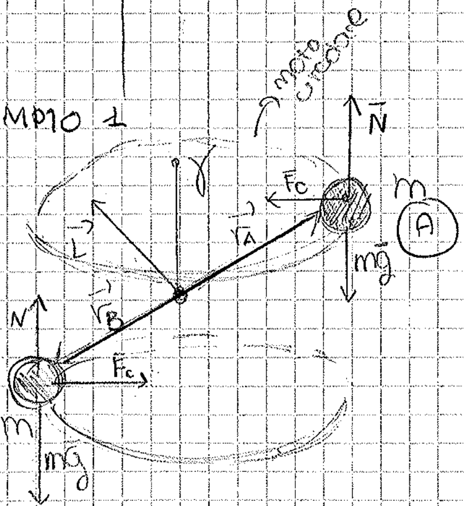
DIREZIONE DI $\vec{L}$ funzione del tempo

Se $\vec{\omega}$ costante

$\hookrightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} \neq 0 \Rightarrow \vec{M} \neq 0$

esiste un mom delle forze

ESEMPIO 1



$\vec{M} = ?$

$M = \frac{d\vec{L}}{dt}$

$\vec{L} = I\vec{\omega} + \vec{L}_\perp$

PRECESSIONE

$\vec{L}$ direzione non costante

$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \neq 0$

A $\quad m\vec{g} \Rightarrow$ MOTO CIRCOLARE UNIFORME

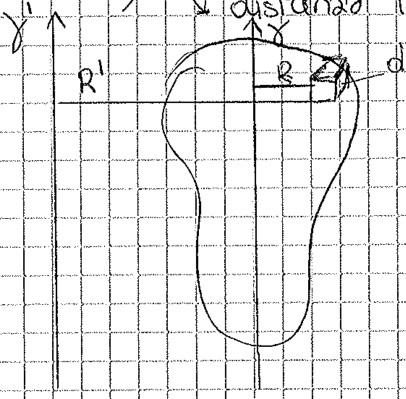
acc. centripeta $\begin{cases} \bar{a}_c = \omega^2 R \\ \hookrightarrow \vec{F_c} = m \cdot \vec{a_c} \end{cases}$

$\downarrow$ diretta verso il centro di curvatura

D) MOMENTO DI INERZIA I

$I \stackrel{def}{=} \int R^2 \, dm$

R → distanza tra dm e asse di rotazione



PROPRIETÀ:

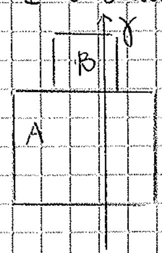
i) <u>I dipende dall'asse di rotazione</u>

$I_\gamma \neq I_{\gamma'}$

i momenti di inerzia sono diversi se cambio l'asse di rotazione

ii) $\underline{I \geq 0}$

iii) I è additivo



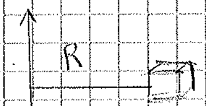
$\underline{I_{A+B} = I_A + I_B}$

iv) Quando I cresce?

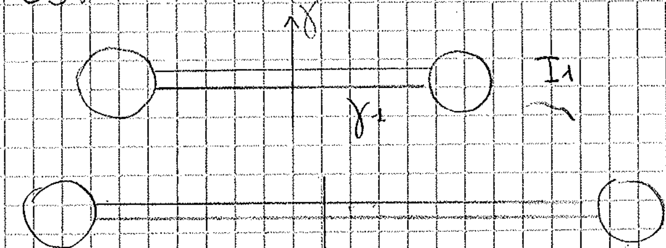
I cresce quanto più aumentano le R delle varie masse

⇒ Allontanando dm dall'asse

⇒ I cresce



ES:



$\underline{I_2 > I_1}$

SIGNIFICATO FISICO

$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ se I = cost NO PRECESSIONE $\vec{M} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt}$

$\vec{M} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\alpha}$

$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ ACC. ANGOL.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 147 di 276

$$= \rho 2\pi h \int_0^R r^3 dr = 2\pi \rho h \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} \cdot R^2 \underbrace{(\rho \underbrace{\pi R^2 \cdot h}_{V})}_{M}$$

$\rho \cdot V = M$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} M R^2$$

(*) I calcolato rispetto all'asse di rotazione γ. (*)

Se conosco I rispetto a γ; posso trovare I rispetto a γ'?

SÌ, MA SOLO IN UN CASO PARTICOLARE:

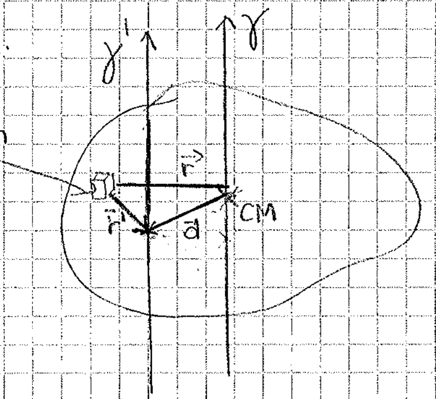
Teorema di Huyghens - Steiner

Se γ asse passa per il centro di massa e γ' asse parallelo a γ. } Condizioni necessarie per la validità del teorema.

Allora $\boxed{I_{\gamma'} = I_\gamma + M d^2}$

d: distanza tra γ e γ'

DIMOSTRAZ.



// (in 3-D)

γ coincide con l'asse z (stessa direzione)

$\vec{r}$: distanza tra dm e γ

$\vec{r'}$: distanza tra dm e γ'

$\vec{d}$: distanza $\gamma - \gamma'$

γ' e' "sopraelevato rispetto γ" in 3-D

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{d}$$

$$\vec{r}' = x'\vec{i} + y'\vec{j}$$

$$\begin{cases} \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} \\ \vec{d} = d_x\vec{i} + d_y\vec{j} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x + d_x \\ y' = y + d_y \end{cases}$$

$$I' = \int r'^2 \, dm$$

$$= \int (x'^2 + y'^2) \, dm$$

$$= \int [(x + d_x)^2 + (y + d_y)^2] \, dm$$

$$= \int \overbrace{(x^2 + y^2)}^{r^2} dm$$

$$+ \int \overbrace{(d_x^2 + d_y^2)}^{d^2} dm$$

$$+ \int (2x d_x + 2y d_y) \, dm$$

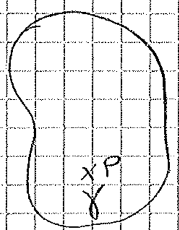
(F) Dinamica

$\Rightarrow$ Scelta di γ (arbitraria)

(1) • Se ho un punto fermo nel corpo rigido

P FISSO $\Rightarrow$ scelgo γ passante per P

POLO $\equiv$ P



i) ROTAZIONE PURA

$\vec{V}_P = 0 \Rightarrow \vec{V}_{TR} + \vec{\omega} \wedge \vec{R} = 0$

$\vec{R} = 0 \quad (P \in \gamma)$

$\Rightarrow V_{TR} = 0$

Nessuna veloc. di traslazione

ii) γ FISSO

(2) γ per il C.M.

CM $\Rightarrow \vec{V}_{CM} = \vec{V}_{TR} + \vec{\omega} \wedge \vec{R}$

$\vec{R} = 0 \quad CM \in \gamma$ (il c. di massa appartiene all'asse)

$\vec{V}_{CM} = \vec{V}_{TR}$

$\Rightarrow \vec{R} = M\vec{a} \equiv M a_{CM}$ (nel caso in cui $V = V_{CM}$)

? perché ? $\quad \vec{R} = m\vec{a}_{CM} = m\vec{a}_{TR}$

$\Rightarrow$ CORPO RIGIDO $\equiv$ PUNTO

$\Rightarrow \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ = NO PRECESSIONE $= I\vec{\alpha}$

$I = \text{cost}$

STESSE COSE PER LA DINAMICA DEL PUNTO

$\Rightarrow$ GRANDEZZE FISICHE DIVERSE

$m \rightarrow I$ variabili angolare

$\vec{v} \rightarrow \vec{\omega}$

$\vec{a} \rightarrow \vec{\alpha}$

$\vec{F} \rightarrow \vec{M}$

$\vec{p} = m\vec{v} \qquad \vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$

$K = \frac{1}{2} m v^2 \qquad K_{ROT} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2$

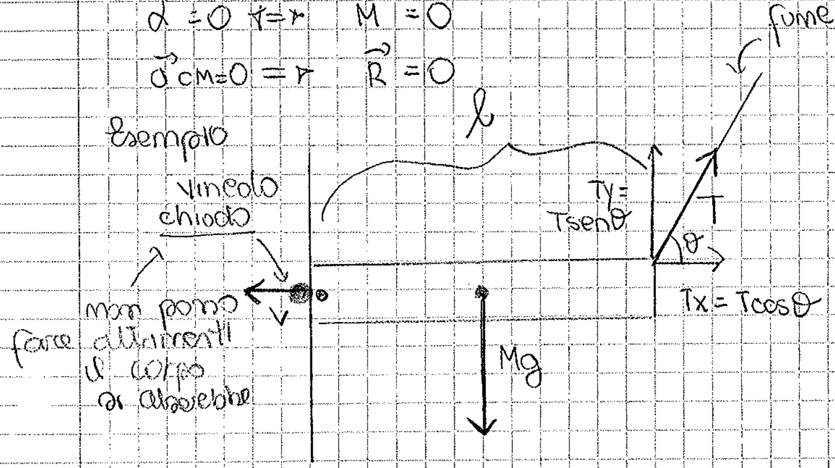
(1) EQUILIBRIO

$$\begin{cases} \vec{\alpha} = 0 & \text{(non ruota)} \\ \vec{a}_{CM} = 0 & \text{(non trasla)} \end{cases}$$

$\vec{\alpha} = 0 \Rightarrow \vec{M} = 0$

$\vec{a}_{CM} = 0 \Rightarrow \vec{R} = 0$

Esempio



Se non ci fosse la fune la sbarretta avrebbe una rotazione pura.

(2-D)

L'incognita del problema: $T; \theta$.

(2-D) ⇒ Quanti gradi di libertà?

BAR. ⇒ 2 coordinate

ROTAZIONI ⇒ L ha una sola componente
⇓
L è ⊥ al piano.

⇒ Quindi ha 1 grado di libertà

VARIE EQUAZIONI

- $R_x = 0$ $\quad T_x - V = 0$
- $R_y = 0$ $\quad \boxed{T_y - mg = 0}$ (1)
- $M = 0$ (anche il mom è ⊥ al piano)

CALCOLO MOMENTI:

Come Polo scelgo il Vincolo. P ≡ VINCOLO

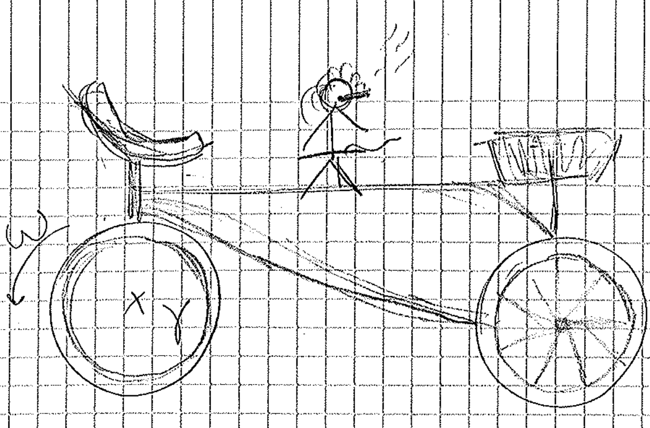
- V ha momento nullo perchè il braccio è nullo
- Tx ha mom nullo perchè Tx // braccio
- $-mg\frac{L}{2}$

negativa (perchè negativo?) ↓

- $T_y \cdot L$

Quindi: $\boxed{-mg\frac{L}{2} + T_y \cdot L = 0}$ (2)

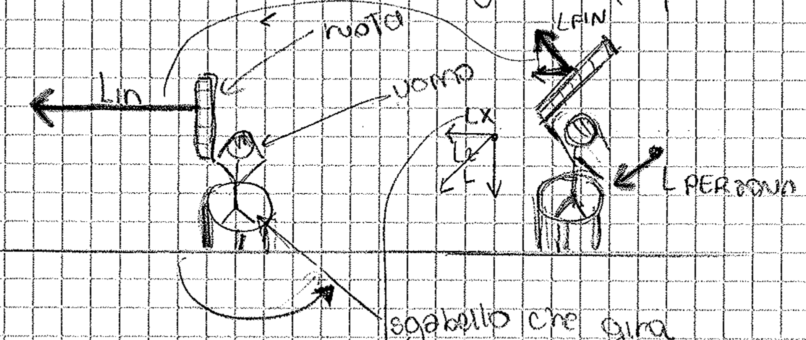
(1) e (2) sono incompatibili !! Dove sbaglio?



