



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 874

DATA: 12/03/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Lacirignola

MATERIA: Controlli Automatici

Prof. Cerone

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

Controlli

Automatici

~~III~~ ANNO
ING. ELETTRICA

PROF.
V. CERONE

~~Fedica~~

LEZIONE 2

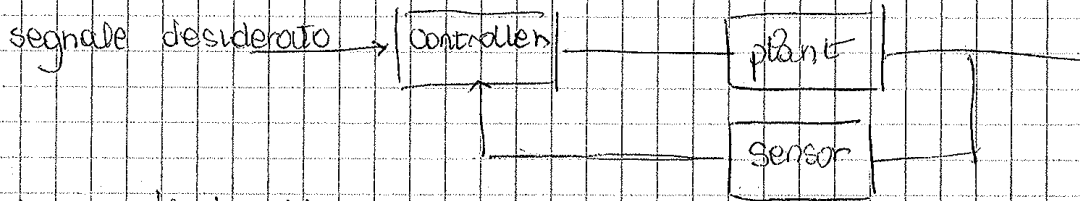
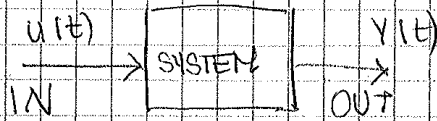
- Feedback Control Systems? (15/17/18) -

6/3/13

CONTROLLO - VERIFICA, MONITORAGGIO.

↳ dispositivo automatico, senza operatore

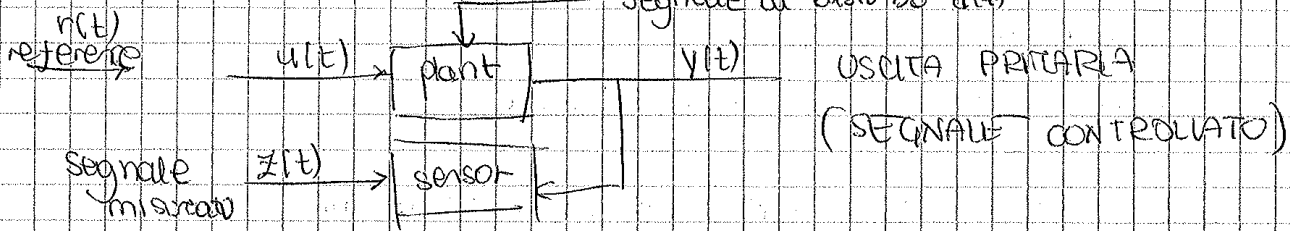
Definizione di sistema:



Problema di tracking:

il disturbo $d(t)$ non può essere manipolato, mentre il comando si.

$z(t)$ è il segnale misurato, esso contiene le informazioni sull'impianto
segnale di disturbo $d(t)$



$$y(t) \approx r(t)$$

Assegnato un segnale di riferimento $r(t)$, cercare un opportuno ingresso $u(t)$ affinché l'uscita segua il riferimento nella migliore maniera possibile ($\forall t \geq t_0$)

NON SEMPRE SI PUÒ TROVARE UN SEGNALE $u(t)$ MANIPOLABILE (PERCHÈ POSSO AVERE DEI LIMITI)

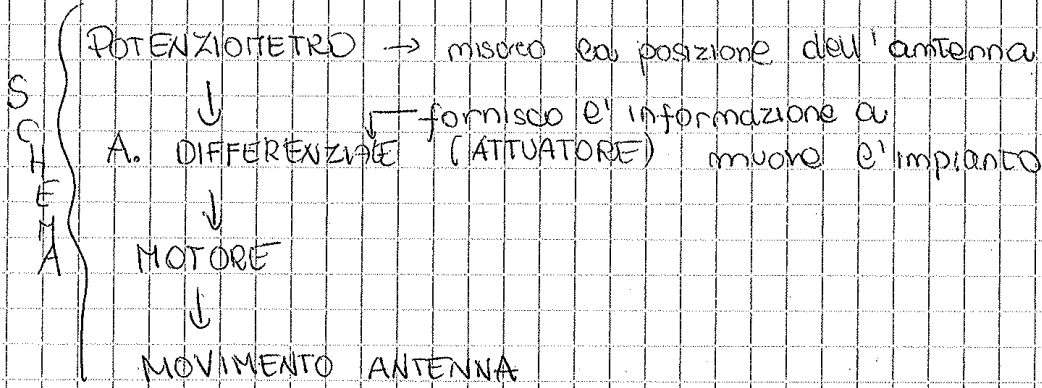
Bisogna considerare:

- i disturbi (che non si possono conoscere a priori);
- parametri fisici incerti → disturbi parametrici;
- segnale misurato affetto da rumore;

ESEMPI DI SISTEMI DI CONTROLLO

- Controllo di posizione di un antenna (a parabola) **RADIOANTENNA**
inseguire una stella, un satellite

Potenzimetro per modificare la posizione angolare



Il controllore elabora il segnale da inviare al motore.

Quali sono i disturbi? Vento, che agendo sulla sup. della parabola, sposta l'antenna dalla posiz. desiderata.

In questo caso, il riferimento viene fornito dal potenziometro, ovvero dalla posizione del satellite in quel momento d'ingresso e la tensione di ingresso del motore elettrico.

- Toaster

Sistema ad anello aperto

- **REGOLATORE LIVELLO**

Uscita da controllare: livello dell'acqua

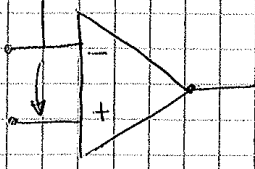
Ingresso

Galleggiante → sistema di regolazione (con retroazione)

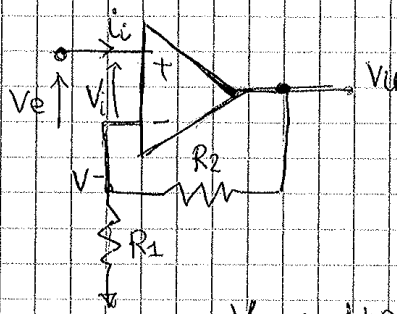
Disturbi: vapore che fuoriesce → aumento temperatura

↳ pioggia (se fosse ad anello aperto)

ESEMPIO : AMPLIFICAT. OPERAZIONALE



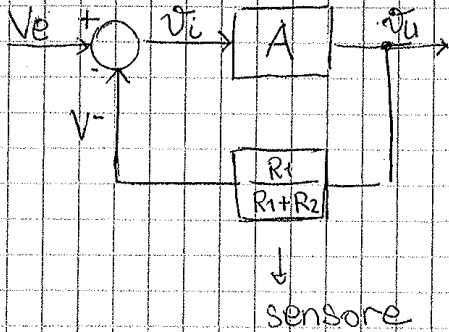
A molto grande $\rightarrow \infty$
 $\sim 10^5$
 $Z_i \neq 0$



$$\frac{V_u}{V_e} \approx 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

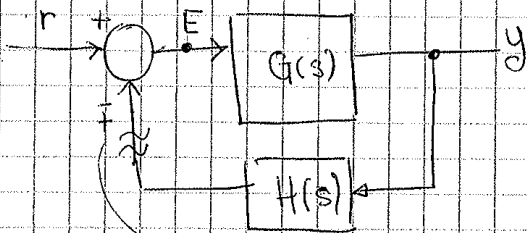
$$\begin{cases} V_u = A \cdot v_i \\ v_i = \frac{v_u}{A} \approx 0 \\ i_i = \frac{v_i}{Z_i} \approx 0 \end{cases}$$

CONSTRUISCO SCHEMA DI SIMULAZIONE



$$V^- = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot V_u$$

SISTEMA DI CONTROLLO CON RETROAZIONE



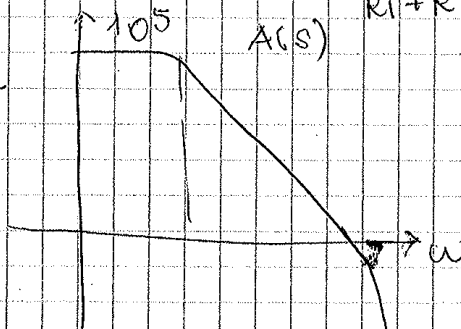
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 \pm G(s)H(s)}$$

Nel nostro caso :

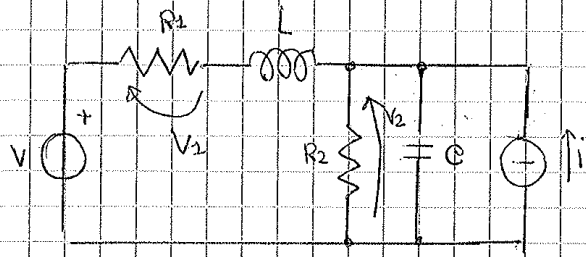
$$\frac{V_u(s)}{V_e(s)} = \frac{A}{1 + A \frac{R_1}{R_1 + R_2}}$$

$$\xrightarrow{A \rightarrow \infty} \frac{V_u}{V_e} \approx \frac{1}{\frac{R_1}{R_1 + R_2}} \approx \boxed{1 + \frac{R_2}{R_1}}$$

In realtà A non è costante



ESEMPIO 1



$$1) V_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

$$2) i_C(t) = C \frac{dV_C(t)}{dt}$$

Abbiamo 2 variabili di stato

$$3) V(t) = V_1(t) + V_L(t) + V_2(t)$$

$$4) i_L(t) + i_C(t) = i_2(t) + i_C(t)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} i_L \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$u(t) = \begin{bmatrix} V \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}_1 = \frac{di_L}{dt} = \frac{V_C}{L} = \frac{V - V_1 - V_2}{L} = \frac{u_1 - R_1 i_L}{L}$$

$$\dot{x}_1 = -\frac{R_1}{L} x_1 - \frac{1}{L} x_2 + \frac{1}{L} u_1 \quad \text{1}^\circ \text{ eqvaz. di stato}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{dV_C}{dt} = \frac{i_C}{C} = \frac{i + u_2 - i_2}{C} = \frac{u_2 + x_1 - \frac{V_2}{R_2}}{C}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C} x_1 - \frac{1}{R_2 C} x_2 + \frac{1}{C} u_2 \quad \text{2}^\circ \text{ eqvaz. di stato}$$

$$y_1 = V_1 = R_1 \cdot i_L = R_1 x_1$$

$$y_2 = V_2 = x_2$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{R_2 C} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Non ho legame diretto ingresso uscita

ESEMPIO 4

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -R_3 \end{bmatrix}$$

↑
Paga l'uscita
al numero di stati

righe → num. di uscite

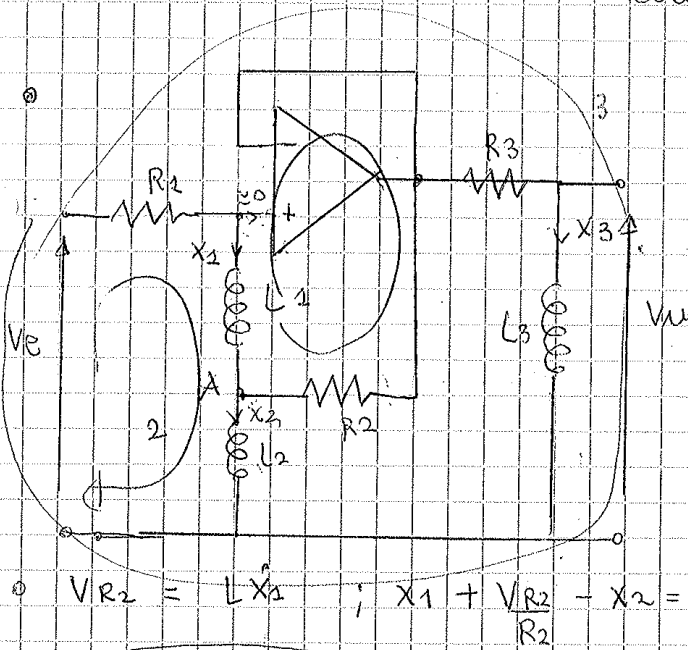
colonne → num. di stati

$$D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

→

righe → num. di uscite

colonne → num. di ingressi



$$\begin{cases} x_1 = i_{L1} \\ x_2 = i_{L2} \\ x_3 = i_{L3} \end{cases}$$

Supponendo di fare il calcolo con guadagno ampéf. molto elevato

$$V_{R2} = L \dot{x}_1 \quad ; \quad x_1 + \frac{V_{R2}}{R_2} - x_2 = 0$$

$$\left. \begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R_2}{L_1} x_1 + x_2 \end{cases} \right\} \text{1}^\circ \text{ equaz. di stato}$$

$$V_e - R_1 x_1 - L_1 \dot{x}_1 - L_2 \dot{x}_2 = 0$$

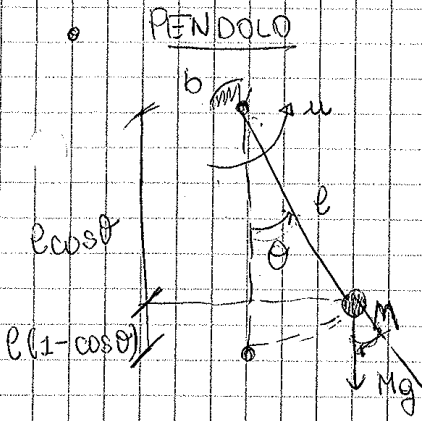
Sostituendo \dot{x}_1 ottengo:

