NUMERO: 870 DATA: 12/03/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Aimar

MATERIA: Fisica I + prove d'esame + Eserc.

Prof. Barbero

CINEMATICA DEL PUNTO — 1° CAPITOLO

moto del punto materiale è determinato se è nota la sua posizione in funzione del tempo, in un determinato sistema di riferimento cioè, ad esempio, le sue coordinate $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ in rif. cartesiano.

La traiettoria è l'insieme dei punti occupati successivamente dal punto in movimento e costituisce una curva CONTINUA nello spazio.

Grandezze fondamentali: velocità, spazio, tempo e accelerazione.
La quiete è una particolare tipo di moto in cui le coordinate restano costanti e quindi velocità e accelerazione sono nulle.
Fondamentale specificare sempre il sistema di riferimento. (moti relativi)
In ogni sistema la traiettoria sarà una curva differente rispetto a quella negli altri sistemi.

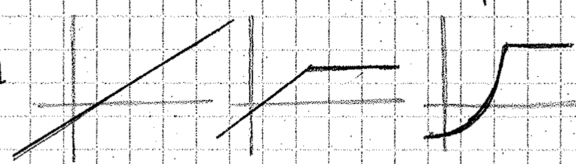


fig. 1

● MOTO RETTILINEO

Una sola coordinata (si svolge su una retta) $x(t)$.
relazione tra x e t: quali fotocellule, fotografia rapida, ecc...
si ottengono coppie di valori x_i, t_i per ricavare ~~...~~ relazione tra x e t. (anche origine del t è arbitraria). $t_0 = 0$ oppure no.
per rappresentarla usiamo assi cartesiani ORDINATE → x ASCISSE → t figura 1 diagramma orario. Intendere unità di riferimento.

● VELOCITÀ NEL MOTO RETTILINEO

media e istantanea; se a $t = t_1$ si ha $x = x_1$ e a $t = t_2$ $x = x_2$; $\Delta x = x_2 - x_1$ è lo spazio percorso in $\Delta t = t_2 - t_1$

$$V_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$ indicazione COMPLESSIVA ma NON DI DETTAGLIO.

Per individuare la funzione $x(t)$ dobbiamo aumentare le misure nell'intervallo Δx suddividendolo in numerosi $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \dots, \Delta x_n$ percorsi ciascuno nei tempi $\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3, \dots, \Delta t_n$
Le corrispondenti V medie sono $V_{m_1}, V_{m_2}, V_{m_3}, V_{m_n}$ $V_{m_i} = \frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}$

$v_m = \frac{(x-x_0)}{(t-t_0)}$ ricaviamo la relazione tra v_m e $v_{istantanea}$.

$$\boxed{v_m = \frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t} v(t)\,dt}$$

v_m è per appunto il valore medio delle velocità istantanee nel valore Δt considerato.

Utile per valutare globalmente la rapidità di uno spostamento

- MOTO RETTILINEO UNIFORME

$v =$ costante $\qquad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt = x_0 + v\int_{t_0}^{t} dt =$

Legge oraria o equazione del moto rettilineo uniforme. $\boxed{x(t) = x_0 + v(t-t_0)}$ e se $t_0 = 0$ $x(t) = x_0 + vt$

moto è funzione lineare del tempo.

v istantaneo $\equiv v$ medio

- Acceleraz. in moto rettilineo

Se in un Δt la v varia di Δv definiamo $a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

e con processo identico a quello usato per determinare la v ist. identifichiamo anche la a istantanea. cioè la ~~[illegible]~~ rapidità di variazione temporale della velocità, come $\boxed{a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}}$ con $v(t) = \frac{dx}{dt}$

$a = 0$ $v = \text{cost}$ $\quad a > 0$ $v\uparrow$ $\quad a < 0$ $v\downarrow$

Se conosco $a(t)$ posso ricavare $v(t)$

$$\int_{v_0}^{v} dv = (v - v_0) = \Delta v = \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt = \int_{v_0}^{v} dv \qquad \boxed{v = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt}$$

Si tratta sempre di versioni algebriche forma generale se si conosce la complessità: somma algebrica e non di moduli legge della a rispetto a t.

Supponiamo ora di trovarci in una situazione fisica in cui sia nota la dipendenza della a dalla posizione cioè la funzione $a(x)$. Ricaviamo la v in ogni x $v(x)$ usando il concetto di funzione di funzione:

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 400

• moto verticale di un corpo

Possiamo dire con l'asse $g = 9{,}81\ m/sec^2$ uniformemente accelerato. Vedere figura, sistema con verso positivo verso l'alto

$$a = -g = -9{,}81\ \frac{m}{sec^2}$$

• Caduta da altezza h: $v_0 = \emptyset \Rightarrow x_0 = h$ e $v_0 = \emptyset$ $t = t_0 = \emptyset$

$$a = -g \qquad v(t) = -gt \qquad v(x) = \sqrt{2g(h-x)} \qquad v(t) = v_0 + at$$

$$x(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 \qquad t(x) = \sqrt{\frac{2(h-x)}{g}} \qquad \frac{v(t)-v_0}{a} = t$$

$$\boxed{t_c = \text{tempo caduta} = \sqrt{\frac{2h}{g}}} \qquad \boxed{v_{suolo} = \sqrt{2gh}}$$

• Se invece il punto è lanciato verso il basso $v_0 = -v_1$ si ottiene:

$$v = \sqrt{v_1^2 + 2gh} \qquad x(t) = h - v_1 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\boxed{t = \frac{v(t)-v_0}{a} \quad \text{da} \quad v(t) = v_0 + at}$$

$$t = \frac{v(t)}{g} - \frac{v_0}{g} = -\frac{v_1}{g} + \sqrt{\frac{v_1^2}{g^2} + \frac{2h}{g}}$$

• Lanciando invece il punto verso l'alto verticalmente con velocità v_2 ma partendo dal suolo si hanno $x_0 = \emptyset$ $v_0 = v_2 > \emptyset$ $t = \emptyset$

Quindi:

$$0 = v_0^2 + 2gx \qquad v_0^2 - 2gx = \emptyset \qquad v_0^2 = 2gx$$

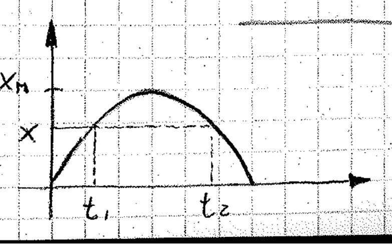
$$\frac{v_0^2}{2g} = x \quad \text{giunto nel punto più alto del corpo.}$$

$$\emptyset = v_0 + at \qquad -\frac{v_0}{-g} = t \qquad \boxed{\frac{v_0}{g} = t}$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad e \Rightarrow x(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Lo intervallo complessivo del moto si ricava che vale $2T_M = 2\frac{v_0}{g}$

Si ottiene il grafico:



$v(\Phi) = A\cos\Phi$ $\quad a(\Phi) = -\omega^2 A \sin\Phi$ ricavano, conosciute le condizioni iniziali x_0 e v_0 si calcolano A e Φ

$$\boxed{\tan\Phi = \frac{\omega x_0}{v_0}} \qquad \boxed{A^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

Usando la legge: $a(t) = -\omega^2 x$ e la legge $\int_{x_0}^{x} a(x)\,dx = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2$

si può calcolare la dipendenza della velocità dalla posizione $v(x)$.

$$\int_{x_0}^{x} a(x)\,dx = -\omega^2\int_{x_0}^{x} x\,dx = \frac{1}{2}\omega^2(x_0^2 - x^2) = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2$$

e quindi $v^2 = v_0^2 + \omega^2(x_0^2 - x^2)$ con riferimento al centro dove $x_0 = 0$

e $v_0 = \omega A$ $\quad \boxed{v^2(x) = \omega^2(A^2 - x^2)}$

Nel centro $\boxed{v = \omega\cdot A \quad \text{o} \quad -\omega\cdot A}$ a seconda del verso.