ω, L

$\perp$ lavagna

$\vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L} = cost \Rightarrow$ ruota gira nel piano della lavagna

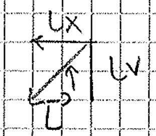


(xkè diretta in questo modo?)

$\bar{M}_{TOT} = 0$

$\bar{L}_{IN} = \bar{L}_{FIN} + \bar{L}_{PER}$

Bilancia la componente persa.



la persona è sottoposta a 2 piani di rotazione

(iii) Se $I \neq$ costante

MASSA CAMBIA

DISTRIBUZ. MASSA

$I\vec{\omega}$ = costante

Cambiando il mom. di inerzia la direzione non viene influenzata

$\Rightarrow$ DIREZ. DI $\vec{\omega}$ RESTA COSTANTE.

$I_{in}\vec{\omega}_{in} = I_{fin}\vec{\omega}_{fin}$

$I\uparrow \Rightarrow \omega\downarrow$

$I_{fin} = \frac{1}{2}(2M)R^2$

$I_n \cdot \omega_0 = I_{fin} \cdot \omega_{fin}$

$\omega_{fin} = \frac{1}{2}\omega_0$

(3) $\vec{\omega}(t)$ $\vec{V}_{CM}(t)$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$\vec{\alpha} \neq 0$ $\vec{a}_{CM} \neq 0$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$\vec{M} \neq 0$ $(\vec{R} \neq 0) \rightarrow$ Viene esaminato come se fosse un punto

(a) $M = \frac{d\vec{L}}{dt}$ $d\vec{L} = M dt$ $\Delta\vec{L} = M\Delta t$

* Se $\vec{M} = cost$

$\Delta\vec{L} = \vec{M}\Delta t$ EFFETTO di una forza

* Se $\vec{M} =$ non cost che agisce in un certo

$\Delta\vec{L} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{M} dt$ intervallo di tempo.

$\Delta\vec{L} = \int \vec{M} dt = \int \vec{r} \wedge \underbrace{\vec{F}\, dt}_{\vec{J}}$ => <u>MOMENTO IMPULSIVO</u>

$\Delta L = \int \vec{r} \wedge d\vec{J}\, dt$

impulso forza

(b) $W^{ROT} = \int \vec{M}\, d\theta = \Delta K^{ROT}$ lavoro di rotazione

$K^{ROT} = \frac{1}{2} I \omega^2$

(Se $\vec{M} = cost \Rightarrow \Delta K^{ROT} = M \cdot \Delta\theta$)

(c) Il momento produce un' acceleraz angolare

$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I\vec{\alpha}$

(I cost)

$\vec{\omega} = \int \vec{\alpha}\, dt$ $\theta = \int \vec{\omega}\, dt$

ii) $\vec{v}_P$ = TRASLAZIONE + ROTAZIONE

Asse per descrivere le rotazioni

ASSE $\Rightarrow \gamma$ per il c.m.

$\vec{v}_P = 0 = \underbrace{\vec{v}_{CM}}_{\vec{v}_{TRASL}} + \omega \wedge \vec{R} = 0$

$\Rightarrow \vec{\omega} \neq 0$

- Traslazione CM con $\vec{v}_{CM}$
- Rotazione attorno al C.M. con $\vec{\omega}$

$\Rightarrow \vec{v}_{CM} = \vec{\omega} \wedge \vec{R}$

Per avere rotolamento puro:

$\vec{\omega}$ e $\vec{v}_{CM}$ NON INDIP.

N.B. In una roto-traslazione

$\vec{v}_{CM}$ e $\vec{\omega}$ INDIPENDENTI

DESCRIZIONE ALTERNATIVA:

Immagino come una rotazione attorno a P

Asse γ passante per P.

MA l'asse non è fisso, si sposta con una certa velocità

iii) ACCELERAZIONE

Asse γ per il CM

$\vec{a}_{TR} = \vec{a}_{CM} = \vec{\alpha} \wedge \vec{R}$

iv) ENERGIA CINETICA ASSE γ PER IL CM

$K = K_{ROT} + K_{TR} = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$

$\vec{v}_{CM} = \vec{\omega} \wedge \vec{R}$ se $\vec{\omega} \perp \vec{R}$ $\rightarrow$ $\boxed{v_{CM} = \omega \cdot R}$ in modulo

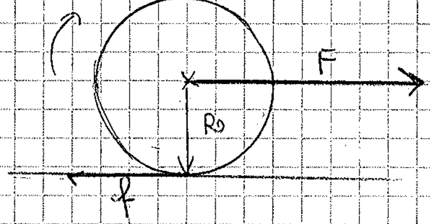
$K = \frac{1}{2} m \omega^2 R^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$

$= \frac{1}{2} \underbrace{(mR^2 + I_{CM})}_{I_P} \omega^2$

$I_P \Rightarrow \gamma$ per P STEINER

Esempio

Quando non ho rotolamento puro?



I = NOTO

m, R NOTI

μs, μd NOTI

Ci sarà moto di rotolamento e quanto varrà l'accel.?

1) HP: che rotoli

$a_{CM} = \alpha \cdot R$

(la forza applicata non introduce un momento)

$$\begin{cases} F - f = m a_{CM} \\ f \cdot R = I\alpha = I \cdot \frac{a_{CM}}{R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{I}{Rm}(F - f) = \frac{I}{R} \cdot a_{CM} \\ f \cdot R = I \cdot \frac{a_{CM}}{R} \end{cases}$$

$$\frac{I}{Rm} F = f\left(\frac{I}{Rm} + R\right)$$

$f = ?$

$$f = \frac{I \frac{F}{mR}}{\frac{I}{mR} + R} = \frac{I F}{I + mR^2}$$

$f < \mu s m g$ → condizione che non verificata vuol dire che l'attrito statico non è suff. e il moto non è di puro rotolamento.

↓

ROTO TRASLAZIONE:

- a_{CM} e α indipendenti
- $\underbrace{P}_{\text{di contatto}}$ non è più fermo → l'attrito non è più statico

f ⇒ DINAMICO ⇒ $\mu d m g$ (NO INCOGNITA)

$$\begin{cases} F - \mu d m g = m a_{CM} \\ \mu d m g R = I \alpha \end{cases}$$

- $d\vec{L}' = \vec{M}\,dt$ L'effetto della risultante produce

  $\Delta\vec{L}' = \int \bar{M}\,dt$ (una variaz del momento)

- $dW^{ROT} = \bar{M} \cdot d\vec{\theta}$ La traiettoria è un angolo

  $\Delta K^{ROT} = \int \bar{M}\,d\bar{\theta}$

il concetto di momento e risultante sono indipendenti nel produrre variazioni di lavoro, en. cinetica..

$$\left.\begin{aligned} \Delta\bar{P}' &= \int \vec{R}\,dt \\ \Delta K^{TRASL} &= \int \vec{R}\,d\vec{s} \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{continuano a valere}$$

Applicazioni:

i) DISCO FERMO a cui è applicato un momento, $M' = 3t$

$I_{cm} = \frac{1}{2} MR^2 = 6$ TROVARE ω DOPO 3s.

asso per il CM

se ho una forza, devo sapere qual è il suo p.to di applicazione.

N.B. $M \neq 0$ $R = 0$ (Risultante nulle)?

$$\int_0^{tf} M\,dt = \Delta L$$

$$\frac{3}{2} t^2 \Big|_0^{tf} = I_{CM}\,\omega_f$$

$M = I \cdot \alpha$

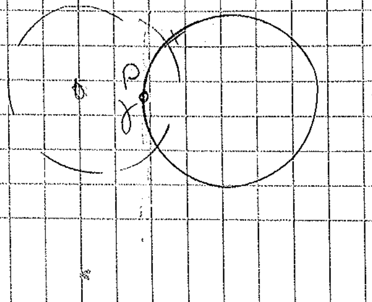
$3t = I_{CM} \cdot \alpha$ $\alpha = \frac{3}{I_{CM}} \cdot t$ $\omega = \int \alpha\,dt$ $\theta = \int \omega\,dt$

VARIANTE:

$M = 3t\cos\theta$ L'asse passa per P sulla circonf del disco

Trovare ω dopo $\theta = 60°$

$(\gamma \perp P)$

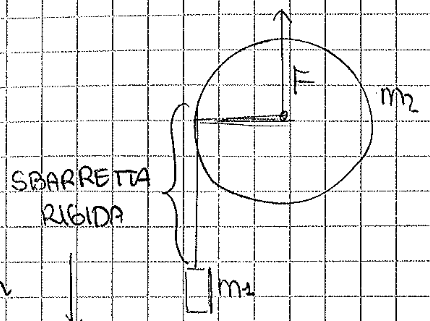


Ogni punto percorre una traiettoria circolare

VARIANTE SISTEMA COMPLET. RIGIDO

↓

$a_{m_1} = a_{m_2}$



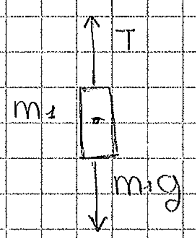
che non si allunga.

Descrivere il moto, e trovare tutto.

I_{CM} = NOTO
m_2 = NOTA

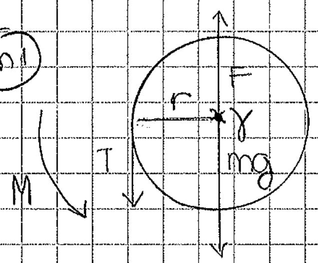
FORZE CHE AGISCONO:

m_2



$-m_1 g + T = m_1 a$

m_1



- Risultante
- Momento

$R = F - m_2 g - T$

Asse γ

la tensione T applica ~~la tensione~~ il momento

$M = T \cdot r$

Moto di rotazione:

$T \cdot r = I \alpha$

il disco ruota su se stesso e cade verso il basso

$\vec{a}_p = \vec{a}_{TR} + \text{acc } \vec{r} \wedge \vec{\alpha}$

acc. del p.to P; a_{TR} ↓ a_{CM}; acc ↓ componente di rotazione

$\vec{a}_p = \vec{a}_{CM} + \vec{r} \wedge \hat{\alpha}$

$\vec{a}_{CM}$ LUNGO γ (la risultante non cambia di direzione)

$\vec{\alpha} \perp \pi$ lavagna (α non cambia direzione perché M non cambia direzione)

$\vec{r}$?

$\bar{a}_{CM} = \bar{a}_T + \bar{a}_{CENTR}$ (perche' il CM compie un moto circolare)

$\bar{a}_{CM} = \alpha \cdot \frac{L}{2} \cdot \bar{u}_T + \omega^2 \cdot \frac{L}{2} \bar{u}_R$

$\vec{R} = m \cdot \bar{a}_{CM}$ (RISULTANTE)

- TANGENZIALE $\Rightarrow mg \cdot sen\theta - V_2 = m \cdot \underbrace{\alpha \frac{L}{2}}_{a_T}$ $\quad a_T = \alpha R$

- LUNGO IL RAGGIO $\Rightarrow mg\cos\theta - V_1 = m \cdot \underbrace{\omega^2 \frac{L}{2}}_{a_C}$ $\quad a_C = \omega^2 R$

conserv. energia

$$\underbrace{mg\frac{l}{2}}_{Ep^{in}} = \underbrace{mg\frac{l}{2}\cos\theta}_{Ep^{fin}} + \frac{1}{2} I_P \omega^2$$

il corpo possiede e. cinet di rotazione.

ii) SR FISSO γ per CM

$\vec{R} = m \cdot \bar{a}_{CM} = m\bar{a}_{TR}$ (sono uguali perche' γ passa per CM)

$\Uparrow$

$\bar{a}_{CM} = \bar{a}_{TR}$

il CM trasla lungo una traiett. circolare.

ROTAZIONI:

V_1, $mg\cos\theta$, $mg\,sen\theta$ NO mom.