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{L_2} \left\{ (R_2 - R_1) x_1 - R_2 x_2 + V_e \right\} \text{2}^\circ \text{ equaz. di stato}$$

$$V_e - R_1 x_1 - R_3 x_3 - L_3 \dot{x}_3 = 0$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{L_3} \left\{ -R_1 x_1 - R_3 x_3 + V_e \right\} \text{3}^\circ \text{ equaz. di stato}$$

$$V_u = V_e - R_1 x_1 - R_3 x_3 - y$$



u : ingresso
 Uscita: energia Totale

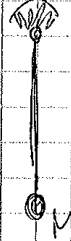
$$x_1 = \theta$$

$$x_2 = \dot{\theta}$$

$$J = M l^2$$

$$M l^2 \ddot{\theta} = u - M g l \sin \theta - b \dot{\theta}$$

Se $\theta = 0$



attinto viscoso

en. cinetica

$$y = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + M g l (1 - \cos \theta)$$

energia pot. rispetto a $\theta = 0$

Scriv. eq. di stato

TRASFORMAZ. DI USCITA
 NON LINEARE

13/03/13

Rappresentazione ingresso - stato - uscita

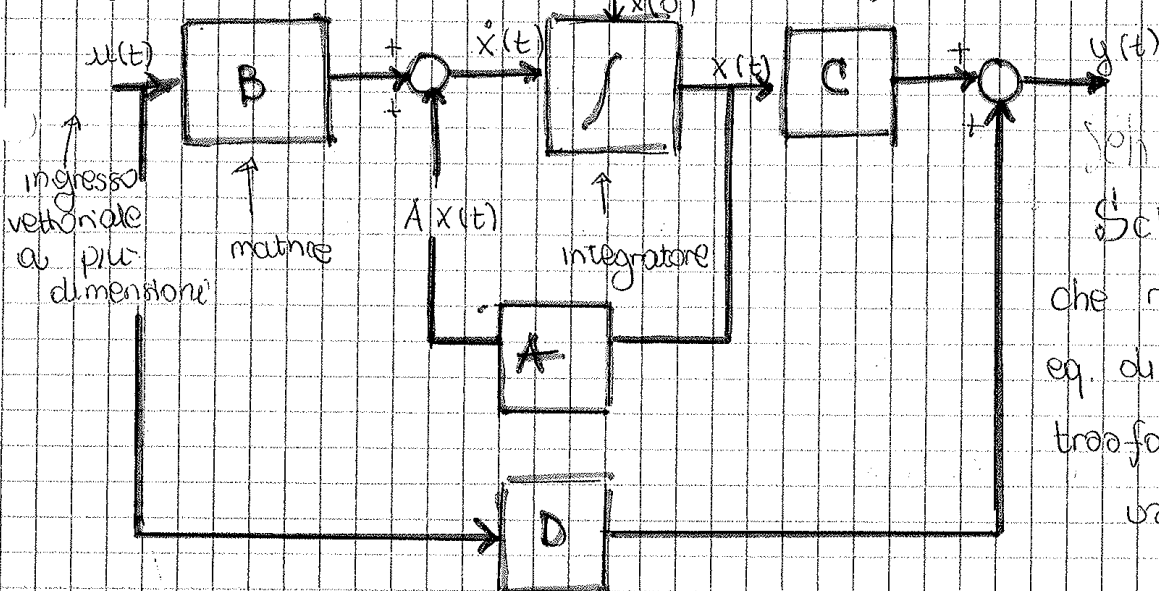
PER SIMULINK

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$$

→ L.T.I → equaz. di stato

$$y(t) = C x(t) + D u(t)$$

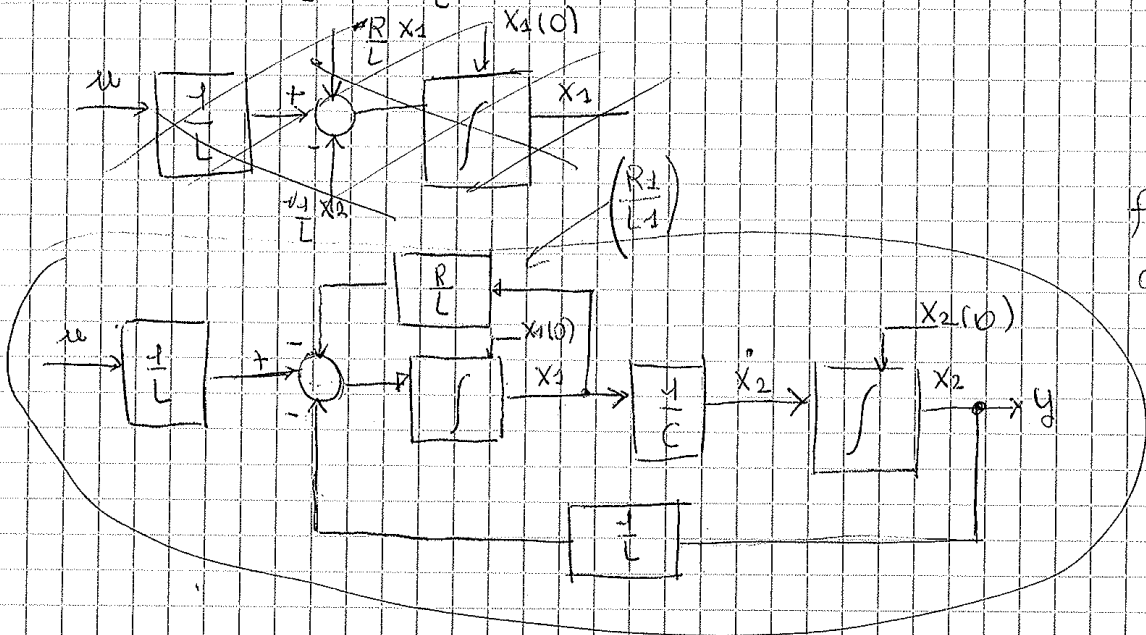
→ trasformaz. di uscita



Sim
 Schema

che racchiude
 eq. di stato e
 trasformaz. di
 uscita

$$\dot{x}_2 = -\frac{R}{L}x_1 - \frac{1}{L}x_2 + \frac{1}{L}w$$

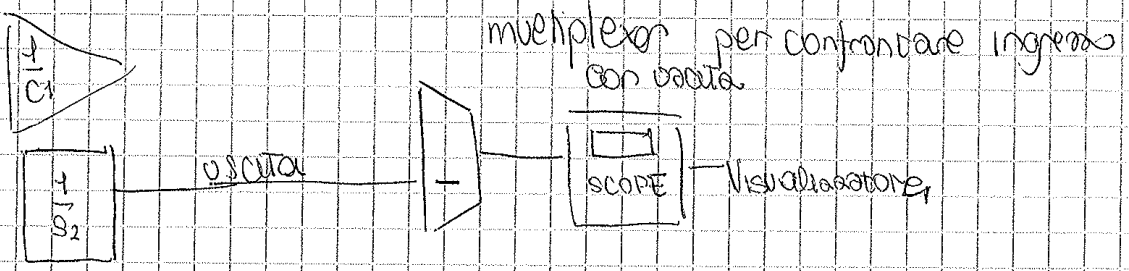
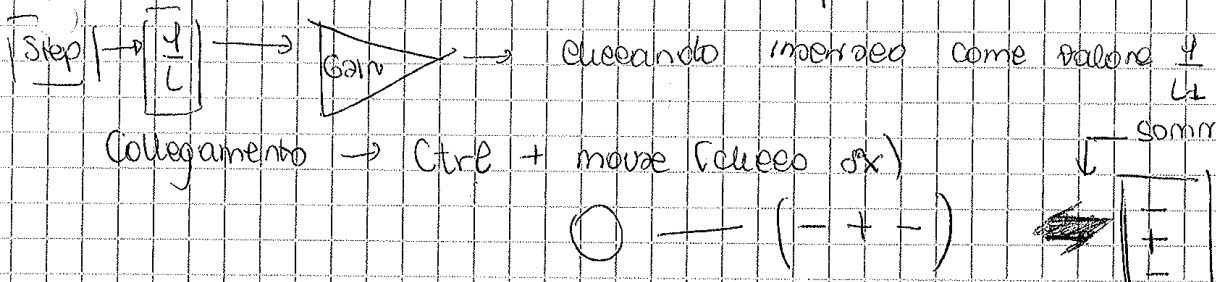


filtro p/b
del III ordine

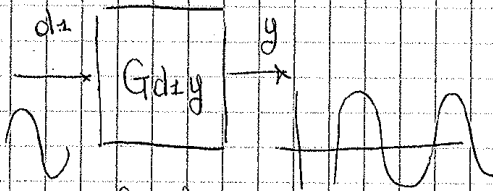
- $R = 68 \Omega$
- $C = 4 \mu F$
- $L = 10 \text{ mH}$

xi 10:58
del nome

Simulink → Librerie — Commonly used Block (integrazione)
 → Apro nuovo file — Gain (coeff)
 — Sum
 — Scope → per Es fine
 — Mux
 — Sources (per i generatori)
 — Sine wave
 — gen. di segnali
 — Step

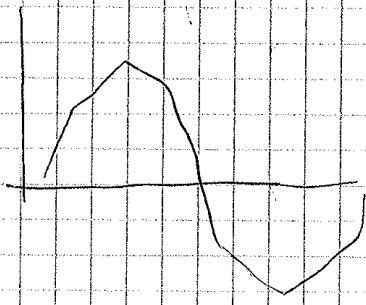


SCELTA DEI PARAMETRI DI SIMULAZIONE



Se il sistema è lineare, in uscita ho un segnale della stessa natura ma con fase e ampiezza diversa

SE IL SEGNALE È SINUSOIDALE SCEGLIO L'INTERVALLO DI INTEGRAZIONE IN BASE AL PERIODO. (4-5-10 VOLTE IL PERIODO)

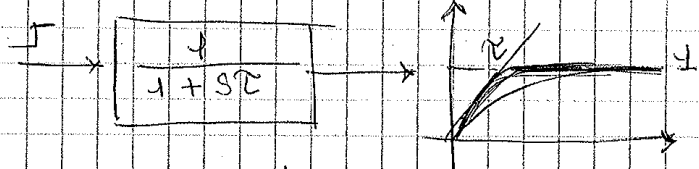


← se vedo una cosa simile diminuisco il passo di integrazione



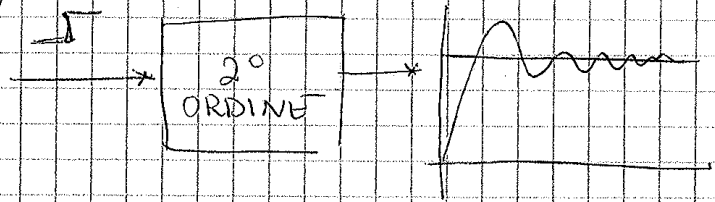
$\frac{T}{100}$ ← valore medio del passo di integrazione

EX: sistema del 1° ordine



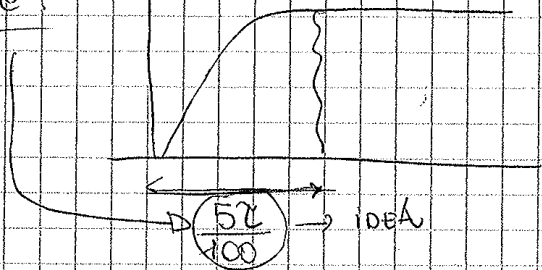
STABILE

SITUAZIONE IN 4-5τ TEMPO: (≈ 10τ)!



Vedendo per natura del sistema posso avere un'idea dell'usata (del sistema).

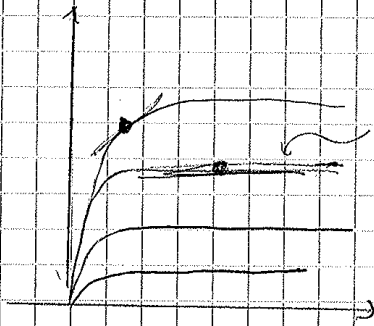
Per quanto riguarda 1° ordine, come scegliere il passo di integrazione?



15/03/13

LINEARIZZAZIONE SISTEMI DINAMICI NON LINEARI

Introduzione

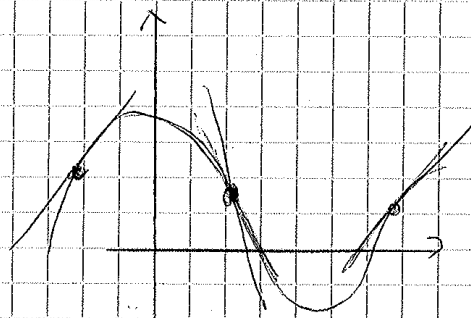
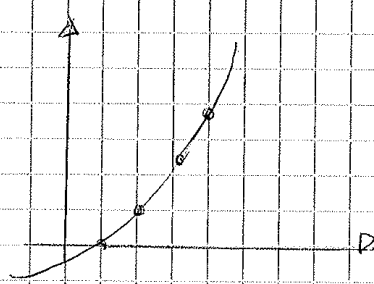


Caratteristica BJT non lineare

VALUTAZIONE NELL'INTORNO

↓
APPROSSIMAZIONE LINEARE NEL

PUNTO PER PICCOLE VARIAZIONI



Definiamo un ^{DI}PUNTO EQUILIBRIO, che rappresenta un'opportuna soluzione della equaz. di stato.

Pensiamo di avere un ingresso costante $u(t) = \bar{u} \in \mathbb{R}^p$ e un ~~valore~~ [↑] valore iniziale.
INGRESSO COSTANTE

Se lo stato ha un movimento costante, ed anche derivata e moltiplicata.

$$\dot{x}(t) = 0 \rightarrow f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$$

in queste condizioni si determinano le variabili di equilibrio \bar{y}

Il punto di equilibrio di un sistema lineare si trova annullando

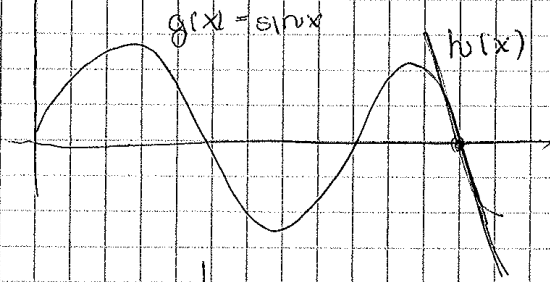
la domanda $Ax(t) + Bu(t) = 0$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} Ax = -Bu \\ \bar{y} = Cx + Du \end{cases}$$

LINEARIZZAZIONE

$$f(x) = f(x_0 + \delta x) = f(x_0) + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \delta x \quad \delta x = h(x)$$



SISTEMA LINEARIZZATO

EX:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

$$y(t) = g(x(t), u(t))$$

$$u(t) = \bar{u} + \delta u(t) \quad \leftarrow \text{ingresso}$$

$$x(0) = \bar{x} + \delta x(0) \quad \leftarrow \text{condizioni iniziali}$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

NON È POSSIBILE ADDUCARE LA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI, IL SISTEMA È NL.

↳ Approssimazione:

$$x(t) \approx \bar{x} + \delta x(t)$$

↓
valore dello stato all'equilibrio

come valutare?

Per trovare $\delta x(t)$:

$$\delta \dot{x}(t) = A \delta x(t) + B \delta u(t) \quad \leftarrow \text{SISTEMA LINEARE}$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad \rightarrow \text{Sistema linealizzato}$$

SISTEMA PERTURBATO:

$$\delta x(t) = x(t) - \bar{x} \quad \rightarrow \text{STATO PERTURBATO}$$

$$\Rightarrow x(t) = \bar{x} + \delta x(t)$$

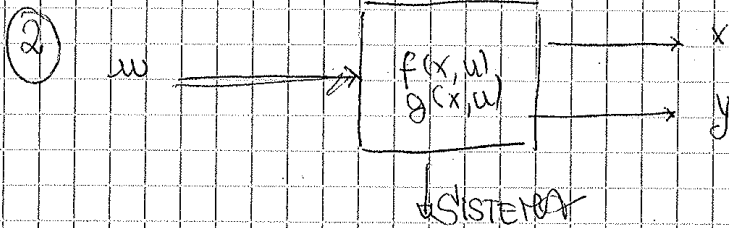
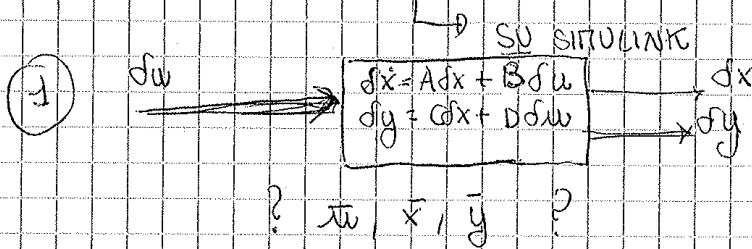
$$\delta u(t) = u(t) - \bar{u} \quad \rightarrow \text{INGRESSO PERTURBATO}$$

$$\textcircled{1} \quad \left. \frac{\partial g(x,u)}{\partial u} \right| = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} \\ \frac{\partial g}{\partial u} \end{bmatrix} = [0]$$

↓ legame tra
ingresso e uscita

Il comando Matlab che trova le matrici di un sistema linearizzato

- Come paragonare i due comportamenti di un sistema linearizzato e un sistema lineare?



