



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 87'

DATA: 12/03/2014

APPUNTI

STUDENTE: @Uf][bc`U

MATERIA: 7ca i b]Wn]cb]`9`Yhf]WY`Ž`'9gYfW'

Prof. : YffYfc

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

Valter Ferrero

19/11/12

DET 011 564 4158

valter.ferrero@polito.it

Libri di riferimento:

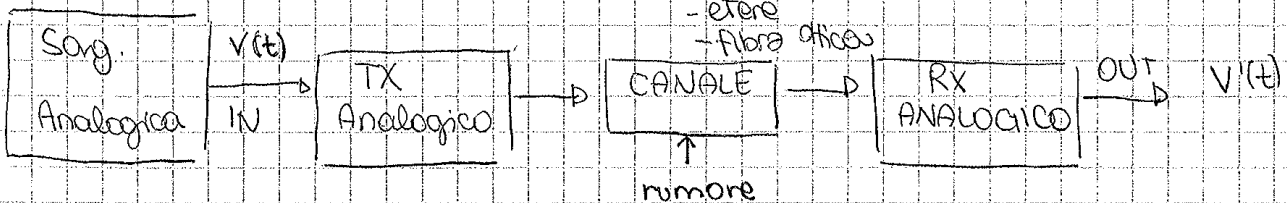
- L.W. COUCH "Digital and Analog Communication Systems"
Dennice Hall
- (APOGEO)
- Albertengo Bianco Tordin "Esercizi svolti di comunicazioni elettriche"
CLUT



Sistemi di TX:

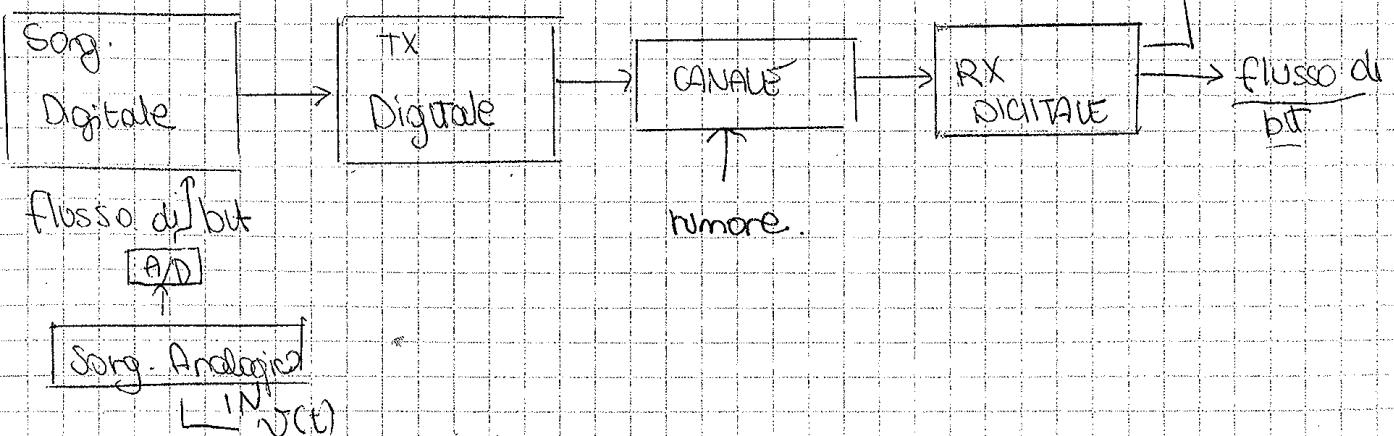
- Analogici: trasmissione di segnali reali continui nel tempo
- Digitali: il segnale da trasportare è discretizzato,
 - nel tempo
 - nelle ampiezze

SISTEMI ANALOGICI



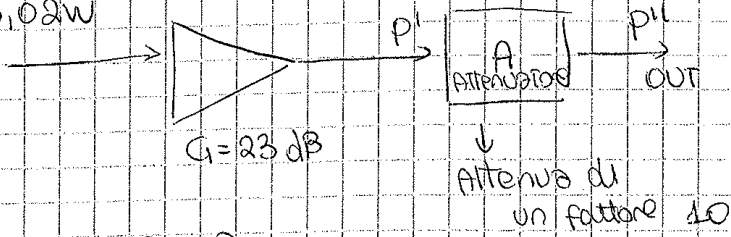
$V'(t)$ in uscita sia il più possibile simile a $v(t)$

SISTEMI DIGITALI



Esempio:

$P_{in} = 0,02W$



$P'' = \frac{1}{10} P'$

Quanto vale la P_{out} ?

$0,02W \Rightarrow 10 \log \left(\frac{0,02}{10^{-3}} \right) = 13 \text{ dBm}$ \rightarrow potenza in ingresso in dB

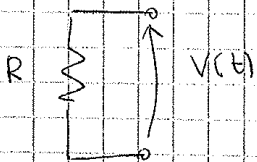
$G \triangleq \frac{P''}{P} = \frac{1}{10}$

$G_{att} |_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{1}{10} \right) = -10 \text{ dB}$

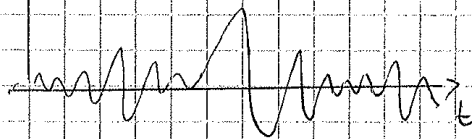
$P_{out} |_{dBm} = P_{in} |_{dBm} + G |_{dB} + G_{att} |_{dB} = 13 + 23 - 10 = 26 \text{ dBm}$
 \downarrow
 $\approx 400 \text{ mW}$

$\left(\begin{array}{l} \text{dBm} + \text{dB} = \text{dBm} \\ \text{dB} + \text{dB} = \text{dB} \end{array} \right)$ Ricordarsi che...

RUMORE TERMICO



$\langle V(t) \rangle = 0$
 \uparrow
 $V(t)$



Il moto termico degli elettroni genera una certa tensione di rumore.

Il moto è diverso da 0 tranne che a 0°K.

$P_V(f) = P$

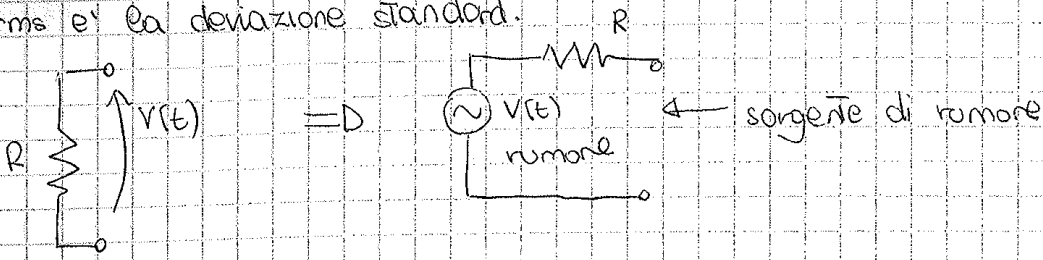
\downarrow densità spettrale di potenza \rightarrow spettro

$P_V(f) = 2R \left[\frac{hf}{2} + \frac{hf}{e^{hf/kT} - 1} \right] \left[\frac{V^2}{Hz} \right]$

h : costante di Planck
 $6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J/Hz}$

Prevale alla f. ottiche \rightarrow Rumore dovuto al principio di indet. di Heisenberg \rightarrow rumore dovuto al moto termico

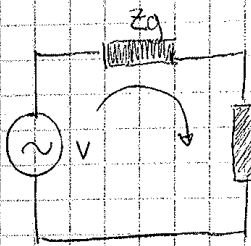
V_{rms} e' la deviazione standard.



$P_v(f)$

$P_I(f)$ ← spettro di potenza di rumore in corrente $\left[\frac{A^2}{Hz} \right] = \frac{2kT}{R}$

Nei sistemi si utilizza la potenza.



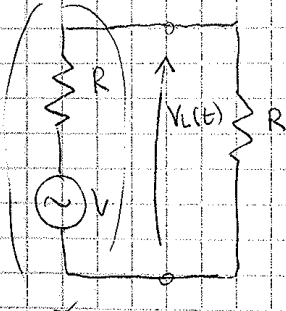
con pte reale e immaginaria
 $Z_L = Z_g^* \Rightarrow$ massimo transf. potenza (energia)

$R_L = R_g$ (adattamento di impedenza)

↓ casi reali

CARICO PARI ALL'IMPIEDENZA DI SORGENTE

Potenze su circuiti adattati in impedenza



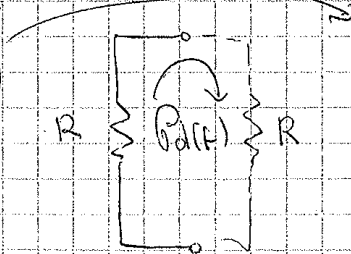
Non confondere con i filtri adattati

$v_L(t) = \frac{v(t)}{2} \Rightarrow P_L = \frac{v_L^2}{R} = \left(\frac{v(t)}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{R}$
 = $\frac{v(t)^2}{4R} = \frac{P_v}{4R}$
 ↳ DISPONIBILE ↳
 ↳ sorg. di rumore ↳

$P_L(f) = \frac{1}{4R} P_v(f) = \frac{2RkT}{4R} = \frac{kT}{2} \left[\frac{W}{Hz} \right]$

Potenza disponibile

$P_d(f) = \frac{kT}{2} \left[\frac{W}{Hz} \right]$
 di rumore



massimo trasferimento di potenza.

Commenti:

Tale spettro di potenza ha una interpretazione fisica

$$F(f) = \frac{K T_0 G_d + P_{\text{rumore}} \text{ (del doppio bipolo)}}{\frac{K T_0}{2} \cdot G_d}$$

$F(f) \geq 1$ (in generale) $F(f) > 1$

Spesso la cifra di rumore non dipende dalla frequenza
 la cifra di rumore è definita:

- con il sistema adattato in impedenza
- con resistenza di ingresso a $T = 290 \text{ K}$
- all'equilibrio termico (290 K)

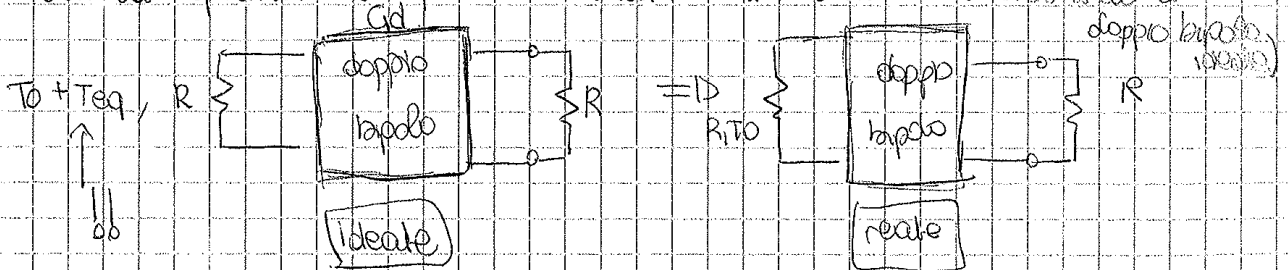
IMPORTANTE!

Temperatura equivalente di rumore:

$$P_{\text{out}}^{\text{reale}}(f) = G_d(f) \cdot \frac{k}{2} T_0 + G_d(f) \cdot \frac{k}{2} T_{\text{eq}}(f)$$

resistenza di ingresso
interno al doppio bipolo

T_{eq} rumore di un doppio bipolo è l'aumento ideale di temperatura che si deve dare al resistore di ingresso per avere la corretta quantità di densità spettrale di potenza di rumore in uscita (considerando il



lo spettro di potenza in uscita è il medesimo.

Relazioni tra T_{eq} e F

$$P_{\text{out}}^{\text{reale}} = G_d \frac{k}{2} (T_0 + T_{\text{eq}})$$

$$\frac{T_0 + T_{\text{eq}}}{T_0} = \frac{T_0 \cdot F}{T_0}$$

$$P_{\text{out}}^{\text{ideale}} = G_d \frac{k}{2} T_0 \cdot F$$

$$\begin{cases} F = 1 + \frac{T_{\text{eq}}}{T_0} \\ T_{\text{eq}} = T_0 (F - 1) \end{cases}$$

FORMULE PER
CONVERSIONE

$$P_{out}^{(1)}(f) = \frac{K}{2} (T_0 + T_{eq}^{(1)}) \cdot G_{d1}$$

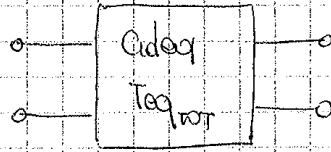
dimostrazione per arrivare alla T_{eq} in una cascata di doppi bipoli

$$P_{out}^{(2)} = P_{out}^{(1)}(f) \cdot G_{d2} + \frac{K}{2} T_{eq}^{(2)} \cdot G_{d2}$$

$$= \frac{K}{2} (T_0 + T_{eq}^{(1)}) \cdot G_{d1} \cdot G_{d2} + \frac{K}{2} T_{eq}^{(2)} \cdot G_{d2}$$

$$= \frac{K}{2} \underbrace{G_{d1} \cdot G_{d2}}_{G_{deq}} \left[\underbrace{T_0 + T_{eq}^{(1)}}_{T_{eq\ tot}} + \frac{T_{eq}^{(2)}}{G_{d1}} \right]$$

$$P_{out}^{(2)} = \frac{K}{2} G_{deq} [T_0 + T_{eq\ tot}]$$



$$G_{deq} = G_{d\ tot} = G_{d1} \cdot G_{d2}$$

$$T_{eq\ tot} = T_{eq}^{(1)} + \frac{T_{eq}^{(2)}}{G_{d1}}$$

Se avessimo una catena con n doppi bipoli

$$G_{deq\ tot} = \prod_{i=1}^n G_{di}$$

$$T_{eq\ tot} = T_{eq}^{(1)} + \frac{T_{eq}^{(2)}}{G_{d1}} + \frac{T_{eq}^{(3)}}{G_{d1} G_{d2}} + \dots$$

20/11/13

$$\begin{cases} F(f) = 1 + \frac{T_{eq}(f)}{T_0} \\ T_{eq}(f) = T_0 [F(f) - 1] \end{cases}$$

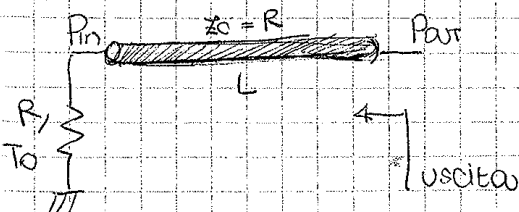
Catene di doppi bipoli

$$T_{eq\ tot} = T_{eq}^{(1)} + \frac{T_{eq}^{(2)}}{G_{d1}} + \frac{T_{eq}^{(3)}}{G_{d1} G_{d2}} + \dots + \frac{T_{eq}^{(i)}}{G_{d1} G_{d2} \dots G_{d(i-1)}}$$

$$F_{tot} = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_{d1}} + \frac{F_3 - 1}{G_{d1} G_{d2}} + \dots + \frac{F_i - 1}{G_{d1} G_{d2} \dots G_{d(i-1)}}$$

Esempio

Circo di rumore di un attenuatore passivo elettrico.



$$L \triangleq \frac{P_{in}}{P_{out}} \quad L_{dB} \triangleq 10 \log_{10} \frac{P_{in}}{P_{out}}$$

$$P_{out} |_{dBm} = 10 \log_{10} \frac{P_{in} e^{-\gamma z} [W]}{10^{-3} [W]} = 10 \log_{10} \frac{P_{in} [W]}{10^{-3} [W]} + 10 \log_{10} e^{-\gamma z}$$

$$P_{out} |_{dBm} = P_{in} |_{dBm} + 10 \log_{10} e^{-\gamma z}$$

$$10 \log_{10} e^{-\gamma z} = \frac{10}{\ln 10} \cdot \ln e^{-\gamma z} = \frac{10 \cdot (-\gamma z)}{\ln 10}$$

$$P_{out} |_{dBm} = P_{in} |_{dBm} - \left(\frac{10 \gamma}{\ln 10} \right) \cdot z \rightarrow \alpha \rightarrow dB$$

Quindi:

$$P_{out} |_{dBm} = P_{in} |_{dBm} - \alpha z \rightarrow \text{valida per un cavo qualunque}$$

α [dB / unità di lunghezza]

αz [dB]

α [$\frac{dB}{\text{unità di lunghezza}}$] \Rightarrow $\frac{dB}{km}$, $\frac{dB}{100m}$, $\frac{dB}{m}$
 fibre ottiche

Esempi:

cavi coax. standard	1 MHz	10 MHz	100 MHz	[dB/km]	
	RG 62 A	8,2 dB/km	27,9		
doppino telefonico UTP 5	1 MHz	16 MHz	100 MHz		
	21,9	77	215,7		
Cavi ad alta frequenza	1 MHz	10 MHz	100 MHz	1 GHz	10 GHz
	RG 402	0,91	2,89	10,06	35,06

fibre ottiche

$\alpha \approx 0,2 \frac{dB}{km}$

su bande elevatissime (THz)

$$L_{TOT} \triangleq \frac{P_{TX}}{P_{RX}} = \frac{(\lambda R)^2}{A_{TX} \cdot A_{RX}}$$

$$\lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{10^9} = 0,3 \text{ m} = 30 \text{ cm}$$

$$L_{TOT} = \frac{(0,3 \cdot 10^4)^2}{1 \text{ m}^2 \cdot 1 \text{ m}^2} = 9 \cdot 10^6$$

$$L_{TOT} \Big|_{\text{dB}} = 10 \log_{10} L_{TOT} = \boxed{69,5 \text{ dB}}$$

p. 52. rumore

Rappresentazione segnali a banda stretta

SEGNALE ANALITICO $v(t) = \text{Re} \left\{ \underbrace{g(t)}_{\substack{\text{segnale} \\ \text{in banda} \\ \text{traslata}}} \cdot e^{+j2\pi f_c t} \right\} = x(t) \cos(2\pi f_c t) - \underbrace{y(t)}_{\sin(2\pi f_c t)}$

$g(t)$ è detto involucro complesso di $v(t)$ ed è in banda base ($f_c = 0$)

$v(t)$ segnale reale

$$g(t) = \underbrace{x(t)}_{\text{comp. in fase}} + j \underbrace{y(t)}_{\text{comp. in quadratura}}$$