$M = V_2 \cdot \frac{l}{2} = I_{CM} \cdot \alpha$

α = STESSA DI PRIMA

iii) Se cambio γ cambia a_{TR}.

SR' con $O' \equiv CM$

$M = V_2 \cdot \frac{l}{2} = I_{CM} \cdot \alpha$

17/05/11

TERMODINAMICA

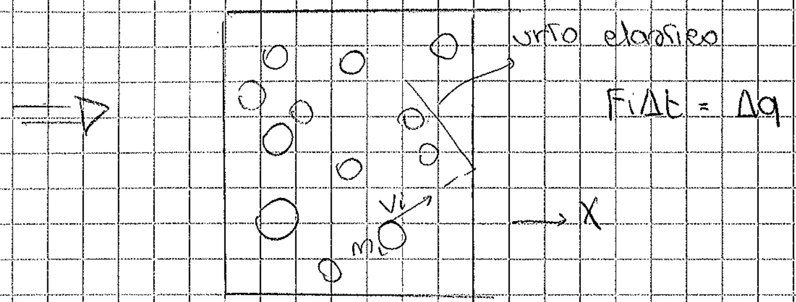
Studio delle trasformazioni di energia → in sistemi fisici

- SISTEMA ⇒ molte particelle

N DI PARTICELLE MOLTO ELEVATO

Studiare le proprietà medie delle particelle

ESEMPIO:



$F_{ix} \cdot \Delta t = -2 m_i v_{ix}$

TERMOD ⇒ PROPR. MEDIA

Il sistema applica una pressione p sulla parete

Meccanica statistica: collega P ad F_i

⇒ SISTEMA OCCUPA UN VOLUME

pareti che racchiudono il volume

- AMBIENTE: tutto ciò che è al di fuori del sistema
- UNIVERSO: ambiente + sistema

i) Sistema, pareti, energia

ii) I PRINCIPIO ⇒ Conservazione dell'energia

macchine termiche

↳ Prende il calore e lo trasforma in lavoro

$Q \Rightarrow W$.

Queste tre fasi coesistono solo se $p = 1 atm$ e T ha un valore fisso.

$T_{TRIPLO} = 273{,}15\ K$

$\theta_{TRIPLO} = a T_{TRIPLO}$

Per tarare il termometro:

$a = \frac{\theta_{TRIPLO}}{T_{TRIPLO}} = \frac{\theta_{TR}}{273{,}15}$ (*) $\theta = \frac{\theta_{TR}}{273{,}15} T$

Misura in °CENTIGR.

$K - 273{,}15 = °CENTIGR$

$T = 23°C = (23 + 273{,}15)\ K$

=> SISTEMA = 4 PROPRIETA'

n, V, p, T variabili di stato

2) Legame Sistema-ambiente

=> Ogni sistema tende a condizioni di equilibrio,

SEMPRE VERIFICATO

* Eq. interno: prese due parti del sistema, queste sono in equilibrio fra loro.

↓

TERMODINAMICA DI EQUILIBRIO

* Eq. esterno: il sistema è in equilibrio con l'ambiente

Devono verificarsi:

- Equilibrio chimico: se il materiale reagisce a contatto con l'ambiente, no reazioni chimiche.
- Equilibrio termico: si ha quando ho la stessa temperatura.
  - EXT => $T_{SIST} = T_{AMB}$
  - INT => T è la stessa in tutti i p.ti del volume
- Equilibrio meccanico:

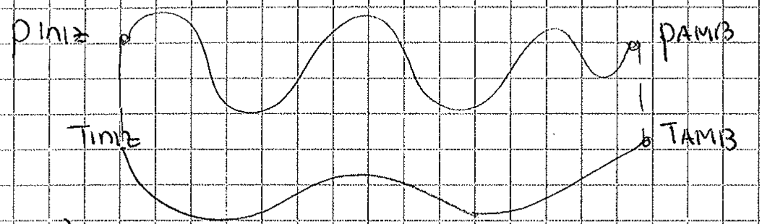
SISTEMA TERMODIN. NON IN EQUILIBRIO: $\rightarrow$ $p_{SIST} \neq p_{AMB}$

$T_{SIST} \neq T_{AMB}$

In questo caso si innesca un meccanismo di evoluzione, le variabili di stato diventano funzione del tempo.

p, V, T diventano f(t) funzioni del tempo, fino a raggiungere il nuovo equilibrio

~~$p_0 = p_{SIST} \neq p$~~



$p = p(t)$

$T = T(t)$ $\quad V(t)$

In termodinamica si elimina il tempo.

$p = p(t)$

$V = V(t) \Rightarrow t = g(V)$

$p = p[g(V)] = f(V)$ — funzione composta tra p e g

Se un sistema non e' in equilibrio con l'ambiente:

$\downarrow$

TRASFORMAZ. TERMODINAMICA

p, V e T non costanti

$\Downarrow$ $p = f(V, T)$ (Una delle tre puo' essere scritta in funzione delle altre due)

5) Equazione di stato

$\hookrightarrow$ delle tre variabili di stato $\Rightarrow$ V, p, T

Quando sono all' equilibrio, se e solo se (sono in eq), le variabili di stato non sono indipendenti.

$\Rightarrow$ 3 VARIABILI $\begin{cases} \text{LIBERE} \\ \text{INDIPENDENTI} \end{cases}$

$p(t) \quad v(t) \quad T(t)$

Definire f $\Rightarrow$ IMPORRE UNA NUOVA CONDIZIONE, impongo che una delle variabili non sia più libera.

TRASF $\Rightarrow$ DA STATO DI EQUILIBRIO (A) $\rightarrow$ STATO DI EQ. FINALE (B)

- Trasformazione reversibile:

Tutti gli stati intermedi sono stati di equilibrio.

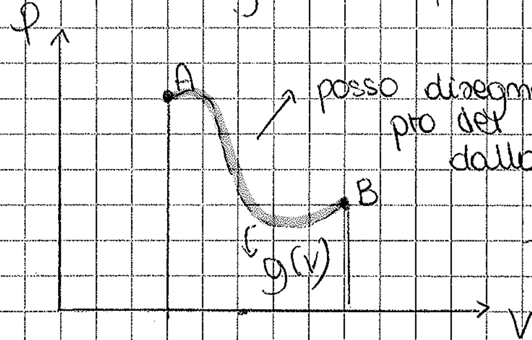
$T = T(t)$ i) ad ogni tempo ho equilibrio

$V = V(t)$ $\Downarrow$

$p = p(t)$ $p(t)V(t) = nRT(t)$ $\rightarrow$ conseguenza I

ogni stato intermedio è un pto nel diagramma pV (Clapeyron)

ii)



posso disegnare la curva con ogni pto del grafico e posso andare dallo stato A allo stato B

$\rightarrow$ conseguenze II

iii) Fissare trasformazione

$p = f(V, T)$

REV $\Rightarrow$ T dipende dalla pressione e dal volume

$p = g(V)$ <u>la pressione è funz. del volume</u>

$y = g(x)$ $\rightarrow$ CURVA

ESEMPI:

(1) Trasf. reversibile ISOBARA

$p =$ costante $\Rightarrow p_A = p_B$

Trasf. reversibile in pratica (Trasformazione molto lenta)

Bisogna avere degli intervalli intermedi di equilibrio.

- Trasformazione NON REVERSIBILE

Stati intermedi non equilibrio.

Iniziale e finale in equilibrio $p_A V_A = nRT_A$ (per i gas)
$p_B V_B = nRT_B$

All'inizio $\begin{cases} T_A = f(p_A, V_A) \\ T_B = f(p_B, V_B) \end{cases}$

Ma durante gli stadi intermedi: $T(t) \neq f[p(t), V(t)]$

$p = f(V, T)$ CURVA

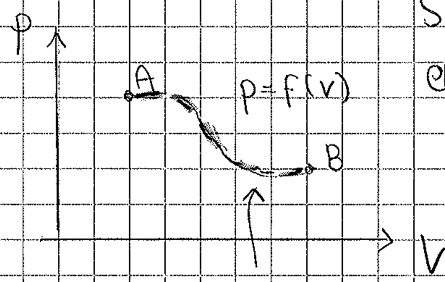
$p \cancel{\neq f}(V)$ la Temp è una variabile indipendente

$\begin{cases} p = f(V) \\ T = g(V) \end{cases}$ CURVA NELLO SPAZIO, 3 variabili indipendenti

per descrivere la trasformazione

3-D

No Clapeyron.



TRASF. IRREVERSIBILE (TRATTEGGIO)

Si utilizza comunque Clay però manca ancora un'informazione

Esempio 1:

Sistema a p_A, V_A NOTI, contatto con ambiente p_2 e T_2

Quanto vale V_f? (del sistema)

Se la trasf. è reversibile in questo modo:

$$p = p_A + K(V - V_A)^2$$

trovare K e $\cancel{\alpha}$ che descrivono la trasformazione

(B) $p_B = p_0 + KX \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{nRT_0}{X} = p_0 + KX \\ T_{AMB} = T_0 + 3X^2 \end{cases}$ X?

4 incognite, 4 equazioni

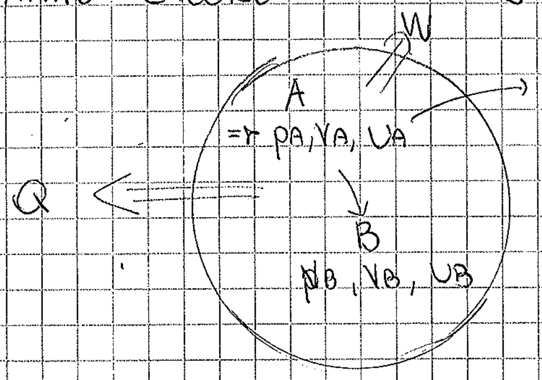
(B) ENERGIA

Sistema che va da stato A a stato B → TRASFORMAZIONE

Per averla, e' necessaria sempre un' interazione con l'ambiente, altrimenti il sistema sarebbe in eq. con se stesso.

INTERAZIONE ⇒ scambio di energia

TRAMITE CALORE — TRAMITE LAVORO



energia dello stato

TRASFORMO

per effetto di questo scambio di energia lo stato A diventa B.

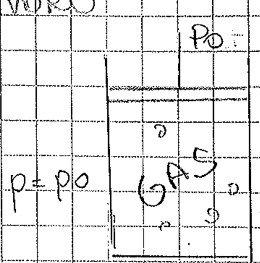
$U_B = U_A + E_{SCAMBIATA}$ I PRINCIPIO

L'energia puo' essere scambiata in 2 modi:

i) SCAMBIO MECCANICA → W lavoro

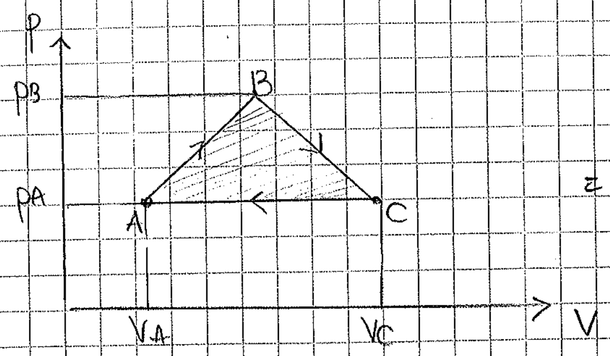
ii) SCAMBIO EN. TERMICA → Q calore

1) LAVORO



Per avere l'eq. dinamico il gas dovra' trovarsi ad una $p = p_0$

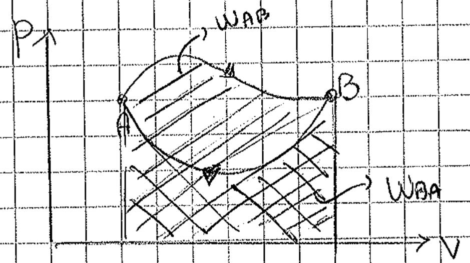
ESEMPIO Quanto vale il lavoro?