} Come
confrontare
il comportamento
dei 2 sistemi?

Trovo le matrici A, B, C, D del sistema linearizzato

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bdu \\ \dot{y} = cdX + Ddu \end{cases} \rightarrow \text{Calcolo Jacobiano}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\bar{x}, \bar{u}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-3K\bar{x}_1^2}{M} & \frac{-B}{M} \end{bmatrix}$$

Calcolato all'equilibrio

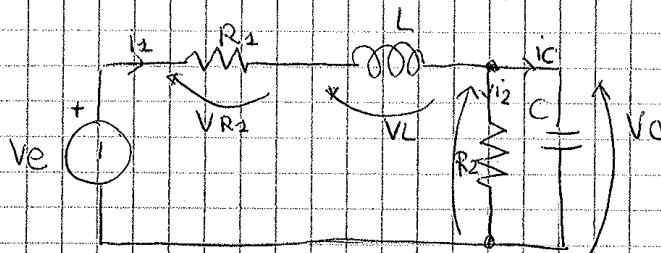
$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}_{\bar{x}, \bar{u}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\bar{x}, \bar{u}} = \begin{bmatrix} 0 & M\bar{x}_2 \end{bmatrix}_{\bar{x}, \bar{u}}$$

una sola uscita

$$D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{ingresso e uscita non legate}$$

• RETE ELETTRICA COMPONENTI NON LINEARI



corrente non lineare

$$u = Ve = 2V$$

$$x = \begin{bmatrix} V_0 \\ i_1 \end{bmatrix}$$

$$V_0 = VR_2$$

$$y = i_2$$

$$VR_1 = \ln(2i_1) = \ln(2x_2)$$

$$VR_2^3 = \theta i_2 \Rightarrow x_1^3 = \theta i_2$$

$$\rightarrow (VR_2 = V_0 = x_1)$$

$$V_L = L \frac{di_1}{dt} \Rightarrow V_L = L \cdot \dot{x}_2$$

$$i_c = C \frac{dV_c}{dt} \Rightarrow i_c = C \cdot \dot{x}_1$$

②

11000

fattore
rispetto
a x_2

$f_{zero}(x_2) = 2 - x_2 - \log(2 \cdot x_2^3 / 8) = 0$
(oppure definisco la funzione F)

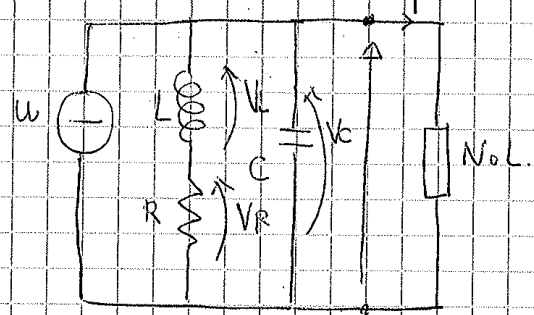
$F = 2 - x_2 - \log(2 \cdot x_2^3 / 8)$;

$x_2 = f_{zero}(F, 2)$

num. intorno
al quale si
deve
trovare
la radice

$x_2 = s = 1,7344$

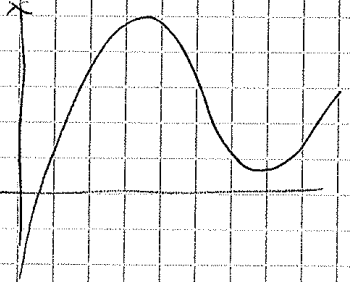
● RETE ELETTRICA ELEMENTO NON LINEARE



$i = -gV + kV^3$

$g, k > 0$

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} iL \\ Vc \end{bmatrix}$



Il comportamento del
circuito è simile al
DIODO TUNNEL

$V_L = L \frac{diL}{dt}$; $i_C = C \frac{dV_C}{dt}$

$V_L + V_R - V_C = 0 \Rightarrow L \dot{x}_1 + R x_1 - x_2 = 0$

$\dot{x}_1 = \frac{1}{L} (-R x_1 + x_2) = f_{x_1}(x, u)$ 1° EQ DI STATO
 $V_C = x_2$

$u - iL - i_C - i = 0 \Rightarrow u - x_2 - C \dot{x}_2 - gV - kV^3 = 0$
 \downarrow
 x_2^3

$\dot{x}_2 = \frac{1}{C} (-x_2 + g x_2 - k x_2^3 + u) = f_{x_2}(x, u)$ 2° EQ DI STATO

Calcolare i punti di equilibrio
con l'ingresso pari a 0. ($u = \bar{u} = 0$)

RISPOSTA STATO E USCITA DI UN SISTEMA LTI DINAMICO

- Nel dominio del tempo
- Nel dominio di s
- Nel dominio di Laplace

NEL DOMINIO DEL TEMPO

$$u(t) \in \mathbb{R}^p \quad x(t) \in \mathbb{R}^n \quad y(t) \in \mathbb{R}^q$$

Problema: assegnato un ingresso u , valutare il movimento dello stato e dell'uscita.

$$e^{At} = 1 + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \dots = \sum \frac{A^k t^k}{k!} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{con } A \text{ matrice}$$

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} = e^{At} \cdot A$$

CONSIDERANDO LE EQUAZIONI DI STATO

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

$$\dot{x}(t) - Ax(t) = Bu(t)$$

IMPULSA

↓
voglio trasformarla in esplicita

$$e^{-At} \left(\frac{d}{dt} x(t) - Ax(t) \right) = \frac{d}{dt} \left(e^{-At} \cdot x(t) \right) = e^{-At} Bu(t)$$

↓ INTEGRANDO TRA 0 E t:

$$e^{-At} x(t) - x(0) = \int_0^t e^{-At_1} Bu(t_1) dt_1$$

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-t_1)} Bu(t_1) dt_1$$

NEL DOMINIO DI LAPLACE

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

• linearità:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0^-)$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} =$$

$$\mathcal{L}\{f(t-\tau)\} = F(s)e^{-s\tau}$$

PROCEDURA

Soluzione equaz. differenziale nel dominio di s . ($X(s), Y(s)$)

↓
 Sistema di equaz. algebriche (multiplici differenziali)

↓
 Espansione in frazioni semplici per usare le tabelle

↓
 Tornare nel dominio del tempo anzitrazformando

ESERCIZIO

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$u = 2\varepsilon(t)$$

→ ingresso costante

grado

$$U(s) = \frac{2}{s}$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1} X(0) + (sI - A)^{-1} B U(s)$$

$$X(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

↳ trasformata libera

↳ transf.

del movimento libero

movimento forzato dello stato

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{Adj}(sI - A)}{\det(sI - A)}$$

↑
matrice aggiunta

$$= \frac{\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}}{s^2 + 3s + 2}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}}{s^2 + 3s + 2}$$

$$= \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + 2e^{-t} - 3e^{-2t} \\ -2 - 2e^{-t} + 6e^{-2t} \end{bmatrix} \mathcal{E}(t)$$

Matlab

`s = tf('s')` % transfer function

`U = 2/s, x0 = [2; 2]` (% ingresso + cond. iniziali)

`A = [0 1; -2 -3], B = [1; 0]` % matrici A e B

`X = inv(s*eye(2) - A) * (B*U + x0)` % $(sI - A)^{-1} [x_0] \cdot [B]$

↳ dimensione I

RISULTATO

`zpk(x)` % mi fa vedere la forma fattoriale

`minreal(zpk(x))` → SEMPLIFICA LA FDS DI UN COMPLESSE

$$2(s - 2.732)(s + 0.732)$$

$$s(s+2)(s+1)$$

`[num_x1, den_x1] = tfdata(X(1), 'v')`

→ mi consente di trovare num e denomin

`[r1, p1] = residue(num_x1, den_x1)`

→ per calcolare i residui

$$r1 = \begin{matrix} -3 \\ 2 \end{matrix}$$

3

$$p1 = \begin{matrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{matrix}$$

o stesso discorso vale per x2

$$\text{num} = [2 \ 10 \ 6]; \text{den} = [$$

$$[r, p] = \text{residue}(\text{num}, \text{den})$$

22/03/19



$$H(s) = \frac{2s+1}{(s+4)^2}$$

$$w(t) = 2t \mathcal{E}(t)$$

$$Y(s) = H(s)U(s)$$

$$U(s) = \frac{2}{s^2}$$

$$Y(s) = \frac{2(2s+1)}{s^2(s+4)^2} = \frac{R_{1,1}}{s} + \frac{R_{1,2}}{s^2} + \frac{R_{2,1}}{s+4} + \frac{R_{2,2}}{(s+4)^2}$$

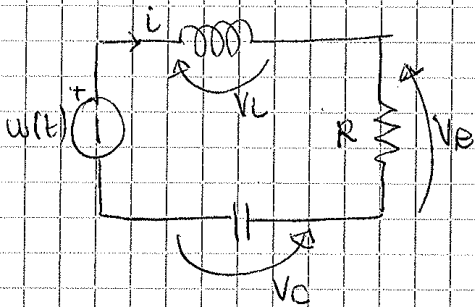
$$= \frac{0.1875}{s} + \frac{0.125}{s^2} - \frac{0.1875}{s+4} - \frac{0.875}{(s+4)^2}$$

$$y(t) = (0.1875 + 0.125t - 0.1875 e^{-4t} - 0.875 e^{-4t}) \mathcal{E}(t)$$

↳ espressione nel tempo

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

ESEMPIO 1



$$V_L = L \frac{di}{dt}$$

$$X = \begin{bmatrix} V_C \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$i = C \frac{dV_C}{dt}$$

$$y = V_R = R \cdot i = R x_2$$

$$\begin{cases} V_L = L \dot{x}_2 \\ i = C \dot{x}_1 \\ w = V_L + V_R + V_C \end{cases}$$

$$\Rightarrow w = L \dot{x}_2 + R x_2 + x_1$$

$$x_2 = C \dot{x}_1$$

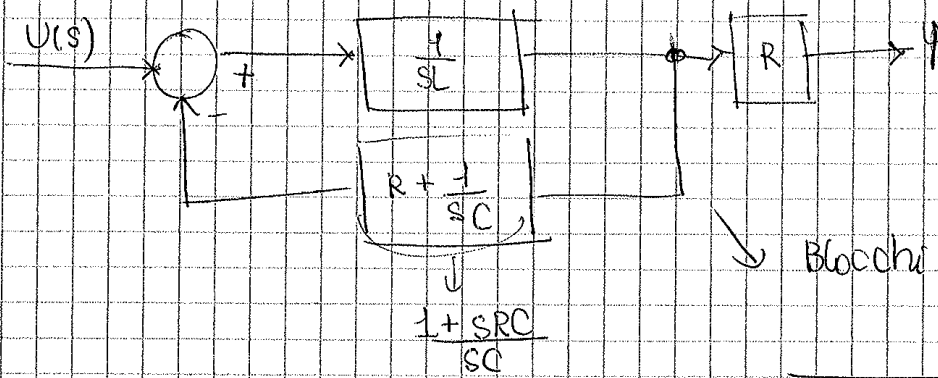
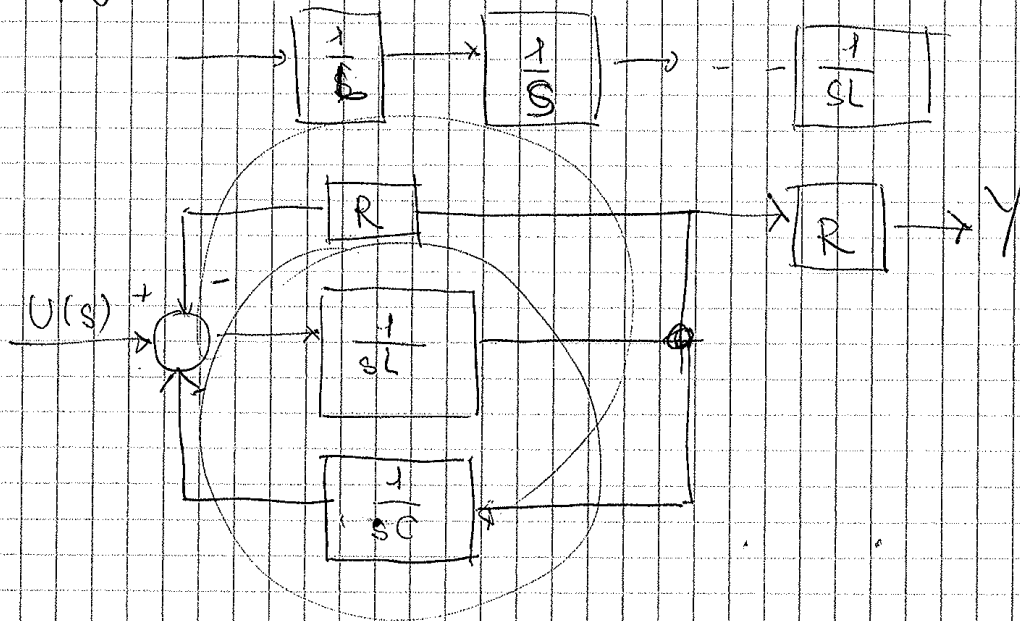
$$\dot{x}_1 = \frac{1}{C} x_2$$

$$x_2 = \frac{1}{L} \int -x_1 - R x_2 + w$$

$$y = R x_2$$

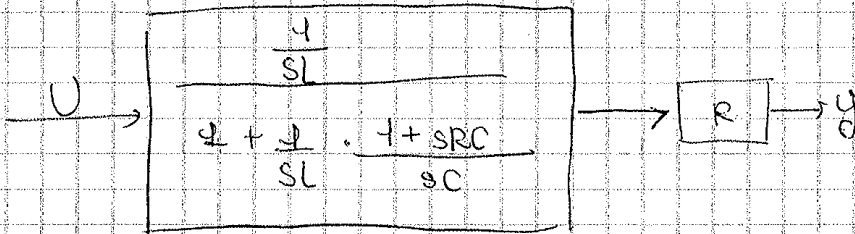
$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Semplificazioni:



Blocchi in retroazione

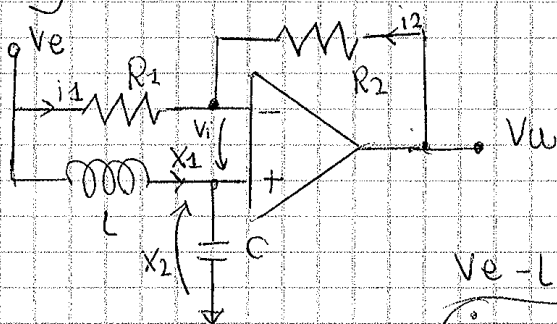
$$1 + \frac{1}{sL} \cdot \left(\frac{1 + sRC}{sC} \right)$$



$$H(s) = \frac{V(s)}{U(s)} = \frac{R \cdot \frac{1}{s}}{\frac{1 + \frac{1}{s}}{s^2 LC} + \frac{R}{s}} = \frac{SRC}{s^2 LC + SRC + 1}$$

↳ fds finale

2) ESEMPIO 3



$$\begin{cases} i_L = x_1 \\ v_C = x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} v_L = L \dot{x}_1 & x_1 = i_L \\ i_C = C \dot{x}_2 & x_2 = v_C \end{cases}$$

$$v_e - L \dot{x}_1 - x_2 = 0$$

$v_i \approx 0$ → condizione iniziale

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{L} \{-x_2 + v_e\} \quad 1^{\circ} \text{ eq stato } i_1 \approx 0$$

$A \rightarrow \infty$

$$\begin{cases} v_i \approx 0 \\ i_i \approx 0 \end{cases}$$

$$v_e - R_1 i_1 - v_C = 0 \Rightarrow v_e - R_1 i_1 - x_2 = 0, \quad i_1 = \frac{v_e - x_2}{R_1}$$

$$v_u - R_2 i_2 - v_e = 0 \Rightarrow v_u - R_2 i_2 - x_2 = 0, \quad i_2 = \frac{v_u - x_2}{R_2}$$

$$\rightarrow i_1 = -i_2 \leftarrow \Rightarrow \frac{v_e - x_2}{R_1} = - \frac{(v_u - x_2)}{R_2}$$

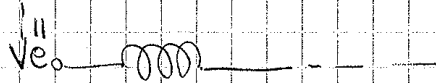
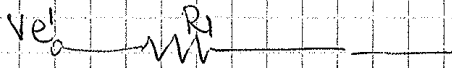
↳ Trovo v_u

$$v_u = x_2 \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) - \frac{R_2}{R_1} v_e$$

NODO: $x_1 = C \dot{x}_2 + i_1 \approx 0$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C} x_1 \quad 2^{\circ} \text{ eq stato}$$

• Per trovare f.d.s. applico principio sovrapposizione



$$Ve' = Ve'' = Ve$$

$$Vu' \approx -\frac{R_2}{R_1} Ve'$$

$$Vu'' \approx \frac{1/sC}{sL + \frac{1}{sC}} + \frac{R_1 + R_2}{R_1} Ve''$$

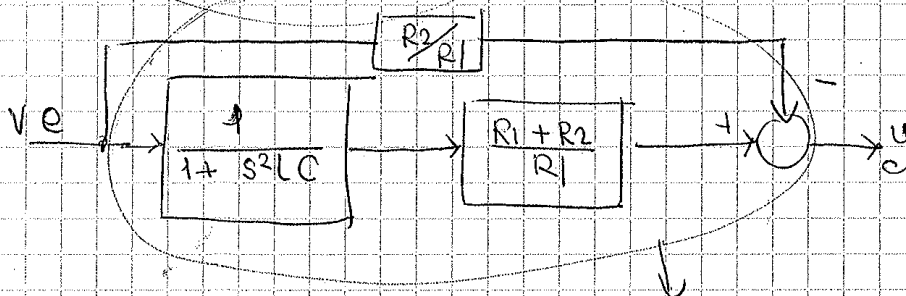
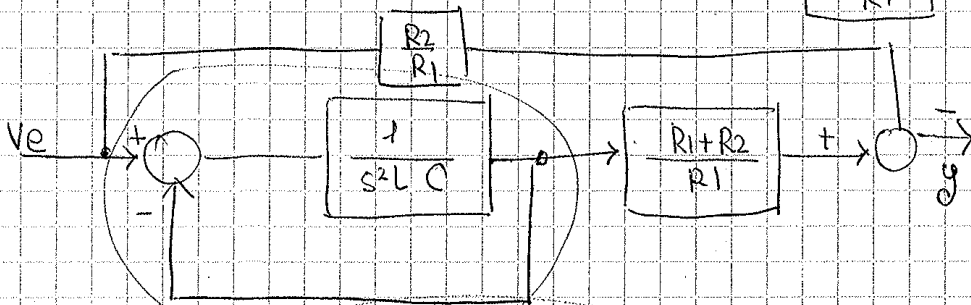
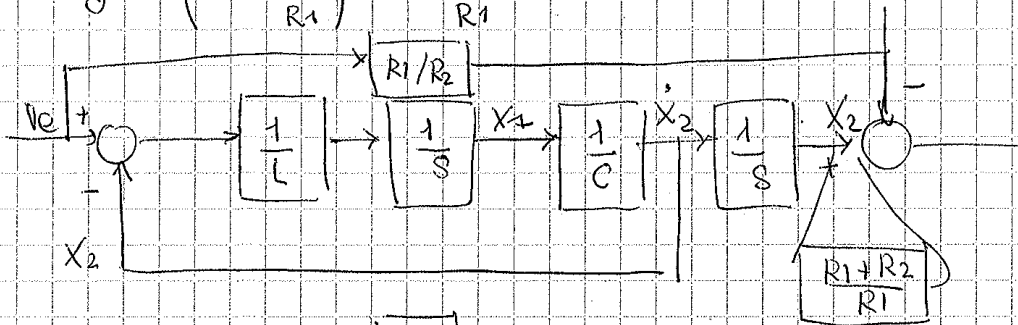
$$Vu = Vu' + Vu'' = -\frac{R_2}{R_1} Ve + \frac{1/sC}{sL + \frac{1}{sC}} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1} Ve$$

$$H(s) = \frac{Vu(s)}{Ve(s)} = \frac{-\frac{R_2}{R_1} + \frac{1/sC}{sL + \frac{1}{sC}} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1}}{1} = \frac{1 - \frac{R_2 s^2 LC}{R_1}}{1 + s^2 LC}$$

• Oppure con lo schema a blocchi

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{L} (-x_2 + Ve) \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{C} x_1 \end{cases}$$

$$y = \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) x_2 - \frac{R_2}{R_1} Ve$$



STABILITÀ SISTEMI LTI

Come si comporta un'uscita in presenza di un ingresso limitato?

↳ BIBO (tipo di stabilità)

DEFINIZIONE:

- Un sistema LTI è stabile (internamente) se la risposta libera dello stato è limitata per ogni possibile stato iniziale x_0 (SEMPLICEMENTE STABILE)

- Asintoticamente stabile: $\rightarrow x_{zi}$ converge a 0 per ogni stato iniziale x_0

- Instabile

$$x(t) = x_{zs}(t) + x_{zi}(t) \quad (\text{con } x(0))$$

↑
↑
 risp. forzata risp. libera

$q_A \rightarrow$ polinomio minimo, di cui grado $e \leq$ polinomio caratteristico

ESEMPLI:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow (sI - A) = \begin{bmatrix} s-2 & 0 \\ 0 & s-2 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s-2)(s-2)} \begin{bmatrix} s-2 & 0 \\ 0 & s-2 \end{bmatrix} = \frac{1}{s-2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

↓
↓
 polinomio caract. il polinomio minimo $e(s-2)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad sI - A = \begin{bmatrix} s-1 & -1 & 0 \\ 0 & s-1 & 0 \\ 0 & 0 & s-1 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s-1)^3} \begin{bmatrix} (s-1)^2 & s-1 & 0 \\ 0 & (s-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (s-1)^2 \end{bmatrix}$$

$$q_A(s) = (s-1)^2$$

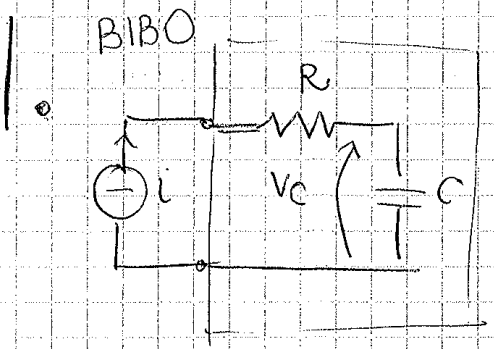
$$\gamma = \left| \frac{1}{\text{Re}(\lambda)} \right|$$

eig(A) - per calcolare gli autovalori
 ↳ matrice

Un sistema LTI è stabile internamente se:
 $\text{Re}(\lambda_j(A)) < 0$ e $\mu^i(\lambda_j(A)) = 1$

Un sistema LTI è ASINTOTICAMENTE stabile quando tutti gli autovalori $\text{Re}(\lambda, A) < 0$

INSTABILE
 Quando un solo autovalore ha parte reale positiva oppure quando è pari a 0 con molteplicità ^{geo} > 1



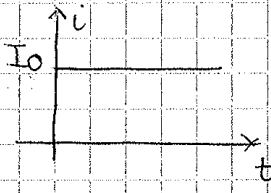
$$y = V_c = i \frac{1}{sC}$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{sC}$$

poli: $s=0$

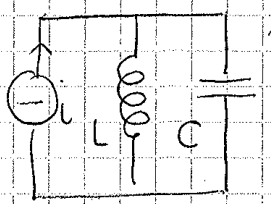


Proviamo ad applicare una costante all'ingresso



↳ l'uscita diverge!
 ↳ SISTEMA INSTABILE IN SENSO BIBO

• Risonatore parallelo ideale



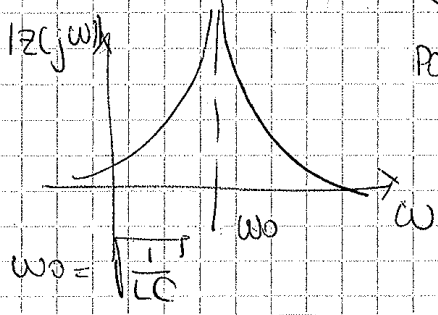
$$y = Z \cdot i = \frac{1}{\frac{1}{sL} + sC} \cdot i = \frac{sL}{1 + s^2LC} \cdot i$$

ZERI: $s=0$
 poli: $s = \pm j\sqrt{\frac{1}{LC}}$
 POLI IMMAGINARI

$$Z(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC}$$

$$|Z(j\omega)| = \left| \frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC} \right|$$

$i \approx \sin \omega t$



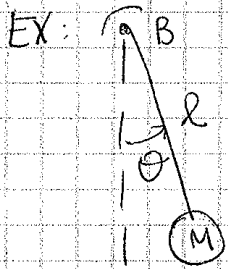
5/04/13 -

Soluzione di equazione

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

↳ supponiamo di perturbare con $x_p(t)$ con lo stesso ingresso u e condizioni iniziali perturbate

↳ STUDIO DELLA TRAIETTORIA DEL MOVIMENTO PERTURBATO E VEDERE SE CONVERGE (STABILE), CONVERGE ASINTOTICAMENTE O È INSTABILE.



$$\theta = 0 + k\pi \quad \text{e} \quad \theta = \pi + k\pi \quad \left. \vphantom{\theta} \right\} \text{2 stati di equilibrio}$$

In un sistema nonlineare si studia la stabilità dei pti di equilibrio



$\theta = \pi$ è un pto di equilibrio instabile

- \bar{x} si dice stabile, se $\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$:
 $\forall x_0: \|x_0 - \bar{x}\| \leq \delta \Rightarrow \|x_p(t) - \bar{x}\| \leq \epsilon, \forall t \geq 0$
 ↳ il raggio è contenuto nel limite di una sfera
 ↳ altrimenti si dice INSTABILE;
- ASINTOTICA : $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_p(t) - \bar{x}\| = 0$

Nei sistemi LTI: (e in generale)

- la stabilità interna \Rightarrow la stabilità di tutti i punti di equilibrio
- e' asintotica - - - - - //
- e' instabilità - - - - - //

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$\tilde{x}(t) = e^{At} \tilde{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \tilde{u} d\tau \rightarrow \text{movimento dello stato}$$

Perturbando solo le condizioni iniziali:

$$x_p(t) = e^{At} (\tilde{x}_0 + \delta x_0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \tilde{u} d\tau$$

9/04/13 Proprietà STATE SPACE MODEL

$x(t) = Px$ → TRASFORMAZIONE DI SIMILARITÀ O EQUIVALENZA

↳ matrice non singolare

facendo queste sostituzioni:

equivalenza o similareci

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \\ y = \bar{C}\bar{x} + Du \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{A} = PAP^{-1} \\ \bar{B} = PB \\ \bar{C} = CP^{-1} \\ \bar{D} = D \end{cases}$$

↳ Rispetto a questa trasformazione, non c'è invarianza

degli autovalori

$$\det(\lambda I - A) = \Delta(\lambda)$$

C'è anche l'invarianza della matrice di trasferimento $\bar{H}(s) = H(s)$

- una scelta diversa di variabili di stato, porta ad una descrizione diversa, ma ad una stessa funzione di trasferimento -

Realizzazione

Una f.d.s. è realizzabile se $\exists A, B, C, D : \hat{G}(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$

Il passaggio dalle f.d.s. → state space equations → SOLUZIONE NON UNICA

$$D = [b_n]$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{n-1}]$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

coeff. polinomio denominatore inseriti nell'ultima

riga della matrice coefficienti di segno

STRUTTURA CANONICA FARI A 1

forma canonica di controllo

$$A = \dots ; B = \dots ;$$

Con matlab

$$M_C = \text{ctrb}(A, B)$$

$$M_C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$r = \text{rank}(M_C)$$

$$= 2$$

Se un sistema non è compl. controllabile, si può scindere in una pte controllabile e una pte non controllabile.

$$(s3) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\bar{x}}_c \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_{\bar{c}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{B}_c \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = (\bar{C}_c \quad \bar{C}_{\bar{c}}) \begin{pmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_{\bar{c}} \end{pmatrix} + Du \end{cases}$$

(s4)

*

$$\lambda x(0) e^{\lambda t} = Ax(0) e^{\lambda t} + Be^{\lambda t}$$

$$(\lambda I - A)x(0) = B$$

$$\hat{x}(0) = (\lambda I - A)^{-1} B$$

$$x(t) = \hat{x}(t) = \hat{x}(0) e^{\lambda t} = (\lambda I - A)^{-1} B e^{\lambda t}$$

$$y(t) = \hat{y}(t) = C\hat{x} + D\hat{u} = [C(\lambda I - A)^{-1} B + D] e^{\lambda t} = H(\lambda) \cdot e^{\lambda t}$$

$$X(s) = \underbrace{(sI - A)^{-1} x(0)}_{Xp} + \underbrace{(sI - A)^{-1} B U(s)}_{Xf}$$

complessi
del modo

per $t \rightarrow \infty$
la comp. esponenziale
tende a zero

supponiamo
radici distinte

$$Xf(s) = (sI - A)^{-1} B \frac{1}{s - \lambda} = \sum_{i=1}^m \frac{R_i}{s - s_i} + \frac{R_u}{s - \lambda} \leftarrow \text{relativo al modo dell'ingresso}$$

$$R_u = \lim_{s \rightarrow \lambda} (s - \lambda) \left\{ (sI - A)^{-1} B \frac{1}{s - \lambda} \right\}$$

$$R_u = \lim_{s \rightarrow \lambda} (s - \lambda) \left\{ (sI - A)^{-1} B \frac{1}{s - \lambda} \right\} = (\lambda I - A)^{-1} B$$

$$x_{fp}(t) = \mathcal{L}^{-1} Xf(s) = \sum_{i=1}^m R_i e^{s_i t} + R_u e^{\lambda t} = (\lambda I - A)^{-1} B e^{-\lambda t}$$

se il sist. è asintoticam. stabile
 $\lambda < 0$

per $t \rightarrow \infty$ $\hat{x}(t) \approx (\lambda I - A)^{-1} B e^{\lambda t}$

$$\hat{y}(t) = C(\lambda I - A)^{-1} B e^{\lambda t} + D e^{\lambda t} = [C(\lambda I - A)^{-1} B + D] e^{\lambda t} = H(\lambda) e^{\lambda t}$$

L'uscita ha la stessa forma dell'ingresso

RISULTATO

Si applichi al sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

con f.d.t. $H(s)$, e l'ingresso esponenziale $\hat{u}(t) = e^{\lambda t}$ con $t \geq 0$.