Se si trova che in un certo moto l'accelerazione risulta proporzionale allo spostamento con una costante di proporzionalità negativa si dimostra che quel moto è armonico semplice. In altre parole: condizione necessaria e sufficiente perché un moto sia armonico è data dalla equazione della equazione differenziale del moto armonico.

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$$

In questo paragrafo abbiamo parlato di moti ma se in qualunque fenomeno fisico esiste una grandezza f che obbedisce ad una equazione simile $\frac{d^2 f}{dz^2} + k^2 f = 0$ la soluzione è sempre $f(z) = A\sin(kz + \Phi)$ e cioè f descrive una oscillazione rispetto alla variabile z il cui periodo dipende da k.

(oscillaz. elettriche, di pressione, ecc...)

- moto rettilineo smorzato esponenzialmente

$a = -kv$ $\quad k$ = costante di proporzionalità. a sempre contraria a v qui.

$$\boxed{\frac{dv}{dt} = -kv} \qquad a \propto -v$$

si integra con il metodo della separazione delle variabili. vedi analisi 1 calcolo differenziale

$$\frac{dv}{v} = -k\,dt$$

Si usano vettori, grandezze con caratteristiche direzionali.

v e a sono quindi due grandezze vettoriali.

La posizione si identifica con due coordinate ~~x, y~~ $x(t)$ e $y(t)$

oppure $r(t)$ e $\theta(t)$ se in coordinate polari.

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad r = \sqrt{x^2+y^2} \qquad tg\,\theta = \frac{y}{x}$$

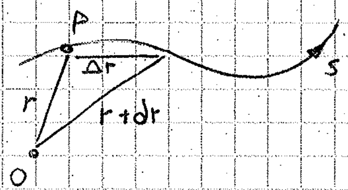
La posizione può essere espressa anche tramite il raggio vettore

$$r(t) = OP = x(t)\,u_x + y(t)\,u_y$$

u_x e u_y versori degli assi cartesiani, considerati fissi nel tempo.

Se conosco la dipendenza di r da t $\Rightarrow r(t) \Rightarrow$ ho individuato il punto P.

Oppure posso usare la coordinata curvilinea s



s esprime lunghezza traiettoria

$\frac{ds}{dt}$ variazione temporale della posizione lungo traiettoria

Si fornisce la definizione di velocità vettoriale =

Consideriamo due posizioni occupate dal ~~punto~~ punto P a t e a $t+\Delta t$ individuate da $r(t)$ e $r(t)+\Delta r$. Otteniamo il rapporto incrementale $\frac{r(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta r}{\Delta t}$ e si definisce velocità vettoriale il limite per $\Delta t \to 0$

$$\boxed{v = \frac{dr}{dt}}$$

è la derivata del raggio vettore rispetto al tempo per $\Delta t \to 0$.

due posizioni vicine $dr = ds\,u_T$ con u_T versore della tg alla curva.

$$\boxed{v = \frac{ds}{dt}\,u_T = v\,u_T}$$

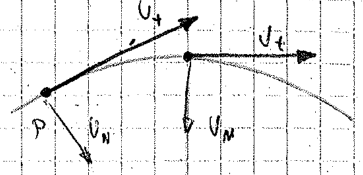
[ma per $dt \to 0$ Δr è ben diverso dallo spazio effettivamente percorso da P lungo la curva.

N.B.

La traiettoria del moto e il fatto che la v si scriva $v u_T$ sono caratt. intrinseche che non dipendono dal sistema di riferimento.

1° termine esprime variazione modulo della velocità.

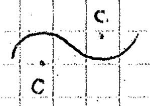
2° // // // direzione della velocità



C = centro di curvatura della traiettoria in P

L'arco di traiettoria è pari a $Rd\phi$ con $R = CP$ $ds = Rd\phi$ $d\phi$

raggio di curvatura. Al variare di posizione di P lungo traiettoria variano R e C che per traiettoria curvilinea cambiano.



$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{R}v$$ e sostituendo nell'espressione

trovata prima
$$\boxed{a = \frac{dv}{dt}u_T + \frac{v^2}{R}u_N = a_T + a_N}$$

normale o centripeta.

tangenziale

$$\boxed{a = \sqrt{a_N^2 + a_T^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{R^2}}}$$

Se il moto curvilineo è uniforme $a_T = 0$ ma $a_N \neq 0$ sempre curvilineo

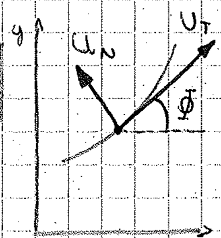
compomenti cartesiane

Le componenti cartesiane della accelerazione sono le accelerazioni dei due moti rettilinei proiezione su x e y di P.

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv_x}{dt}u_x + \frac{dv_y}{dt}u_y = \frac{d^2x}{dt^2}u_x + \frac{d^2y}{dt^2}u_y = a_x u_x + a_y u_y}$$

Se ϕ è l'angolo che u_T forma con u_x, si deduce che

$$\boxed{a_x = \frac{dv}{dt}\cos\phi - \frac{v^2}{R}\operatorname{sen}\phi} \qquad \boxed{a_y = \frac{dv}{dt}\operatorname{sen}\phi - \frac{v^2}{R}\cos\phi}$$



compomenti polari

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}u_r + r\frac{d\theta}{dt}u_\theta\right) = \frac{d^2r}{dt^2}u_r + \frac{dr}{dt}\frac{du_r}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}u_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}u_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\frac{du_\theta}{dt}$$

Si consideri che $\frac{du_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}u_\theta$ e che $\frac{du_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}u_r$

si ottiene

$$\boxed{a = \underbrace{\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]}_{\text{radiale}}u_r + \underbrace{\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\right]}_{\text{trasverso}}u_\theta}$$

Vedi pag 27

$\omega(t) = \omega(t_0) + \int_{t_0}^{t} \alpha(t)\, dt \qquad \vartheta(t) = \vartheta(t_0) + \int_{t_0}^{t} \omega(t)\, dt$

Problema in cui pubblemo noto le $\alpha(\vartheta)$ invece di $\alpha(t)$ possiamo calcolare l'incremento della velocità angolare in corrispondenza ~~all'incremento della velocità angolare in corrispondenza~~ all'incremento angolare $\vartheta - \vartheta_0$

$$\boxed{\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\vartheta}\frac{d\vartheta}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\vartheta} \qquad \alpha\, d\vartheta = \omega\, d\omega \qquad \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \alpha(\vartheta)\, d\vartheta = \int_{\omega_0}^{\omega} \omega\, d\omega = \frac{\omega^2}{2} - \frac{\omega_0^2}{2}}$$

Ricopia come già fa per il moto rettilineo uniforme

Un caso particolare è rivestito dal moto UNIFORMEMENTE ACCELERATO

$\alpha = cost \Rightarrow a_T = cost \longrightarrow \omega = \omega_0 + \alpha \cdot t \qquad \vartheta = \vartheta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

- completa analogia con il moto uniforme.