W_{AA} = AREA DEL TRIANGOLO

$$= \frac{1}{2}(V_C - V_A) \cdot (p_B - p_A)$$

TRASFORMAZIONE CICLICA



$W_{AB} > 0$

$W_{BA} < 0$

Se : $W_{AB} + W_{BA}$ = resta la porzione di area racchiusa dal ciclo

Segno del lavoro

Si decide arbitrariamente che se $W > 0 \Rightarrow$ LAVORO PRODOTTO

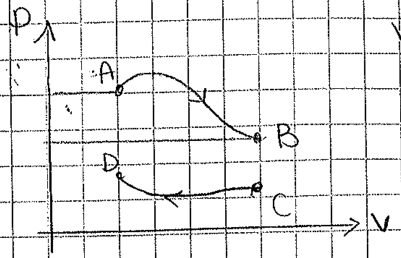
↓

energia dal sistema e fluisce verso l'ambiente.

$dW = p\,dV$

$dW > 0 \Rightarrow dV > 0$ Ho un lavoro positivo quando il volume aumenta, cioè quando ho un'espansione

vale anche sul lavoro finito.



$V_B > V_A$ AREA > 0

$\underbrace{W_{AB} > 0}$

$V_D < V_C$ AREA < 0

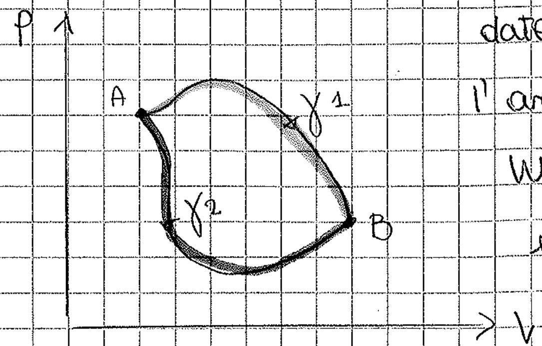
$W_{CD} < 0$

il sistema assorbe energia meccanica dall'esterno

W NON E' UN DIFFERENZIALE ESATTO $\rightarrow \cancel{d}W$

STATO A $\xrightarrow{TRASF}$ STATO B

W_{AB} dipende dalla trasformazione e non solo da estremi.



date queste 2 curve l'area e' diversa!

$W_{AB}^{\gamma 1} \neq W_{AB}^{\gamma 2}$

il lavoro dipende dalla traiettoria

W IRREVERSIBILE

$dW = p_{ext}\, dV$

- $dW > 0 \Rightarrow dV > 0$ questo vale ancora, tutto il resto visto per il lavoro reversibile non vale!

Per calcolare W devo conoscere $p_{ext} = f(V)$.

$$W = \int_A^B f(V)\, dV$$

pressione esterna in funzione del vol del gas.

Caso particolare:

$p_{ext} =$ cost

$$W = \int p_{est}\, dV = p_{ext}\, \Delta V$$

2) CALORE

$Q \Rightarrow$ unita' di misura = calorie

$Q \Rightarrow$ ENERGIA $\Rightarrow$ UDM Joule

$$1\ J = 4.186\ cal$$

$\Delta T \neq Q$

$Q \Rightarrow$ NON ESISTE UN'UNICA DEFINIZIONE perche' ci sono molti modi per realizzare scambi di calore.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 183 di 276

ii) Al posto della massa uso il n° moli

$$Q = n\,c\,\Delta T$$

num. di moli — cal. specifico molare

GAS conveniente per loro.

Approssimaz.: $c = c(T)$

c = funzione della trasformazione

Caso particolare: GAS PERFETTI

* TRASF. ISOCORA (V cost) $\Rightarrow$ $c = c_v$ cal. specifico a vol. costante

$$Q = n\,c_v\,\Delta T$$

$$dQ = n\,c_v\,dT$$

Fisso: GAS MONOATOMICO: $c_v = \frac{3}{2}R$ (indipendente da T)

* TRASF. ISOBARA $\Rightarrow$ $c = c_p$ (p = cost)

$Q = n c_p \Delta t$ $\quad c_p = \frac{5}{2}R$. GAS MONOATOMICO

$c_p > c_v$ $\quad \frac{c_p}{c_v} > 1$

$c_p > c_v$

STESSA ΔT $\quad Q_{isoc} = n\,c_v\,\Delta T$

$$Q_{isob} = n\,c_p\,\Delta T$$

$Q_{isob} > Q_{isoc}$

Es. coperchio su pentola in cui bolle l'acqua.

$\Rightarrow$ Q quando $\Delta T = 0$

$Q = ?$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 185 di 276

Es. 100 g di ghiaccio a 0 °C + (*)
50 g di H_2O a 70 °C (T_1)

STATO FINALE ? $\lambda = \lambda_0$

Spezzo il problema in 2 parti:

i) TRASF. DI FASE

(*) $Q_{GH} = Q_{lat} = m_{gh} \cdot \lambda$

(*) $Q_{ACQ} = m_{ACQ} \cdot C_{H_2O} (T_F - T_1)$

$T_F \geq 0°C$ → ha senso !

$Q_{gh} = -Q_{H_2O}$ ⇒ TROVO T_F

① $T_F > 0$ NO EQUIL ⇒ DEVO CONTINUARE

② $T_F = 0$ EQ ⇒ FINITO

③ $T_F < 0$ DEVO CORREGGERE

- se $T_F < 0$ devo correggere

l'acqua che ho aggiunto non aveva cal suff per sciogliere il ghiaccio

Non tutto il ghiaccio si scioglie → $T_F = 0$ ↓ correzione

$Q_{gh} = m_x \lambda$

$Q_{H_2O} = m_{H_2O} \cdot C_{H_2O} (0 - T_1)$

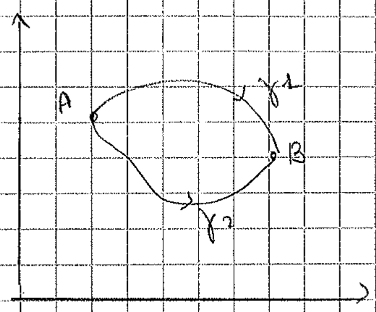
$Q_{gh} = -Q_{H_2O}$ → TROVO m_x

$T_F > 0$ ⇒

- H_2O dal ghiaccio : $Q_1 = m_{gh} C_{H_2O} (T_x - 0°)$
- H_2O inizialm calda : $Q_2 = m_{H_2O} \cdot C_{H_2O} (T_x - T_f)$

$Q_1 = -Q_2$ → Trovo T_x

$\Delta U_{AB} = U_B - U_A$



$$\Delta U_{AB}^{\gamma_1} = Q_{AB}^{\gamma_1} - W_{AB}^{\gamma_1}$$

$$\Delta U_{AB}^{\gamma_2} = Q_{AB}^{\gamma_2} - W_{AB}^{\gamma_2}$$

$$\Delta U_{AB}^{\gamma_1} = \Delta U_{AB}^{\gamma_2}$$

$$Q_{AB}^{\gamma_1} \neq Q_{AB}^{\gamma_2}$$

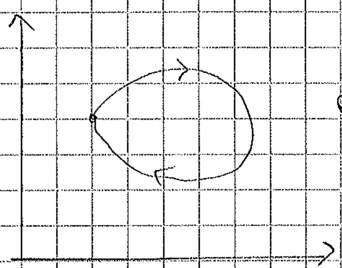
I PRINCIPIO VALE PER OGNI TRASFORMAZIONE => x REVERSIBILI
x IRREVERSIBILI

(L'en. interna e' come l'en potenziale in un campo di forze conservative)

CONSEGUENZA:

1) TRASF CICLICA =>

$\Delta U = U_A - U_A = 0$



la variaz. di energia interna e' nulla

$\Delta U = Q_{AA} - W_{AA} = 0 \qquad Q_{AA} = W_{AA}$

Per avere un lavoro positivo devo assorbire calore. Non posso produrre lavoro senza consumare calore.

2) ENERGIA INTERNA => PROPRIETA' DELLO STATO DEL SISTEMA

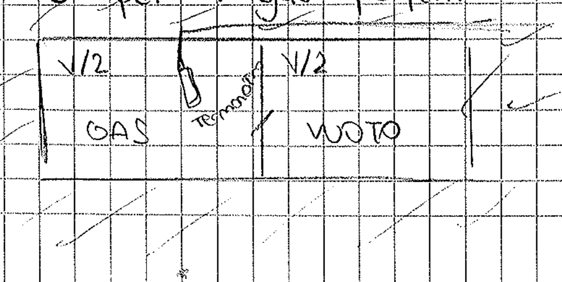
=> VARIABILE DI STATO come U, p, V, T

U dipende da p, V e (T)

U => ENERGIA INTERNA Per i gas perfetti

→ espansione libera di Joule esperimento

capire U per i gas perfetti



Pareti adiabatiche

$\Delta Q = 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 189 di 276

7

$\Delta U_{CB} = Q_{CB} - W_{CB} = nC_V(T_B - T_C)$

ΔC ISOT $\Rightarrow T_A = T_B$

$\Delta U_{AB} = \Delta U_{CB} = Q_{CB} = m\, C_V\, (T_B - T_A)$

$\Delta U = m \cdot C_V \cdot \Delta T$

$dU = \overset{n}{m} \cdot C_V\, dT$ (variaz. infinitesima.)

$\Delta U_{AB} = U_B - U_A = m C_V (T_B - T_A)$

Per un gas perfetto monoatomico

$U_B = n\left(\frac{3}{2}R\right)T_B \Rightarrow \underbrace{U = \frac{3}{2} nRT}$ legame

I PRINCIPIO (ENERGIA)

Trasformazioni

- A e B $\Rightarrow$ stati di eq.
- $p, V, T \Rightarrow$ 3 variabili indip. lungo la trasform

definisco la trasf.

$p = f(V)$ — REV $\Rightarrow T = \frac{pV}{nR} = \frac{f(V) \cdot V}{nR}$

— IRREV $\Rightarrow T = g(V)$

$\Rightarrow dU = n \cdot C_V \cdot dT$ $\begin{cases} \text{GAS} \\ \text{PERF} \end{cases}$

$dW = p_{ext}\, d\, V$

$\hookrightarrow dW^{REV} = p \cdot dV$

Come posso trovare il calore?

dQ — $n \cdot c\, dT$

— cal latente

— $dQ = dU + dW$

$\uparrow$ I PRINCIPIO

- Espansione adiabatica:

$dV > 0 \Rightarrow W > 0$

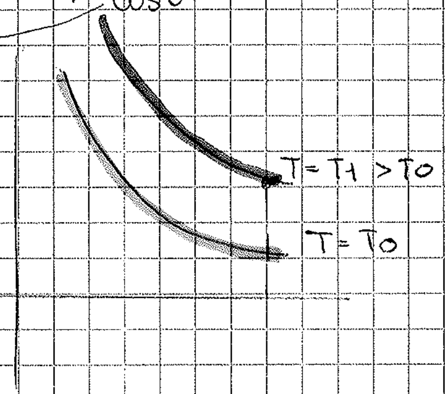
$\Downarrow$

$dT < 0$ (la temperatura scende sia in un processo reversibile o irreversibile.)

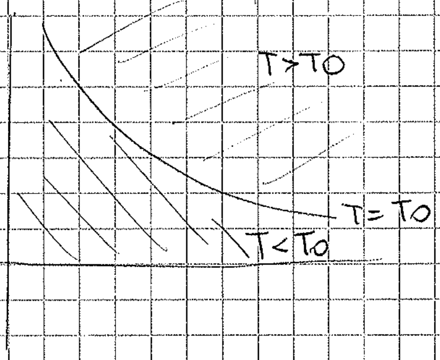
Confronto con isoterma rev.

- Isoterme reversibili $T = cost$

$pV = K$

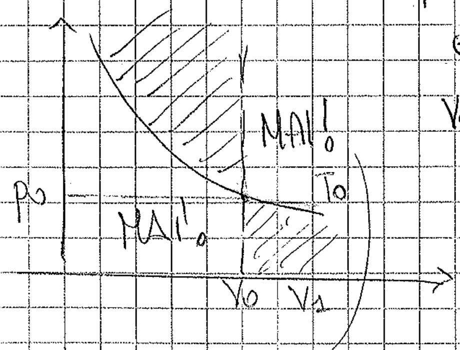


Se parto da una $T_1 > T_0$ parto da un valore di pressione maggiore.