Allora esiste uno stato iniziale per cui l'uscita assume l'andamento:

$H(s) = \frac{10}{s+10}$ Posso calcolare?
NO

$y_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} s H(s) U(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s H(s) \bar{u}$

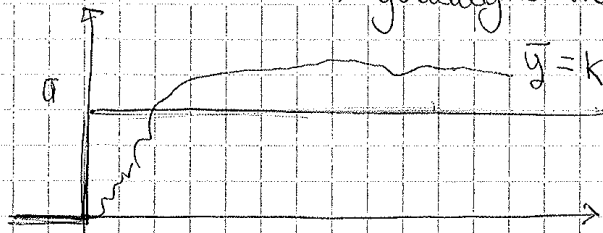
$\bar{y} = H(0) \bar{u}$

↳ è possibile solo quando il sistema è asintoticamente stabile

$r=0$

$H(0) = K$

↳ guadagno stazionario



$K = \frac{\bar{y}}{\bar{u}}$

$r=0 \quad K_p = \lim_{s \rightarrow 0} H(s) \quad ; \quad r=1 \quad K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s H(s)$

↳ se $r \neq 0$ il sistema non è più BIBO stabile $\{ K=K_p$

guadagni generalizzati

$r=2 \quad K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 H(s)$

Riscrivendo la f.d.s. dell'esempio di prima

$H(s) = \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1+s}{2}\right)\left(\frac{1+s}{10}\right)}$

↳ guadagno stazionario

Con Matlab:

$s = tf('s')$

$H = \dots$

$K = \text{dcgain}(H)$ → per valutare il K_p

∴ $K = 0.05$

Per il guadagno generalizzato:

$K_v = \text{dcgain}(s \cdot H)$

↓
 K_v

↳ !

$$|H(j\omega)| = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{100}}}, \quad \Psi = \arg\{H(j\omega)\} = \angle 2 - \arctg \frac{\omega}{10}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega = 1 \quad |H(j1)| \approx 2 \quad ; \quad \Psi(j1) \approx -5.7^\circ = -0.0997 \text{ radianti} \\ \omega = 10 \quad |H(j10)| \approx \sqrt{2} \quad ; \quad \Psi(j10) = -45^\circ = -\pi/4 \text{ radianti} \\ \quad \quad \quad \rightarrow \text{esattamente nel Taglio} \\ \omega = 100 \quad |H(j100)| \approx 0.2 \quad ; \quad \Psi(j100) \approx -84.3^\circ = -1.4711 \text{ radianti} \end{array} \right.$$

RISPOSTA IN FREQUENZA

Def. da funzione complessa

$$H(j\omega) = C(j\omega I - A)^{-1}B + D \quad \omega \geq 0$$

definita per valori della variabile ω non negativi e tale che $j\omega$ non sia un polo di $H(s)$, viene chiamata risposta in frequenza del sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Formalmente si ha

$$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega}$$

escluso eventualmente un numero finito di poli corrispondenti ad eventuali poli di $H(s)$ sull'asse immaginario

OSSERVAZIONE

La conoscenza di $H(j\omega)$ per $\omega \geq 0$ permette il calcolo della risposta in frequenza anche per valori negativi di ω :

$$H(-j\omega) = \overline{H(j\omega)}$$

dove $\overline{H(j\omega)}$ è il numero complesso coniugato di $H(j\omega)$

$$H(s) = s^2 K'' H'(s) \rightsquigarrow H(j\omega) = (j\omega)^2 K'' H'(j\omega)$$

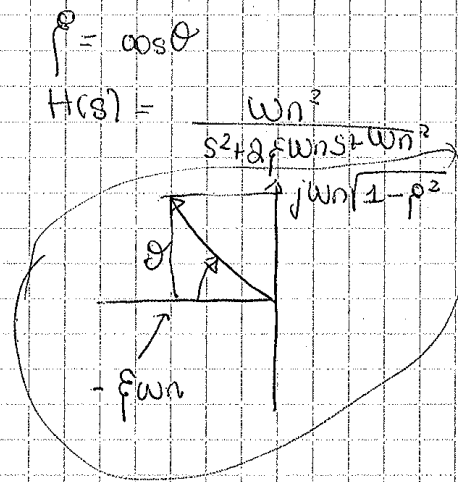
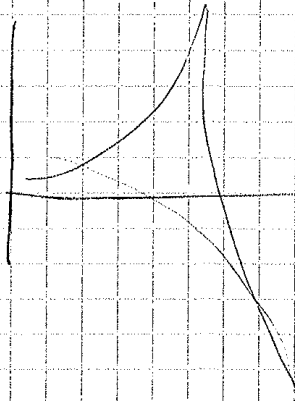
$$K'' = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2} H(s)$$

$\omega \rightarrow \infty$?

$m \rightarrow$ grado numeratore

$n \rightarrow$ grado denominatore

$m-n$ grado relativo



$$s^2 + as + b$$

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$$

$$b = \omega_n^2 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{b}$$

$$a = 2\xi\omega_n$$

$$\xi = \frac{a}{2\omega_n}$$

in presenza di radici complesse coniugate, la puletazione in cui il modulo ha un picco è diversa da ω_n . Quanto vale?

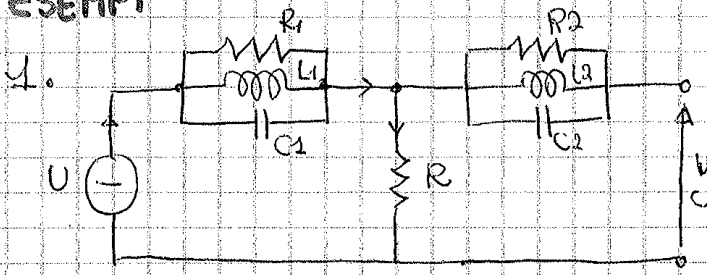
Vediamo il grafico andamento dello smorzamento:

$$\omega_p = \omega_n \sqrt{1-\rho^2}$$

$$M_p = \frac{1}{2\xi \sqrt{1-\rho^2}}$$

ESEMPI

16/04/13



Qual'è l'ordine del sistema?

4 variabili di stato

$L \rightarrow$ matrice $\begin{cases} A & 4 \times 4 \\ B & 4 \text{ righe} \times 1 \text{ col} \\ C & 1 \times 4 \\ D & 1 \times 1 \end{cases}$

$y = R \cdot u = \int f dt \quad H(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = R$

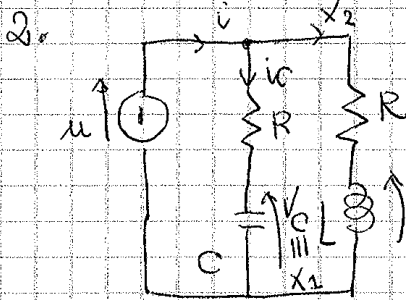
di ordine 0!

Poiché nella fdt è presente la parte completamente raggiungibile e completamente osservabile \rightarrow DIMENSIONE NULLA

\hookrightarrow misurando l'uscita, riusciamo a risalire allo stato iniziale come induttore, tensione C_2 ...? NO! U impone la sua corrente a prescindere dalla presenza di L_1, C_1, \dots !

\hookrightarrow Rete non controllabile dall'ingresso

\hookrightarrow i modi relativi della rete non sono osservabili



Input: u

Output: i

v.d. stato: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix}$

Relazioni

$v_L = L \cdot \dot{x}_2$

$i_C = C \cdot \dot{x}_1$

$$u - (RC \cdot \dot{x}_1) - x_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{1}{RC} \cdot x_1 + \frac{1}{RC} u \\ \dot{x}_2 = -\frac{R}{L} x_2 + \frac{1}{L} u \end{cases}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & 0 \\ 0 & -R/L \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u$$

$$y = x_2 + C \dot{x}_1 = x_2 + \frac{1}{R} x_1 + \frac{1}{R} u = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R} & 1 \end{bmatrix} x + \frac{1}{R} u$$

$$M_0 = \begin{bmatrix} -1/R & 1 \\ 1/R^2C & -R/L \end{bmatrix} \quad \det \{ M_0 \} = \frac{1}{L} - \frac{1}{R^2C} = 0$$

Per quali valori di R, L, C si annulla il determinante?

Se si annulla, solo un sottospazio sarà osservabile

$$L = \frac{1}{R^2C} \Rightarrow RC = \frac{L}{R}$$

CONSIDERIAMO L'EVOLUZIONE LIBERA DELL'USCITA → STUDIATO IL MOV. LIBERO DELLO STATO

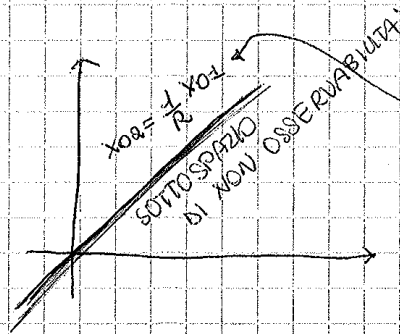
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{1}{\tau} x_1 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{\tau} x_2 \end{cases} \quad \text{con } x_{01} \neq x_{02}$$

$$\begin{cases} x_{1e} = x_{01} \cdot e^{-t/\tau} \\ x_{2e} = x_{02} \cdot e^{-t/\tau} \end{cases}$$

$$y_e = c x_e = -\frac{1}{R} x_{01} \cdot e^{-t/\tau} + x_{02} \cdot e^{-t/\tau} = e^{-t/\tau} \left(x_{02} - \frac{1}{R} x_{01} \right)$$

è più preciso! quando $x_{02} = \frac{1}{R} x_{01}$ si annulla l'uscita → è identicamente nulla!

→ SPAZIO INOSSERVABILE



Calcoliamo la fdt: $H(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = \frac{I(s)}{Z(s) \cdot I(s)} = \frac{1}{Z(s)}$

$$Z(s) = \frac{1}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}}; \quad Z_1 = R + \frac{1}{sC} \quad Z_2 = R + sL$$

$$\begin{aligned} Z(s) &= \frac{1}{\frac{1}{R + \frac{1}{sC}} + \frac{1}{R + sL}} = \frac{1}{\frac{sC}{sC(R + \frac{1}{sC}) + 1} + \frac{1}{R + sL}} = \frac{(1 + sRC)(R + sL)}{sC(R + \frac{1}{sC}) + sC(R + sL) + 1} \\ &= \frac{(1 + sRC)(R + sL)}{s^2LC + 2sRC + 1} \end{aligned}$$

Qualora il sistema abbia autovalori reali e distinti

SISTEMA ↓
DIAGONALIZZABILE

$$\bar{x} = P x$$

MATLAB

$(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}, P)$ = canon $(A, B, C, D, \text{modale})$

↳ matrice di trasformazione

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

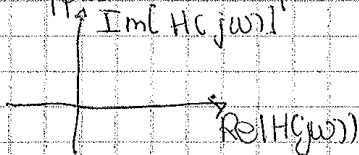
$$\bar{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = [0 \quad c_2 \quad c_3 \quad 0]$$

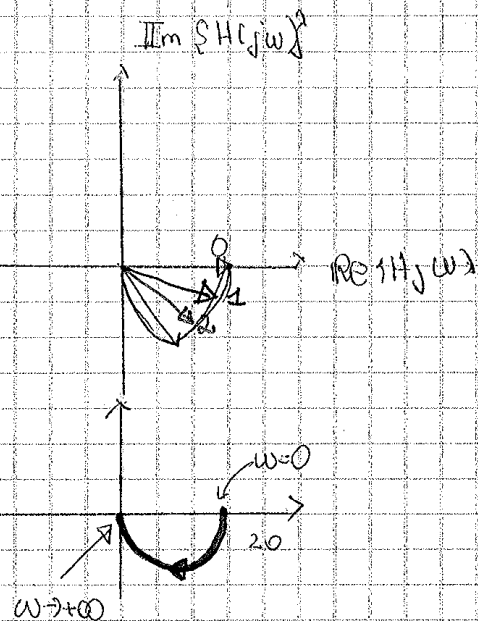
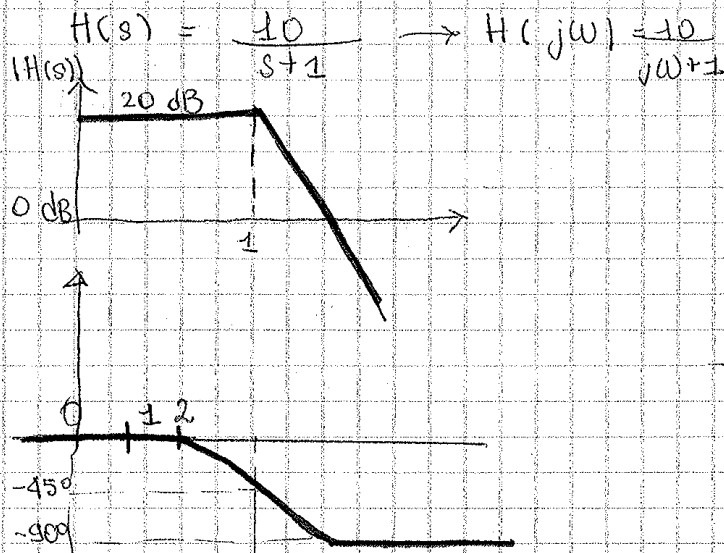
$$\bar{D} = 0$$