$a_{TOT} = a_T + a_N$
rimane rettilineo.

notazione vettoriale

ampliamo concetto di velocità angolare.

modulo di $\omega = \frac{d\vartheta}{dt}$ direzione $\perp$ al piano della circonferenza

verso tale che dall'estremo del vettore ω il senso paia antiorario.

$$v = \omega \times r$$

Quindi ω individua come e dove si rotaziona e come varia l'angolo nel tempo. Da $\frac{d\omega}{dt}$ otteniamo α

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega \times r) = \frac{d\omega}{dt} \times R + \omega \times \frac{dr}{dt} \Rightarrow a = \alpha \times R + \omega \times v}$$

tangenziale normale centripeta

se circolare uniforme $a = \omega \times v = a_N$

- **moto parabolico**

- moto di precessione pg 31

velocità iniziale $v_0 \neq 0$ formante angolo ϑ con l'asse x.

Calcolare traiettoria h max e x di ricaduto. (gittata)

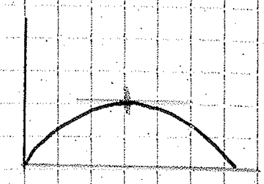
moto caratterizzato da una $a = cost = g = -g\, u_y$

condizioni $r_0 = \emptyset \qquad v_0 \neq 0 \quad$ e $\quad t_0 = \emptyset$

L'angolo con la gittata massima si ottiene con la condizione

$\boxed{\frac{dX_G}{d\theta} = 0}$ cioè $\frac{2v_0^2}{g} \cdot (-\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta) = 0$ risulta $\theta = 45°$ e $(X_G)_{max} = \frac{v_0^2}{g}$

L'stesso massimo si può ottenere anche dicendo $\frac{dy}{dx} = 0$



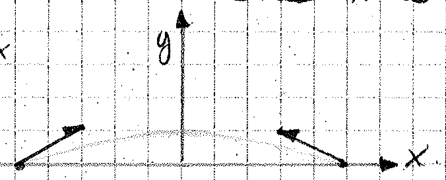
oppure dire che la $v_y = 0$ in y_{max} da cui

ricavo "t" e "y" partendo dalla formula della velocità

Il tempo di volo è quello impiegato a percorrere spazio da 0 a X_G a velocità costante $v_x = v_0 \cos\theta$.

$$\boxed{t_G = 2X_M / v_0\cos\theta = 2v_0 \text{sen}\theta / g = 2t_M}$$

La velocità in X_G è la stessa in modulo ma è posta simmetricamente all'asse x



A differenza del caso di moto circolare, il sistema migliore da usare qui è il piano cartesiano e non le coordinate polari.

moto nello spazio. composizione di moti

È il caso più generale = traiettoria curva nello spazio.

coordinate cartesiane

$$r(t) = x(t)u_x + y(t)u_y + z(t)u_z$$

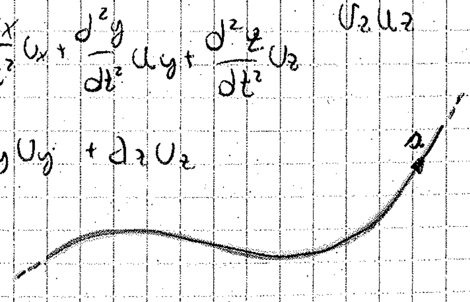
$$v(t) = \frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt}u_x + \frac{dy}{dt}u_y + \frac{dz}{dt}u_z = v_x u_x + v_y u_y + v_z u_z$$

Condizioni come sempre ad $r(t)$ con due derivazioni da $a(t)$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}u_x + \frac{d^2y}{dt^2}u_y + \frac{d^2z}{dt^2}u_z = a_x u_x + a_y u_y + a_z u_z$$

v // traiettoria sempre $|v| = \frac{ds}{dt}$

a NON // a v



composizione di moti:

- circolare uniforme si compone di 2 armonici semplici tra loro ortogonali
- moto parabolico ha due moti: uno su x rett. uniforme ed uno su y rett. uniformemente accelerato.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 400

DINAMICA DEL PUNTO — 2° CAPITOLO

capire perché avviene il moto, non come si caratterizza.

variazione dello stato di moto di un punto, interazione con ambiente esterno.

Principio di inerzia: Un corpo non soggetto a forze non subisce cambiamenti di velocità, ovvero resta in uno stato di quiete se era in quiete oppure si muove di moto rett. uniforme (se $v_0 \neq 0$) $F = 0$ moto non varia ma non è non c'è. (può esserci).

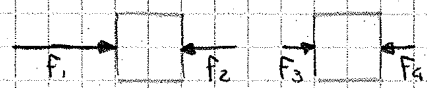
Un moto accelerato segnala la presenza di una forza agente.

Si vede moto circolare uniforme con forza centripeta.

Se F si annullasse il corpo sarebbe diretto con rett. unif. lungo la tangente alla circonferenza nel punto.

FORZA: è la grandezza che misura l'interazione tra sistemi fisici. si associa misura di intensità e direzionalità.

eguaglianza ed equilibrio.



$F_1 \neq F_2$ NON equil.

$F_3 = F_4$ equil.

• Leggi di newton

fornisce legame quantitativo tra la forza e lo stato del moto.

$$\boxed{F = m \cdot a}$$

l'interazione del punto con l'ambiente circostante espressa tramite la forza F, determina l'accelerazione del punto ovvero la variazione della sua velocità nel tempo; m rappresenta la massa inerziale.
La massa esprime l'inerzia del punto cioè la sua resistenza a variare la condizione di moto. (modificare v)

Effetto dinamico ↑ se m ↓   m è fondamentale

se $F = 0$ $a = 0$

la legge di Newton contiene come caso particolare il principio di inerzia (1° legge newton)

Seconda legge di newton:

$$\boxed{F = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2r}{dt^2}}$$

esprime la legge fondamentale per la dinamica del punto.

Lo intendo in questo senso: lo stato dinamico del punto è individuato dalla quantità di moto, in cui compaiono la m e la ~~p~~ v.
L'azione di F determina dp nel tempo, ovvero varia quantità di una tra m, v (o direzione o verso o modulo) o più.
Punto materiale, per noi si studierà la $m = cost.$ qualunque sia la sua velocità.
Ma se un oggetto lo approssimiamo ad un punto non è detto che m sia cost. esempio consumo carburante di un veicolo.