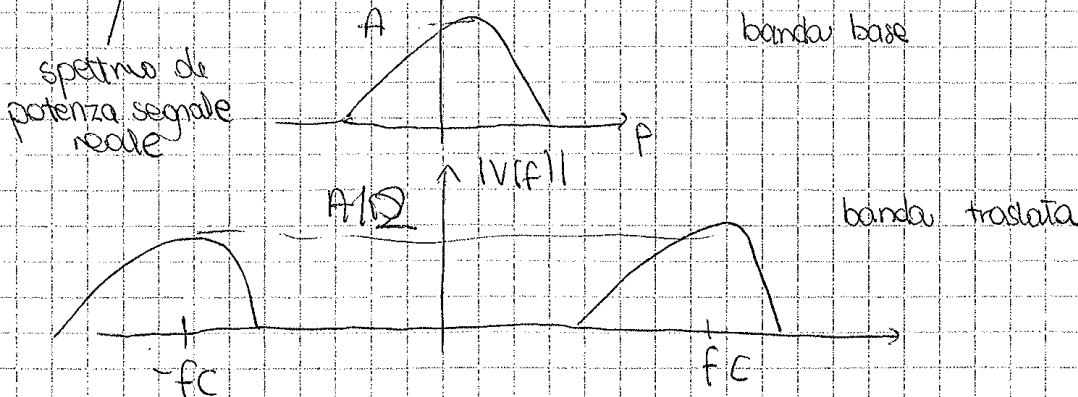
Se $v(t) = \text{Re} \left\{ g(t) e^{+j2\pi f_c t} \right\}$

allora:

$$1) \quad V(f) = \mathcal{F}\{v(t)\} = \frac{1}{2} \left[G(f-f_c) + G^*(f+f_c) \right]$$

$$G(f) = \mathcal{F}\{g(t)\}$$

$$2) \quad P_v(f) = \frac{1}{4} \left[P_g(f-f_c) + P_g(-f-f_c) \right]$$



$$P_v = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} P_g (f-f_0) df + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} P_g (-f-f_0) df$$

$$P_v = \frac{1}{4} P_g + \frac{1}{4} P_g = \frac{1}{2} P_g$$

Fasore $A \cdot \cos(2\pi f_0 t)$
 ↑
 Ampiezza

Ampiezza: A

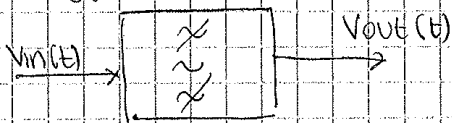
Potenza: $\frac{A^2}{2}$

$A \rightarrow$ involucro complesso

$$g(t) = A$$

$$P_g = A^2$$

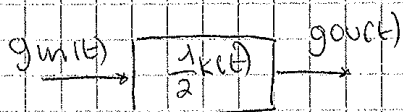
• Filtraggio passabanda



$$h(t) = \text{Re} \{ k(t) e^{+j2\pi f_0 t} \}$$

$$V_{in}(t) = \text{Re} \{ g_{in}(t) e^{+j2\pi f_0 t} \}$$

$$V_{out}(t) = \text{Re} \{ g_{out}(t) e^{+j2\pi f_0 t} \}$$



$$g_{out}(t) = g_{in}(t) * \frac{1}{2} k(t)$$

$k(t)$ è l'involucro complesso $\tilde{h}(t)$

• Rumore

$$\tilde{n}(t) = \text{Re} \{ \tilde{n}(t) e^{+j2\pi f_0 t} \}$$

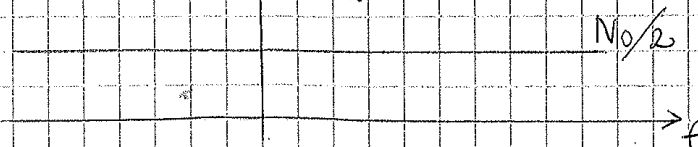
segnale analitico

$\tilde{n}(t)$ involucro complesso

Rumore $P_n(f) = \frac{kT_0}{2} = \frac{N_0}{2}$

$N_0 = kT_0$ (nel caso di rumore termico)

↑ $P_n(f)$



$$\mathcal{F}\{P_g(\nu)\} = A_c^2 \{d(f) + P_m(f)\}$$

$$P_s(f) = \frac{1}{4} [P_g(f-f_c) + P_g(f+f_c)]$$

3/4 P_g 2/4 0/6

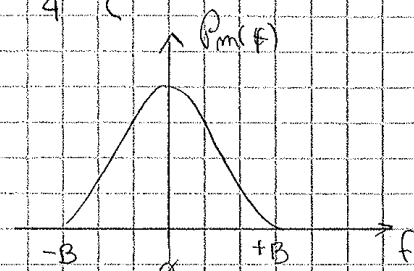
$$g(t) = A_c [1 + m(t)] \text{ e' reale}$$

$P_g(f)$ e' una funzione pari

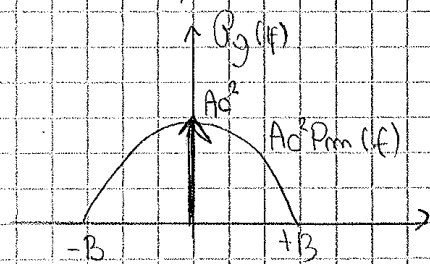
$$P_g(f-f_c) = P_g(f+f_c)$$

$$P_s(f) = \frac{1}{4} [P_g(f-f_c) + P_g(f+f_c)]$$

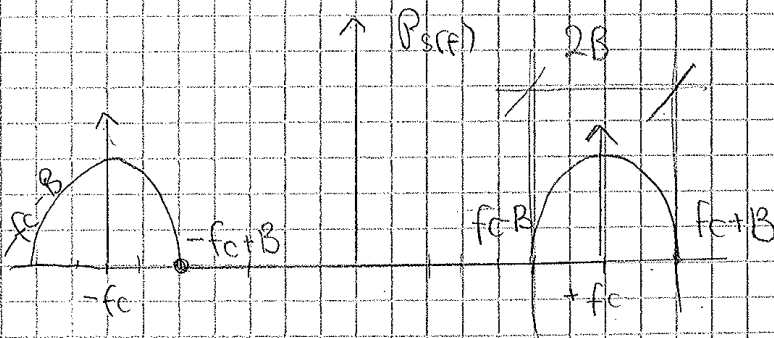
$$= \frac{A_c^2}{4} \{d(f-f_c) + P_m(f-f_c) + d(f+f_c) + P_m(f+f_c)\}$$



$$g(t) = A_c [1 + m(t)]$$



$$P_g(f) = A_c^2 [d(f) + P_m(f)]$$



La modulazione di ampiezza raddoppia la banda

di occupazione spettrale del segnale modulato e' doppia rispetto al segnale modulante

Il contenuto spettrale di $m(t)$ e' stato traslato attorno alle frequenze della portante pari a f_c

E' presente una riga (delta) che non porta informazione. Essa e' alla potenza $\frac{A_c^2}{2}$ (e' la portante)

$$\% \text{ positiva} \triangleq \frac{A_{\max} - A_c}{A_c} \cdot 100 = +\max[m(t)] \cdot 100$$

(A_c è l'ampiezza della portante non modulata)

Solitamente $-1 < m(t) < 1$

$$\begin{cases} \min[m(t)] = -1 \\ \max[m(t)] = 1 \end{cases}$$

Quindi: $\% \text{ modulaz} = \% \text{ positiva} = \% \text{ negativa} = 100\%$

Solitamente si vede

$$1 + m(t) \geq 0 \Rightarrow m(t) \geq -1$$

Se $m(t) \geq -1$ Per ricostruire il segnale è sufficiente un rivelatore di inviluppo

Se $m(t) < -1$ È presente sovr modulazione non si può utilizzare il rivelatore di inviluppo

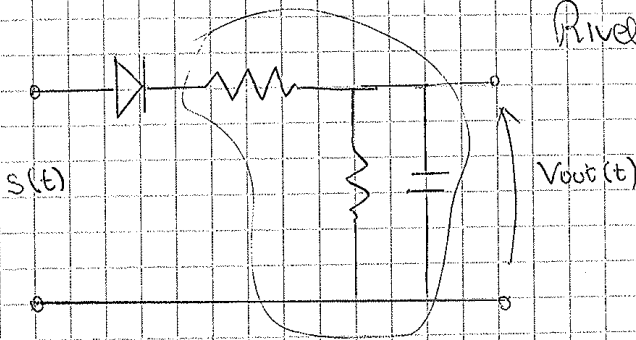
Per non avere

sovr modulazione $m(t) \geq -1 \Rightarrow \min[m(t)] = -1$

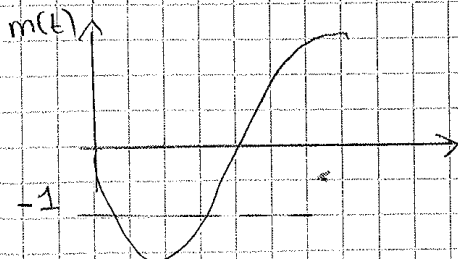
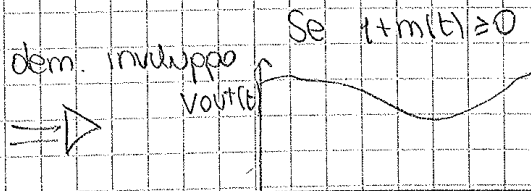
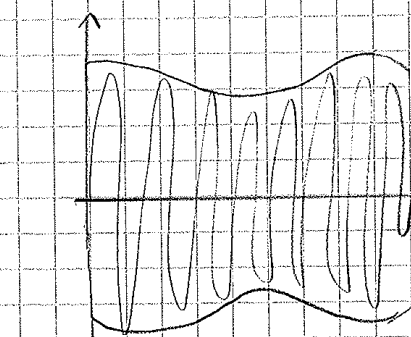
la $\% \text{ negativa} \leq 100\%$

È possibile utilizzare un Rx a rivelazione di inviluppo:

Rivelatore di inviluppo



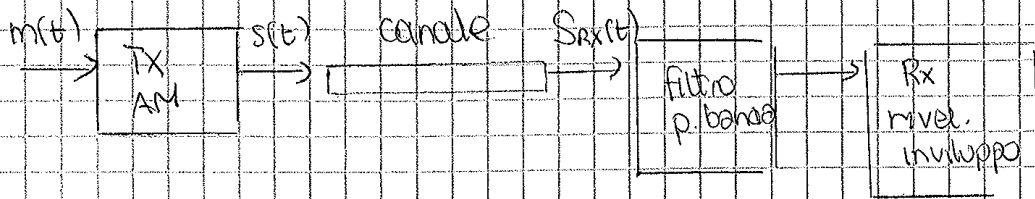
$$\begin{aligned} V_{out}(t) &\approx g(t) \approx 1 A_c [1 + m(t)] \\ &= A_c [1 + m(t)] = \\ &= A_c [1 + m(t)] \end{aligned}$$



Per modulazione AM tradizionale

$$s(t) = A_c [1 + m(t)] \cos(2\pi f_c t)$$

Se $m(t)$ è dimensionato per non avere sovramodulazione ($\% \text{neg} \leq 100\%$) posso utilizzare un ricevitore semplice a rivelazione di inviluppo

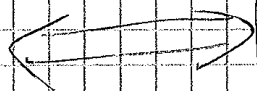


$$m(t) \in [-1, 1]$$

E_o sarà al massimo al 50%

CLASSICO ESEMPIO DI SCELTA TRA:

Semplicità del ricevitore



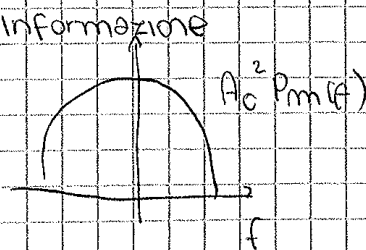
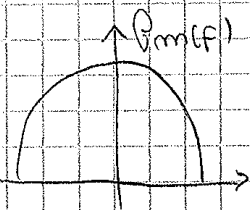
Utilizzo efficace della potenza trasmessa

26/11

Modulazioni analogiche di ampiezza

$$s(t) = \text{Re} \left\{ g(t) e^{+j2\pi f_c t} \right\}$$

$$g(t) = A_c [1 + m(t)]$$



$$P_s(f) = \frac{1}{4} [P_g(f-f_c) + P_g(f+f_c)]$$

$$P_s(f) = \frac{A_c^2}{4} [\delta(f-f_c) + P_m(f-f_c) + \text{riplica } f < 0]$$

$$X_F(t) = \frac{K A_c R_X}{2} [1 + m(t)] \leftarrow \text{Ricostruzione segnale modulante.}$$

$$E\% \stackrel{\Delta}{=} \frac{\langle m^2 \rangle}{1 + \langle m^2 \rangle} = \frac{P_m}{1 + P_m} \cdot 100 = 100\% \quad \begin{matrix} \uparrow \\ P_m \gg 1 \end{matrix}$$

eff di modulazione

Tutta l'energia è legata al segnale utile (pagato col ricevitore più complesso)

Quindi, noniamo che il segnale può essere ricostruito senza nessun vincolo su di esso.

Se S_{RX} è in assenza di 1, e' senza la portante, cosa succede?

$$X_F(t) = \frac{K A_c R_X}{2} \cdot m(t) \rightarrow \text{(il segnale si riesce a trasmettere)}$$

$$E\% = \frac{P_m}{P_m} \cdot 100 = 100\% \rightarrow \text{rimane invariata.}$$

Al limite, possiamo dire che:

$$s(t) = A_c [1 + m(t)] \cos(2\pi f_c t) \leftarrow \text{AM - DSB - SC}$$

$$X_F(t) = \frac{K A_c R_X}{2} \cdot m(t) \leftarrow \begin{matrix} \text{SOPPR. PORTANTE} \\ \text{informazione} \end{matrix}$$

↓
Suppressed carrier
Double SideBand

$$E\% = 100\% \quad \text{indipendem. da } P_m$$

$$P_{s_{AM-DSB-SC}}(f) = \frac{A_c^2}{4} [P_m(f-f_c) + P_m(f+f_c)] \quad (\sqrt{g} = A_c m(t))$$

Non si spreca potenza per la portante

$$\Rightarrow E\% = 100\%$$

Può essere demodulato solo con Rx coerente.

$$E\% = \frac{P_m}{1+P_m} \cdot 100 \Rightarrow \text{Modulazione AM standard}$$

$$E\% = 100\% \Rightarrow \text{Modulazione AM-DSB-SC}$$

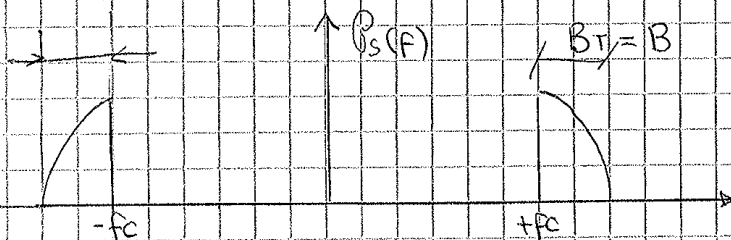
Concettualmente la parte tratteggiata in ~~verde~~ rosso è inutile per la TX del segnale poiché è sempre risp a quella rossa.
 L'idea è di eliminare metà dello spettro trasmesso

AM: - SSB - SC

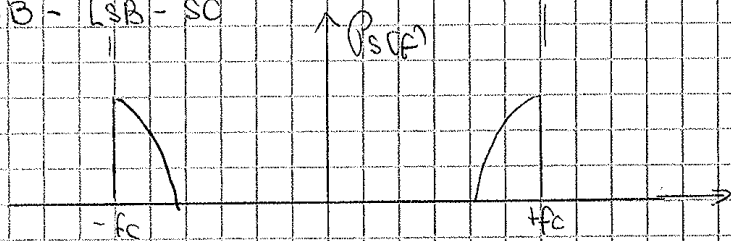
Single Side Band

AM - SSB - USB - SC

Upper side band (si trasmettono le frequenze maggiori)



AM - SSB - LSB - SC



Il formato AM-SSB si realizza ad esempio con filtri opportuni.

VANTAGGI:

- Il segnale Tx occupa metà banda rispetto AM-DSB

SVANTAGGI:

- Si riceve solo con Rx coerente

- Gli apparati Tx e Rx sono più complessi \Rightarrow non è possibile utilizzare il Rx a involucro

La modulazione AM-SSB-SC è utilizzata dai radioamatori, e dai sistemi radio per la navigazione.

- Rumore

$$P_n = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{n_{out}}(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{2} |H(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \cdot 2B = N_0 B$$

Il segnale passa indistorto

$$P_{s_{out}} = P_{s_{in}} = P_{RX}$$

Prestazioni: rapporto segnale rumore

$$\left(\frac{S}{N} \right)_{out, BB} = \frac{P_{s_{RX_{out}}}}{P_{n_{out}}} = \left(\frac{P_{RX}}{N_0 B} \right)$$

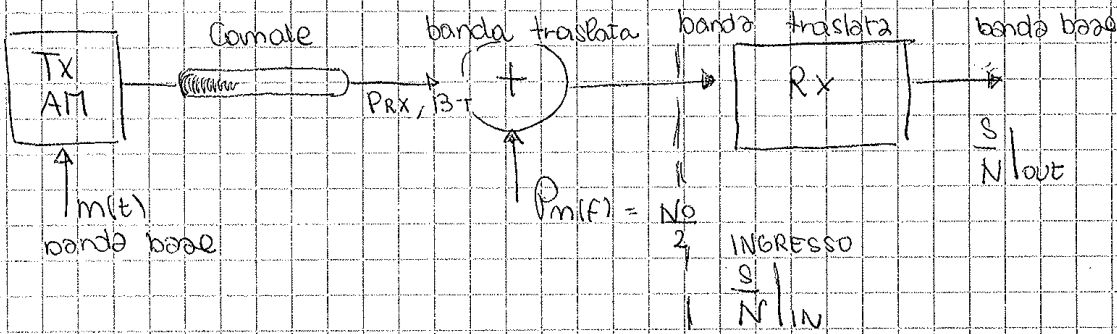
RIFERIMENTO

è il rapporto S/R all'uscita del ricevitore calcolato in banda base

Lo spettro di potenza di rumore in ingresso al ricevitore RX: $P_n(f) = \frac{N_0}{2}$

N_0 va calcolato con le formule sulle catene di doppi bipoli

SISTEMA DI TX AM



P_{RX} : Potenza segnale modulato in ingresso al RX

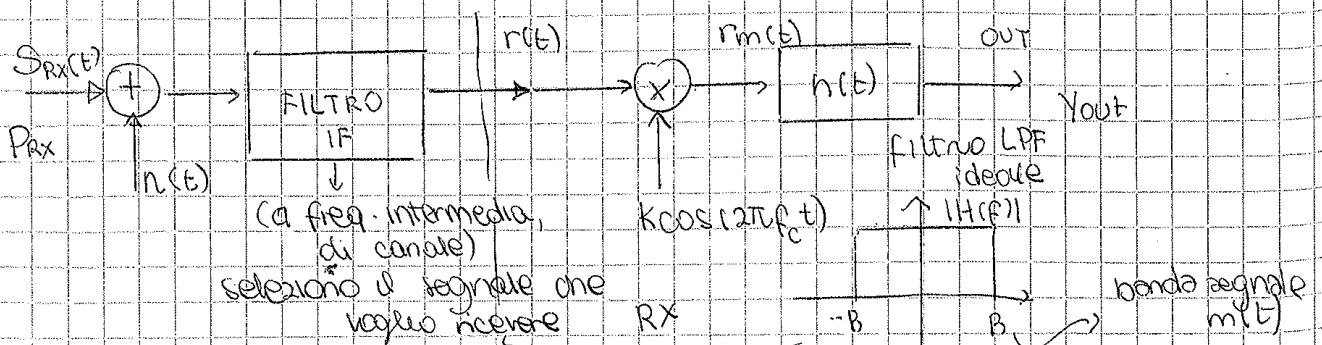
B : banda segnale modulante, $m(t)$

B_T : banda segnale modulato $s(t)$, $S_{RX}(t)$

$\left(\frac{S}{N} \right)_{in}$: SNR all'ingresso del ricevitore calcolato sulla banda B_T

$\left(\frac{S}{N} \right)_{out}$: SNR all'uscita del RX calcolato sulla banda B .