17/04/13

Rappresentazioni plani della risposta in frequenza

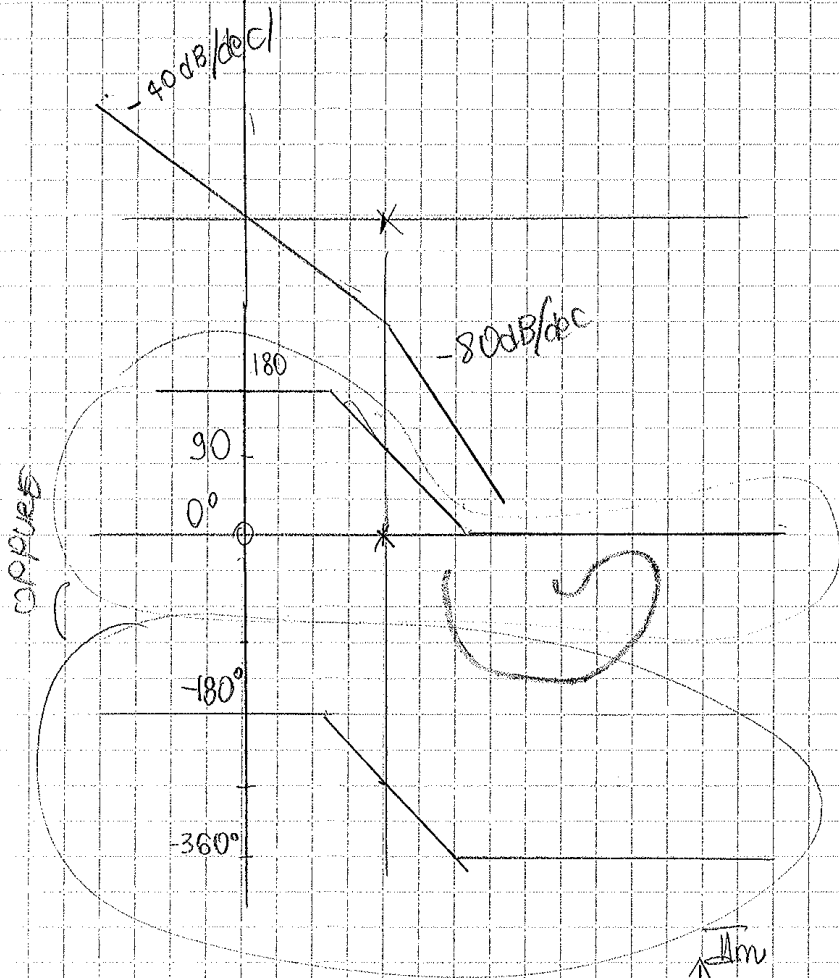


ESEMPIO:

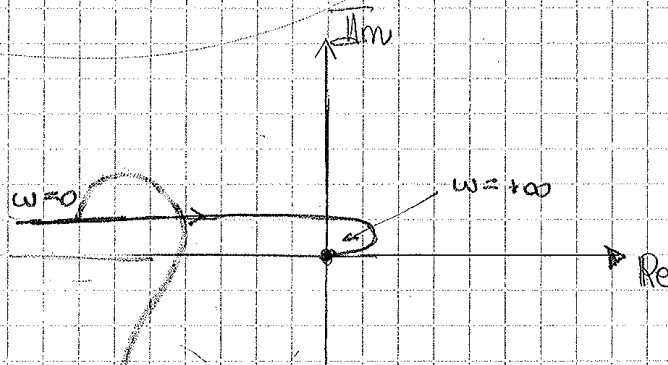


$$H(s) = \frac{1}{s^2(1+s)^2}$$

$$K_{ov} = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 H(s) = 1$$



$\omega \rightarrow 0$ modulo tende a ∞
 $\omega \rightarrow \infty$ fase tende a 0



Quando ci sono due poli nell'origine per $\omega \rightarrow 0$, tende asintoticam. ad una parabola

Matlab

$[re, im] = \text{nyquist}(H);$

oppure (poles)

$\text{figure, plot}(\text{squeeze}(re), \text{squeeze}(im))$

$$H(s) = \frac{Y}{S}$$

$$\omega = +\infty \rightarrow j\omega$$

$$\omega = 0^+$$

$$\omega = 0^-$$

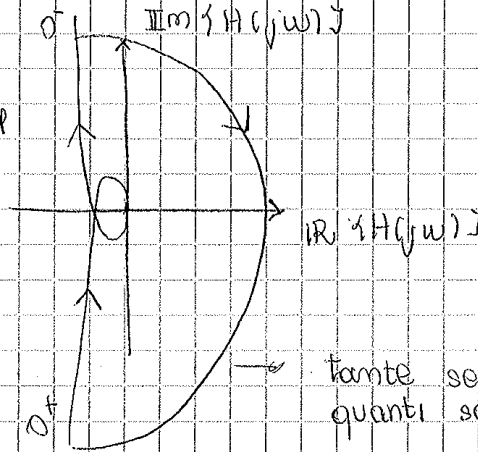
$$\omega = -\infty$$

$$s = re^{j\varphi}$$

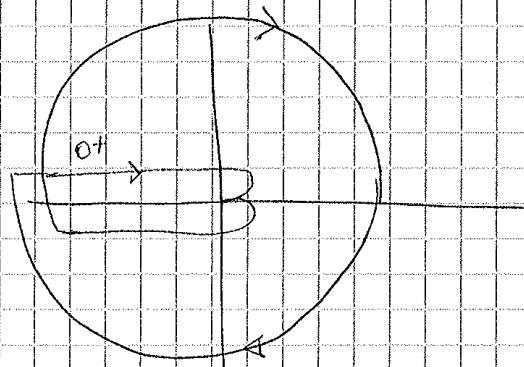
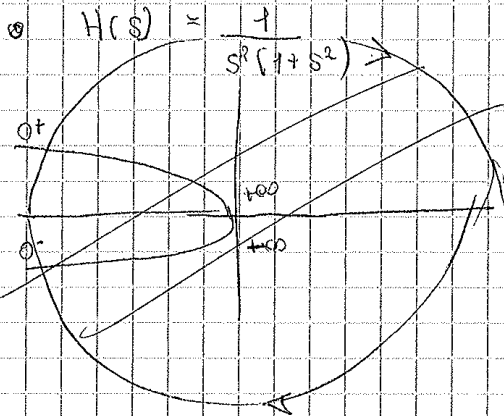
$$s = j\omega$$

$$H(s) = \frac{Y}{re^{j\varphi}}$$

$$= R e^{j\psi}$$



tante semicirconferenze per quanti sono i poli nell'origine



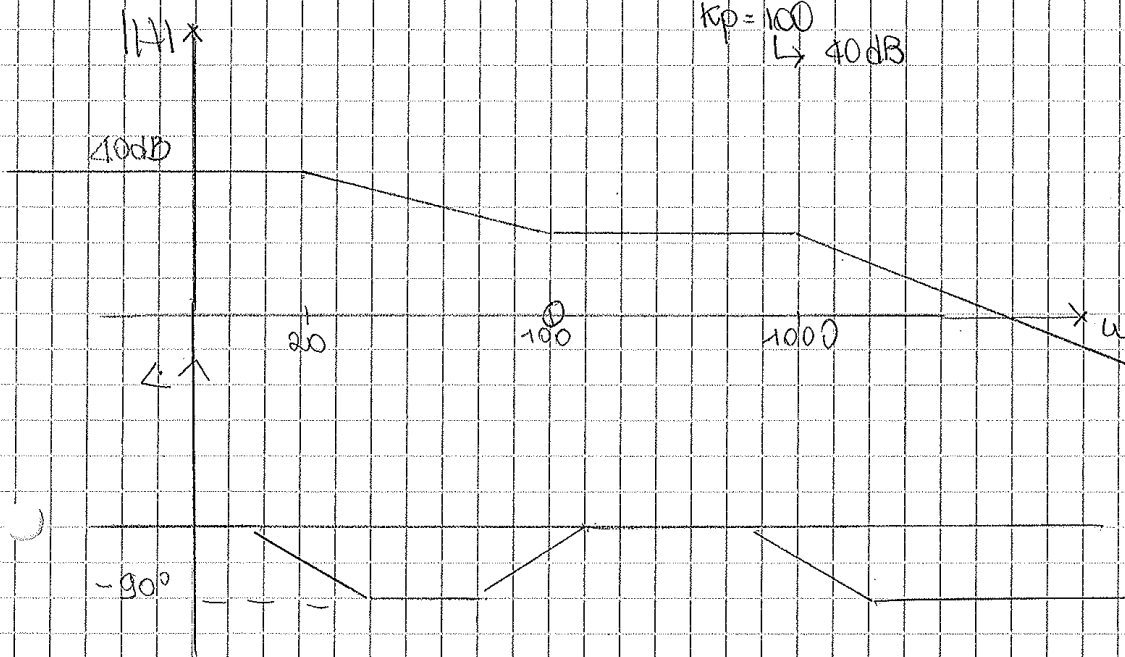
$$[\text{num}H, \text{den}H] = \text{tfdata}(H, 'v')$$

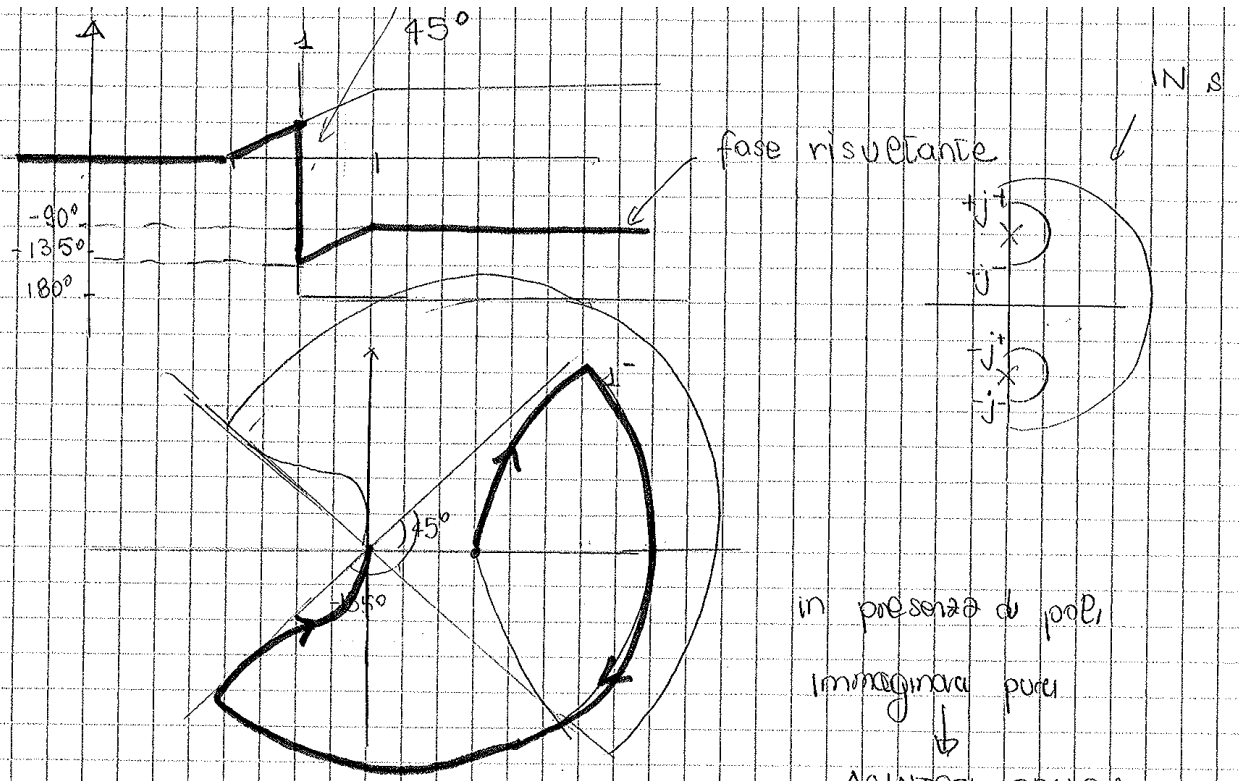
figure, nyquist1(numH, denH)

non attendibile con poli asse immaginario

$$H(s) = \frac{2 \cdot 10^4 (s+100)}{(s+20)(s+1000)} = \frac{2 \cdot 10^4 \cdot 100}{20 \cdot 1000} \left(\frac{1+s/100}{1+s/20} \right) \left(\frac{1+s/1000}{1+s/1000} \right)$$

$k_p = 100$
 $\hookrightarrow 40 \text{ dB}$



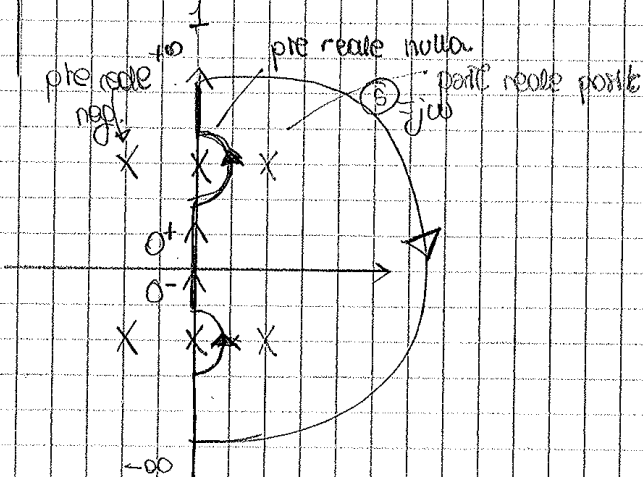
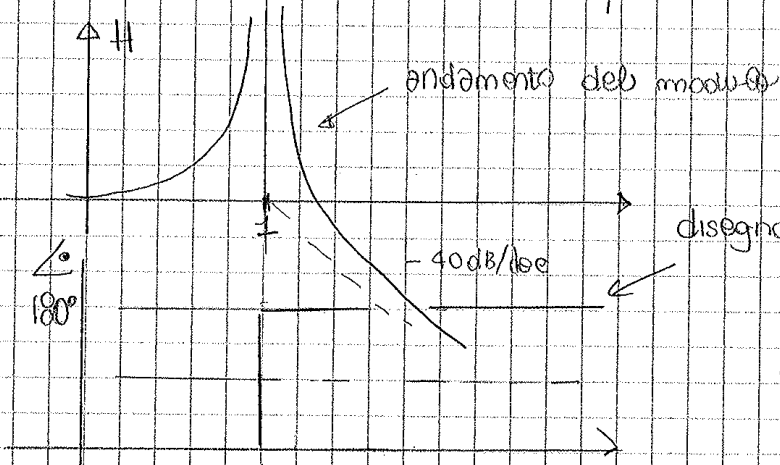