(Per noi $m = cost.$)

$$\boxed{F \cdot dt = dp}$$ in termini finiti

J = impulso della forza

$$\boxed{J = \int_{t_0}^{t} F\,dt = \int_{p_0}^{p} dp = p - p_0 = \Delta p}$$

impulso di una forza applicata ad un punto materiale provoca la variazione della sua quantità di moto con m costante si ha conseguentemente:

$$\boxed{J = m(v - v_0) = m \cdot \Delta v}$$

forma integrale della 2° legge di Newton.

mentre $F = m \cdot a$ e $F = \frac{dp}{dt}$ valgono in ciascun istante di applicazione della forza

Effetto Complessivo
non si deve conoscere $F(t)$

Abbiamo trovato quantitativamente relazione tra F e Δv.

$$\boxed{\Delta v = v - v_0 = \frac{F \cdot t}{m}} \quad (\text{se } F = cost)$$

Se invece conosciamo Δp possiamo calcolare il valore medio di F

$$\int_0^t F\,dt \qquad \boxed{F_m = \frac{\Delta p}{t}}$$

Se $F = \emptyset$ $\Delta p = \emptyset \Rightarrow p = cost.$ si dice che p si conserva ed è un'altra formulazione del principio di inerzia.

$$F = \left[\frac{kg\,m}{s^2}\right] = [N]$$

- Risultanti delle forze equilibrio e reaz. vincolari.

$$m = [kg]$$

Quando su un oggetto agiscono più forze si nota che è ~~come~~ come se ne agisse una sola, la RISULTANTE VETTORIALE.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 400

N = reazione dell'ambiente. è tipo anche dell'equilibrio di momento

- **classificaz. forze.**

Tutte le forze in ogni campo si riconducono alle ~~[illegible]~~ interazione gravitazionale e alla interazione elettromagnetica. e poi c'è l'interazione forte e quella debole a livello nucleare e sub nucleare. Queste poi si applicano ad una grande varietà di tipologie di forze.

- **azione dinamica delle forze**

Tali forze possono produrre tutti i moti descritti in cap. 1.

per rett. unif. $F = 0$ ovvio.

se si ha $a = cost$ allora si ottiene uniformemente accelerato.

$F = cost$ totalmente. la ~~[illegible]~~ componente del moto nella direz. parallela alla forza è uniformemente accellerato con $a = \frac{F}{m}$

si vede moto parabolico.

Quando $F \neq cost$ si ha un moto vario come caso del moto piano curvilineo. (a_T e a_N) $F = m a_T + m a_N = m \frac{dv}{dt} u_T + m \frac{v^2}{r} u_N$

La risultante delle forze agenti sul punto materiale deve avere una componente ortogonale alla traiettoria F_N ed una // F_T tangenziale

F_N = centripeta che non è una forza specifica bensì è il nome di F_N.

- **forza peso.**

Si osserva che in uno stesso luogo tutti i corpi, qualunque sia la massa inerziale, assumono la stessa acc. se lasciati cadere. detta gravità, viene il valore $|g| = 9,81 \frac{m}{sec^2}$ ed è conseguenza della forza di attrazione terrestre cioè dell'interazione gravitazionale tra terra e corpo. $P = ma$ da 1° legge di newton

$$\boxed{P = mg}$$

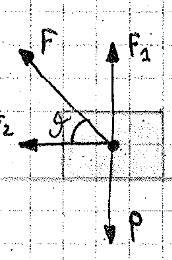
Essendo costante e fornisce moto con componente uniformemente accelerato // a $g \downarrow$

Se altre forze agiscono si ha $a \not\parallel g$ generalmente ~~[illegible]~~

Oppure potrebbe una a minore come caso attrito aria per esempio.

• forza attrito radente

corpo applicato su un tavolo (piano orizzontale) subisce F tale da presentare una componente F_1 normale al piano e una F_2 parallela al piano.
Il corpo non entra in movimento fino a che il modulo di F_2 non superi il valore $\boxed{\mu_s N}$, dove μ_s è il coefficiente di attrito statico
per muoversi deve essere $F_2 > \mu_s N$.
Supponiamo che la forza F formi un angolo θ con il piano di appoggio.



per tanto $F_1 = F\sin\theta$ $\quad F_2 = F\cos\theta$
La reazione del piano, in condizioni di equilibrio statico del corpo è tale che

$R + P + F = 0$ $\qquad$ N e F_{as} sono le componenti di ~~attrito statico~~ R

$N - P + F_1 = 0$ $\qquad N = P - F_1 = P - F\sin\theta$ $\qquad$ (diag. di corpo libero)

$F_{as} + F_2 = 0$ $\qquad F_{as} = -F_2 \qquad F_{as} = -F\cos\theta$

La condizione di appoggio ci si ha per $N > 0$ cioè $P > F\sin\theta$
se questo è verificato (cioè la forza non solleva il corpo)
la F_{as} controbilancia, quando è applicata la componente F_1 di F
dovendo essere come detto sopra $F_2 \le \mu_s N$

$$\boxed{F\cos\theta \le \mu_s(P - F\sin\theta) \Rightarrow F \le \frac{\mu_s mg}{\cos\theta + \mu_s\sin\theta}}$$ Per SOSTITUZIONE

perché: $\left(F\cos\theta + \mu_s F\sin\theta \le \mu_s P \qquad F(\cos\theta + \mu_s\sin\theta) \le \mu_s P \qquad F \le \frac{\mu_s P}{(\cos\theta + \mu_s\sin\theta)} \right)$

In particolare se $\theta = 0$ $\quad F_1 = 0$ $\quad F_2 = F$
e le componenti di R sono:
$N = P = mg$ $\qquad F_{as} = -F_2 = -F$
condizione di quiete $\quad F_2 < F_{as} \quad F_2 < N \cdot \mu_s \quad F_2 < mg\,\mu_s$
Se non si rispetta la quiete ed $F_2 > F_{as}$ il corpo entra in movimento e agisce una nuova forza detta F attrito radente $\boxed{F_{ad} = \mu_d \cdot N}$

Se voglio moto $tg\,\vartheta > \mu_s$

$$\boxed{\begin{array}{l} mg\,sen\vartheta - mg\cos\vartheta\,\mu_d = ma \\ a = (sen\,\vartheta - \mu_d\cos\vartheta)\,g \end{array}}$$

In particolare se $\mu_d = tg\,\vartheta$ si ha $a = 0$; e si ottiene moto rettilineo uniforme.

con μ_d che scende rispetto a μ_s $\mu_d < \mu_s < tg\,\vartheta \Rightarrow \mu_d < tg\,\vartheta$

⇓

Quindi una volta che il corpo si è messo in moto si ha moto anche se si riduce ϑ dato che μ_d è generalmente più basso di μ_s.
(compreso tra ϑ_s e ϑ_d) $\vartheta_d < \vartheta_s$ tale che $tg\,\vartheta_d = \mu_d$

Se invece il corpo a t_0 ha una $v_0 > 0$ esso si ferma se $tg\,\vartheta_d < \mu_d$
ovvero se $mg\,sen\vartheta < mg\cos\vartheta\,\mu_d \Rightarrow tg\,\vartheta < \mu_d$
oppure accelera se $mg\,sen\vartheta > mg\cos\vartheta\,\mu_d$.
" $v_0 = cost$ se $mg\,sen\vartheta = mg\cos\vartheta\,\mu_d$
L'unica differenza che si ha se $v_0 \neq 0$ è che c'è moto anche se $\mu_s > tg\,\vartheta$ $tg\,\vartheta < \mu_s$ e in particolare $tg\,\vartheta < \mu_d$

La misura degli angoli ϑ_s a cui un corpo comincia a scivolare e ϑ_d, per cui il moto è uniforme sono fondamentali per la misura di μ_s e μ_d