SISTEMI AM A RICEZIONE COERENTE



Filtro di selezione

- Elimina le componenti di freq. doppia ($2fc$)
- Fa "passare" il segnale utile $m(t)$ senza distorsione (rimuove il rumore $x_n(t)$)
- Il filtro LPF ideale a banda B

l'unico rumore che viene filtrato è $x_n(t)$

$$Y_{out}(t) = m(t) * h(t) = \frac{k}{2} \{ A_{cRx} [1 + m(t)] + x_n(t) \} \quad \text{(Q.R.D.)} * R(t)$$

$$Y_{out}(t) = \frac{k}{2} \left\{ \underbrace{A_{cRx} [1 + m(t)]}_{\text{comp. utile}} + \underbrace{x_n(t) * R(t)}_{\text{comp. di rumore}} \right\}$$

Componente utile: quella che contiene $m(t)$

$$\frac{k}{2} A_{cRx} m(t) \Rightarrow \text{Potenza: } \frac{k^2}{4} A_{cRx}^2 \langle m^2(t) \rangle =$$

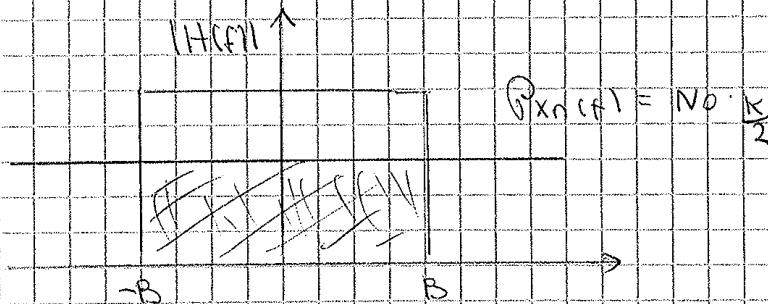
$$= \frac{k^2}{4} A_{cRx}^2 \cdot P_m$$

↓
modulante

Componente di rumore: $x_n(t) * h(t)$

$$P_{x_n}(f) = N_0 \text{ , in banda base}$$

$$\frac{N_0 \cdot 2B \cdot k}{2}$$



Potenza di rumore in uscita: $N_0 \cdot 2B \cdot \frac{k^2}{4}$

Rumore in uscita

$$\frac{S}{N}_{out} = \frac{\text{Pot. segnale uscita RX}}{\text{Pot. rumore uscita RX}} = \frac{k^2}{4} \cdot \frac{A_{cRx}^2 \cdot P_m}{\frac{k^2}{4} \cdot 2N_0B} = \frac{A_{cRx}^2 \cdot P_m}{2N_0 \cdot B}$$

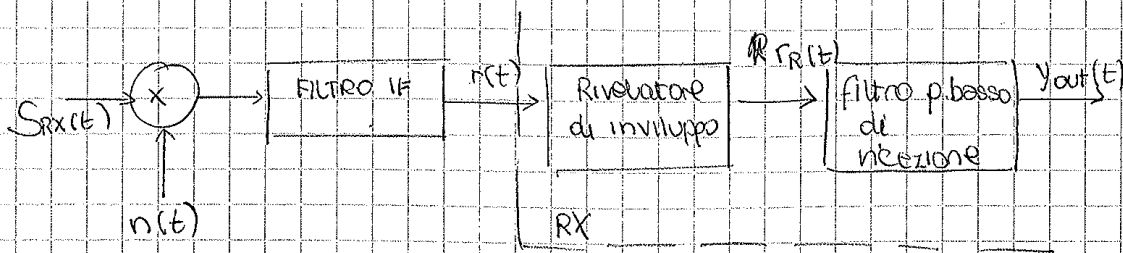
le prestazioni non dipendono da k !

$$P_{Rx} = \frac{A_{cRx}^2}{2} [1 + \langle m^2(t) \rangle] = \frac{A_{cRx}^2}{2} [1 + P_m]$$

$$A_{cRx}^2 = \frac{2P_{Rx}}{1 + P_m} = \frac{2P_{Rx}}{1 + \langle m^2(t) \rangle} \rightarrow \text{Sostituendo}$$

AM-DSB

Ricezione incostante



$$S_{RX}(t) = A_{c,RX} [1 + m(t)] \cos(2\pi f_c t)$$

$$n(t) = x_n(t) \cos(2\pi f_c t) - y_n \sin(2\pi f_c t)$$

↑
pte reale

Dopo filtro IF

$$r(t) = S_{RX}(t) + n_{IF}(t) = \{ A_{c,RX} [1 + m(t)] + x_{n,IF}(t) \} \cos(2\pi f_c t) - y_{n,IF} \sin(2\pi f_c t)$$

↑ pte reale

↑ pte imm

- $x_{n,IF}$, $y_{n,IF}$ sono processi in BB con potenza definita dal filtro IF

$$r(t) = \text{Re} \{ \hat{r}(t) e^{+j2\pi f_c t} \}$$

n usata ingresso dal rivelatore

in usata dal rivelatore di inviluppo

$$\hat{r}(t) = A_{c,RX} [1 + m(t)] + x_{n,IF}(t) + j y_{n,IF}(t)$$

$$r_R(t) = K |\hat{r}(t)| = K [A_{c,RX} [1 + m(t)] + x_{n,IF}(t) + j y_{n,IF}(t)]$$

$$P_{RR} = K^2 \langle [A_{c,RX} [1 + m(t)] + x_{n,IF}(t)]^2 + y_{n,IF}(t)^2 \rangle$$

Processi ergodici $\Rightarrow D \langle \cdot \rangle = E[\cdot]$

$$P_{RR} = K^2 A_{c,RX}^2 \left[\langle [1 + m(t) + \frac{x_{n,IF}(t)}{A_{c,RX}}]^2 \rangle + \left(\frac{y_{n,IF}(t)}{A_{c,RX}} \right)^2 \right]$$

• 1° caso $\frac{S}{N}$ elevato $\Rightarrow D > 1$

$\Rightarrow A_{c,RX}$ elevato rispetto al rumore, si trascura $y_{n,IF}$, quindi significa che sto trascurando la pte immaginaria

$$r_R(t) = K |A_{c,RX} (1 + m(t) + \frac{x_{n,IF}(t)}{A_{c,RX}})| = K [A_{c,RX} (1 + m(t)) + x_{n,IF}(t)]$$

$$Y_{OUT}(t) = r_R(t) * h(t) = (K A_{c,RX} [1 + m(t)] + K x_{n,IF}(t)) * h(t) =$$

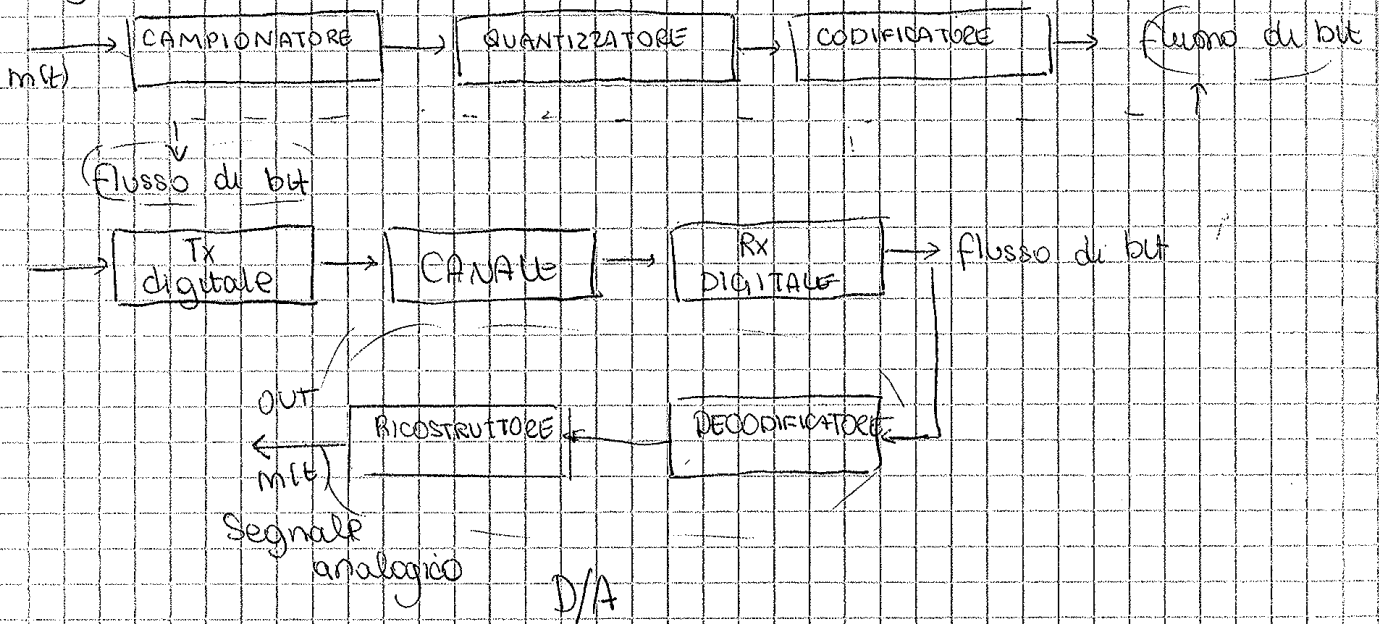
Sistemi Pulse Code Modulation PCM

È utilizzato per Tx un segnale analogico attraverso un sistema di Tx digitale (conversione AD.)

Le operazioni base sono:

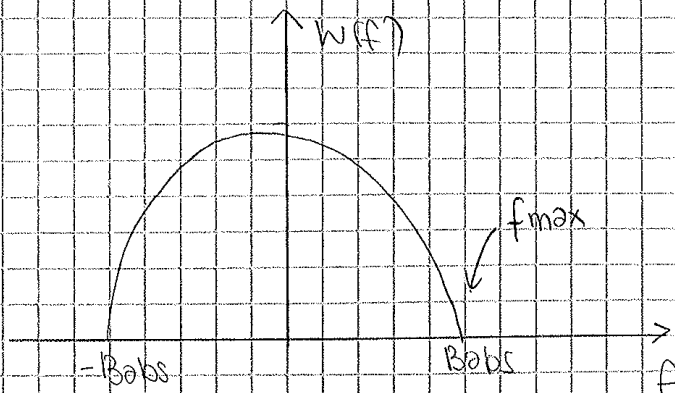
- 1) Campionamento nel tempo
- 2) Quantizzazione delle ampiezze
- 3) Codifica su un flusso seriale di bit.

Sorgente analogica



Campionamento

Si consideri $w(t)$ limitato in banda $w(t) = 0$ per $|f| > B_{abs} = f_{max}$



B_{abs} è detta banda assoluta

Se $f_c \geq 2B_{abs} = 2f_{max}$

allora:

- 1) $w(t)$ può essere ricostruito dai campioni del segnale $w(nT_c)$, $T_c = \frac{1}{f_c}$

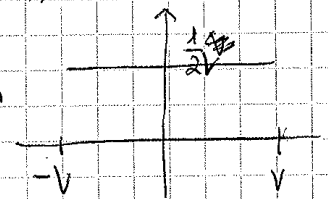
$$E[eq] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{eq} dx = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \frac{1}{\Delta} x dx = \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} = 0$$

$$\begin{aligned} \overline{eq^2} = E[eq^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{eq} dx = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} x^2 \cdot \frac{1}{\Delta} dx = \\ &= \frac{1}{\Delta} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} = \frac{1}{3\Delta} \left[\left(\frac{\Delta}{2}\right)^3 - \left(-\frac{\Delta}{2}\right)^3 \right] = \frac{1}{3\Delta} \left[\frac{\Delta^3}{2} - \left(-\frac{\Delta^3}{2}\right) \right] \\ &= \frac{1}{3\Delta} \cdot \frac{2\Delta^3}{2} = \frac{\Delta^2}{12} \end{aligned}$$

$E[eq^2] = \frac{\Delta^2}{12}$ $E[eq^2] = \frac{N^2}{3M^2}$ Val. massimo segnale di ingresso
 Con $\Delta = \frac{2V}{M}$ $\langle eq^2 \rangle$ (potenza dell'errore di quant.)
 ergodico

Calcoliamo la potenza del segnale di ingresso V_{in}

$$\begin{aligned} E[V_{in}] &= 0 \\ E[V_{in}^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{V_{in}}(x) dx = \\ &= \int_{-V}^{+V} \frac{1}{2V} x^2 dx = \frac{1}{2V} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-V}^{+V} = \frac{V^3}{3} \end{aligned}$$



$$SNR|_Q = \frac{S}{N}|_Q = \frac{\frac{V^3}{3}}{\frac{V^2}{3M^2}} = M^2$$

$$\frac{S}{N}|_Q = M^2$$

Per avere un buon SNR dobbiamo usare molti livelli

$$\frac{S}{N}|_Q = M^2 = (2^n)^2 = 2^{2n}$$

$$\frac{S}{N}|_Q \text{ dB} = 10 \log_{10} \frac{S}{N}|_Q = 10 \log_{10} 2^{2n} = 2n \underbrace{(10 \log_{10} 2)}_{3 \text{ dB}} \approx 6n \text{ [dB]}$$

$$\frac{S}{N}|_Q \text{ dB} = 6n \text{ [dB]}$$

$$n = \log_2 M$$

Esempio

Segnale vocale 300 ÷ 3,4 kHz



$$B_{abs} = f_{max} = 3400 \text{ Hz}$$

$$f_c > 2B_{abs} = 2 \cdot 3400 = 6800 \text{ comp/s}$$

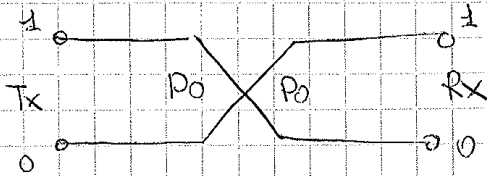
$$f_c = 8 \text{ kHz}$$

↓ scelta perché maggiore di 6,2 kHz

Canale binario simmetrico



Il intero sistema ha una probabilità di errore e può essere modellato come un canale binario simmetrico



P_0 : probabilità di trasmissione

$$P_0 = P(0 \text{ Rx} | 1 \text{ Tx}) = P(1 \text{ Rx} | 0 \text{ Tx})$$

$$P(e) = \underbrace{P(e | 1 \text{ Tx})} \cdot P(1 \text{ Tx}) + \underbrace{P(e | 0 \text{ Tx})} \cdot P(0 \text{ Tx})$$

$$P(\text{Rx} \neq \text{Tx} | 1 \text{ Tx}) = P_0$$

$$P(\text{Rx} \neq \text{Tx} | 0 \text{ Tx}) = P_0$$

Supponiamo che la sorgente sia equiprobabile $P(0 \text{ Tx}) = P(1 \text{ Tx}) = \frac{1}{2}$

$$P(e) = P_0 \cdot \frac{1}{2} + P_0 \cdot \frac{1}{2} = P_0 \quad [\text{BER}]$$

2. Valutare le percentuali di modulazione positiva e negativa.

Richiamo (per AM standard):

$$\% \text{ modulazione} = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{2A_c} \leftarrow \text{definizione}$$

$$A_{\max} = 1.4 A_c$$

$$A_{\min} = 0.2 A_c$$

$$\% m = \frac{1.4 - 0.2}{2} = 0.6 = 60\%$$

$$\% \text{ mod. pos.} = \frac{A_{\max} - A_c}{A_c} = \frac{1.4 A_c - A_c}{A_c} = 0.4 = 40\%$$

$$\% \text{ mod. neg.} = \frac{-A_{\min} + A_c}{A_c} = \frac{-0.2 A_c + A_c}{A_c} = 0.8 = 80\%$$

3. Dis. lo spettro risultante $s(t)$

$$s(t) = A_c (1 + m(t)) \cos(2\pi f_c t)$$

$$\text{inviluppo complesso } g(t) = A_c (1 + m(t))$$

$$\downarrow$$

$$-0.2 + 0.6 \sin(2\pi f_m t)$$

$$g(t) = \underbrace{A_c}_{10} (0.8 + 0.6 \sin(2\pi f_m t)) = 8 + 6 \sin(2\pi f_m t)$$

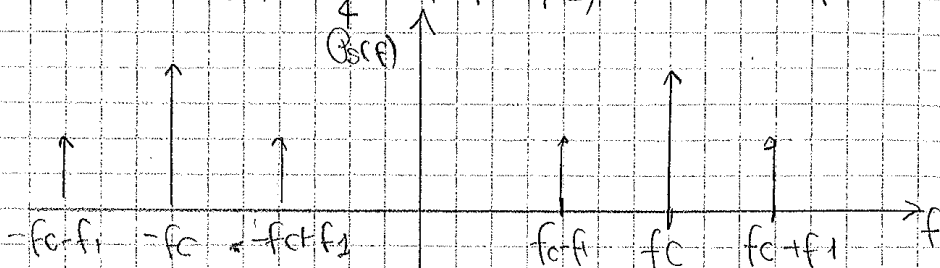
$$P_g(f) = 8^2 \delta(f) + \frac{6^2}{2} (\delta(f - f_m) + \delta(f + f_m))$$

$$P_g(f) = 64 \delta(f) + 9 \delta(f - f_m) + 9 \delta(f + f_m)$$

$$P_s(f) = \frac{1}{4} (P_g(f - f_c) + P_g(f + f_c))$$

$$P_s(f) = \frac{1}{4} (64 \delta(f - f_c) + 9 \delta(f - f_c - f_m) + 9 \delta(f - f_c + f_m) + 64 \delta(f + f_c) + 9 \delta(f + f_c - f_m) + 9 \delta(f + f_c + f_m))$$

$$P_s(f) = 16 \delta(f - f_c) + \frac{9}{4} \delta(f - f_c - f_m) + \dots \text{frequenze negative}$$