ADIAB. STATO IN p_0, V_0, T_0

Se aumento il volume mi sposto verso destra.



espansione:

$V_0 \rightarrow V_1 > V_0$

Verso dx $\Rightarrow dV > 0$

$dT < 0$

$T_1 < T_0$ $\quad p \downarrow$

$\downarrow$

SOTTO ISOT.

il volume aumenta e la press. diminuisce

l'adiabatica non fa passare il calore

$U = Q - W$

$$\frac{dT}{T} = \frac{-R}{C_v} \cdot \frac{dV}{V} \qquad \frac{R}{C_v} = \frac{C_p - C_v}{C_v} = \gamma - 1$$

$$\int \frac{dT}{T} = \int (1-\gamma)\frac{dV}{V} \qquad \log T = (1-\gamma)\log V + C_1$$

$$\log T + (\gamma - 1)\log V = C_1$$

$$(a \log b = \log b^{a})$$

$$\log T + \log V^{\gamma-1} = C_1$$

$$(\log a + \log b = \log (ab))$$

$$\log (T \cdot V^{\gamma-1}) = C_1$$

equaz. delle adiabatiche reversibili $\leftarrow$ $T \cdot V^{\gamma-1} = K = e^{C_1}$

OSSERVAZIONI:

* $\gamma > 1 \Rightarrow \gamma - 1 > 0 \qquad V\uparrow \rightarrow V^{\gamma-1}\uparrow \quad T\downarrow$

ci garantisce che:

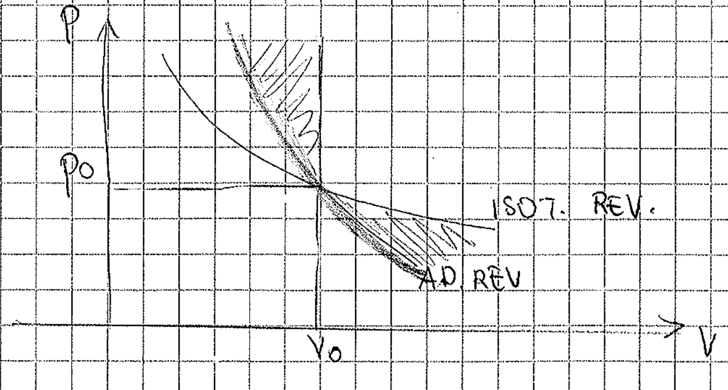
Cosa ci garantisce $\gamma > 1$?

$$T = \frac{pV}{nR} \quad \text{(reversibile)} \rightarrow pV^{\gamma} = K' = K \cdot n \cdot R$$

$$\gamma > 1 \quad V\uparrow \quad p\downarrow$$

$$pV^{\gamma} = \text{cost}$$

$\hookrightarrow$ IPERB + RIPIDA DI $pV = K$



	A	B (equilibrio)		AB	
p	p_0	p_{AMB}	Q	$Q - W = 0$ $Q = W$	I principio
V	$\frac{RT_{AMB}}{p_0}$	$\frac{nRT_{AMB}}{p_{AMB}}$	W	$nRT_{AMB} \log\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$ >0	lavoro x isoterma reversibile
T	T_{AMB}	T_{AMB}	ΔU	$nC_V \cancel{(T_B - T_A)}$	no variaz. di temp. $\Delta T = 0$
	equilibrio	isoterma			

eq. di stato

24/05

TRASFORMAZIONE

INIZ, FIN $\quad p = f(V)$

$T = f(V)$

$\Rightarrow Q_{AB}, W_{AB}, \Delta U_{AB}$

Schema

STATI

1. DATI PROBLEMA
2. EQ. STATO
3. EQUILIBRIO $\Rightarrow$ (ambiente)
4. TRASFORMAZ.

Trasf. energia

Sempre {
1. DATI PROBLEMA
2. $\Delta U = nC_V \Delta T$
}
3. $W = \int_A^B p_{est} \, dV$

IRREVERSIBILE $\quad p_{est} = cost$

$W = p_{est} \cdot \Delta V$

Se la trasf. è reversibile

$W = \int p \, dV$

$Q = \int n \, c \, dT$ (devo conoscere c altrimenti non sono in grado di calcolarlo)

	AB	BC	
Q	$W_{AB}+\Delta U_{AB}$ >0	0	$\longrightarrow$ adiabatica
W	$nRT_A \log \frac{V_B}{V_A}$ >0	$W_{BC} = -\Delta U_{BC}$ >0	$\rightarrow$ I principio
ΔU	$nC_v(T_B - T_A)$	$nC_v(T_C - T_A)$ <0	

(AB) il sistema assorbe calore e produce lavoro

$\downarrow$ 0 (isoterma) $\downarrow$ il sistema perde energia

lavoro positivo $V_B > V_A$ (espansione)

Esempio 2

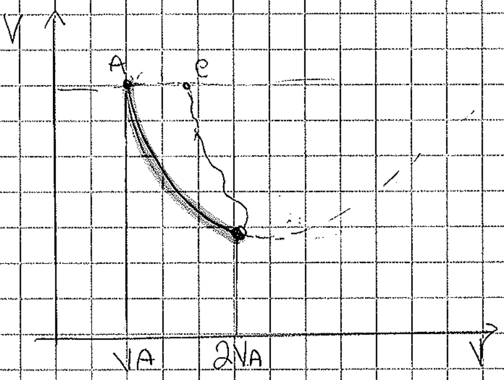
$n=1$ GAS MONOATOMICO , p_A V_A NOTI

i) REV. $p = p_A + (V - V_A)^2$ FINO A $V_B = 2V_A$

ii) il SISTEMA VIENE POSTO A CONTATTO CON GHIACCIO A 0°, si ~~sciolgono~~ SCIOLGONO 100 g di GHIACCIO.

$p_{fin} = p_C = p_A$

Trovare il lavoro totale scambiato dal sistema.



L'ambiente è ghiaccio a 0°. $T_{fin} = T_{amb} = 273{,}15\,K$

X

Esempio 3

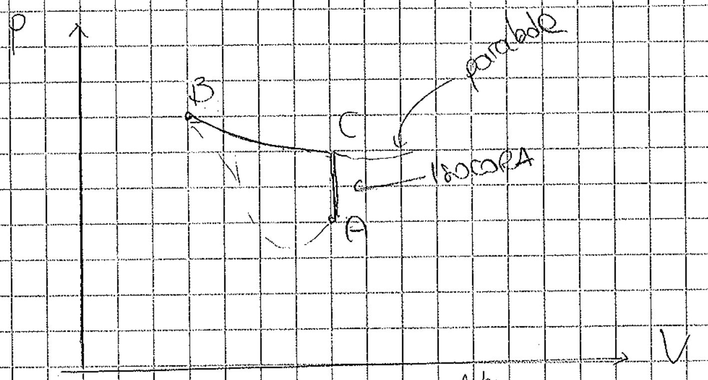
GAS p_A, T_A $n=1$ $p_A < p_{AMB}$

i) CONT. ADIABATICHE

CONTAT. CON L'AMBIENTE $p_{AMB} = 1$ atm

ii) ISOT. REV CHE LO PORTA A $T_C > T_A$

iii) IL GAS VIENE RIPORTATO ALLO STATO INIZIALE MEDIANTE ISOCORA.



equilibrio

	A	B	C
p	p_A	p_{AMB}	$\frac{nRX}{V_A}$
V	$\frac{nRT_A}{p_A}$	$\frac{nRX}{p_{AMB}}$	V_A
T	T_A	X	X

incognita

$X = T_B$

→ Sono andato da C ad A mediante isocora

	adiabatica irreversibile AB	isoterma BC	isocora CA
Q	0	I principio W_{BC} $(\Delta U = 0)$	$nC_V(T_A - T_C)$
W	$p_{AMB}(V_B - V_A)$	$nRX \log\left(\frac{V_C}{V_B}\right)$	0
ΔU	$nC_V(X - T_A)$	0	$nC_V(T_A - X)$

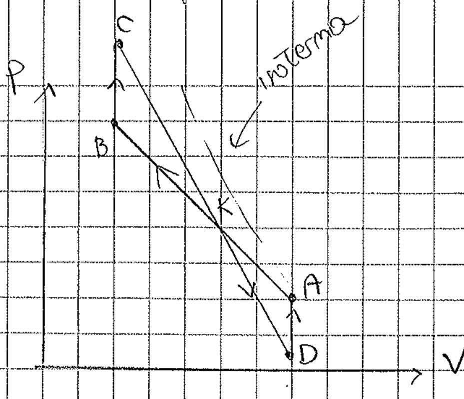
Sfrutto il 1° principio

I PRINCIPIO

$\Delta U_{AB} = -W_{AB}$

$nC_V(X - T_A) = -p_{AM}\left(\frac{nRX}{p_{AMB}} - \frac{nRT_A}{p_A}\right)$

Per trovare X



$p_A - p_D =$

KBCK ⇒ ORARIO
W = AREA racchiusa > 0

KDAK ⇒ VERSO ANTIORARIO
W = AREA racch < 0

✱

$\Delta U_{AA} = 0$ trasf. reversibile → ciclica

$T_D < T_A$ (Tracciando l'isoterma, T_D è al di sotto di T_A)

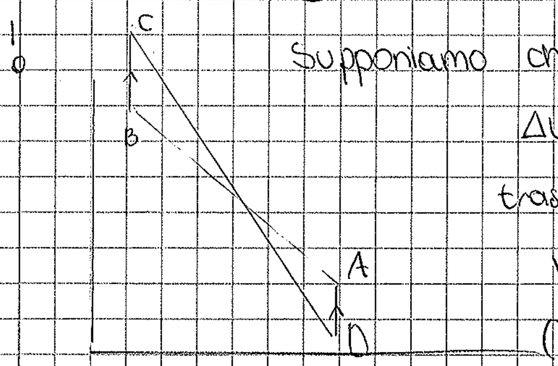
DA A a D = ↓ ⇒ T↓

$W_{AB} < 0$ (il volume diminuisce) V↓ AREA < 0

$W_{BC} = 0$ isocora

$W_{AA} = Q_{AA}$ ⇒ ciclica

$W_{AA} = 0$ ✱ Aree uguali ed opposte



Supponiamo che la trasf. diventi irreversibile.

ΔU_{AA} non dipende dalla trasformazione: $\Delta U_{AA} = 0$

$W_{AA} = ? \neq$ AREA

(in questo caso il lavoro sarebbe stato diverso dall'area.)

$\frac{|Q_{CED}|}{Q_{ASS}} > 0$ $\quad \eta \leq 1 \quad$ $\frac{|Q_{CED}|}{Q_{ASS}} \leq 1$

$0 \leq \eta \leq 1$ I PRINCIPIO

$0 \leq \eta < 1$ ESPERIMENTI

$\rightarrow$ il 1° principio è incompleto.
il RENDIMENTO NON È MAI UGUALE A 1!

$\Rightarrow W < 0 \rightarrow$ CICLO FRIGORIFERO

Consumo energia per spostare calore

In questo caso non si parla di rendimento bensì di:

$$\boxed{\text{EFFICIENZA}: \quad \varepsilon_{CR} = \frac{Q_{ASS}}{|W|}}$$

SORGENTI / TERMOSTATI

Scambia calore e produce / consuma lavoro (dipende dal segno)

Scambia calore con ambiente

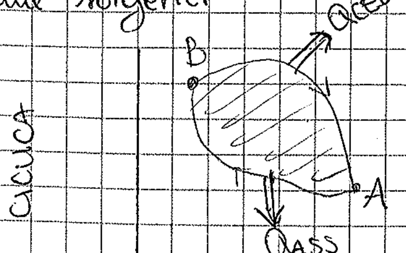
AMB 1 per assorbire calore
AMB 2 per cedere calore } MINIMO

Un termostato per definizione è una sorgente che ha disponibilità di calore, ma mantiene la temperatura costante perché le perturbazioni sono piccole rispetto all'amb

SORGENTE (AMBIENTE) A T COSTANTE

RAPPRES. MACCH. TERMICHE

A due sorgenti



la macchina cede e assorbe calore

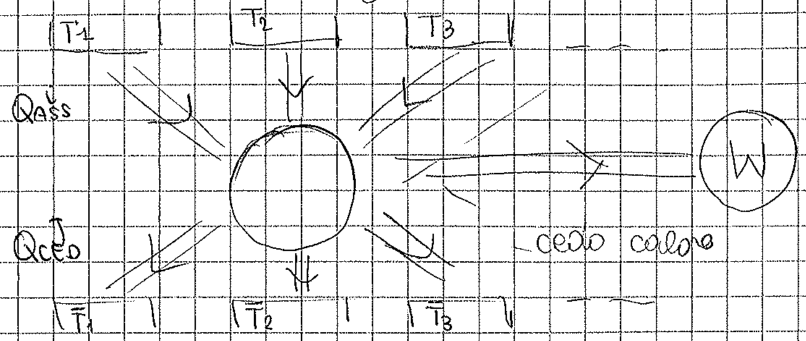
DA A a B $\rightarrow$ Q_{ASS}

DA B a A $\rightarrow$ Q_{CED}

W = AREA se reversibile.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 205 di 276

macchine a più sorgenti (addirittura !)