19/04/13

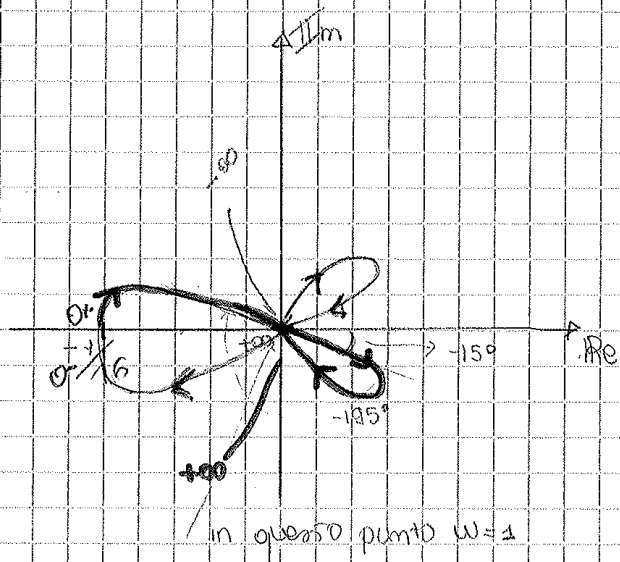
$$H(s) = \frac{4}{1+s^2}$$

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

↳ $\omega_n = 1, \zeta = 0 \rightarrow$ RISONANZA



Dato che supero i poli
con una semicirconferenza,
la fase diminuisce, decresce
↳ è per questo motivo che
MATLAB mi dà 180°



FASI:

$1^- \rightarrow +95^\circ$

$1^+ \rightarrow +15^\circ$

MODULO:

$\omega=0 \rightarrow$ il modulo vale 100

$\omega \rightarrow \infty \rightarrow$ il modulo va a 0

$$G_{rg}(s) = G_r \cdot \frac{G}{1+GH} = 10 \cdot \frac{100}{s^2 + 42s + 100}$$

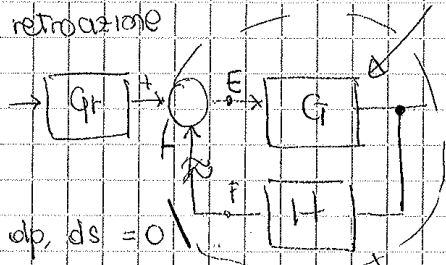
$\beta = 0.6$
 $\omega_n = 10$

funz. di trasf tra reg

\hookrightarrow filtro p. basso

G_r in cascata col blocco in retroazione

$G = G_c G_a G_p$

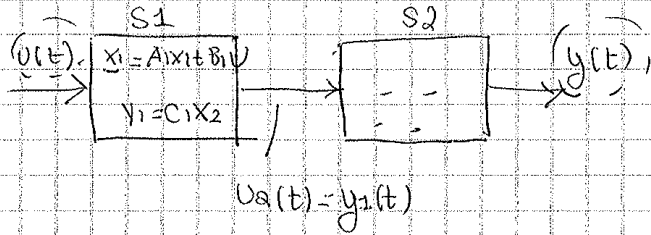


$\Delta d_a, d_b, d_s = 0$

\hookrightarrow per trovare la fdt

$H = G_r \cdot G_s$

COSA SUCCEDDE SE INTERCONNETTIAMO PIU' SISTEMI?



che ne è del sistema complessivo?

Supponendo che tutti i segnali siano reali e che i sottosistemi siano minimi:

Sistema 1: $\frac{s-\alpha}{s-\beta}$

Sistema 2: $\frac{s-\beta}{s-\alpha}$

Il sistema che si ottiene:

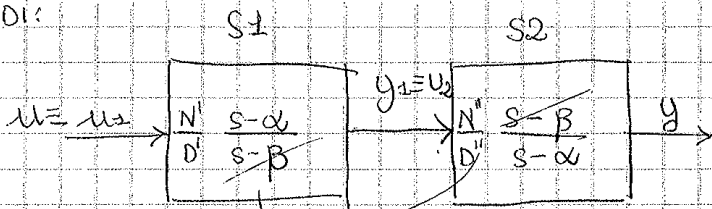
RESULTATO

- il modo relativo a β non è osservabile da y e il modo relativo ad α non è controllabile da u .



Siamo in presenza di una cancellazione ⚠

QUINDI:



RICORDA: Se compare questa cancellazione, ovvero uno zero del II sistema, cancella un polo del I , il modo naturale $e^{\beta t}$ non è osservabile dall'uscita y

RICORDA: in modo analogo, se lo zero del I sistema cancella il polo del II , $e^{\alpha t}$ non è controllabile dall'ingresso u .

È naturale che nella funzione di trasferimento mancherebbero queste parti se le β o cancellate. Posso avere dei problemi nel momento in cui i modi sono divergenti! (ov con poli con parte reale positiva)

24/04/13

Il sistema di controllo si dice **BEN CONNESSO** sse $\lim_{s \rightarrow \infty} \{1 + P(s)C(s)F(s)\} \neq 0$

Ricorda: $1 + PCF$ e' il denominatore delle funzioni di anello.

Il sistema e' **INTERNAMENTE STABILE** sse tutte le uscite (di interesse) sono limitate per ogni possibile scelta di un ingresso limitato, ovvero se tutte le folt sono BIBO stabili.

Più praticamente: questo vale se sono verificate queste 2 condizioni.

- 1° se tutte le radici di $1 + L(s) = 0$ hanno pte reale < 0
- 2° no cancellazioni nel semipiano di destra quando compongo il prodotto PCF

ESEMPI:

Assumiamo $F(s) = 1$

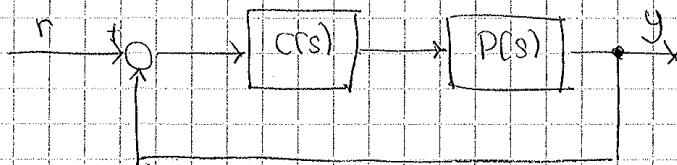
$$C(s) = \frac{s-1}{s+2}$$

$$P(s) = \frac{1}{(s-2)(s+2)}$$

↓
impianti

$$L(s) = \frac{s-1}{s+2} \cdot \frac{1}{(s-2)(s+2)} = \frac{1}{(s+2)^2}$$

NO CANCELLARE!



$$G_{ry} = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)}$$

$$L(s) = C(s)P(s)$$

* Caso particolare: retroazione unitaria

$$G_{ry} = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = T(s)$$

$$T(s) = \frac{1}{(s+2)^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{(s+2)^2}} = \frac{1}{1 + (s+2)^2}$$

funz. di sensibilità complementare

↳ T e' BIBO stabile!

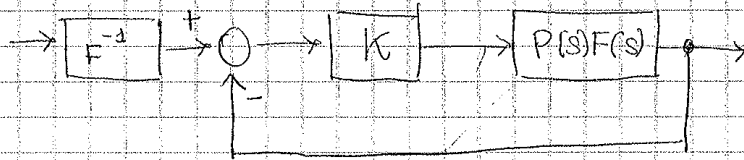
In questo caso :

$$N = -P_{ol}$$

Tutte le radici di $1+L(s)$ hanno parte reale negativa

↳ BIBO STABILE

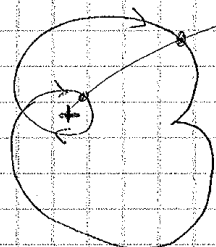
È possibile studiare la stabilità al variazione del parametro k ?



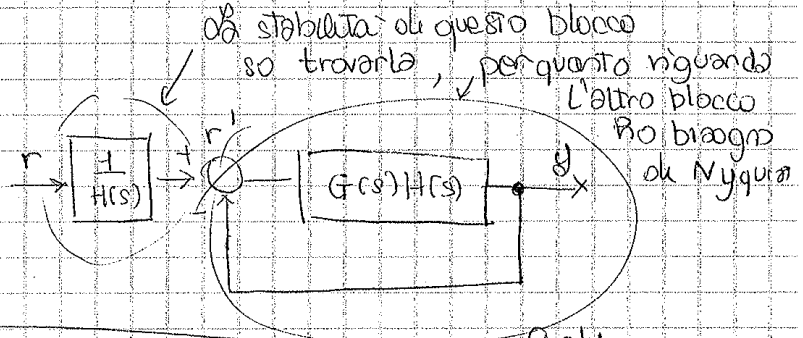
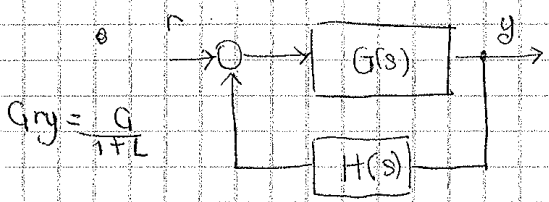
PUNTO CRITICO:
 $-\frac{1}{k}$

ESEMPI

• Retroaz. unitaria, negativa, ma $k \rightarrow$ pto critico in -1



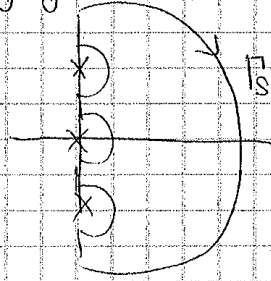
2 rotazioni in senso orario $\rightarrow N = 2$
 ↳ N positivo



La stabilità di questo blocco si trova, per quanto riguarda l'altro blocco. No bisogno di Nyquist

IMPORTANTE

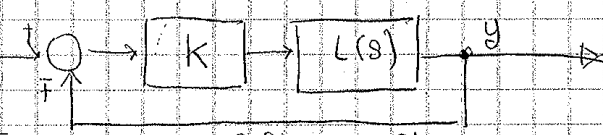
- 1°) Pol no di poli di $L(s)$ con $IR \{s\} > 0$
- 2°) Pol no di poli di $G_{ry}(s)$ con $IR \{s\} > 0$
- 3°) Percorso di Nyquist



4°) Diagramma di Nyquist di $L(j\omega)$

↳ janz di anello

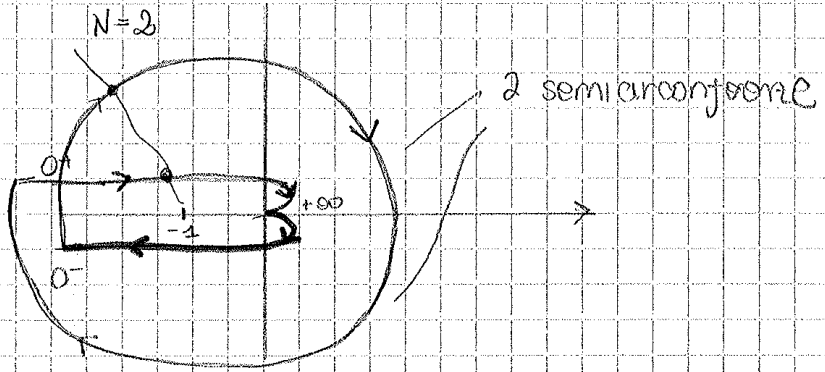
5°) Punto critico



P.C. : $-\frac{1}{k}$ se la retroazione è possibile negativa
 $+\frac{1}{k}$ se la retroazione è positiva

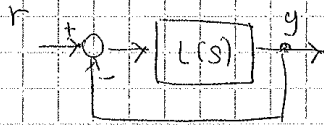
$L(s) = \frac{1}{s^2(s+1)^2}$

$P_{ol} = 0$

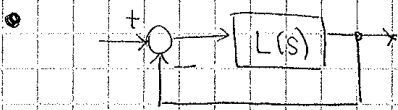


$P_{cl} = P_{ol} + N$

$P_{cl} = 0 + 2 = 2$

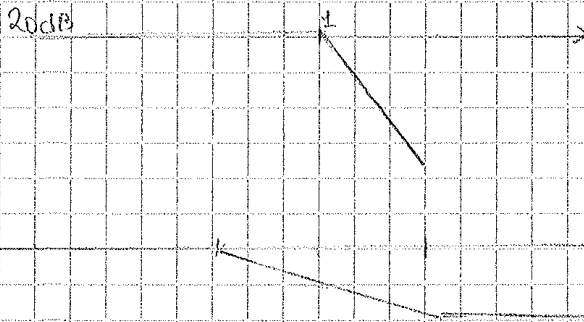


$G_{ry} = \frac{L}{1+L} = \frac{N_L}{N_L + D_L} = \frac{1}{1 + s^2(1+s)^2}$



$L(s) = \frac{10}{s+1}$

$k_p = 10 \rightarrow 20 \text{ dB}$
 \rightarrow positivo

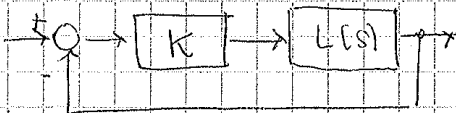


$\begin{cases} P_{ol} = 0 \\ N = 0 \end{cases}$
 $\rightarrow P_{cl} = P_{ol} + N = 0$

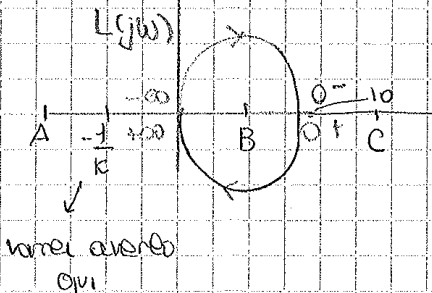
Abbiamo verificato che fosse stabile

$G_{ry} = \frac{L}{1+L} = \frac{N_L}{N_L + D_L}$
 $= \frac{10}{10+s+1}$
 $= \frac{10}{s+11}$

Aggiungiamo un controllore k che varia:



$L(s) = \frac{10}{s+1}$

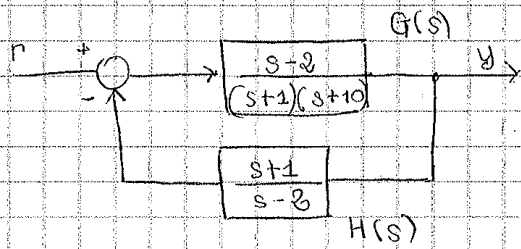


$k \in \mathbb{R}$
 $P_{cl} = -\frac{1}{k}$

Il PC può trovarsi in A, B o C!
 \downarrow
 $N=0 \quad N=1 \quad N=0$

30/4/23

ESEMPIO USO CRITERIO DI NYQUIST



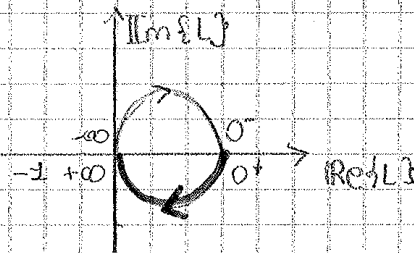
Studiare la stabilità interna del sistema di controllo.