2. potenza media segnale modulato $s(t) = A_c (1 + m(t)) \cos(2\pi f_c t)$

$$= 0 \quad P_s = \frac{A_c^2}{2} (1 + P_m)$$

$$P_m = \langle m^2(t) \rangle = \frac{\frac{1}{2} + \frac{10^2}{2}}{(20 \cdot 0.0125)^2} = 0.50374$$

$$\text{Quindi } P_s = \frac{A_c^2}{2} (1 + P_m) = 0.7519 A_c^2$$

3. Calcolare eff. di modulazione

$$\eta = \frac{\text{Potenza segnale utile}}{\text{Potenza totale}} = \frac{0.50374}{1.50374} = 0.33499 = 33.499\%$$

Con DSB-SC, calcolare lo spettro (e pot. media)

$$s(t) = A_c m(t) \cos(2\pi f_c t)$$

$$\text{inviluppo complesso} = g(t) = A_c m(t)$$

$$P_g(f) = \frac{A_c^2}{4} \cdot P_m(f)$$

$$P_s(f) = \frac{A_c^2}{4} (P_m(f - f_c) + P_m(f + f_c))$$

~~$$P_m(f) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(10 \cdot 0.0125)^2} (\delta(f + f_1 - f_c) + \delta(f - f_1 - f_c)) +$$

$$+ 10^2 (\delta(f + 2f_1 - f_c) + \delta(f - 2f_1 + f_c))$$

+ ... (espressioni risultate sull'asse neg. delle frequenze)~~

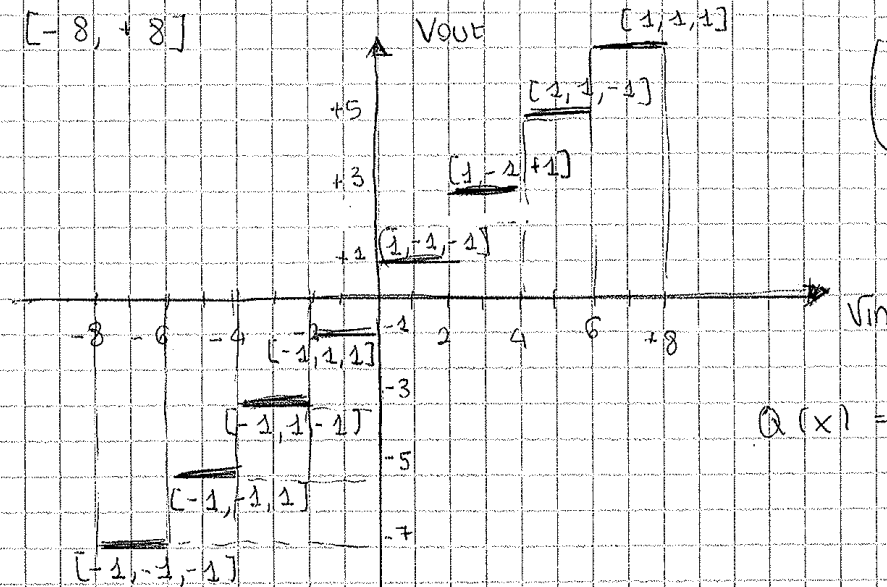
~~Calcolare la potenza media:~~

~~$$P_s = \int_{-\infty}^{+\infty} P_m(f)$$~~

$$P_m(f) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(10 \cdot 0.0125)^2} (\delta(f - f_1) + \delta(f + f_1))$$

ESEMPIO

Quantizzatore con $M=8$ livelli $\Rightarrow n \triangleq \lceil \log_2 M \rceil = 3$ (bit di quantizzazione)
 $V_{in} \in [-8, +8]$



(il 1° bit definisce il segno) !!

$$Q(x) = 8 - \frac{\Delta}{2} = 7$$

Come si può notare dal valore massimo codificato

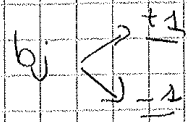
$$Q(x)_{max} = V - \frac{\Delta}{2} ; \quad Q(x)_{min} = -V + \frac{\Delta}{2} = -8 + \frac{\Delta}{2} = -7$$

$$Q(x)_{min} = [-1, -1, -1 \dots -1]$$

Il vettore \vec{a} passa attraverso il sistema di trasmissione digitale, (emulato dai BSC), in uscita avrò \vec{b} .

Il segnale in uscita dalla decodifica.

$$y = V \sum_{j=1}^N b_j \left(\frac{1}{2}\right)^j \leftarrow \text{segnale ricostruito}$$



$\vec{b} = \vec{a} \Rightarrow$ riesco a ricostruire perfettamente

$\vec{b} \neq \vec{a} \Rightarrow$ il segnale sarà affetto da rumore (perché non sarà identico al precedente)

Dobbiamo confrontare il segnale $Q(x)$ con il segnale y (ricostruito) per valutare il rumore introdotto dagli errori sul canale (bit)

$$e_b \triangleq y - Q(x)$$

$$E[e_b] = E \left[V \sum_{j=1}^N b_j \left(\frac{1}{2}\right)^j - V \sum_{j=1}^N a_j \left(\frac{1}{2}\right)^j \right] =$$

$$= E \left[V \sum_{j=1}^N (b_j - a_j) \left(\frac{1}{2}\right)^j \right] =$$

Per $i=k$

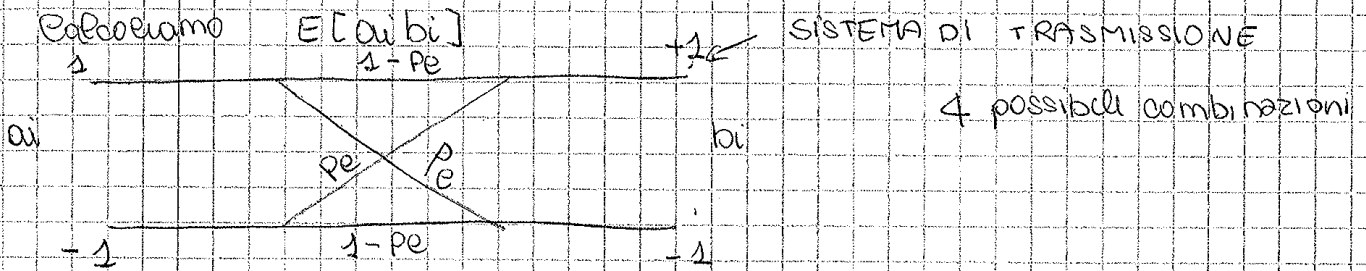
$$E[b_i \cdot b_i] = E[b_i^2] = E[(\pm 1)^2] = 1$$

$$E[a_i \cdot a_k] = E[a_i^2] = E[(\pm 1)^2] = 1$$

$$E[e^{-2}] = V^2 \sum_{i=1}^p \sum_{i=k}^p 2^{-2i} \left\{ \underbrace{E[b_i^2]}_1 + \underbrace{E[a_i^2]}_1 - \underbrace{E[b_i a_i]}_{\text{uguali}} - \underbrace{E[a_i b_i]}_{\text{uguali}} \right\}$$

$$= V^2 \sum_{i=1}^p \sum_{i=k}^p 2^{-2i} [2 - 2E[a_i b_i]]$$

$$E[e_b^2] = V^2 \sum_{i=1}^p 2^{-2i} \cdot 2 \{1 - E[a_i b_i]\} \quad \star$$



Sorgente equi probabile: $P(+1) = P(-1) = \frac{1}{2}$

$$E[a_i b_i] = \sum_{i=1}^p a_i b_i P(a_i, b_i) \quad \text{prob. congiunta}$$

a_i	b_i	$a_i b_i$	$P(a_i, b_i)$
+1	+1	+1	$P(a_i=1) \cdot P(b_i=1 a_i=1) = \frac{1}{2} (1-Pe)$
+1	-1	-1	$P(a_i=1) \cdot P(b_i=-1 a_i=1) = \frac{1}{2} \cdot Pe$
-1	+1	-1	$P(a_i=-1) \cdot P(b_i=1 a_i=-1) = \frac{1}{2} Pe$
-1	-1	+1	$\frac{1}{2} (1-Pe)$

$$E[a_i b_i] = \left(+1 \cdot \frac{1}{2} (1-Pe) \right) + \left(-1 \cdot \frac{1}{2} Pe \right) + \left(-1 \cdot \frac{1}{2} Pe \right) + \left(+1 \cdot \frac{1}{2} (1-Pe) \right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{Pe}{2} - \frac{Pe}{2} - \frac{Pe}{2} + \frac{1}{2} - \frac{Pe}{2} = 1 - 2Pe$$

$$= \frac{V^2}{3M^2} [1 + 4Pe(M^2 - 1)] \leftarrow \text{rumore totale}$$

$$\frac{S}{N} \Big|_{\text{out}} = \frac{E[V_{in}^2]}{E[\sigma_{out}^2]} = \frac{V^2/3}{\frac{V^2}{3M^2} (1 + 4Pe(M^2 - 1))} = \frac{M^2}{1 + 4Pe(M^2 - 1)}$$

\downarrow
 totale

\uparrow
 probabilità errore PCM

M: num livelli quantizza

Pe: prob. di errore del canale binario simmetrico

4/12/12

SISTEMI PCM

Nel caso in cui abbiamo solo rumore di quantizzazione

$$\frac{S}{N} \Big|_Q = M^2 ; \quad \frac{S}{N} \Big|_{Q, dB} \approx 6n \quad n = M \log_2 M$$

Errori dovuti al sistema di Tx digitale.

$$\frac{S}{N} \Big|_e = \frac{M^2}{M^2 - 1} \cdot \frac{1}{4Pe} \approx \frac{1}{4Pe} \quad M \gg 1$$

Con entrambe le sorgenti:

$$\frac{S}{N} \Big|_{\text{out}} = \frac{M^2}{1 + 4Pe(M^2 - 1)}$$

M è il n° di livelli del quantizzatore

Pe → prob. errore BSC

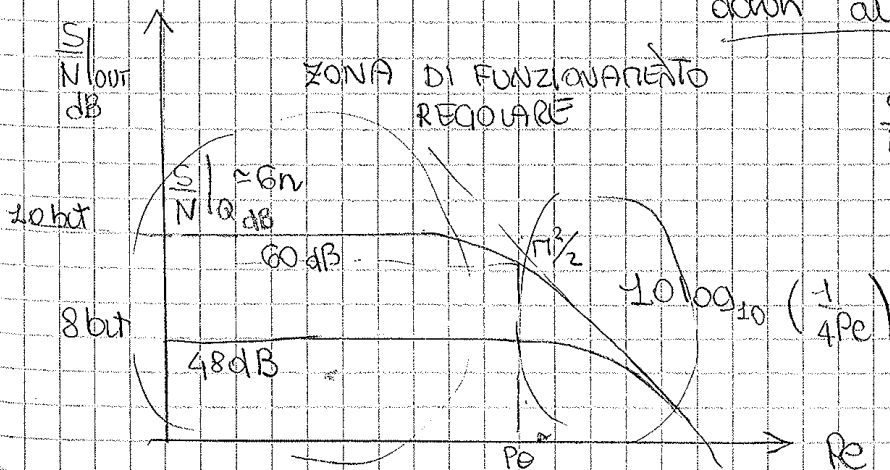
$$\lim_{Pe \rightarrow 0} \frac{S}{N} \Big|_{\text{out}} = M^2 = \frac{S}{N} \Big|_Q \quad \rightarrow \quad \text{Nel caso in cui } Pe \rightarrow 0$$

l'errore predominante sarà

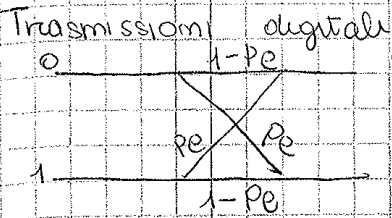
l'errore di quantizzazione.

$$\lim_{Pe \rightarrow \infty} \frac{S}{N} \Big|_{\text{out}} = \frac{1 \cdot M^2}{4Pe(M^2 - 1)} \rightarrow \text{Se } Pe \rightarrow \infty, \text{ gli errori saranno}$$

dovuti all'errore del canale.

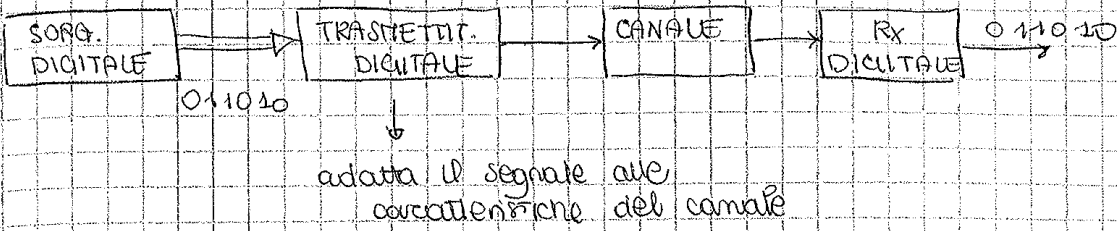


$$\frac{S}{N} \Big|_e \approx \frac{1}{4Pe}$$



BSC

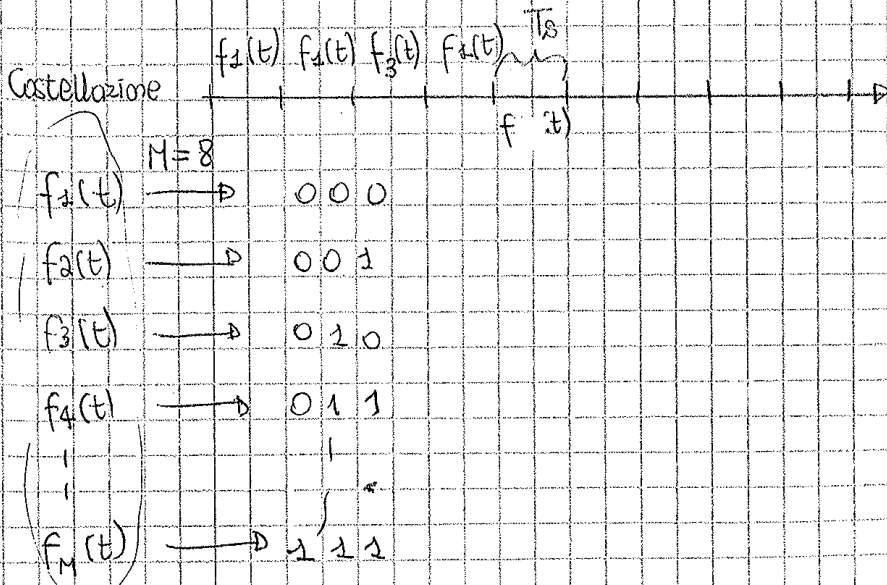
canale binario simmetrico

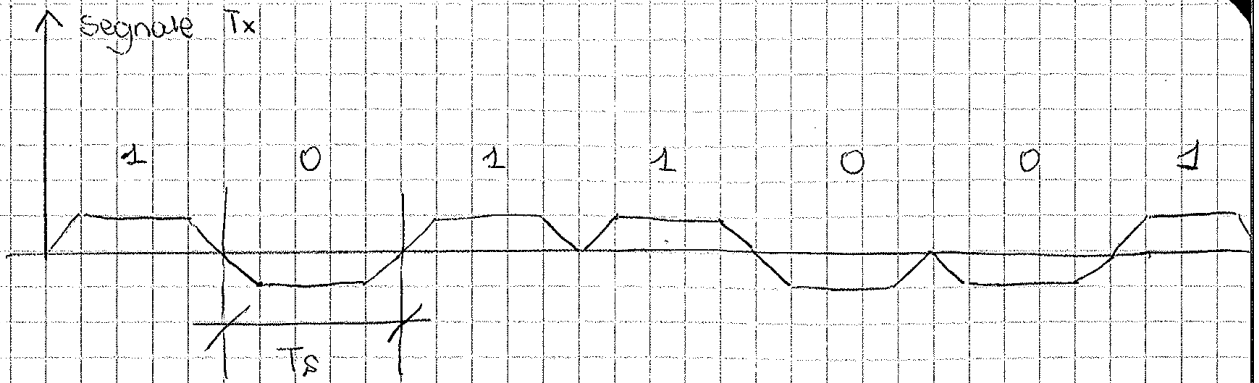


- Vari sistemi di trasmissione digitale
- Esaminandone le prestazioni
 - occupaz. di banda
 - prob. di errore
 - complessità di realizzazione
- Codifica di sorgente

CONCETTO BASE:

- l'asse dei tempi si divide in intervalli T_s (tempo di simbolo)
- Su ogni intervallo T_s si trasmette una forma d'onda detta "simbolo" di durata T_s , presa da un insieme di M forme d'onda, detto "costellazione"
- A ciascuna forma d'onda viene associata una sequenza di m bit che la identifica.





$$D = \frac{1}{T_s}$$

$$n_{bit} = 1$$

$$\Rightarrow D = B_r = \frac{1}{T_s}$$

$$T_s = T_b$$

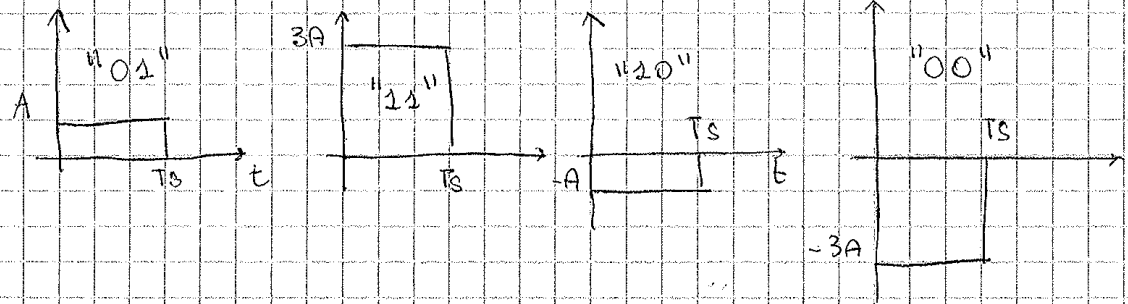
$$T_b \triangleq \frac{1}{B_r} = \frac{T_s}{n_{bit}}$$

La durata del simbolo coincide col tempo di bit.