Ogni sorgente ha una sua temperatura. Ho una moltiplicazione dei calori

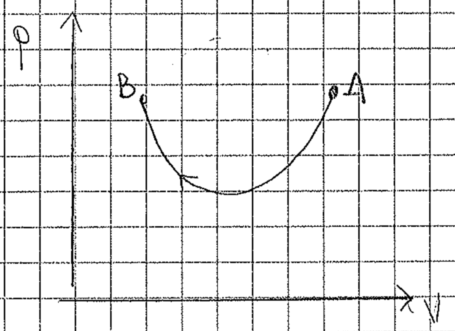
$$Q_{ASS} = \sum_1^n Q_{ASS}^i$$

$$Q_{CED} = \sum_j Q_{CED}^j$$

$$W = Q_{ASS} - |Q_{CED}|$$

macchine reversibili e irreversibili

Reversibile $\Rightarrow$ Posso invertire la percorrenza del ciclo, e il calore e il lavoro/lavori cambiano SOLO segno.



$A \rightarrow B$

ΔU_{AB}

W_{AB} = area

$\Delta Q_{AB} = \Delta U_{AB} + W_{AB}$

$B \rightarrow A$

$\Delta U_{BA} = -\Delta U_{AB}$

$W_{BA} = -AREA = -W_{AB}$

$= -Q_{AB}$

ΔQ

MACCHINA DI CARNOT

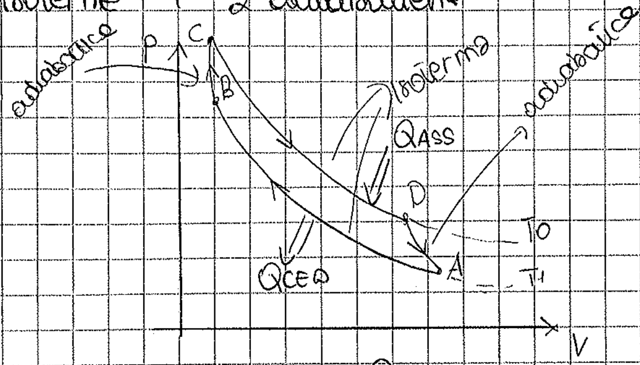
$Q_{CED} < 0$

Reversibile a 2 sorgenti

Usa un gas perfetto

2 isoterme + 2 adiabatiche

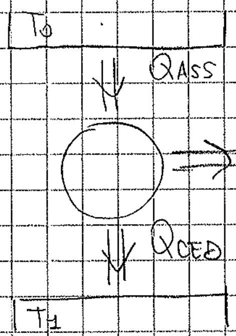
$T_0 > T_1$



$W > 0$

$A \to B$ $\quad \Delta U = 0 \quad (T = cost)$

$W < 0 \quad Q = W \Rightarrow Q < 0$



$\eta = 1 - \frac{|Q_{AB}|}{Q_{CD}}$ ceduto / assorbito

$Q_{AB} = W_{AB} \Leftarrow \Delta U_{AB} = 0$

ISOTERME
$$\begin{cases} Q_{AB} = nRT_1 \ln \frac{V_B}{V_A} < 0 \\ Q_{CD} = nRT_0 \ln \frac{V_B}{V_C} > 0 \end{cases}$$

ADIABATICHE

$B \to C \quad T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1} \qquad T_B = T_1 \quad T_C = T_0$

$T_1 V_B^{\gamma-1} = T_0 V_C^{\gamma-1}$

$D \to A \quad \frac{T_0 V_D^{\gamma-1}}{T_0 V_C^{\gamma-1}} = \frac{T_1 V_A^{\gamma-1}}{T_1 V_B^{\gamma-1}}$

perchè fa la divisione?

$\left(\frac{V_D}{V_C}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma-1} \qquad \frac{V_D}{V_C} = \frac{V_A}{V_B}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 209 di 276

II PRINCIPIO TERMODINAMICA

Principio delle direzionalità delle trasformazioni

direzione privilegiata delle trasformazioni: impossibilità di alcune trasformazioni.

vengono definite nuove energie => ENERGIA UTILE
ENERGIA NON UTILE

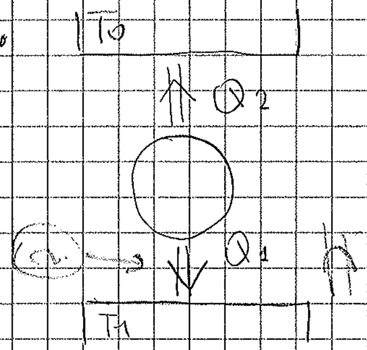
Enunciato senza dimostrazione.

Enunciato di Clausius

Q QUANDO ENTRA POSITIVO
W quando esce (prodotto) positivo

- Il calore fluisce spontaneamente da sorgente calda a una sorgente fredda. (DIR PRIVILEGIATA) spontaneamente $W = 0$

Impossibile una macchina il cui solo risultato sia trasferire calore da T_1 a T_0 con $T_1 < T_0$.



$W = 0$

$Q_1 + Q_2 = 0$

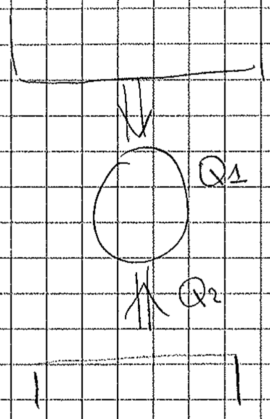
$\Rightarrow Q_2 < 0$

$Q_1 = |Q_2|$

I principio OK

trasferisco calore da una più fredda a quella più calda

Impossibile per il 2° principio.



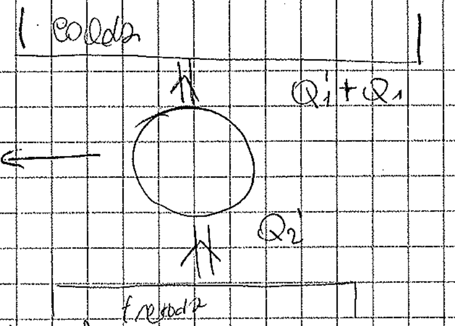
$W = 0$

$Q_1 + Q_2 = 0$

$Q_1 > 0 \quad Q_2 > 0$

IMPOSS. PER IL 1° PRINCIPIO

IMP. PER CLAUSIUS ←



$Q_1' < 0$

$Q_1 > 0$

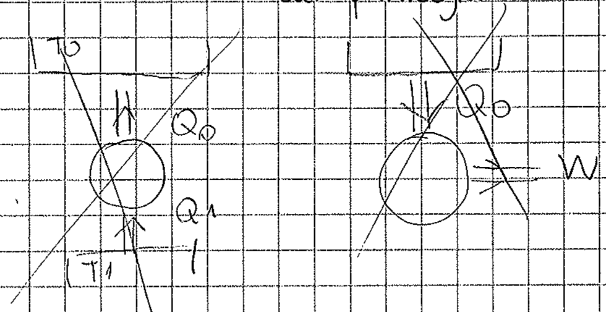
$Q_1' + Q_1 < 0$

→ Hp Assurda

IMPOSS PER CLAUSIUS PERCHE' IL CALORE FORNISCE da quella fredda a quella calda

27/05/2011 II PRINCIPIO

Enunciati
- imposs
- dir. privilegiata



Teorema di Carnot

Teorema di Clausius

Entropia

Carnot

Ogni macchina a 2 sorgenti ha un rendimento η che:

- Se reversibile $\eta_R = 1 - \frac{T_1}{T_0}$ $T_0 > T_1$
- Se irreversibile $\eta < \eta_R$

DIMOSTRAZIONE

1) Macchina ~~rev~~ o irreversibile (x)
2) macchina reversibile

STESSO W

DIMOSTR. η_{REV} = Sempre lo stesso

~~Dom~~ Ipotizziamo che entrambe le macchine siano reversibili

A B

macchina 1 macchina 2

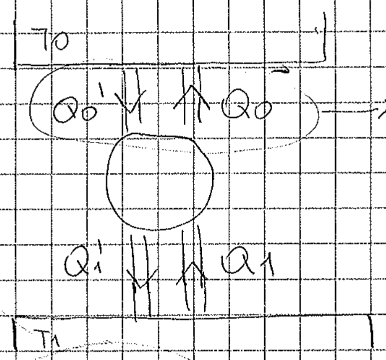
Già dimostrato che $\eta_A \le \eta_B$ (invertendo B)

Facendo lo stesso ragionamento di prima, inverto solo A

∘ Per assurdo $\eta_B > \eta_A$ → impossibile per Clausius

$\eta_\circ \; \frac{W}{Q_0'} > \frac{W}{Q_0} \Rightarrow Q_0 > Q_0'$

INV. A



→ cal. ceduto

↓

Impossibile! Cede calore dal freddo al caldo.

↓

$\eta_B \le \eta_A$

$$\left.\begin{array}{l} ①\; \eta_A \le \eta_B \\ ②\; \eta_B \ge \eta_A \end{array}\right\} \Rightarrow \eta_B = \eta_A$$

ESTENSIONE DELLA DIMOSTRAZIONE: e se W fosse diverso tra le macchine?

$$\eta \le \eta_{REV} \qquad \left\{ \; \eta_{REV} = 1 - \frac{T_0}{T_1} \right.$$

$$\Downarrow \quad \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$W \quad W \qquad\qquad W$$

↓ questa espressione non dipende dal lavoro, quindi se io avessi W', il rendimento sarebbe lo stesso.

$\eta_{REV} = \eta^{REV}$

$$\eta \le \eta_{REV} = \eta_{REV}$$

$$W \quad W \quad \Downarrow W'$$

⇓

il rendimento è indipendente dal lavoro.

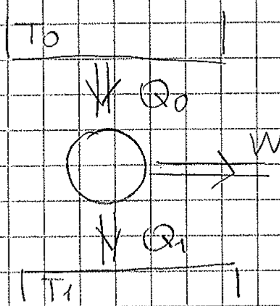
Calore ceduto: $|Q_1| = Q_0 - W_0$

- Esempio 2: macch. reversibile $\eta = 0.3$, $T_1 = T_{AMB}$, $Q_0 =$ NOTO ↪ assorbito

$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_0}$ → Ricavo T_0 $\quad T_0 = \frac{-T_1}{\eta - 1}$

$\eta = \frac{W}{Q_{0\,(ASSORBITO)}} \Rightarrow W = \eta Q_0$

$\frac{Q_0}{T_0} + \frac{Q_1}{T_1} = 0 \Rightarrow$ Ricavo Q_1



FISSATO η
→ $T_0 \Rightarrow T_1$
→ $W \Rightarrow Q_0$

Se invece la macchina fosse irreversibile?

$W = W_0 \quad \eta = 0.3 \quad T_1 = T_{AMB}$

I PR: $\eta = \frac{W}{Q_0} \Rightarrow Q_0 = \frac{W_0}{\eta}$ (non cambia nulla)

II PR: $\eta < 1 - \frac{T_1}{T_0} \quad \frac{T_1}{T_0} < 1 - \eta$

$T_0 > \frac{T_1}{1-\eta}$

IRR. Se fissato η → Fisso W → Q_0
→ T_1 NOTA → $\cancel{T_0}$?