• Forza elastica

Si definisce una forza elastica una forza di direzione costante con verso rivolto sempre ad un punto O chiamato centro e con modulo proporzionale alla distanza da O. Se assumiamo asse x come asse della forza e origine il centro possiamo dire:

$$\boxed{F = -Kx\,u_x}$$

$K =$ COST. ELASTICA

$u_x =$ versore asse x

Dove K è una costante positiva detta costante elastica. Il moto risultante è rettilineo qualsiasi la velocità sia nulla o diretta lungo u_x

$$\boxed{a = \frac{F}{m} = -K/m\;x = -\omega^2 x}$$

$\boxed{x = x_0 \cos \omega t}$ $\boxed{v = -\omega x_0 \operatorname{sen} \omega t}$

le altre condizioni iniziali cambia A ma non ω

ad esempio se $v = v_0 \neq 0$ per $t = 0$

$$\boxed{A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \qquad tg\,\Phi = \omega \frac{x_0}{v_0}}$$

$A > x_0$ causa v_0 iniziale

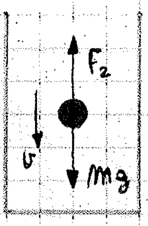
● forza attrito viscoso

La forza di attrito viscoso è una forza che si oppone al moto proporzionale alla velocità del corpo soggetto a tale forza

$\boxed{F = -bv}$ e dato che $\boxed{ma = -bv}$ $\boxed{a = -\frac{bv}{m}}$

non è possibile realizzare per questo una situazione di attrito statico perché se $v = 0$ questa forza scompare.

• m che cade in un fluido. (corpo che si muove in un fluido)



$F_1 = mg$ $F_2 = -mkv$ evidenziando per comodità la massa cioè ponendo la costante b pari a mk

$x_0 = 0$ $v_0 = 0$ $t_0 = 0$

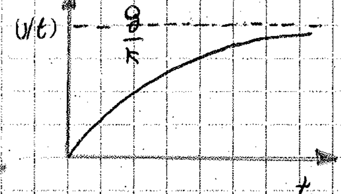
$$F_1 + F_2 = mg - mkv = ma = m\frac{dv}{dt}$$
$(R = ma)$

moto nella lungo asse verticale $\frac{dv}{dt} = g - kv \Rightarrow \frac{dv}{g - kv} = dt$

con separazione di variabili integriamo e risolviamo nella velocità.

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{g - kv} = \int_{t_0}^{t} dt \Rightarrow -\frac{1}{k}\left[\ln(g - kv)\right]_0^v = t$$

$$\ln \frac{g - kv}{g} = -k\,t \qquad \boxed{v(t) = \frac{g}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)}$$



la velocità cresce sempre più lentamente

$\frac{1}{k}$ = costante di tempo τ al limite il moto sarà moto uniforme rettilineo.

Per il fatto che $P = mg$ rimane costante mentre $F = -mkv$ da 0 cresce fino ad equilibrare P.

Il segno negativo della componente lungo la traiettoria è dovuto al fatto che la forza ha segno opposto rispetto a quello della coordinata s sulla traiettoria.

Per $s < 0$ la forza è diretta secondo il verso assunto positivo.

Per $s > 0$ // // // // // // negativo

R_T è una forza di richiamo che risulta sinusoidale anche se non è di direzione costante come nel caso della forza elastica.

$a_T = L \cdot \frac{d^2\vartheta}{dt^2}$ $\quad a_N = \frac{v^2}{L}$ $\quad \boxed{\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\operatorname{sen}\vartheta}$

$\boxed{m\frac{v^2}{L} = T_F - mg\cos\vartheta}$

Legge differenziale del pendolo la cui soluzione ci fornisce la legge oraria del moto $\vartheta(t)$ ma è analiticamente complicato.

Si consideriamo allora piccoli valori di ϑ e sviluppiamo in serie sen:

$$\operatorname{sen}\vartheta = \vartheta - \frac{\vartheta^3}{3!}$$

Quantitativamente per $\vartheta \leq 0{,}122 \text{ rad} = 7°$ sen ϑ è approssimabile con ϑ commettendo errore minimo di 10^{-3} e per piccole oscillazioni l'equazione diventa $\boxed{\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{g}{L}\vartheta = 0}$

e coincide con quella del moto armonico semplice posto $\omega^2 = g/L$.

$$\boxed{\vartheta = \vartheta_0 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\,t + \phi\right)}$$

ϑ_0 e $\bar{\phi}$ dipendono dal momento iniziale

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\right)^{-1} = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

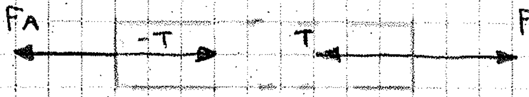
INDIPENDENTE DALL'AMPIEZZA!

La velocità angolare e quella lineare hanno espressioni

$$\boxed{\frac{d\vartheta}{dt} = \omega\,\vartheta_0\cos(\omega t + \bar{\phi})} \qquad \boxed{v = \frac{ds}{dt} = L\frac{d\vartheta}{dt} = L\omega\vartheta_0\cos(\omega t + \bar{\phi})}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 400

estremo $T = -F$. Per il filo AB nel suo insieme si ha la situazione della figura



$F_A = F_B = T$ in modulo.

Per tendere il filo si applicano F e $-F$ e la tensione in modulo è uguale al modulo di F.

Consideriamo un filo in movimento; inestensibile = tutti i punti hanno a uguale e ⇒ due corpi al filo collegati hanno stessa a.

ma = nulla per il filo perché m = trasc.

⇒ anche in caso dinamico Tensione è uguale ovunque nel filo.

Stessa cosa succede per molte congiunzioni.

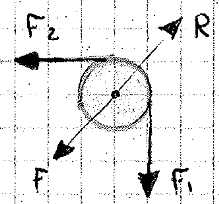
(T reazione del filo alla forza che lo tende)

oltre T_{max} allora = filo si spezza.

Se un punto è collegato al filo la T si inserisce anche lei in $F = ma$ del punto.

Non deve essere per forza rettilineo (può curvare ed essere cambiata direzione a qualsiasi) cambio direzione della forza vedi carrucola.

Le due tensioni formano angoli cioè da avere $a_T = 0$ nel filo



- con vincoli è la bacchetta che funziona uguale in tensione con vantaggio di funzionare anche in compressione.
Una bacchetta può esercitare anche forze ortogonali, e supportarle.

Si misura la tensione inserendo una molla

di K noto.

$\boxed{T = K \cdot x}$

- **Lavoro potenza ed energia cinetica**

Consideriamo un punto che si muove lungo una generica traiettoria curvilinea e sia F la risultante delle forze sul punto.

Si definisce ☐ Lavoro della forza F compiuto durante lo spostamento del punto da A a B la quantità scalare :

in minore tempo. ← (er6m e R6)

● energia cinetica

riprendiamo la relazione relativa al lavoro infinitesimo associato ad uno spostamento dr: $dW = F_T\,dr = m a_T\,dr = m\frac{dv}{dt}dr = \cancel{m\frac{dv}{dt}}$

Abbiamo così trovato il legame $= m\frac{dr}{dt}dv = m v\,dv$ esplicito tra il lavoro infinitesimo e la variazione infinitesima del modulo della velocità rendendo quantitativo la discussione fatta in precedenza. Per un percorso finito da A a B abbiamo

$$\boxed{W = \int_A^B m v\,dv = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = E_{kB} - E_{kA} = \Delta E_k}$$

▷ espressione del teorema della energia cinetica

Il lavoro è uguale alla variazione di $E_k = \frac{1}{2} m v^2$ che è detta energia cinetica.