T_b ha significato fisico

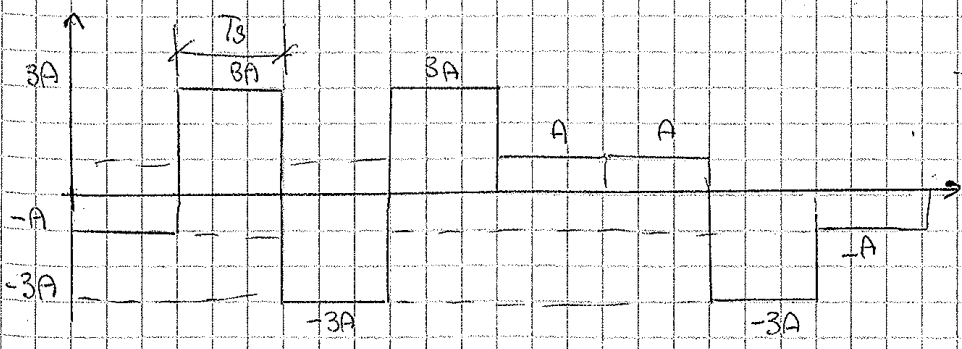
• Altro esempio: M=4

$$4 = 2^{n_{bit}} \Rightarrow n_{bit} = \lceil \log_2 4 \rceil = 2$$



$$B_r = B_n \triangleq n_{bit} \cdot D = 2D \Rightarrow B_r = 2D$$

1 0 1 1 0 0 1 1 0 1 0 1 0 0 1 0



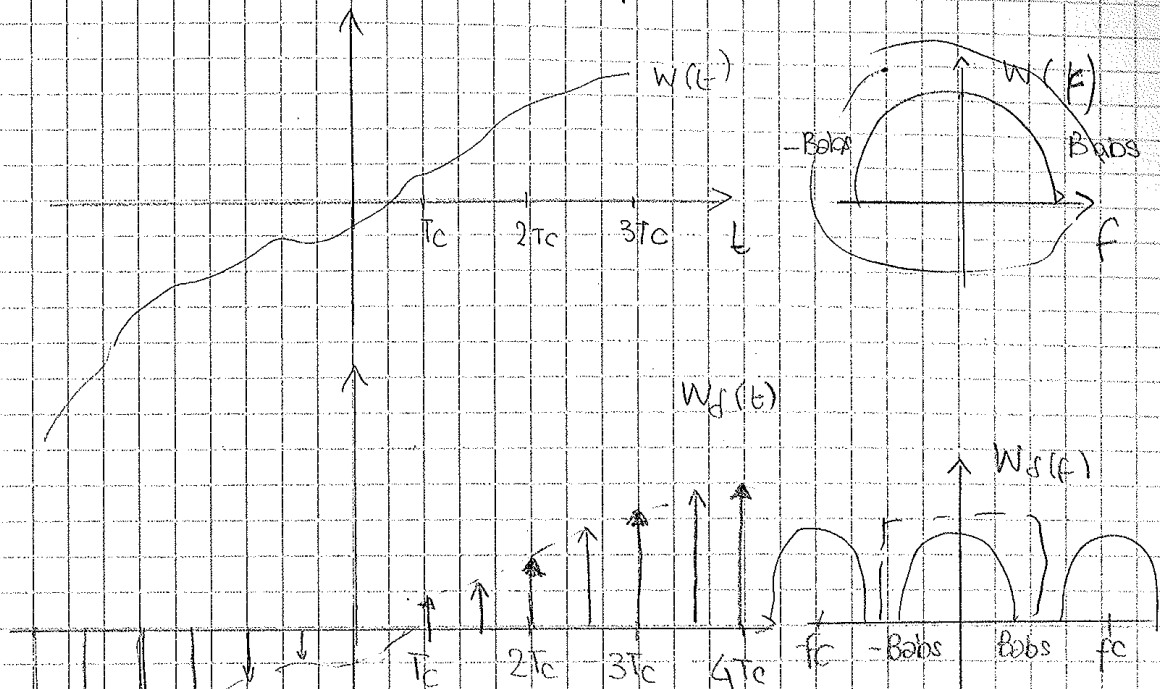
→ T_b non ha significato fisico

Osservazioni sui sistemi digitali:

Sistemi digitali diversi possono differire: per l'insieme delle forme d'onda scelte come costellazione; per l'associazione tra forme d'onda e bit

$f_c \rightarrow$ freq. di campionamento

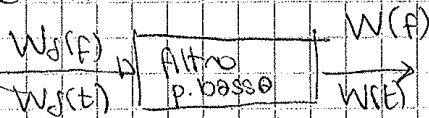
2) da ricostruzione si ottiene con un filtro passa basso



Il campionamento non degrada il segnale

$$f_c \geq 2 B_{obs} = 2 f_{max}$$

per ricostruire:



Noo!

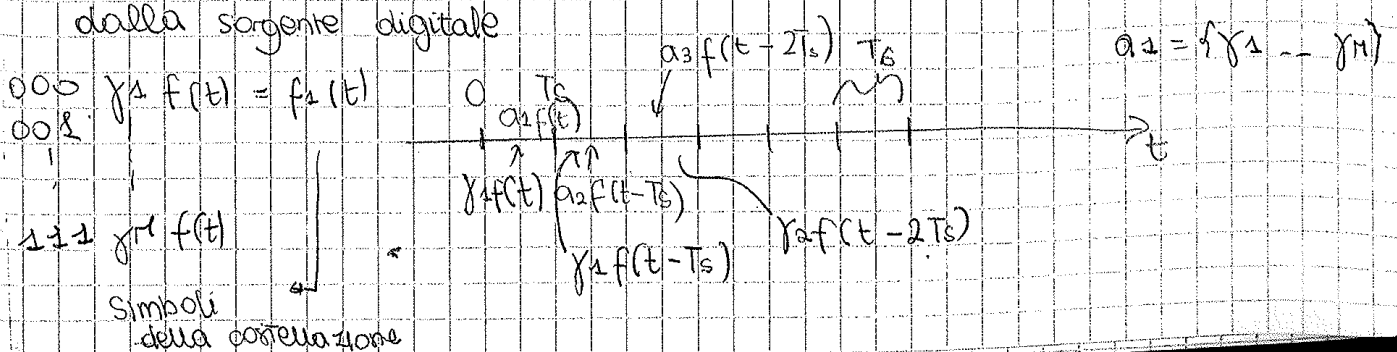
6/12/12

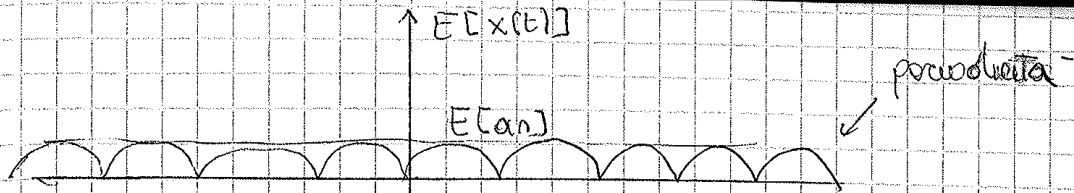
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n f(t - nT_s)$$

← segnale in uscita dal trasmettitore digitale

$f(t) \in [0, T_s]$

$a_n \rightarrow$ variabile casuale che per ogni intervallo di durata T_s può assumere M valori ($\gamma_1, \dots, \gamma_M$) a seconda dei bit emessi dalla sorgente digitale





funzione di autocorrelazione

$$R_x(t, \tau) \triangleq E[x(t) \cdot x(t+\tau)]$$

$$= E\left[\sum_n a_n f(t-nT_s) \sum_m a_m f(t+\tau-mT_s)\right]$$

$$= \sum_n \sum_m E[a_n a_m] f(t-nT_s) \cdot f(t+\tau-mT_s)$$

l' autocorrelazione non è stazionaria bensì ciclostazionaria di periodo T_s

Ritorniamo sul calcolo dello spettro di Potenza

$$P_x(f) = \mathcal{F}\{R_x(\tau)\} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{F}\{R_x(t, \tau)\}$$

ovvero la trasformata di Fourier della media temporale della funzione di autocorrelazione.

Calcolo tramite la funzione troncata:

$$X_T(f) = \mathcal{F}\{x_T(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t) e^{j2\pi f t} dt$$

funz. troncata in $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$

↑
"prodotta"

$$X_T(f) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{j2\pi f t} dt$$

$$P_x(f) \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[|X_T(f)|^2]}{T}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n f(t-nT_s)$$

$$x_T(t) = \sum_{n=-N}^N a_n f(t-nT_s) \quad (2N+1)T_s = T$$

$$X_T(f) = \mathcal{F}\{x_T(t)\} = \sum_{n=-N}^N a_n \mathcal{F}\{f(t-nT_s)\}$$

$$= \sum_{n=-N}^N a_n F(f) e^{-j2\pi n T_s f} = F(f) \sum_{n=-N}^N a_n e^{-j2\pi n T_s f}$$

$$X_T(f) = F(f) \sum_{n=-N}^N a_n e^{-j2\pi n T_s f}$$

$$E[|X_T(f)|^2] = E[X_T(f) \cdot X_T^*(f)] = E[F(f) \sum_n a_n e^{-j2\pi n T_s f} \cdot F^*(f) \sum_m a_m^* e^{j2\pi m T_s f}]$$

$$* \quad x(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t - nT_s) \cdot a_n$$

Lo spettro di potenza dipenderà da:

- 1) $|F(f)|^2$, cioè dalla trasf. di Fourier del segnale $f(t)$ usato per la trasmissione
- 2) $R(k) = E[a_n \cdot a_{n+k}]$ ovvero dalle caratteristiche statistiche dei dati emessi

Casi Particolari

$$P_x(f) = \frac{|F(f)|^2}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R(k) e^{+jk2\pi T_s f}$$

① Supponiamo che le variabili a_n e a_{n+k} siano sempre scorrelate per $k \neq 0$

$$R(k) \triangleq E[a_n \cdot a_{n+k}] = \begin{cases} k=0 & E[a_n^2] = \sigma_a^2 + m a^2 \Rightarrow R(k)_{k=0} \\ k \neq 0 & E[a_n] \cdot E[a_{n+k}] = m a^2 \Rightarrow R(k) \end{cases}$$

Calcoliamo adesso $P_x(f)$

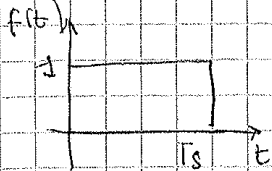
$$\begin{aligned} P_x(f) &= \frac{|F(f)|^2}{T_s} \left[R(0) + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} R(k) e^{+jk2\pi T_s f} \right] = \\ &= \frac{|F(f)|^2}{T_s} \left[(m a^2 + \sigma_a^2) + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} [m a^2] e^{+jk2\pi T_s f} \right] \\ &= \frac{|F(f)|^2}{T_s} \left[\sigma_a^2 + \sum_{k=0}^{+\infty} m a^2 e^{+jk2\pi T_s f} \right] \\ &= \frac{|F(f)|^2}{T_s} \left[\sigma_a^2 + m a^2 \sum e^{+j2\pi T_s f \cdot k} \right] \end{aligned}$$

da parte legata a $W_p(f)$ permette di modificare la parte continua dello spettro agendo sulla correlazione degli am cioè introducendo una "memoria" sugli am

\Rightarrow e' l'ambito dei codici di LINEA

ESEMPIO

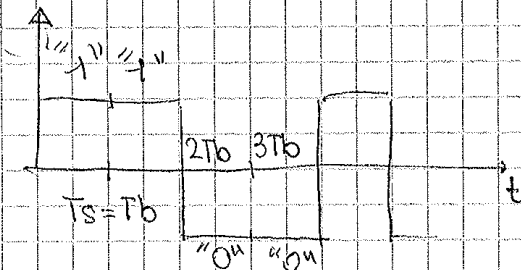
NRZ, binario, antipodale, in banda base senza correlazione



am $\begin{cases} +1 & \text{"1"} \\ -1 & \text{"0"} \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} T_s = T_b \\ n_b T = 1 \end{array} \right)$

$p(am = +1) = p(am = -1) = \frac{1}{2}$

NRZ \Rightarrow "NOT Return To Zero"



am sono correlate, (dipende solo dai valori in ingresso)

$$P_x(f) = D |F(f)|^2 \sigma_a^2 + (maD)^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |F(nD)|^2 \delta(f - nD)$$

Caso binario $\Rightarrow M=2$

$n_b T = 1$

$T_s = T_b \Rightarrow D = B_r \Rightarrow \frac{1}{T_b} = \frac{1}{T_s}$

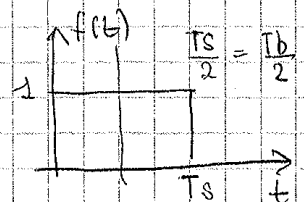
am $\begin{cases} +1 & \text{prob. } \frac{1}{2} \\ -1 & \text{prob. } \frac{1}{2} \end{cases}$

$ma \triangleq E[am] = P(am=1) \cdot am|_{+1} + P(am=-1) \cdot am|_{-1} = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (-1) = 0$

$\sigma_a^2 = E[am^2] - ma^2 = E[am^2] = 0$

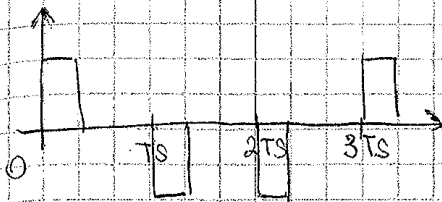
Ricep

$= P(am=1) \cdot am^2|_{+1} + P(am=-1) \cdot am^2|_{-1} = \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 = 1$

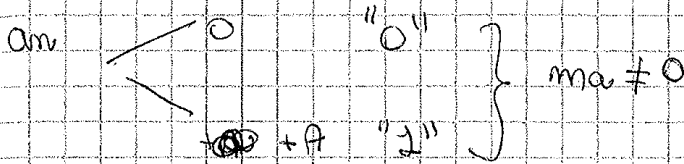


$\begin{cases} ma = 0 \\ \sigma_a^2 = 1 \end{cases}$

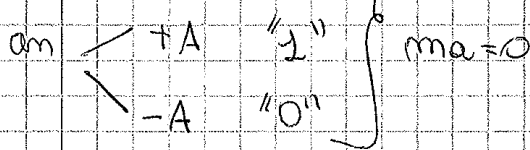
$P_x(f) = D |F(f)|^2 \sigma_a^2 = D |F(f)|^2$
 $\sigma_a^2 = 1$



UNIPOLEARE ("on off Keying")



ANTIPODALE (POLARE)



Esistono casi complessi (codici di linea) in cui non c'è corrispondenza diretta tra gli am e i bit

Caso GENERALE:

$$P_x(f) = \underbrace{Ga^2 \int_{-\infty}^{\infty} DIF(f)^2 W_p(f)}_{\text{parte continua}} + \underbrace{(maD) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |F(nD)|^2 \delta(f - nD)}_{\text{parte a righe}}$$

Si agisce su $W_p(f)$ per sagomare lo spettro \Rightarrow introdurre una correlazione opportuna nelle mie variabili casuali a_m

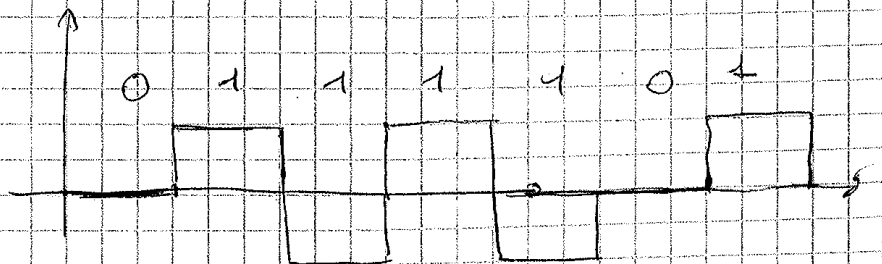
Esempio di codice di linea

AMI: Alternate mark inversion

"0" $\rightarrow a_n = 0$

"1" $\rightarrow a_n$ sudato alternativamente con +1 e -1.

0 1 1 1 0 1



ES

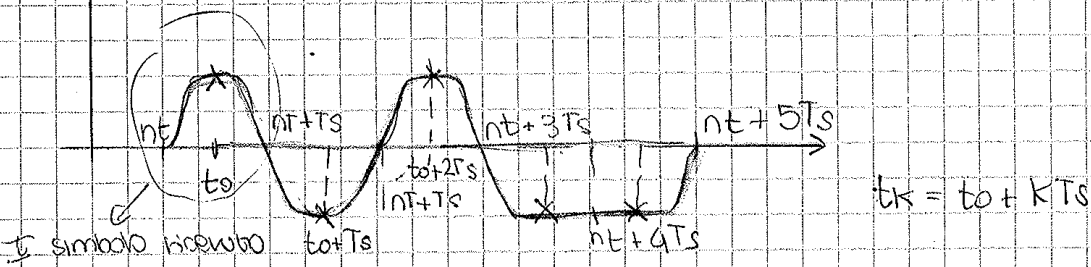
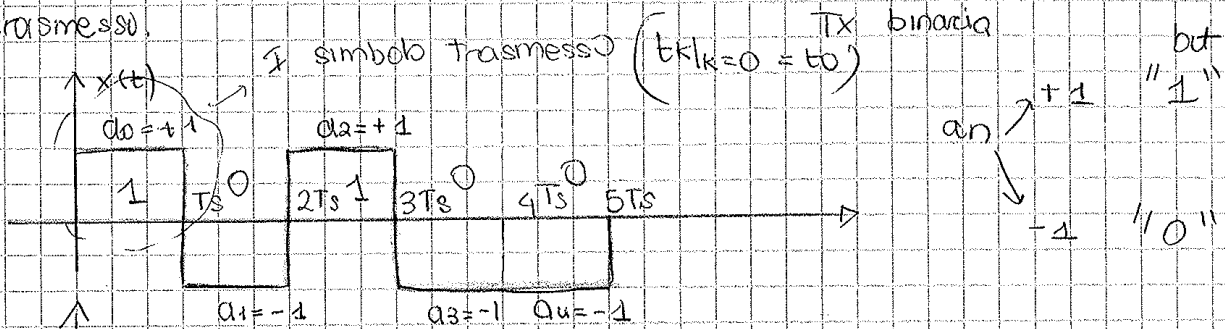
$$g(t) = h(t) * f(t)$$

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g(t - nT_s) \rightarrow \text{in usata dal filtro } h(t)$$

Il segnale viene campionato $t_k = t_0 + kT_s$

$$y(t_k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g(\underbrace{t_0 + kT_s - nT_s}_{\text{ISTANTI DI CAMPIONAMENTO}}) \leftarrow \text{Espressione di tutti i campioni}$$

I valori di $y(t_k)$ sono processati dal decisore per stabilire i bit trasmessi.



t_0 , ovviamente non può essere scelto a piacere, ma deve essere scelto opportunamente (non sulle transizioni) poiché il decisore non sarebbe in grado di riconoscere i simboli.