$T_0 > T_{1f}$ Non ho solo un valore

OTTIMIZZAZIONE RENDIMENTO

* $\eta \leq 1 - \frac{T_1}{T_0}$ il rendimento è grande se $\frac{T_1}{T_0}$ è piccolo

T_1 PICCOLA o T_0 GRANDE
sorgente fredda   sorgente calda

TEOREMA DI CLAUSIUS

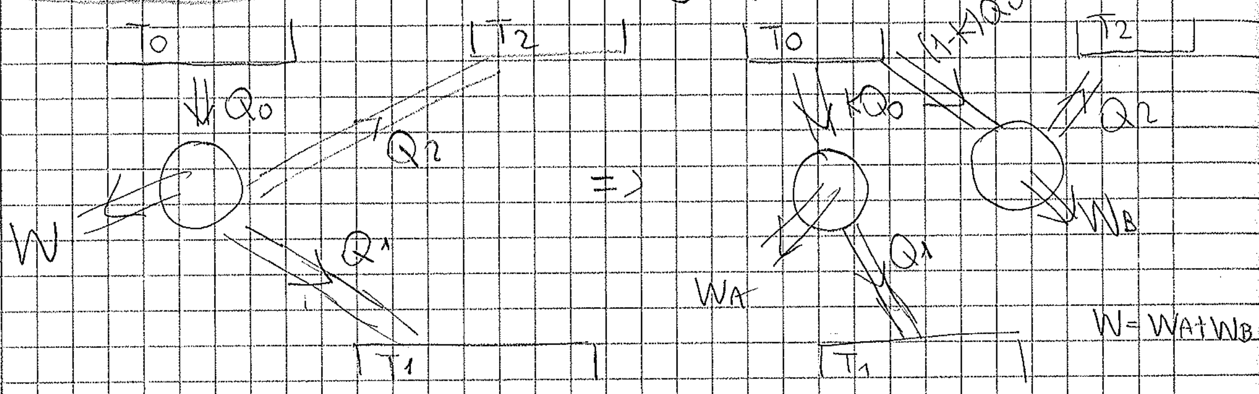
Equivalente a quello di Carnot, ma la macchina è a più sorgenti

- Carnot $\frac{Q_0}{T_0} + \frac{Q_1}{T_1} \leq 0$

$\Downarrow$

- Clausius $\sum \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$

Una macchina a più sorgenti posso sempre immaginarla come una somma di macchine a 2 sorgenti.



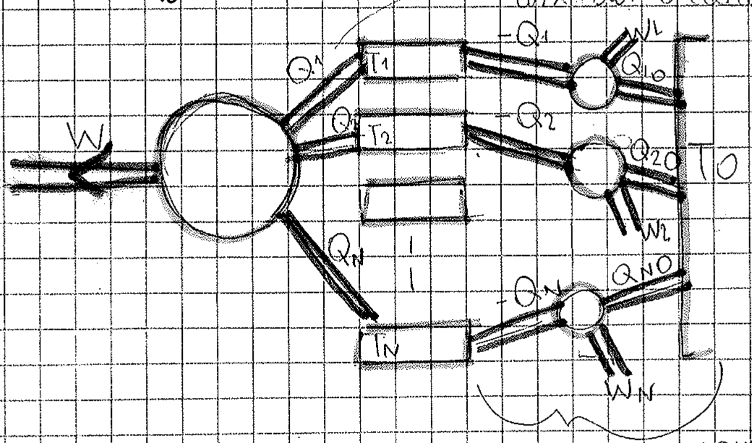
$T_i \rightarrow$ Sorgente i-ma

$Q_i \Rightarrow$ cal. con sorg i

$W \Rightarrow$ LAVORO

Th: $\sum \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$

a seconda del segno Q_i.. sono assorbiti o ceduti



DIM.

- Introduco sorgente a T_0
- Introduco N macchine termiche a due sorgenti $\Rightarrow$ tra i e T_0

Osservazioni

* T_i = ? temperatura delle sorgenti, non del sistema
* Q_i ⇒ calori (positivo se assorbito dal sistema)

calori visti dal sistema ← ceduto dall'ambiente

- ∞ SORGENTI

↳ dQ (con ogni sorgente scambio un calore infinitesimo)

CLAUSIUS ⇒ non ho più una sommatoria:

$$\oint \frac{dQ}{T_{SORG}} \leq 0$$

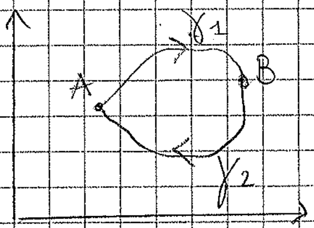
- CLAUSIUS include Carnot (se $N=2$)

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0 \quad \text{(Carnot)}$$

- ENTROPIA -

DEFINIZIONE:

Problema: trasf. ciclica reversibile



$W > 0$ verso orario

Vale Clausius:

$$\oint \frac{dQ}{T_{SORG}} \overset{REV}{=} 0$$

$$\int_{A\,\gamma_1}^{B} \frac{dQ}{T} + \int_{B\,\gamma_2}^{A} \frac{dQ}{T} = 0$$

→ Trasformazione reversibile, posso invertirla

BA ⇒ REVERSIBILE, cambio il segno del calore

$$\int_{A\,\gamma_1}^{B} \frac{dQ}{T_{sorg}} - \int_{A\,\gamma_2}^{B} \frac{dQ}{T_{SORG}} = 0$$

Se reversibile ⇒

$T_{SORG} = T_{SIST} = T$

$$\int_{A\,\gamma_1}^{B} \frac{dQ}{\underset{\substack{\downarrow \\ T_{SIST}}}{T}} = \int_{A\,\gamma_2}^{B} \frac{dQ}{T}$$

Esiste una grandezza il cui integrale non dipende dalla traiettoria.

$$\Delta S_{AC} = \int_A^C \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T_A}\int_A^C dQ = \frac{1}{T_A} Q_{AC} =$$

$$= \frac{1}{T_A} \underbrace{Q_{AC} = \frac{1}{T_A} W_{AC}}_{1^o \text{ principio}} = \frac{1}{T_A} n R T_A \ln\left(\frac{V_C}{V_A}\right) =$$

$$= nR \ln\left[\left(\frac{T_B}{T_A}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot \frac{V_B}{V_A}\right]$$

Sostituisco ϑ ricavato nelle adiabatiche

$$= \frac{nR}{\gamma-1} \ln\frac{T_B}{T_A} + nR \ln\frac{V_B}{V_A}$$ ISOTERMA

$C \to B \to dQ = 0$ (defin. adiabatica rev)

$$\Delta S_{CB} = 0$$

$$\frac{R}{\gamma-1} = \frac{R}{\frac{C_p}{C_v}-1} = C_v \frac{R}{\underbrace{C_p - C_v}_{R}} = C_v$$

$$\Delta S_{AB} \overset{\text{GAS PERF}}{=\!=} n C_v \ln\frac{T_B}{T_A} + nR\ln\frac{V_B}{V_A}$$ (vale per qualunque trasformaz.)

$$\Delta S_{AB} = \int_A^B \frac{dQ_{REV}}{T}$$ (*) IRREVERSI

$$\cancel{\Delta S_{AB} = \int_A^B \frac{dQ_{IRR}}{T}}$$ non ha senso

$\int \frac{dQ_{IRR}}{T} \Rightarrow$ NON E' ENTROPIA!

$$\Delta S_\gamma = \Delta S_{ISOT} + \Delta S_{ADIAB} =$$ (reversibili)

$$= nC_v \ln\frac{T_B}{T_A} + nR\ln\frac{V_B}{V_A}$$

PROPRIETA':

- ISOCORA $\Rightarrow V_B = V_A$, $\Delta S > 0 \Rightarrow T_B > T_A$

L'entropia aumenta se aumenta la temperatura

- ISOTERMA $\Rightarrow$ se $T_B = T_A$ $V_B > V_A \Rightarrow \Delta S > 0$
- ADIAB. REVERS. $\Rightarrow \Delta S = 0$

ENTROPIA ENTROPIA

Universo

$dS_{UNIV} = dS_{AMB} + dS_{SIST}$

Se trasf. reversibile $dS_{UNIV} = 0$

Principio Accrescimento Entropia

$\forall$ trasformazione

$\Delta S_{UNIV} \geq 0$

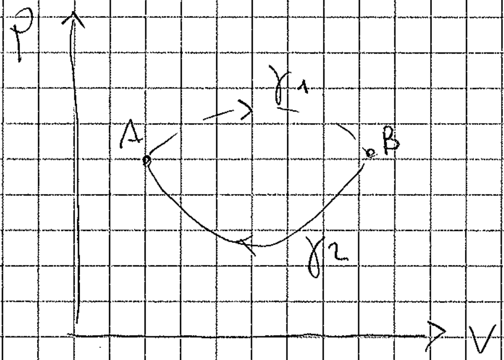
$\forall$ trasf. l'entropia dell'universo aumenta o rimane costante (se trasformazione reversibile)

$\Rightarrow$ ~~$\Delta S_{SIST} \geq 0$~~ NON VALIDO

$\Rightarrow$ Macchina termica $\Delta S_{UNIV} = \Delta S_{AMB} = 0$

DIMOSTRAZIONE:

Consideriamo un ciclo termodinamico composto da parte reversibile e parte irreversibile.



$$\oint_{ciclo} \frac{dQ}{T} \leq 0 \quad \text{CLAUSIUS}$$

dQ: CAL. SISTEMA

T: T_{AMB} / SORGENTE

$$\int_{\gamma_1} \frac{dQ_{SIST}}{T_{AMB}} + \int_{B \to A} \frac{dQ_{SIST}}{T_{AMB}} \leq 0$$ — non è 1 entropia

essendo revers. $T_{AMB} = T_{SIST}$

" " posso cambiare verso

NON È ΔS_{SIST} (perché calcolato lungo la trasf. irreversibile)

$$-\int_{\gamma_1} \frac{dQ_{AMB}}{T_{AMB}} - \int_{\gamma_2, A \to B} \frac{dQ_{SIST}}{T_{SIST}} \leq 0$$

$$-\Delta S_{AMB\,\gamma_1} - \Delta S_{SIST\,\gamma_2} \leq 0$$

$\Delta S_{SIST\,\gamma_2} = \Delta S_{SIST\,\gamma_1}$: non dipende dalla traiett.

① perché dQ_{SIST} diverso dQ_{AMB} ?

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 225 di 276

- Adiabatica irreversibile

$dQ = 0 \Rightarrow dQ^{IRR} = 0$

$\Delta S_{SIST} = \int_{\gamma \neq \text{ADIAB. REV.}} \dots \int \frac{dQ_{REV}}{T} \neq 0$

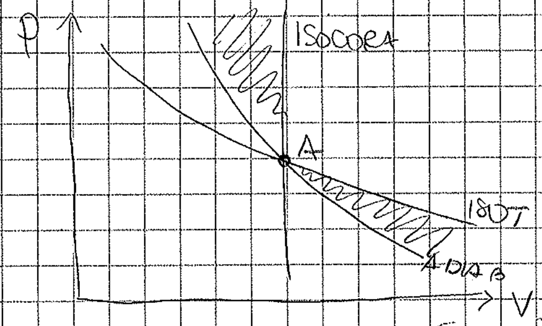
$\Delta S_{AMB} = \int \frac{dQ_{AMB}}{T} = \int -\frac{dQ_{IRR}}{T} = 0$

↓

Dip. dalla trasformaz

Siccome $\Delta S_{UNIV} > 0$

$\Delta S_{\underset{AD.\ IRR}{SIST}} \geq 0$



- I PRINCIPIO $\Delta U = -W$ $(Q = 0)$

$\Rightarrow V\uparrow \Rightarrow W > 0 \Rightarrow \Delta U < 0 \Rightarrow T\downarrow$
B sotto isot

$\Rightarrow V\downarrow \Rightarrow T\uparrow$ B sopra isot.