Ricordando seconda legge di Newton, validità generale, qualsiasi forza agisca.

- Se $W > 0$ en. cinetica finale > en. cin. iniziale
- Se $W < 0$ viceversa.
- Se $W = 0$ energia cinetica rimane uguale e ciò capita per esempio nel moto circolare uniforme

(W = lavoro totale)

Se è noto come varia la forza lungo la traiettoria, possiamo calcolare il lavoro e quindi il modulo della velocità in ciascun punto (rispetto quella iniziale) e viceversa.

Lo scambio di lavoro è necessariamente legato alla presenza di spostam.

$\Delta r = 0 \quad W = 0$.

$L = [N \cdot m] = [J]$

W = potenza $\left[\frac{J}{s}\right]$

$J = W \cdot s$

$E_k = \frac{1}{2} m v^2 \qquad p = m \cdot v$

$\Rightarrow E_k = \frac{1}{2} m v v = \frac{p}{2} v \qquad E_k = \frac{1}{2}(mv)^2$

$E_k = \frac{p^2}{2m} \qquad p = \sqrt{E_k 2m}$

Il lavoro di F tra A e B z_A z_B vale $W = -(Fz_B - Fz_A) = -\Delta E_p$

dove ora $E_p = Fz$ se z fosse crescente $W = -\Delta E_p$ con $E_p = -Fz$

- lavoro di una forza elastica

$F = -kxu_x$ è la forza elastica lungo asse x lo spostamento punto

$$\boxed{W = \int_A^B -kxu_x \cdot dx\,u_x = -k\int_A^B x\,dx = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2 = -\Delta E_p}$$

$\boxed{E_p = \frac{1}{2}kx^2}$ funzione solo della posizione è l'energia potenziale elastica.

Se la coordinata iniziale è maggiore di quella finale cioè se il punto si muove verso il centro della forza il lavoro compiuto dalla forza elastica è positivo, E_p diminuisce (spostamento naturale)

Nel caso contrario di allontanamento dal centro $W<0$ E_p aumenta (W diventa resistente) E_p aumenta: per eseguire tale spostamento il punto deve possedere una velocità iniziale oppure si deve applicare una forza opportuna.

- lavoro di una forza di attrito radente.

È noto che è parallela e contraria al versore u_v dello spostamento ds il lavoro corrispondente si scrive $\boxed{W = \int_A^B F_{ad}\,ds = \int_A^B -\mu_d N u_v \cdot ds = -\mu_d N \int_A^B ds}$

$\overline{AB}$ è la lunghezza del percorso misurato lungo la traiettoria effettiva del punto materiale

pertanto se fissi μ_d e N allora W diversi a seconda della traiettoria effettiva. ⇒ W dipende dal percorso e non solo da A e B

Questo lavoro È SEMPRE RESISTENTE!

- forze conservative. energia potenziale

Le forze per le quali il lavoro non dipende dalla traiettoria si chiamano forze conservative e per il calcolo di W possono usare qualsiasi percorso che collega A e B

$$\boxed{\int_A^B (F\,ds)_I = \int_A^B (F\cdot ds)_{II} = \int_A^B F\,ds}$$

Lavoro è la differenza dei valori che una funzione assume in A e in B.

• conservazione energia meccanica.

Se agiscono solo forze conservative valgono sia 2.15 che 2.16

$W = E_{kB} - E_{kA}$ $\quad W = -\Delta E_p = E_{pA} - E_{pB}$

Eguagliando le due ~~operazioni~~ relazioni si ha

$$\boxed{\begin{aligned} E_{kB} - E_{kA} &= E_{pA} - E_{pB} \\ E_{pA} + E_{kA} &= E_{pB} + E_{kB} \end{aligned}}$$

La somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale di un punto materiale che si muove sotto l'azione di forze conservative resta costante durante il moto, cioè si conserva. Tale somma si chiama energia meccanica e vale pertanto in presenza di forze conservative, il principio di conservazione dell'energia meccanica.

$$\boxed{E_m = E_k + E_p = \text{costante}}$$

Possiamo completare la discussione iniziale a proposito di $W = E_{pA} - E_{pB} = -\Delta E_p$
Il lavoro ottenuto a spese della diminuzione di energia potenziale causa un aumento di energia cinetica e viceversa cioè durante il moto avviene una trasformazione da una forma di energia all'altra, per tramite di lavoro compiuto o subito, ma il contenuto energetico totale (en. meccanica) non cambia.

Quando agiscono, come nella realtà, forze conservative e forze non conservative il lavoro complessivo è dato dalla somma del lavoro delle forze conservative W_c e quello delle forze non conservative. W_{nc}

$$\boxed{W = W_c + W_{nc} = E_{kB} - E_{kA}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} E_{pA} - E_{pB} + W_{nc} &= E_{kB} - E_{kA} \\ W_{nc} = (E_{kB} + E_{pB}) - (E_{kA} + E_{pA}) &= E_{mB} - E_{mA} \end{aligned}}$$

In presenza di forze non conservative En. meccanica non è costante e la sua variazione è proprio W_{nc}.

Esempio: è sempre presente una forza di attrito che si oppone al moto. Se tutte le altre sono conservative si ha $\boxed{W_{nc} = W_{dis} < 0}$ quindi En. meccanica diminuisce durante il processo.

L'energia potenziale associata alla forza peso è $E_p = mgz$ se l'asse z è orientato verso l'alto. Dall'ultima equazione vista, la forza peso è:

$$\boxed{F = -\frac{dE_p}{dz} u_z = -mg\, u_z}$$ di verso opposto a quello dell'asse z

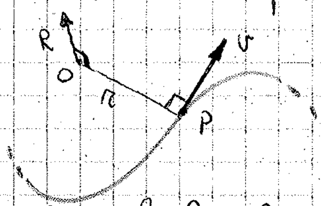
Nel caso della forza elastica $E_p = \frac{1}{2} k x^2$ e la F è $\boxed{F = -\frac{dE_p}{dx} u_x = -kx\, u_x}$ con verso opposto a quello della crescita dell'energia potenziale. Entrambi gli esempi sono unidimensionali e non si ha il caso di usare nabla "∇".

Momento angolare e momento della forza

Si descrive il concetto di momento di un vettore rispetto ad un punto. Si vedono le 2 applicazioni più comuni in meccanica riferite alla quantità di moto e alla forza.

Si definisce come momento angolare il momento del vettore quantità di moto:

$$\boxed{L = r \times p = r \times m v}$$



Nella figura, O è il polo rispetto a cui è calcolato L; sappiamo dall'appendice C, che se si cambia polo vale la relazione

$$\boxed{L_{O'} = L_O + OO' \times m v}$$

In generale il momento angolare è una funzione del tempo $L(t)$.

Nel moto curvilineo piano si può esprimere la velocità tramite le sue componenti radiale e trasversa per cui:

$$\boxed{L = r \times m v = r \times m(v_r + v_\theta) = r \times m v_\theta}$$

In quanto i vettori r e v_r sono paralleli e il loro prodotto vettoriale è nullo. Se il polo O sta nel piano del moto, L risulta ortogonale a tale piano e vale in modulo

$$\boxed{L = m r v_\theta = m r^2 \frac{d\theta}{dt}}$$

In particolare se il moto è circolare $\boxed{L = m r^2 \omega}$ con riferimento centro di circonferenza

$$\boxed{\int_0^t M\,dt = \Delta L = L_{fin} - L_{iniziale}}$$

Per produrre variazione finita di L occorre agire per Δt di M. analogia a proprietà dell'impulso della forza.