Concentriamoci sul 1° simbolo: $t_k = t_0 + kT_s = t_0$, inf utile: a_0

$$y(t_k) \Big|_{k=0} = y(t_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g(t_0 + kT_s - nT_s) \Big|_{k=0}$$

Campione del 1° simbolo

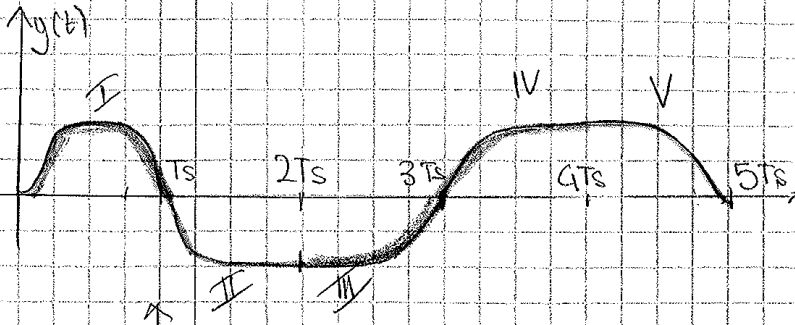
$$y(t_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g(t_0 - nT_s)$$

inf utile in 1° simbolo $\Rightarrow n=0$

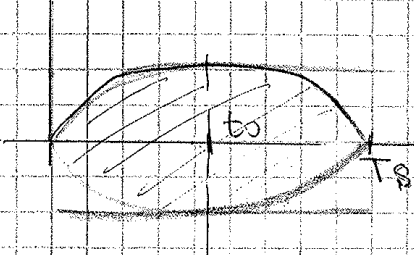
$$\downarrow \text{pre utile} \quad \underbrace{a_0 \cdot g(t_0)}_{\text{pre utile}} + \underbrace{\sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{+\infty} a_n g(t - nT_s)}_{\text{parte interferente}}$$

ISI: INTERFERENZA INTERSIMBOLICA

Diagramma ad occhio



⚠
Campionare sempre quando i 2 livelli sono più distanti possibile



TUTTI i simboli

DIAGRAMMA AD OCCHIO:

- Serve per decidere l'istante di campionamento
- Valutazione qualitativa prestazioni

Se l'occhio è "distorto" vuol dire che ho sbagliato il filtro di ricezione.

- Esempi: → Sludde

Definizioni di distorsione.

Sistemi binari = DISTORSIONE DI PICCO

$$D_p \triangleq \frac{\sum_{n \neq 0} |g(t_0 - nT_s)|}{|g(t_0)|}$$

Al numeratore vanno i contributi di termini interferenti

IND. inter-simbolica dove fanno i contributi con lo stesso segno

$$y(t_k) \Big|_{k=0} = y(t_0) = a_0 g(t_0) + \sum_{n \neq 0, n \in \mathbb{Z}} a_n g(t_0 - nT_s)$$

Stima per eccesso

DISTORSIONE EFFICACE

$$D_E \triangleq \sqrt{\frac{\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} [g(t_0 - nT_s)]^2}{[g(t_0)]^2}}$$

Più D_E, D_p bassi
↓
Prestazioni migliori

Semplificando e riordinando:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} G(f) * d(f + \frac{n}{T_s}) = c T_s = c' = \text{cost}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} G(f + \frac{n}{T_s}) = \text{cost} \Rightarrow \frac{1}{T_s} = D$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} G(p + nD) = \text{cost}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} G(f - nD) = \text{cost} \quad K = -n$$

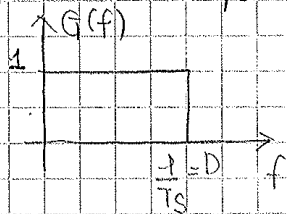
CRITERIO DI NYQUIST

ISI = 0

il sistema non è più affetto da ISI

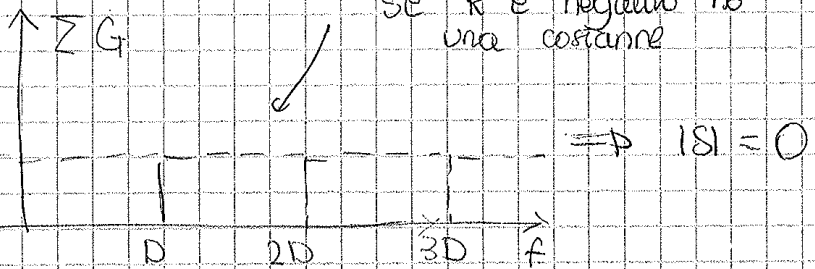
• ESEMPIO

Scegliamo una funzione ~~g(f)~~ $g(t)$ che soddisfi le condizioni:



$$g(t) = \underbrace{h_c(t)}_{\text{canale}} * h_r(t) * f(t)$$

se K è positivo e negativo ho una costante

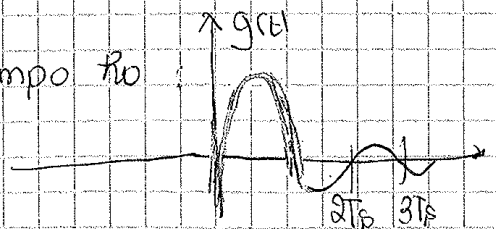
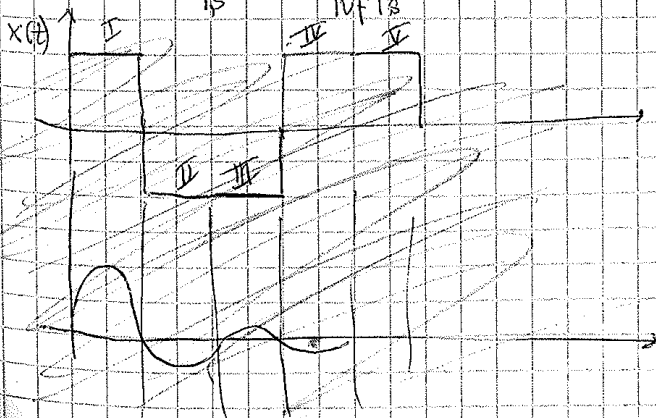


Dato $h_c(t)$ ho progettato $f(t)$ e $h_r(t)$ per ottenere $g(t)$

Ho dovuto ISI pari a zero?

Se ho un impulso rettangolare in f , nel tempo ho:

$$g(t) = \frac{1}{T_s} \frac{\sin(\pi f T_s)}{\pi f T_s}$$



Commenti:

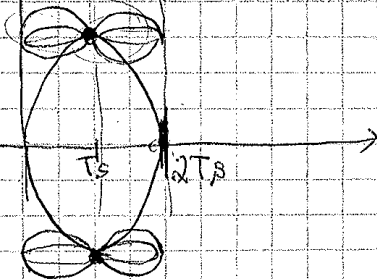
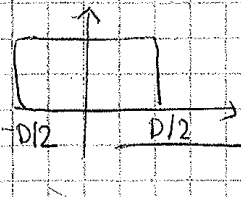
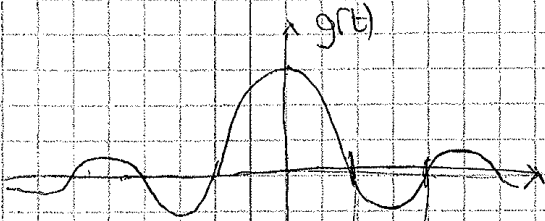
1) il filtro "globale" non è realizzabile

- è non è causale \Rightarrow risolvibile con un opportuno ritardo



- è discontinuo in frequenza, ovvero risposta nel tempo lunga che decade

$$g(t) = \frac{1}{T_s} \frac{\sin(\pi T_s t)}{\pi t}$$

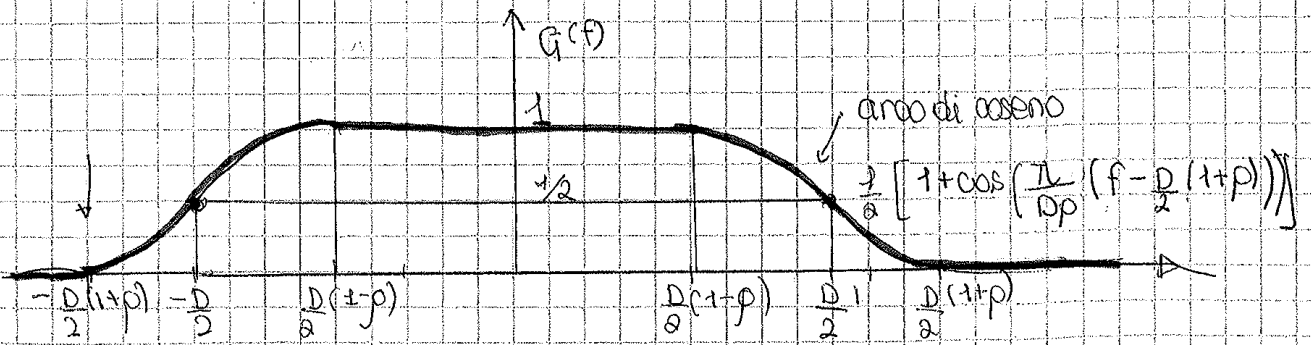


Vado a campionare a $2T_s$ dove $ISI = 0$

Se campionassi a T_s , avrei ISI a causa dei lobi secondari (che sono alti)

MA! il clock recovery (che recupera l'inf di T_s) deve essere molto preciso (e costoso)

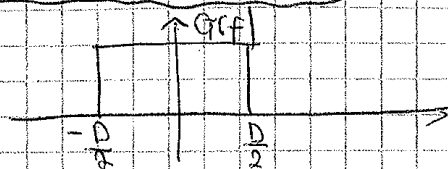
Per scondere i lobi \rightarrow SPETTRO A COSENO RIALZATO



$$G(f) = \begin{cases} 1 & \text{per } |f| < \frac{D}{2}(1-p) \\ 0 & \text{per } |f| > \frac{D}{2}(1+p) \\ \frac{1}{2} \left[1 + \cos \left[\frac{\pi}{Dp} \left(|f| - \frac{D}{2}(1-p) \right) \right] \right] & \text{per } \frac{D}{2}(1-p) < |f| < \frac{D}{2}(1+p) \end{cases}$$

p è chiamato roll off per $[0, 1]$

$p \geq 0$

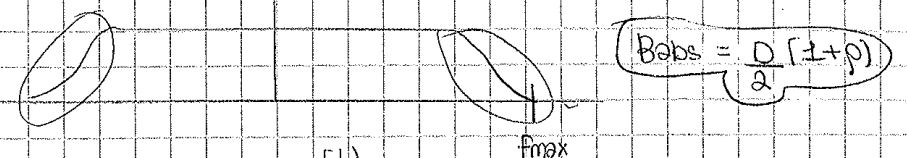


ritroviamo l'impulso rettangolare

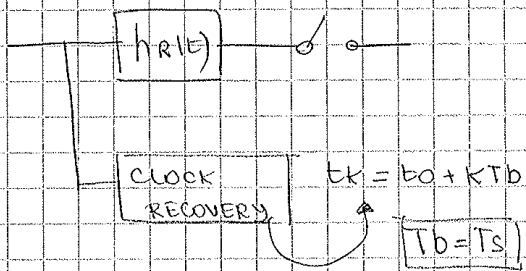
$D = \frac{2B}{1+p}$ → massima velocità di Tx dei simboli

B ⇒ banda del canale

1/2 | 1/2 | 1/2 ↑ G(f) Abbiamo visto lo spettro a coseno rialzato
arco di coseno



p = 0
p ∈ [0.1 ÷ 0.2]



Capacità totale = $B_{obs} = \frac{D(1+p)}{2}$

Canale con banda B
 $G(f) = H_c(f) \cdot H_r(f) \cdot F(f)$
 ⇒ N G(f) su banda ≤ B

$D_{max} = \frac{2B}{1+p}$ (massima capacità ammessa per zero ISI = 0)

Nell'etere ~~non c'è~~ la banda del canale non è nota

EQUALIZZATORI

$G(f) = F(f) \cdot H_c(f) \cdot H_r(f)$

Per avere ISI = 0 ⇒ il criterio di Nyquist fissa dei vincoli su G(f) che a sua volta dipende dalle caratteristiche spettrali del canale

- 3) rumore $n(t)$ - gaussiano bianco media nulla
 4) ISI nulla, la code dei simboli T_x prima e dopo non influenzano sul campione

1° simbolo:

$$y(t_0) = a_0 g(t_0) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} a_n g(t_0 - nT_s)$$

(senza rumore)

$|S| = 0$

Il valore campionato non dipenderà dalla sequenza

Le prestazioni dipendono dal campione che sto prendendo in quel momento

Supponendo che la decisione sia di soglia, dato che $a_0 < 2 \pm$, [V_T]

$$r_f(t_k) \begin{cases} \geq V_T \Rightarrow "1" \\ < V_T \Rightarrow "0" \end{cases}$$

Come interpretare il segnale campionato?

Concentriamoci sul 1° simbolo: ($n=0$)

$$t_k = t_0 + kT_s \Big|_{k=0} = t_0$$

facendo i conti: (vedendo lo schema)

$$r(t) = m(t) + n(t) \Rightarrow \text{filtrato dal filtro } R_x$$

$$r_f(t) = r(t) * h_{R_x}(t) = \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \xi(t - nT_s) \right] * h_{R_x}(t) + (n(t) * h_{R_x}(t)) =$$

portando
Σ all'interno

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \underbrace{\xi(t - nT_s) * h_{R_x}(t)}_{g(t - nT_s)} + \underbrace{(n(t) * h_{R_x}(t))}_{n_f(t)}$$

$$g(t) = \xi(t) * h_{R_x}(t) = f(t) * h_c(t) * h_e(t)$$

$$n_f(t) = n(t) * h_{R_x}(t)$$

$$r_f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g(t - nT_s) + n_f(t)$$

$|S| = 0$ le prestazioni si calcolano su un singolo campione

1° simbolo

$$\left. \begin{cases} t_k = t_0 \\ n = 0 \end{cases} \right\}$$

$r_f(t_0)$
dipende da a_n

$$r_f(t_k) \Big|_{1^\circ \text{ simbolo}} = r_f(t_0) = \left(a_n \Big|_{n=0} \cdot g(t_0) + n_f(t_0) \right)$$

$r_f(t_0)$ potrà assumere:

Usando il teorema della probabilità totale:

$$P(e) = P(e|\pm Tx) \cdot P(\pm Tx) + P(e|0Tx) \cdot P(0Tx)$$

(Sorg. equiprobabile: $P(\pm Tx) = P(0Tx) = \frac{1}{2}$)

$$P(e) = \frac{1}{2} [P(e|\pm Tx) + P(e|0Tx)]$$

$$= \frac{1}{2} [\underbrace{P(r_{FO} \geq V_T | 0Tx) + P(r_{FO} < V_T | \pm Tx)}_{\text{Calcoliamo le probabilità}}]$$

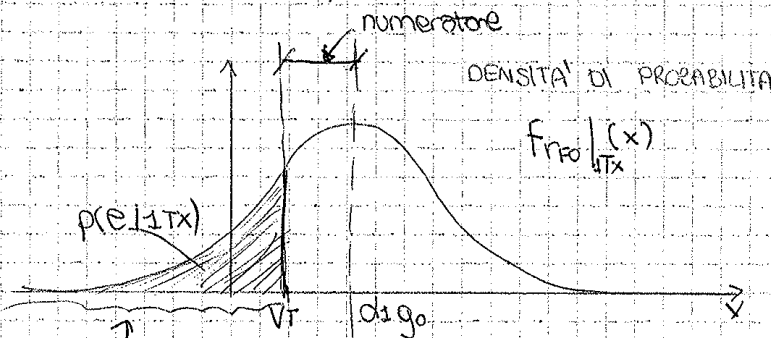
$$P(e|\pm Tx) = P(r_{FO} < V_T | \pm Tx) = P(\underbrace{d_{iGO} + n_{FO}}_{r_{FO} | \pm Tx} < V_T)$$

(non scrivo più $\pm Tx$ perché ho condizionato r_{FO})

d_{iGO} = numero
 n_{FO} = var. casuale

$d_{iGO} + n_{FO}$ = var. casuale con:

- statistica gaussiana
- il valor medio è d_{iGO}
- con varianza che dipende dalle caract. statistiche $n(t)$
- $n(t)$
- filtro R_x



21/2/2012

prob. che assumo uno di questi valori (e' l'area)

$$P(e|\pm Tx) = \int_{-\infty}^{+VT} f_{r_{FO} | \pm Tx}(x) dx = \int_{-\infty}^{+VT} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{NF}} e^{-\frac{(x - d_{iGO})^2}{2\sigma_{NF}^2}} dx$$

$m = d_{iGO}$

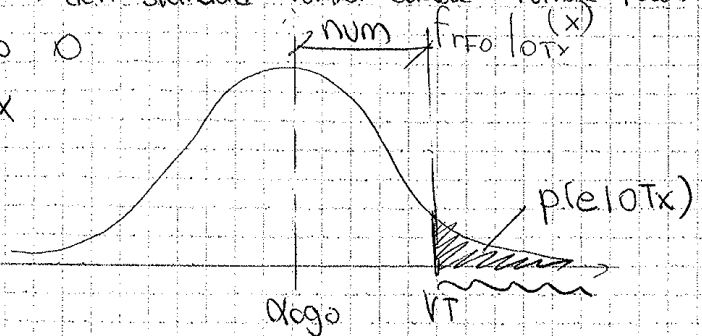
Significa calcolare aree di coda di distribuzioni gaussiane.

$$P(e|\pm Tx) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{d_{iGO} - V_T}{\sqrt{2} \sigma_{NF}} \right)$$

distanza V_T e media
 dev. standard var. casuale = rumore filtrato

nel caso in cui: trasmetto uno 0

$$P(e|0Tx) = \int_{V_T}^{+\infty} f_{r_{FO}}(x) dx$$



$$= \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{V_T - d_{iGO}}{\sqrt{2} \sigma_{NF}} \right)$$

$$\text{erfc}(x) \cong \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi} x} \quad \text{per} \quad \text{erfc}(x) < 10^{-2}$$

(verrà valutata tramite tabelle)

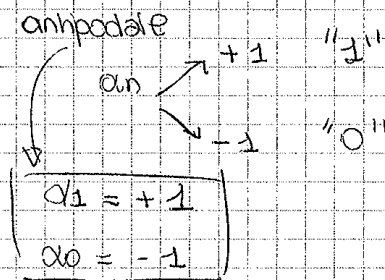
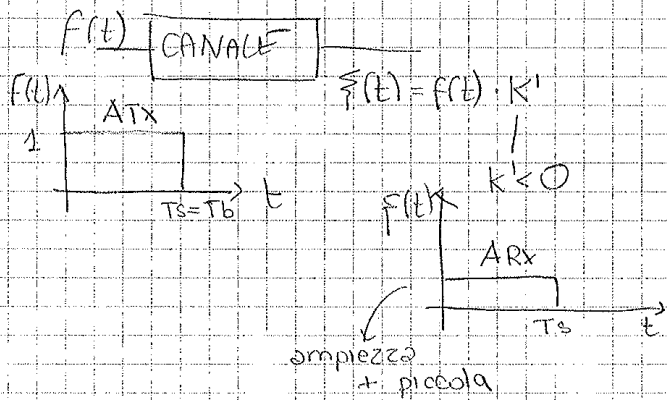
Per migliorare le prestazioni bisogna massimizzare l'argomento $\text{erfc}(\cdot)$, ovvero:

- diminuire $G_{NF} \rightarrow$ dev. standard del rumore filtrato
- massimizzare g_0
- giocare su $d_1 - d_0$

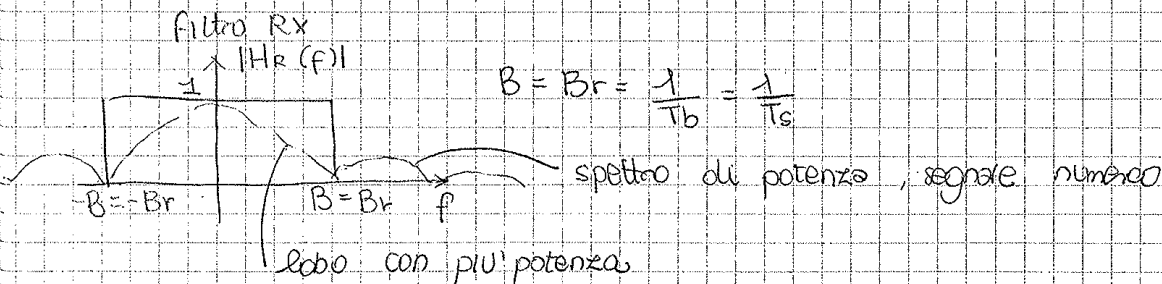
Quali sono le q.tà che dipendono dal filtro di ricezione? g_0 e G_{NF}

APPLICAZIONE: segnalazione binaria NRZ ^{occupa tutto il tempo di simbolo} _{anipodale, rettangolare}
 filtro di ricezione Rx LPF ideale

$$B = B_r, \text{ con canale non filtrante. } (h_c(t) = \delta(t))$$



Ricevitore: $x(t) = \sum a_n f(t - nT_s)$



$$g(t) \cong z(t) * h_R(t) \cong z(t)$$

$$g_0 \cong g(t_0) \cong z(t_0) = A_{Rx}$$

$$d_1 - d_0 = +1 - (-1) = 2$$

Valoriamo la deviazione standard del rumore filtrato

$$G_{NF} \cong \sqrt{G_{NF}^2} = \sqrt{\text{Potenza di rumore}}$$

da varianza e la potenza
di rumore!