- II PRINCIPIO

$\Delta S > 0 \Rightarrow S_B > S_A \Rightarrow$ B sopra ADIAB REV

DIAGRAMMI T, S

$\Rightarrow$ Var. di Stato $\left.\begin{matrix} p, V, T \\ U, S \end{matrix}\right\}$ 5 variabili di stato

$STATO_A = (p_A, V_A) \Rightarrow$ PUNTO NEL DIAGRAMMA DI CLAPEYRON

↳ TRASF. REV. $p = f(V)$

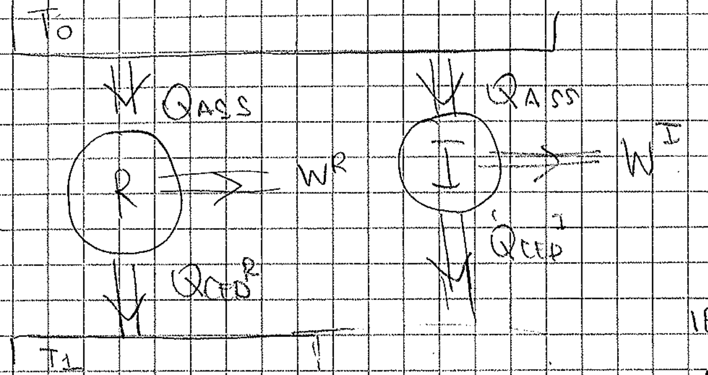
$W = \int p\,dV = AREA$

$$\cancel{Q_{ASS}} - |Q_{CED}^{R}| > \cancel{Q_{ASS}} - |Q_{CED}^{I}|$$

$$W_{IRR} = Q_{ASS} - |Q_{CED}^{IRR}|$$

ΔE : ENERGIA INUTILIZZABILE

$\Delta E = W^{REV} - W^{IRR}$ a parità di calore assorbito



REV $\Rightarrow$

$$\eta = \frac{W^R}{Q_{ASS}} = \left(1 - \frac{T_1}{T_0}\right)$$

$$W^R = Q_{ASS}\left(1 - \frac{T_1}{T_0}\right)$$

IRR $\Rightarrow$

$$W^I = Q_{ASS} - |Q_{CED}^I|$$

$$\Delta E = Q_{ASS}\left(1 - \frac{T_1}{T_0}\right) - \left[Q_{ASS} - |Q_{CED}|\right]$$

$$= -Q_{ASS} \cdot \frac{T_1}{T_0} + |Q_{CED}| = -Q_{ASS}\frac{T_1}{T_0}$$

(6) $$\Delta E = -T_1\left[\frac{Q_{ASS}}{T_0} - \frac{|Q_{CED}|}{T_1}\right]$$

cambio segno rispetto alla macchina

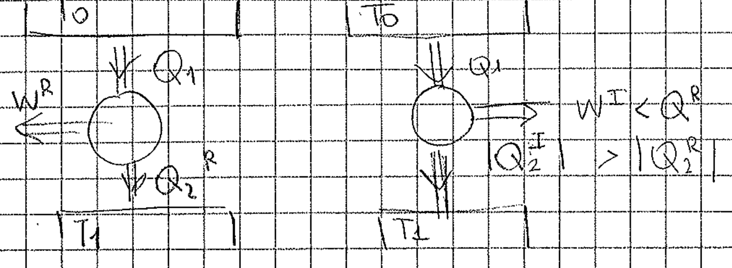
$$\frac{Q_{ASS}}{T_0} = -\frac{Q^{SORG.0}}{T_0} = -\Delta S^{SORG.0}$$

$$\Delta E = T_1 \Delta S_{\substack{SORG \\ UNIV}}$$

(rappresenta come un calore perso non più recuperabile)

In qualunque trasf. ciclica ho una quantità di energia che viene persa e non è più recuperabile.

PRODOTTO TRA T DELLA SORGENTE FREDDA E LA VARIAZIONE DI ENTROPIA DELLE SORGENTI, CIOE' DELL'UNIVERSO.



Esempio palline:

BLU = 4
ROSSE = 2
VERDI = 1
} ENERGIA

Applicando una trasformazione:

- Stato iniziale:

1B 3R 0V ⟹ En. totale = 8

Dopo la trasformazione, il numero di palline è cambiato, ma l'energia del sistema rimane invariata:

1B 0R 4V En. totale = 8

Stato finale

$\Delta E = 0$

Se INIZ = BB → 1 configurazione (un solo modo)

FINALE:

B	V	V	V	V
V	B	V	V	V
V	V	B	V	V
V	V	V	B	V
V	V	V	V	B

→ 5 configurazioni: a parità di energia, ho 5 modi per disporre le palline.

Se N = numero di configurazioni, si dimostra che:

$$S = K_B \ln N$$

K_B = costante di Boltzmann

Se $S \uparrow$, → $N \uparrow$

S MISURA "DISORDINE"

$\Delta S_{UN} \geq 0$ ⟹ ∀ trasformazione aumenta il disordine.

$S = K_B \ln N$

PROPRIETÀ:

a) N al minimo: $N = 1$ ⟹ $S_{min} = 0$

accade a Temperatura nulla → $V_{PART} = 0$ → 1 configurazione
sistema congelato — particelle tutte identiche

IMPOSSIBILE T = 0

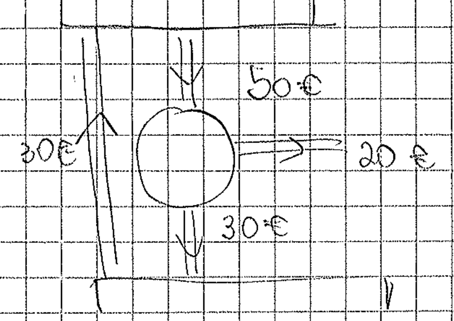
b) ADDITIVA:

Dato un sistema C composto da due parti A e B

Se io ho N_A ed N_B configurazioni per A e B. Quanto vale il numero di configurazioni totali?

IRR $\Rightarrow$ I soldi finali sono gli stessi + monete di prima
↳ non posso usarle

Ci sono le trasf. reversibili: il libro costa quanto una banconota



III PRINCIPIO TERMODINAMICA

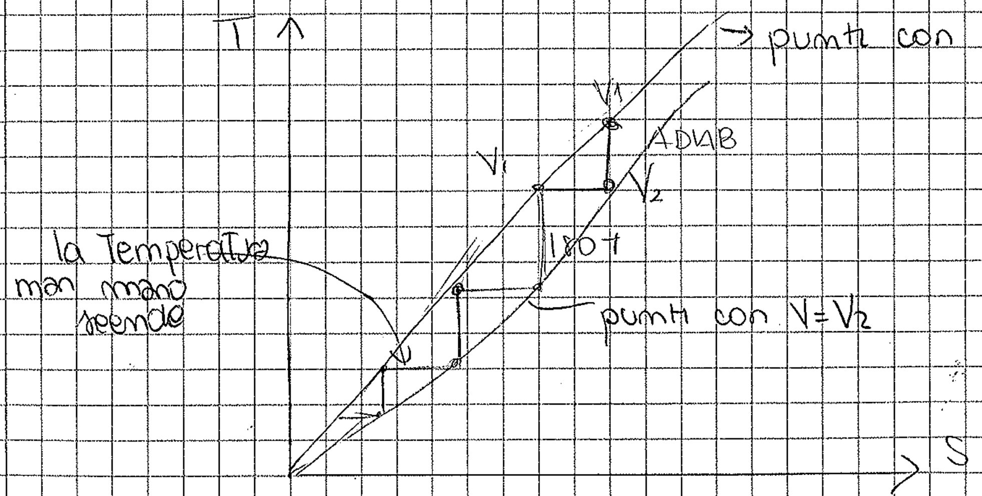
Non esiste alcuna trasformazione che permetta di raggiungere $T = 0$.

Realizzare raffreddamento:

$\Rightarrow$ i) Volume V_1 $\Rightarrow$ espando (adiabatica) a $V_2 > V_1$ $\Rightarrow$ $T_2 < T_1$

ii) Riduco il volume senza cambiare Temperatura, isoterma $\rightarrow$ compressione a V_1 $\Rightarrow$ $T_3 = T_2$

iii) Espando ancora il volume per ridurre T e poi riduco il volume.



Tutte le isocore per $S = 0$ hanno $T = 0$

- A ⇒ $pV \sim K$ ⇒ a $T = T_A$ l'oggetto non entra mai nella fase liquida o solida

↓

$T = T_A$ ⇒ GAS perchè non posso mai portarlo

- C ⇒ $T = T_C$ Temper. critica: Temperatura limite

Se $T > T_C$ il gas non può essere liquefatto
Se scendo al di sotto posso liquefarlo.

- D (al di sotto della T_C) $T_D < T_C$

i) Riduco V, p cresce → vapore

p_D → pto in cui incontro la campana; per $p = p_D$ e $T = T_D$ il vapore diventa liquido (ho una particolare pressione in cui ho la liquefazione)

La press. di condensazione è unica per ogni $T < T_C$.

- Muovendomi orizzontalmente alla $p = p_D$ ho un isobara, $V \downarrow$ ⇒ $p = cost = p_D$. Ad un certo volume V_D il gas diventa solido. In seguito, piccole variazioni di volume cambiano la pressione di molto. (V dim ~~molto~~ poco, p aumenta molto)

- $T = T_E$, caso limite: i) $V \downarrow$ $p \uparrow$ $pV \sim K$ vapore

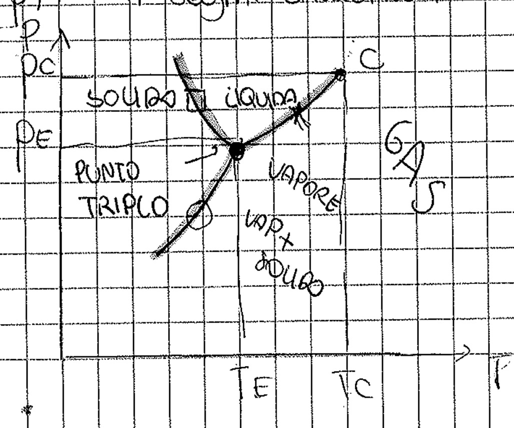
Ad una certa $p = p_E$ ho la coesist. di L e S + V (V variabile)

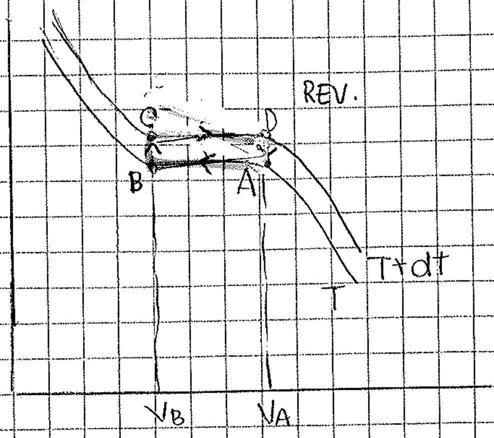
→ $p = p_E$ e $T = T_E$ PUNTO TRIPLO

man mano che diminuisco il volume, $p = p_E$ fino a $V = V_E$

- A $V = V_E$ la sostanza è solida $V \downarrow$ poco, $p \uparrow$ molto

Diagramma p, T (i segm. orizzontali diventano un punto)





ISOTERME REALI INFINITES. VICINE

Tra queste due costruiamo una macchina termica

$$\eta = \frac{W}{Q_{ASS}} = \underbrace{1 - \frac{T_f}{T_C}}_{\text{Revers.}}$$

Quanto vale il lavoro?

W - AREA $= (V_A - V_B) \cdot dp$

$Q_{ASS} = \lambda \rightarrow$ calore latente

$T_f = T \qquad T_C = T + dT$

Perché $T_f = T$?
Quando parto da A?

$$\frac{(V_A - V_B)\, dp}{\lambda} = \frac{\cancel{T} + dT - \cancel{T}}{T + \cancel{dT}} \rightarrow \text{trascurabile rispetto a } T$$

$$\left\{ \frac{dp}{dT} = \frac{\lambda}{T(V_A - V_B)} \right\} \text{ formula di Clapeyron}$$

TEORIA CINETICA DEL GAS PERFETTO

1) INTRODUZIONE

↳ Sistema termodinam $\Rightarrow$ N particelle
→ Termodin. $\Rightarrow$ studiare pr. medie p, T, V, S
→ Meccanica dei sistemi : pr. singole particelle
$m, \vec{v}, \vec{p}, K$

→ Teoria cinetica → LEGAME DESCRIZIONE MECCANICO E TERMODIN.

ENERGIA CINETICA E TEMPERATURA

2) GAS PERFETTO

- particelle identiche (con la stessa massa) che si muovono di moto disordinato e isotropo (uguale in tutte le le direzioni) $\Rightarrow$ ogni direzione equivale a un' altra
- m trascurabile rispetto al volume
$/V$