Se la forza viene applicata per un tempo MOLTO BREVE ottengo:

$$\boxed{\int_{t_0}^t M\,dt = \int_0^t (r \times F)\,dt = r \times \int_0^t F\,dt = r \times J = \Delta L}$$

Teorema del momento dell'impulso.

Infine si osservi che anche il lavoro nel moto circolare può essere espresso tramite il modulo del momento della forza. Infatti

$$\boxed{W = \int_0^s F_T\,ds = \int_{\theta_0}^{\theta_3} r\,F_T\,d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_3} M\,d\theta}$$

tenendo conto che $ds = r\,d\theta$ e tenendo conto che la componente F_T ha ~~...~~ momento nullo rispetto al centro

forze centrali

Si definisce forza centrale una forza agente in una certa regione dello spazio con le seguenti proprietà: in qualsiasi punto la sua direzione passa sempre per un punto fisso, detto centro della forza e il modulo è funzione soltanto della distanza dal centro stesso.

Se u_r è il versore della direzione $OP = r$ $F = F(r)u_r$ con $F(r) > 0$ se la forza è repulsiva e $F(r) < 0$ se è attrattiva

Si ha una modifica dello spazio stesso e si stabilisce un CAMPO DI FORZA che questo agisce su ogni particella che si trovi in esso.

Sviluppato da Faraday per elettromagnetismo ed esteso alla gravitazione in seguito. M della forza è comunque nullo

$$\frac{dL}{dt} = 0 \quad \text{e} \quad L = \text{costante}$$ in direzione verso e modulo.

Per definizione L è sempre ortogonale al piano contenente r e v.

Se L è costante in direzione allora il piano è fisso. ed il moto

$\boxed{a_\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 0}$ essendo $\boxed{r^2\frac{d\theta}{dt} = \text{COSTANTE}}$

accelerazione è puramente radiale $\boxed{a = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}$

Riscriviamo in funzione di coordinate polari.
eliminando la dipendenza dal tempo.
Ricordiamo che $r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{m}$ calcoliamo $\frac{dr}{dt}$ e $\frac{d^2r}{dt^2}$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2}\frac{dr}{d\theta} = -\frac{L}{m}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dr}{dt}\right)\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2}\frac{d}{d\theta}\left[-\frac{L}{m}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right] = -\frac{L^2}{m^2r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)$$

sostituendo in acc. =

$$a = -\frac{L^2}{m^2r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) - r\left(\frac{L}{mr^2}\right)^2$$

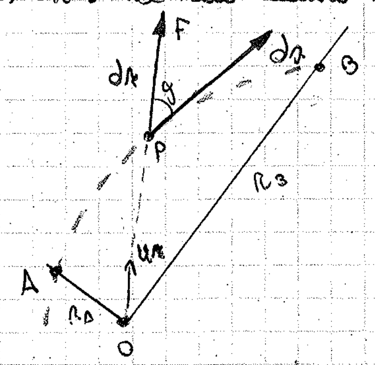
e tornando alla espressione vettoriale

$$\boxed{a = -\frac{L^2}{m^2r^2}\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right]u_r}$$

formula di Binet

Si dimostra in genere che tali forze sono conservative
il cui modulo dipende solo dalla distanza r. $F = F(r)\,u_r$. il suo lavoro si scrive

$$W = \int_A^B F\,ds = \int_A^B F(r)\,u_r\,ds$$

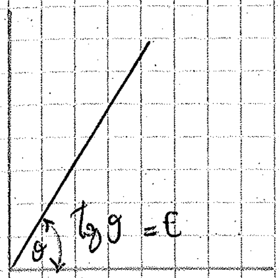


$u_r \cdot ds$ vale $ds\cos\theta$ e dalla figura si vede che $ds\cos\theta = dr$, variazione del modulo di r durante lo spostamento ds

Quindi

$$\boxed{W = \int_A^B F\cdot ds = \int_A^B F(r)\,dr = f(r_B) - f(r_A)}$$

Il lavoro è dato da una funzione di coordinate A e B. e non dal percorso



Materiale

acciaio	210 000 N/mm²	gomma	5000/8000 N/mm²
Al	70 000 N/mm²	platino	150000 N/mm²
Ag	75 000 N/mm²		
Fe	200 000 N/mm²		

Alcuni moduli di YOUNG

Il modulo di YOUNG presenta valori decrescenti, per i metalli in genere, all'aumentare della T° fino a che non si verifichi una trasformaz. di fase cioè una modifica della struttura cristallina.

Legge di Poisson

Per effetto della trazione della sbarra, non solo abbiamo allungamento ma notiamo una variazione di sezione. Se R è una dimensione trasversale, ad esempio il raggio di una sbarra cilindrica, si trova ricordando $\sigma = F/S$ e $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ la legge di Poisson:

$$\boxed{\frac{\Delta r}{r} = -\nu \frac{\Delta l}{l} = -\nu \varepsilon = -\nu \frac{\sigma}{E}}$$

con ν = coeff. di Poisson

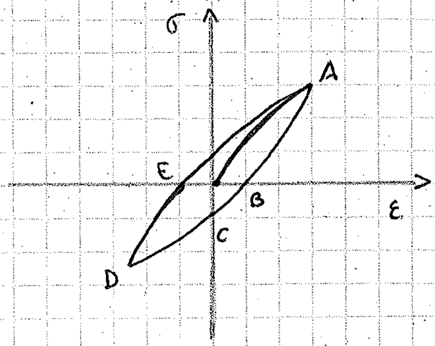
Valori compresi tra 0 (per il sughero) e 0,5 per il caucciù
Valida per valori non troppo elevati di σ.
Esempio: acciaio = 0,3 ; Al = 0,33 ; caucciù = 0,5 ; ferro = 0,30.

Nella trazione il volume della sbarra non diminuisce.

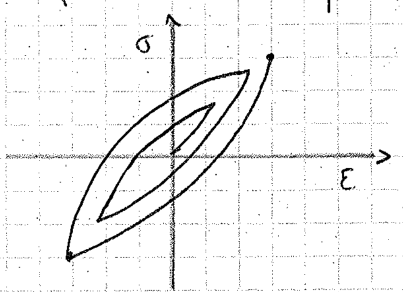
$$\boxed{V + \Delta V = \pi (r+\Delta r)^2 (l + \Delta l) = \pi r^2 l + \pi r^2 \Delta l + 2\pi r l \Delta r}$$

Se vogliamo $\Delta V \geq 0$ allora $\frac{\Delta l}{l} \geq -2\frac{\Delta r}{r} \Rightarrow \nu \leq 0{,}5$
allora la sbarra sottoposta a trazione non riduce mai il volume
e se $\nu = 0{,}5$ addirittura $\Delta V = 0$
[A compressione il volume non aumenta mai

si porta nella situazione di riposo. $\sigma = 0$ $\varepsilon = 0$ per indicare che non ho superato il limite elastico.
Aumentando σ aumenta deformazione ε linearmente fino a $\sigma = \sigma_s$ poi più rapidamente.