Di solito si utilizza l'energia sui bit ricevuti (non sui simboli)

$$E_b \triangleq \frac{\text{Energia media sui simboli } R_x}{n_{bit}} = \frac{\bar{E}_s}{n_{bit}}$$

$$E_b = \bar{E}_s = A_{Rx}^2 \cdot T_b$$

$$n_{bit} = 1$$

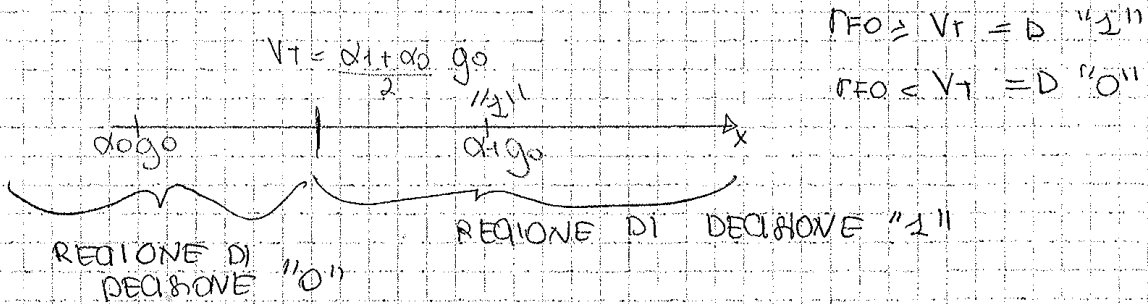
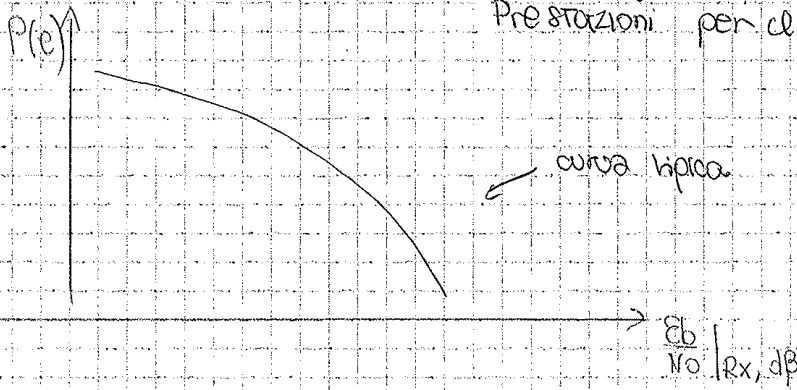
$$A_{Rx} = \sqrt{\frac{E_b}{T_b}} = \sqrt{E_b \cdot B_r}$$

$\frac{1}{T_b} \triangleq B_r$ | energia media
bit ricevuti

$$P(e) = ?$$

$$P(e) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{E_b B_r}}{\sqrt{2 N_0 B_r}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{2 N_0}} \right) \leftarrow \text{FORMULA FINALE}$$

Preselezioni per il sistema in esame



$$\frac{g_0^2}{G_{NF}^2} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |[-](f) H_R(f) \cdot e^{j2\pi f t_0}|^2 df}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H_R(f)|^2 df}$$

(Disuguaglianza di Schwartz :

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} A(f) B(f) df \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |A(f)|^2 df \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |B(f)|^2 df$$

Si ha l'uguaglianza per:

$$A(f) = C \cdot B^*(f) \quad (\text{si ha } \varphi \text{ max})$$

Sia: $A(f) = H_R(f)$

$$B(f) = \Xi(f) e^{j2\pi f t_0}$$

Sostituendo nella disuguaglianza:

Ho il massimo quando:

$$H_R(f) = c \cdot \Xi^*(f) e^{-j2\pi f t_0} \Rightarrow \text{antitransf.}$$

$$|h_R(t) = c \cdot \xi^*(t_0 - t)| \Rightarrow \max \frac{g_0^2}{G_{NF}^2}$$

Filtro adattato

Si adatta alla forma dei simboli al suo ingresso:

$$\begin{aligned} \frac{g_0^2}{G_{NF}^2} &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |H_R(f)|^2 df \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |\Xi(f) e^{j2\pi f t_0}|^2 df}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H_R(f)|^2 df} \\ &= \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Xi(f) e^{j2\pi f t_0}|^2 df \quad \text{ha modulo pari a 1} \\ &= \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Xi(f)|^2 df \\ &= \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} |\xi(t)|^2 dt = \text{energia filtro} \\ &= \frac{2}{N_0} E_{\xi} \quad \text{per } |h_R(t)| = c \xi^*(t_0 - t) \end{aligned}$$

Quindi:

$$P(e) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[\frac{\alpha_1 - \alpha_0}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{g_0}{G_{NF}} \right] \rightarrow \text{generale}$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[\frac{\alpha_1 - \alpha_0}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2}{N_0} \cdot E_{\xi}} \right] =$$

$$P(e) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[\frac{\alpha_1 - \alpha_0}{2} \sqrt{\frac{E_{\xi}}{N_0}} \right] \rightarrow \text{prestazioni nel caso di filtro adattato}$$

(E_{ξ} energia dei simboli in uscita dal canale ($\xi(t)$))

minima probabilità di errore ottenibile; utilizzando il filtro adattato

$h_R(t) = c \cdot \xi^*(t_0 - t)$ avrò appunto la minima prob. di errore sui bit.

\Rightarrow e' da intendersi come filtro ottimo.

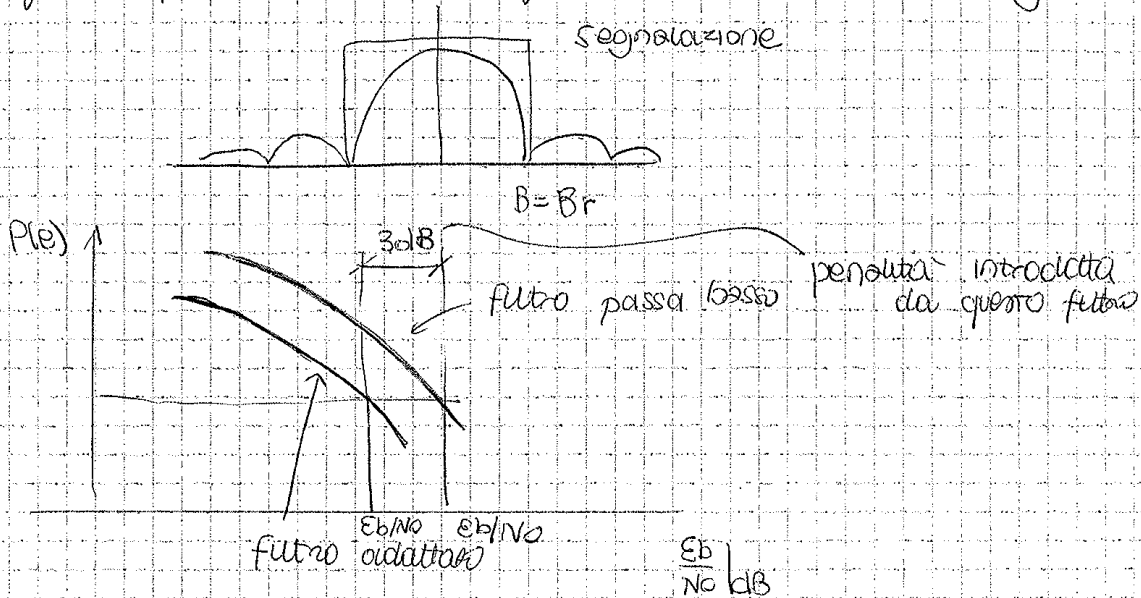
$$h_R(t) = c \xi^*(t_0 - t) = c \xi(t_0 - t)$$

* funz. reale

$$\frac{E_b}{N_0} \Big|_{\substack{\text{LPF ideale} \\ B=B_r}} = 2 \frac{E_b}{N_0} \Big|_{\text{adattato}}$$

A parità di prestazioni, ho le stesse, con quel doppio energia
 Per avere la stessa $P(f)$ il sistema con filtro passa basso richiede $\frac{E_b}{N_0}$
 maggiore di 3 dB rispetto al filtro adattato.

Questo è un risultato generale per tutti i confronti tra filtro adattato
 e filtro p. basso ideale che filtra il 1° lobo della segnalazione.



SISTEMI DI TRASMISSIONE E SPAZIO DEI SEGNALI

Segnali:

- ad energia finita;
- con supporto limitato $[0, T_s]$
 dove T_s è il tempo di simbolo
- Trascureremo gli effetti di interf. intersimbolica

Dato un segnale $m_i(t)$ si definisce:

- sviluppo su una base ortonormale $\hat{\varphi}_j(t)$ $j = 1 \dots N$
- $$\langle \hat{\varphi}_i(t), \hat{\varphi}_j(t) \rangle = \begin{cases} 1 & i=j \\ \emptyset & i \neq j \end{cases}$$

$$m_i(t) = \sum_{j=1}^N a_j \hat{\varphi}_j(t)$$

↳ comp. del segnale $m_i(t)$ rispetto alle base

$$m_i(t) \rightarrow [a_1, a_2, \dots, a_N]$$

Energia del segnale:

$$E[m_i(t)] \stackrel{\Delta}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} |m_i(t)|^2 dt$$

$$m_i(t) = \sum_{j=1}^N a_j \hat{\varphi}_j(t)$$

$$\hat{\varphi}_j(t) \quad j=1 \dots N$$

↳ elementi base ortonormale

La base può essere ottenuta dall'insieme dei segnali $s_i(t)$ con l'algoritmo di Gram-Schmidt.

Segnali della costellazione in uscita dal canale

$$s_i(t) = \sum_{j=1}^N S_{ij} \hat{\varphi}_j(t)$$

$$\underline{S}_i = [S_{i1}, S_{i2}, \dots, S_{iN}]$$

Devo scomporre il rumore $n(t)$ sulla stessa base ortonormale dei segnali:

$$n(t) = \sum_{j=1}^N n_j \hat{\varphi}_j(t) \rightarrow \text{questo solo se la base è completa} \\ + \text{altri termini}$$

dobbiamo calcolare le componenti del rumore $n_j = \langle n(t), \hat{\varphi}_j(t) \rangle$

$$n_j = \int_{-\infty}^{+\infty} n(t) \hat{\varphi}_j^*(t) dt \quad \leftarrow \text{Cos'è } n_j?$$

$$n_j = \int_0^{T_s} n(t) \hat{\varphi}_j^*(t) dt$$

↑ funzione limitata in $[0, T_s]$

n_j è una variabile casuale:

- gaussiana perché $n(t)$ era un processo gaussiano

$$E[n_j] = E \left[\int_0^{T_s} \overbrace{n(t) \hat{\varphi}_j^*(t)}^{\text{dipendenza statistica}} dt \right] = \\ = \int_0^{T_s} \underbrace{E[n(t)]}_{0} \cdot \hat{\varphi}_j^*(t) dt = 0$$

ma $n(t)$ rumore gaussiano bianco a media nulla

$$E[n_j] = 0$$

Calcoliamo la media congiunta:

$$E[n_j n_k] = E \left[\int_0^{T_s} n(t') \hat{\varphi}_j^*(t') dt' \cdot \int_0^{T_s} n(t'') \hat{\varphi}_k^*(t'') dt'' \right]$$

portando E all'interno

$$= \int_0^{T_s} \int_0^{T_s} \underbrace{E[n(t') \cdot n(t'')]}_{\text{funz. di autocorrelazione di un rumore gaussiano bianco}} \hat{\varphi}_j^*(t') \cdot \hat{\varphi}_k^*(t'') dt' dt'' \stackrel{\text{ANTITRASFORMATA}}{=} \frac{N_0}{2} \delta(t' - t'')$$

$$= \frac{N_0}{2} \int_0^{T_s} \int_0^{T_s} \underbrace{\delta(t' - t'')}_{\substack{\delta(t') \text{ invariata in } t'' \\ \delta(t' - t'') \hat{\varphi}_j^*(t'')}} \hat{\varphi}_j^*(t') \cdot \hat{\varphi}_k^*(t'') dt' dt'' \stackrel{\text{proprietà}}{=}$$

$$E[n_j n_k] = \frac{N_0}{2} \int_0^{T_s} \int_0^{T_s} \delta(t' - t'') \cdot \hat{\varphi}_j^*(t'') \cdot \hat{\varphi}_k^*(t'') dt' dt'' \\ = \frac{N_0}{2} \int_0^{T_s} \hat{\varphi}_j^*(t'') \cdot \hat{\varphi}_k^*(t'') \left[\int_0^{T_s} \delta(t' - t'') dt' \right] dt'' = \\ = 1$$

In questo caso possiamo calcolare la densità di probabilità della singola componente r_j .

$$r = \underline{s}_i + n$$

$$f_{r_j}(r_j | s_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \cdot e^{-\frac{1}{N_0} (r_j - s_{ij})^2} \quad (\text{gaussiana})$$

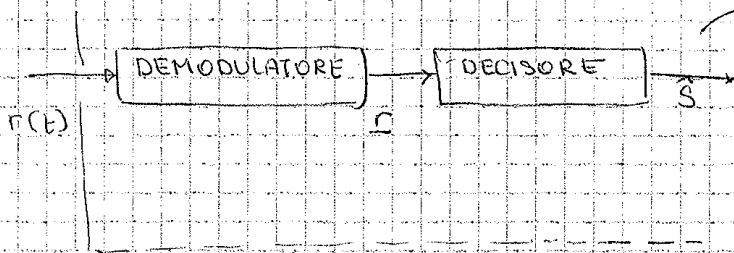
r_j, r_k sono statisticamente indipendenti

Calcoliamo quindi la densità di probabilità congiunta del vettore \underline{r}

$$f_{\underline{r}}(\underline{r} | \underline{s}_i) = \prod_{j=1}^N f_{r_j}(r_j | s_{ij}) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}}\right)^N \cdot e^{-\frac{1}{N_0} \sum_{j=1}^N (r_j - s_{ij})^2}$$

$$f_{\underline{r}}(\underline{r} | \underline{s}_i) = \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} \cdot e^{-\frac{1}{N_0} \sum_{j=1}^N (r_j - s_{ij})^2}$$

il decisore lavora su \underline{r}



Rx Digitale

Il demodulatore ricava le componenti di $\underline{r}(t)$ rispetto la base ortonormale

Il decisore è un blocco che dato \underline{r} deve decidere quale simbolo \underline{s}_i è stato trasmesso che abbia appunto generato quel particolare $\underline{r}(t)$

CRITERIO DI MASSIMA PROBABILITÀ A POSTERIORI

Si vuole massimizzare:

$$\max_{\underline{s}_i} P(\hat{\underline{s}} = \underline{s}_i | \underline{r}) \rightarrow (\text{il massimo è la migliore stima})$$

è una massimizzazione della probabilità di corretta ricezione, ovvero la probabilità che la stima $\hat{\underline{s}} = \underline{s}_i$ data la ricezione di un vettore \underline{r}

$$\max_{\underline{s}_i} P(\underline{s}_i | \underline{r}) = ? \quad \text{cioè dato } \underline{r} \text{ vogliamo calcolare quale vettore } \underline{s}_i \text{ dà la massima probabilità}$$

Utilizziamo il teorema di Bayes \rightarrow bello \dots

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

$$P(\underline{s}_i | \underline{r}) = \frac{P(\underline{r} | \underline{s}_i) \cdot P(\underline{s}_i)}{P(\underline{r})} = \frac{f_{\underline{r}}(\underline{r} | \underline{s}_i) \cdot P(\underline{s}_i)}{f_{\underline{r}}(\underline{r})}$$