1. Controllo BIBO stabilità

oppure tutte le radici $1+L(s)$ devono avere parte reale strett. negativa

2. (solo per l'interna), verifico che non ci siano state cancellazioni quando compongo $L(s)$.

$$L(s) = G(s)H(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s+10)} \cdot \frac{s+1}{s-2} = \frac{1}{s+10}$$



Pol = 0

N = 0

Pcl = 0

↳ per questo sistema non ci sono poli con parte reale positiva

~~$G(s) = \frac{1}{s+1}$~~
 ↳ non funziona

OPPURE

$$G_y = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{1}{1+L}$$

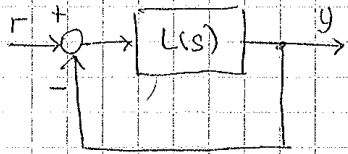
$$= \frac{s-2}{s+1} \cdot \frac{1}{s+10+1}$$

↳ abbiamo verificato che il sistema è BIBO stabile

Nel nostro caso, quando abbiamo composto

$L(s)$, abbiamo cancellato una parte instabile!

↳ IL SISTEMA NON È INTERNAMENTE STABILE.

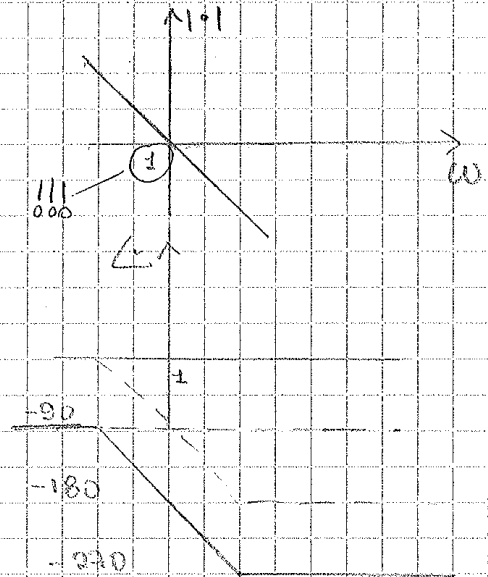
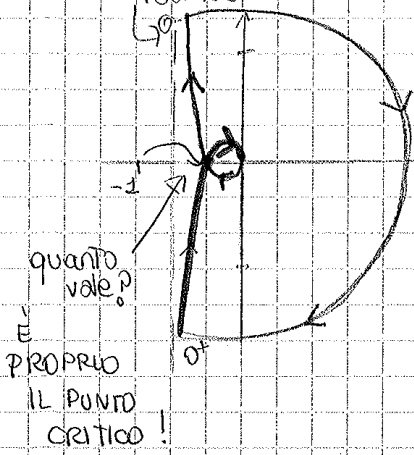


$$L(s) = - \frac{s+1}{s(s+2)}$$

$$= \frac{(1-s)}{s(1+s)}$$

Studiare la stabilità interna.

Criterio di Nyquist:



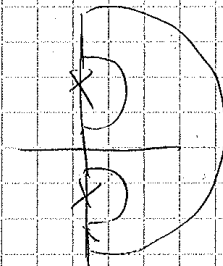
\hookrightarrow N non è ben definito!

Se si attenua la funz di anello -1 scavalca fuori!
 e' come avere dei poli sull'asse immaginario.

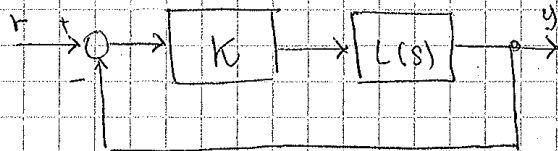
$$L(s) = \frac{1-s}{s(1+s)}$$

$$Gry = \frac{1+s}{1-s+s(1+s)} = \frac{1-s}{1+s^2}$$

$\hookrightarrow \pm j \omega$

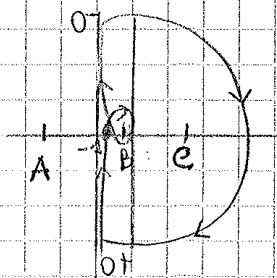


Proviamo ad introdurre un coeff k per amplificare e attenuare:



$k \in \mathbb{R}$ Punto critico: $-\frac{1}{k}$

Poli = 0



$$\begin{cases} NA = 0 \\ NB = 2 \\ NC = 1 \end{cases}$$

$-\frac{1}{k} \rightarrow A$: il sistema è stabile (estern. e internamente)

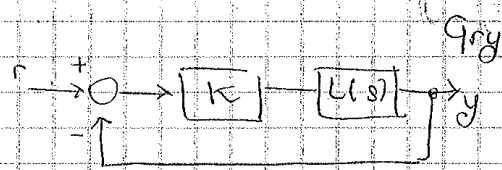
$-\frac{1}{k} \rightarrow B$: $PoC = N + PoI = 2$ (instabile con 2 poli)

$-\frac{1}{k} \rightarrow C$: $PoC = 1$ (instabile con 1 polo)

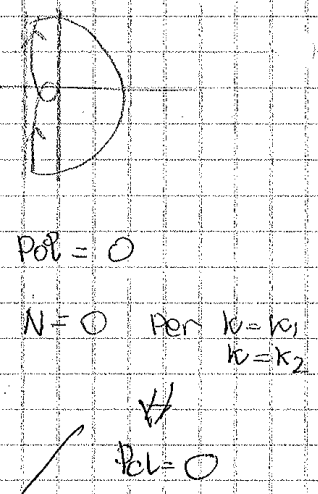
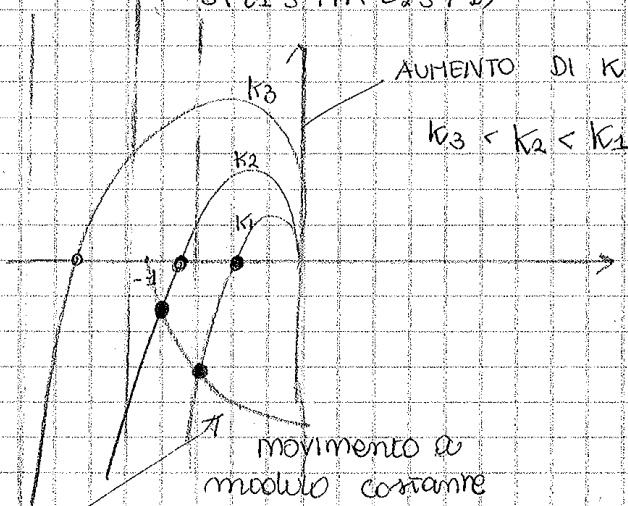
- Robustezza: garantire la stabilità in maniera "robusta" al variare di alcuni parametri
- Tracking: fedeltà di risposta sia in regime permanente che in transiente
- Attenuazione / Reiezione (di disturbi) - additivi
- di tipo parametrico

STABILITÀ RELATIVA

EX: retroazione negativa e unitaria



$$G \cdot H(s) = L(s) = \frac{K}{s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

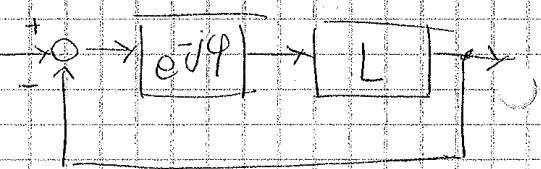


ma in quali dei casi è più stabile?

In K_1 , poiché la funzione è più lontana (sull'asse reale)

STABILITÀ RELATIVA
 distanza da un pto della funz. di anello dal punto critico.

Se proviamo a modificare la fase:



$\phi \rightarrow$ ritardo di fase
 il modulo vale sempre 1!

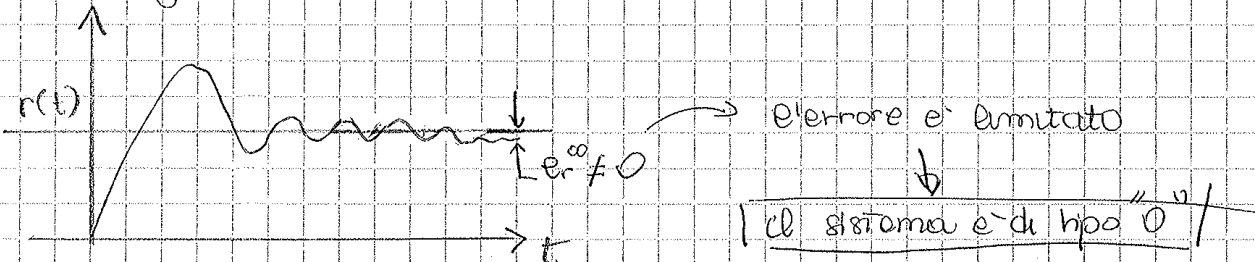
DEFINIZIONE DEL TIPO DI SISTEMA DI CONTROLLO

NB: ORDINE \neq TIPO !
 ↳ del riferimento (rampa, gradino...)
 ↳ del sistema!

Un sistema è di tipo R , se l'uscita (in regime permanente) a causa di un rif. polinomiale di ordine h è limitato.

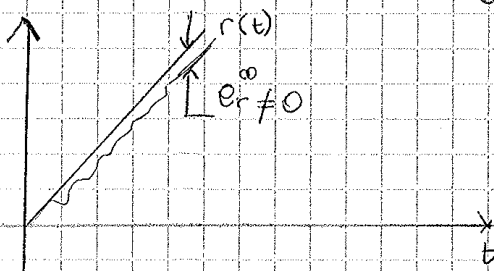
Esempi:

ref. gradino: $h = 0$



$R = 1$

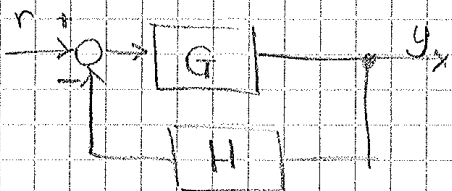
TIPO "1"



$R = 2$

TIPO "2"

D'ora in avanti $H = \frac{1}{Kd}$
 ↳ costante
 ↳ prod. staz. del sistema di controllo
 ↳ prodotto delle f.d.s. sul ramo di retroazione



$$G_{ry} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{1}{H(s)} \cdot \frac{G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

$$G_{ry} = \frac{1}{H(s)} \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

Quanto vale il guad. stazionario?

8/5/13

Riprendiamo il sistema di controllo, consideriamo questi valori numerici:

$G_a = 1, G_r = 1, G_c = K_c, G_f G_s = \frac{1}{K_d}$

↳ guad. max. tra nf. e uscita in regime permanente

$d_a = 0, d_s = 0$

Supponiamo che agisca il riferimento r e d_p , (2 ingressi)

da inseguire da rigettare

QUINDI:

$Y(s) = G_{ry}(s)R(s) + G_{dp}(s)D_p(s)$

quanto valgono G_{ry} e G_{dp} ?

$G_{ry} = G_r \frac{G_c G_a G_p}{1 + G_c G_a G_p G_f G_s} ; G_{dp}(s) = \frac{1}{1 + L}$

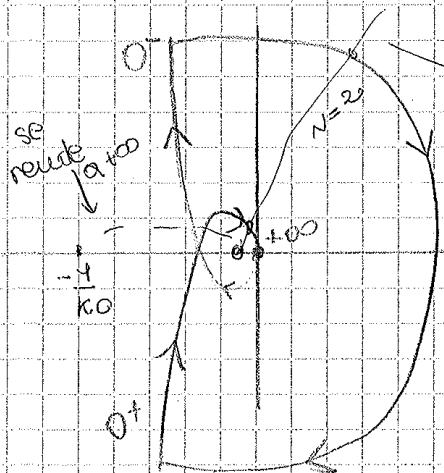
SOSTITUENDO:

$Y(s) = \frac{K_c G_p}{1 + \frac{K_c}{K_d} G_p} R(s) + \frac{1}{1 + \frac{K_c G_p}{K_d}} D_p(s)$

Supponendo di far tendere $K_c \rightarrow \infty$

$Y(s) \approx K_d R(s) + 0$

NB: si mette in evidenza il fatto che il disturbo viene attenuato



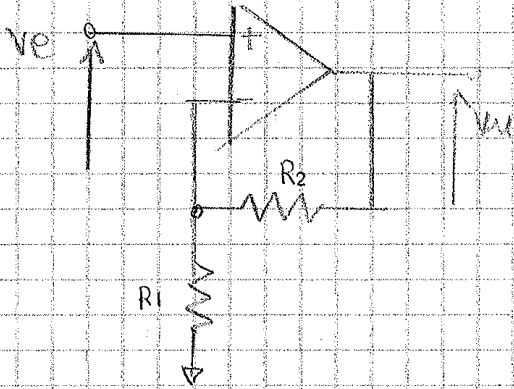
SE FINIAMO IN QUESTO PUNTO $N=2$!
 $P=1 = 2$
 ↳ SISTEMA INSTABILE

$G_{re} \frac{R_o}{s^h} \cdot \frac{1}{s} \rightarrow$ se $\mu + p < h$

IL SISTEMA NON È BIBO STABILE, ERRORE ILLIMITATO

System type / Input order	STEP input $R=0$	Ramp input $R=1$	Parabola input $R=2$
0	$\frac{K_d^2 R_o}{K_d + K_p K_c G_a}$	∞	∞
1	0	$\frac{K_d^2 R_o}{K_p K_c G_a}$	∞
2	0	0	$\frac{K_d^2 R_o}{K_p K_c G_a}$

EX: AMPLIF. OP. N.I.



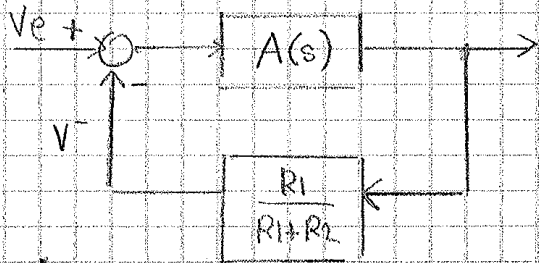
$\frac{V_{eb}}{V_i} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$

$\frac{V_u}{V_L} = \frac{A_o}{\left(1 + \frac{s}{\omega_1}\right)\left(1 + \frac{s}{\omega_2}\right)}$

MATU1 $\rightarrow A_o \approx 10^5$

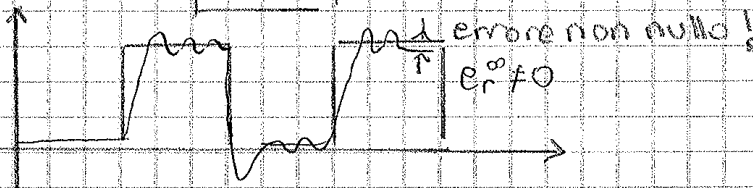
$\omega_1 = (f_1 = 8 \text{ Hz}) = 2\pi f_1$

$\omega_2 = (f_2 = 10 \text{ MHz})$



Dato che in $A(s)$ non ci sono poli nell'origine

\rightarrow tipo "0"



$h=0$