Simboli equiprobabili $P(\underline{s}_i) = \frac{1}{M}$

$$P(\underline{s}_i | \underline{r}) = \frac{1}{M} f_{\underline{r}}(\underline{r} | \underline{s}_i) \rightarrow \text{il max rispetto a } \underline{s}_i$$

non dipendono da \underline{s}_i $f_{\underline{r}}(\underline{r})$

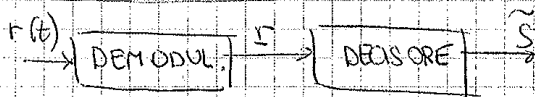
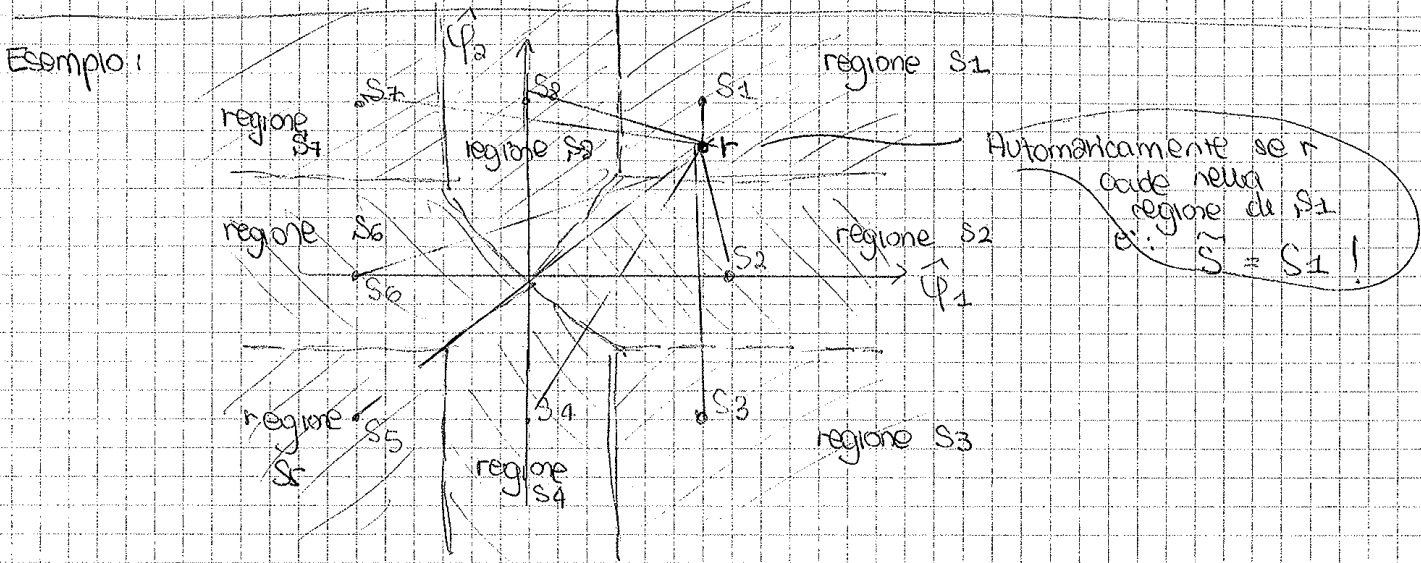
→ Criterio di massima verosimiglianza

=D CRITERIO DI DECISIONE A MINIMA DISTANZA => CRITERIO OTTIMO

=D REGIONI DI DECISIONE

Regioni decisioni con definite:

- 1) Lo spazio dei segnali può essere diviso in M settori (M segnali della costellazione)
- 2) Ogni i-esimo settore è costituito da tutti i punti più vicini a S_i rispetto agli altri.
- 3) Se ricevo un segnale $r(t)$ con componenti r che cade nella regione i-esima, la decisione ottima è data da $\hat{S} = S_i$

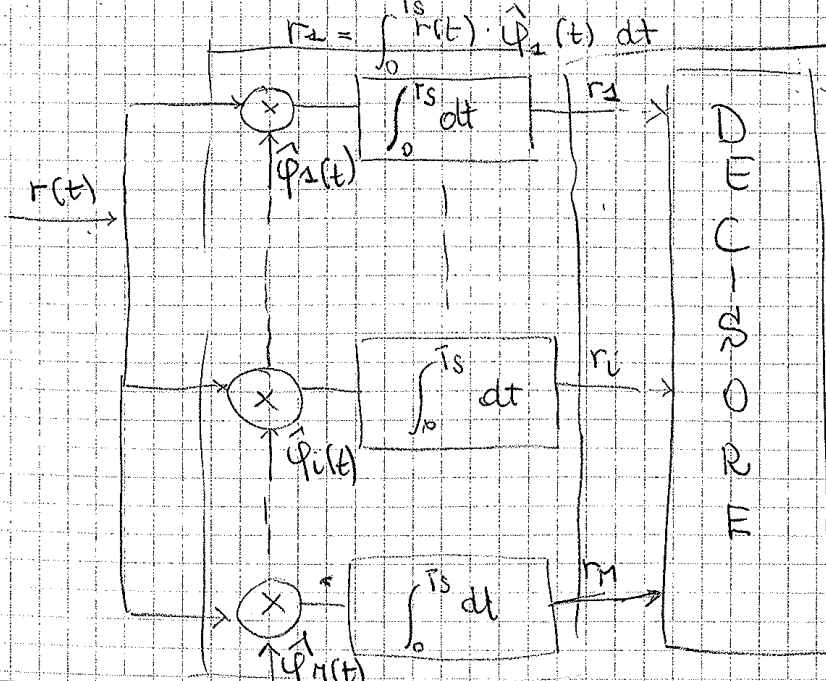


DEMODULAT =D ricava le componenti di $r(t)$

$$r_1 = \langle r(t), \hat{\varphi}_1(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} r(t) \cdot \hat{\varphi}_1^*(t) dt$$

ma $\hat{\varphi}_i(t)$ sono reali e limitate di durata T_s :

$$r_1 = \int_0^{T_s} r(t) \cdot \hat{\varphi}_1(t) dt$$



Demodulatore

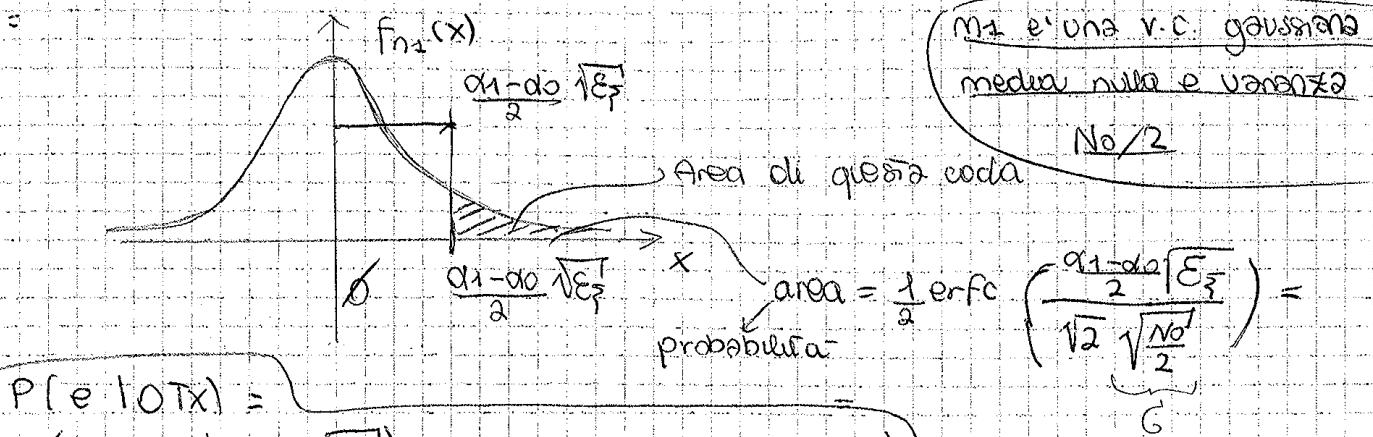
che deve conoscere esattamente la durata del simbolo

↓
CLOCK RECOVERY

↓
Circuito per recuperare T_s

$$= P(n_1 \geq \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{2} \sqrt{E_b}) \quad (\alpha_1 > \alpha_0)$$

↳ comp. del rumore rispetto alla base orthonormale



$$P(e|0Tx) = P(n_1 \geq \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{2} \sqrt{E_b}) = \frac{1}{2} \text{erfc} \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_0}{2} \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$$

$$P(e|1Tx) = P(e|0Tx) = P \text{ perche' sono uguali?}$$

Perche' le regioni di decisione sono identiche → per simmetria

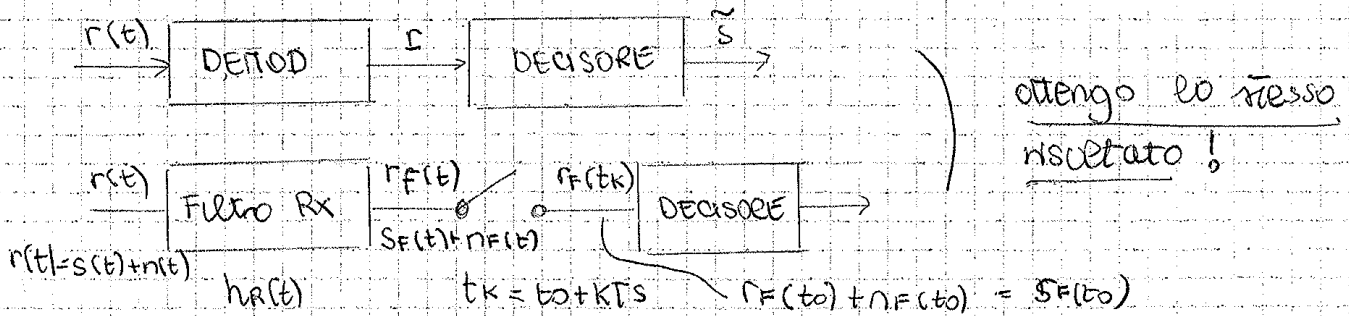
$$P(e) = \frac{1}{2} P(e|0Tx) + \frac{1}{2} P(e|1Tx) =$$

$$\uparrow \text{totale} \quad = P(e|0Tx) = P(e|1Tx) = \frac{1}{2} \text{erfc} \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_0}{2} \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$$

$$d = \alpha_1 - \alpha_0 \sqrt{E_b}$$

↳ stesso risultato con filtro adattato

Quindi:



Criterio di decisione a minima distanza

⇒ implementazione con filtro adattato e campionario

Supponendo di aver trasmesso il 1° simbolo, e sia $s_1(t)$ (e componiamo in t_0)

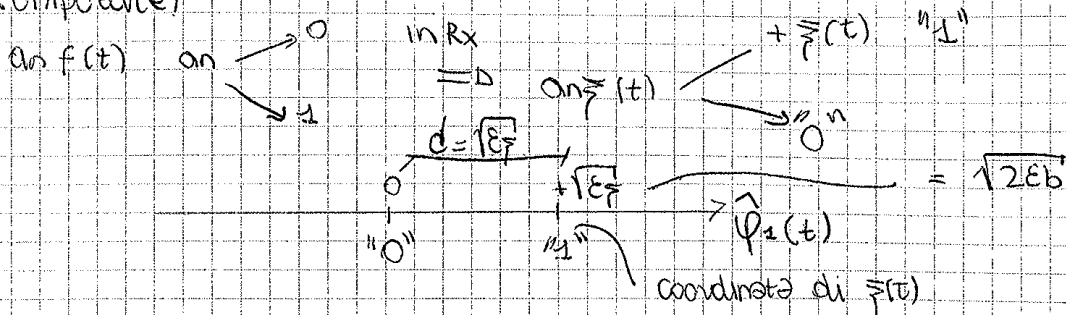
$$s_{F,1}(t) = s_1(t) * h_R(t) \Big|_{t_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau) \cdot h_R(t - \tau) d\tau \Big|_{t=t_0}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau) \underbrace{k_f(t_0 - t + \tau)}_{\text{filtro adattato}} d\tau \Big|_{t=t_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau) \cdot k_f(t_0 - t + \tau) d\tau$$

$$= k \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau) \cdot \tilde{r}(\tau) d\tau =$$

SISTEMA BINARIO ON-OFF

(unipolare)



la distanza coincide con la componente

$s(t) = 0 \Rightarrow$ "0" $E_0 = 0$

$E_b = \frac{E_0 + E_1}{2} = \frac{E_b}{2}$

$s(t) = +\sqrt{E_b} \Rightarrow$ "1" $E_1 = E_b$

↳ energia media trasmessa su bit

$d = \sqrt{2E_b}$

↑ distanza fra i simboli

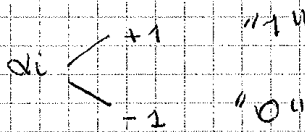
$P(e) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{d}{2\sqrt{N_0}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{2E_b}}{2\sqrt{N_0}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}} \right)$ ON OFF KEYING

CON FILTRO
ADATTATO

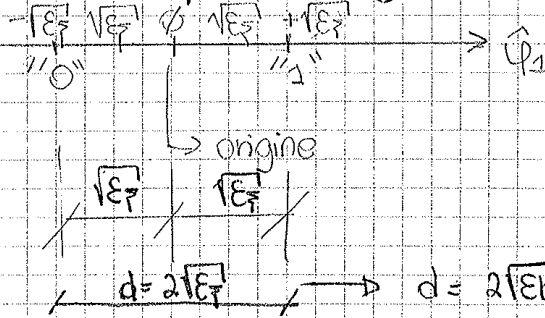
Nel caso di trasmissione antipodale: (Binaria)

$s_i(t) = a_i \phi_1(t)$

simboli R_x



simboli in ricezione: $\{ +\phi_1(t), -\phi_1(t) \}$



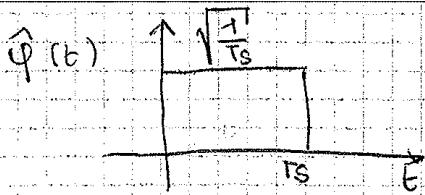
$E_b = \frac{E_0 + E_1}{2} = \frac{E_b + E_b}{2} = E_b$

$P(e) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{d}{2\sqrt{N_0}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{2\sqrt{E_b}}{2\sqrt{N_0}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$

Binario antipodale con filtro adattato

Nel caso unipolare

$P(e) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}} \right) \leftarrow 3\text{dB peggio}$

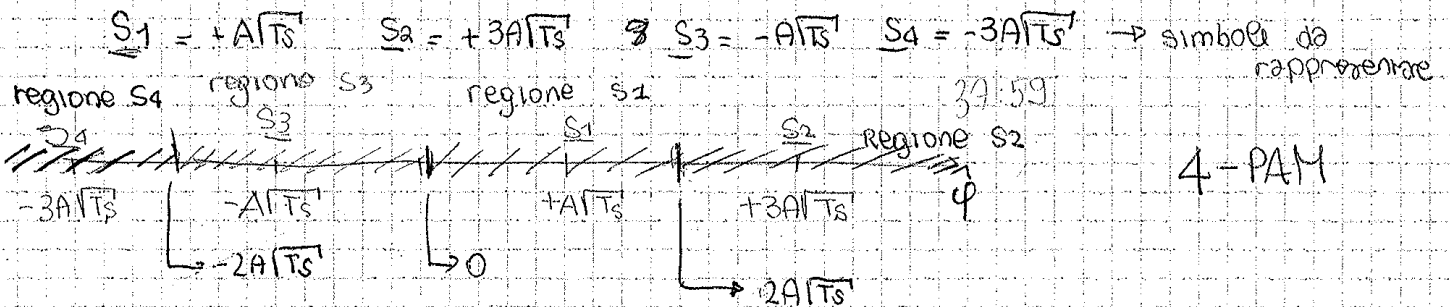


Devo fare in modo che l'area al quadrato sia unitaria $\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |p(t)|^2 dt = 1$
 Ampiezza pari a $\sqrt{\frac{1}{T_s}}$

CALCOLIAMO LE COMPONENTI

$s_1(t) = A\sqrt{T_s} \cdot \frac{1}{T_s} \cdot P_{T_s}(t) = A\sqrt{T_s} \cdot \hat{q}(t)$ componente di $s_1 = \underline{s_1}$
 $s_2(t) = 3A\sqrt{T_s} \cdot \frac{1}{T_s} \cdot P_{T_s}(t) = 3A\sqrt{T_s} \cdot \hat{q}(t)$
 $s_3(t) = -A\sqrt{T_s} \cdot \hat{q}(t)$
 $s_4(t) = -3A\sqrt{T_s} \cdot \hat{q}(t)$

(Abbiamo scelto 1 base perché tutti i simboli durano T_s)



4-PAM

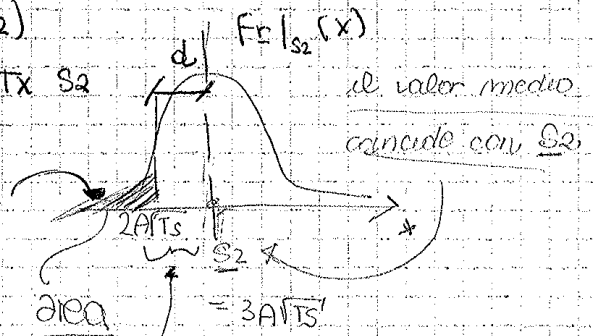
Calcoliamo la $P(e)$ sul simbolo, e poi sul bit

centro della gaussiana nel punto

$P(e | s_2) = P(r \notin \text{regione di } s_2 | s_2)$
 \rightarrow probabilità di avere errore se Tx s_2
 $= P(r < 2A\sqrt{T_s} | s_2)$

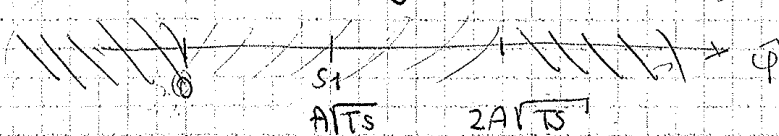
Quindi la probabilità è l'area della coda

$P(e | s_2) = \frac{1}{d} \text{erfc} \left(\frac{d}{\sqrt{2} \sqrt{N_0}} \right)$
 $= \frac{1}{d} \text{erfc} \left(\frac{A\sqrt{T_s}}{\sqrt{N_0}} \right)$
 $= \frac{1}{2} \text{erfc} \left(\sqrt{\frac{A^2 T_s}{N_0}} \right) = P$

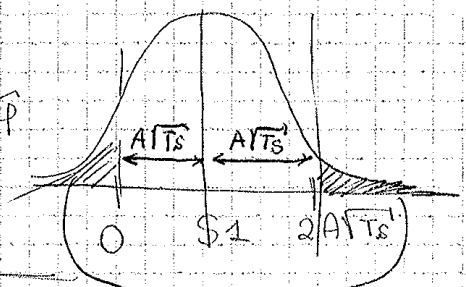


Per simmetria $P(e | s_2) = P(e | s_4)$

$P(e | s_1) = P(r \notin \text{regione di } s_1 | s_1)$



$P(e | s_1) = 2P(r < 0 | s_1)$
 $= 2 \cdot \frac{1}{2} \text{erfc} \left(\sqrt{\frac{A^2 T_s}{N_0}} \right) = \text{erfc} \left(\sqrt{\frac{A^2 T_s}{N_0}} \right) = 2P$



le due aree sono identiche