Quando siamo in A riduciamo sforzo di trazione: si osserva che non si ripercorre la stessa linea di ritorno ma che la barra resta più deformata
$\sigma = 0$ $\varepsilon > 0$ occorre comprimere la barra per tornare a $\varepsilon = 0$, arriviamo in D simmetrico ad A; ora diminuendo la compressione e tornando indietro si trova che il percorso è diverso e che per $\sigma = 0$ la barra è ancora compressa ($\varepsilon < 0$, $\sigma = 0$)
È un ciclo, detto di isteresi (relazione tra σ ed ε non è univoca come nel tratto elastico) ma dipende da come è stato trattato il corpo. Ciò non avviene in campo elastico.
L'energia meccanica consumata in un ciclo è completamente dissipata viene trasformata in calore.

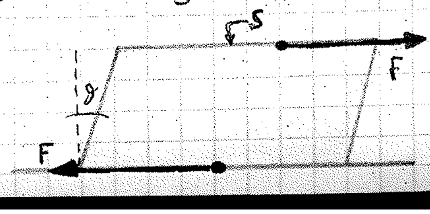


È possibile tornare a zero iniziale con cicli di area sempre minore.
Oppure si può giustificare per il processo di INCRUDIMENTO.

- **Scorrimento**

Consideriamo un parallelepipedo incollato su due facce opposte a due lastre rigide, una bloccata e una mobile parallelamente all'altra. Applicando una forza esterna F, si osserva uno scorrimento della faccia superiore rispetto a quella inferiore, che si può ~~misurare~~ misurare tramite angolo ϑ. Si trova che tra il carico specifico $\sigma = F/S$ e l'angolo ϑ esiste una relazione lineare

$$\sigma = G\vartheta$$



- pendolo di torsione

si realizza sospendendo un corpo solido ad un filo; generalmente il punto di aggancio coincide con il centro di massa. Per esempio un semplice pendolo di torsione consiste in un disco sospeso al centro essendo il filo verticale e il disco in un piano orizzontale. Se ruotiamo il disco di un angolo ϑ mantenendo orizzontale il filo di sospensione subisce una torsione e sviluppa un momento elastico $-K\vartheta$ con K dato da:

$$\boxed{M = K\vartheta = \frac{\pi}{2} G \frac{r^4}{l}}$$

Se poi lo liberiamo esso si mette in rotazione sotto l'azione del momento elastico, secondo l'equazione

$$\boxed{-K\vartheta = I\ddot{\vartheta} = I\frac{d^2\vartheta}{dt^2}}$$

legge di Newton

I = momento di inerzia rispetto ad asse di rotazione

La soluzione dell'equazione $\boxed{\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{K}{I}\vartheta = 0}$ è data da:

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{K}{I}}} \quad \text{e:} \quad \boxed{\vartheta = \vartheta_0 \,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)}$$

Il sistema descrive una oscillazione armonica

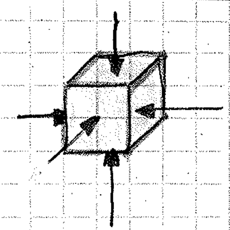
Durante l'oscillazione del pendolo di torsione si può applicare il principio di conservazione della en. meccanica.

$$\frac{1}{2}K\vartheta^2 + \frac{1}{2}I\Omega^2 = \text{cost.}$$

Due applicazioni pratiche che sfruttano la misura del periodo $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{K}}}$

Se è noto I, si ottiene la costante K e quindi il modulo di rigidità del materiale che costituisce il filo. Se invece è noto K si determina I. utile per il caso di lastre di forma qualsiasi.

e una volta nella pressione
Se V è il volume del corpo in corrispondenza della pressione esterna



p ad una variazione Δp corrisponde una variazione di volume ΔV

$$\boxed{\frac{\Delta V}{V} = -\frac{1}{\beta}\Delta p}$$ dove β si chiama modulo di compressibilità isotermo viene misurato in modo da mantenere la T interna al corpo COSTANTE.

$\beta = \left[\frac{N}{mm^2}\right]$ a 20°C

$$\boxed{\beta = \frac{E}{3(1-2\nu)}}$$

in pratica determinate sperimentalmente due costanti E e G sono poi ricavabili ν e β.

Nei liquidi, anche se β è alto, è più basso che nei solidi.
Invece nei gas il coefficiente di compressione isotermo è uguale alla Press. Esterna. β è l'unico costante elastico definibile per un fluido.

- durezza

definita come resistenza di un corpo alla penetrazione da parte di un altro corpo. opportunamente sagomato a forma di sfera di piccolo raggio o di punta. correlato alla resistenza meccanica di un materiale e facile da misurare.

Brinnel ⇒ sfera di acciaio da 1 mm Ø con N ~ 10^4 N (misura impronta)
Rockwell ⇒ penetratore piccolissimo e si rifà alla profondità
Vickers ⇒ piramide a base quadrata 136° misura dell'impronta con microscopio.

Numericamente $\boxed{H = \frac{N}{S}}$

Relazione lineare tra H3 e carico specifico a rottura in caso di leghe metalliche.

Consideriamo il sistema sole Terra: la forza esercitata dal sole sui pianeti, che in circa la loro orbita, è inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal sole. Quindi la forza tra SOLE e TERRA può essere scritta:

$$\boxed{F_{S,T} = \frac{4\pi^2}{K_T}\frac{m_T}{r^2}}$$

mentre la forza esercitata dalla ~~Terra~~ Terra sul sole è:

$$\boxed{F_{T,S} = \frac{4\pi^2}{K_S}\frac{m_S}{r^2}}$$

Uguali in modulo le due.

$$\boxed{m_T K_S = m_S K_T}$$

Definendo la costante:

$$\boxed{\gamma = \frac{4\pi^2}{m_T K_S} = \frac{4\pi^2}{m_S K_T}}$$

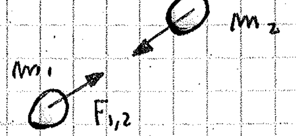
Abbiamo per il modulo della forza sole terra

$$\boxed{F = \gamma\frac{m_S m_T}{r^2}}$$

Newton pensò che si trattasse di una legge universale ed enunciò il seguente enunciato:

Date due masse qualsiasi di dimensioni trascurabili rispetto alla distanza mutua, tra di esse agisce una forza attrattiva diretta lungo la retta congiungente le due masse, il cui modulo dipende direttamente dal prodotto delle masse, e inverso al quadrato della distanza.
γ è una costante universale che non dipende dalle masse e loro geometria (cost. della interazione gravitazionale)

$$\boxed{F_{1,2} = \gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}u_{1,2}}$$



Per verificare la correttezza, si deve valere anche per un corpo m sulla terra generico (m_T) (r_T)

$$F = \gamma\frac{m\,m_T}{r_T^2}$$

$$\boxed{g = \gamma\frac{m_T}{r_T^2}}$$ per $mg = F$

Ma Newton non conosceva ancora γ e m_T.
Tuttavia con riferimento al sistema Terra luna si può scrivere:

$$\boxed{F_{TL} = \gamma\frac{m_T m_L}{r_L^2} = m_L\omega_L^2 r_L}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 400

~~forze apparenti ed è conveniente scegliere dal minimo ... delle formule di trasformazione e in sistema inerziale~~

Massa inerziale e massa gravitazionale

la legge vista precedentemente esprime un particolare tipo di interazione esistente in natura il cui valore numerico dipende da γ, che è tipica dell'interazione dalla geometria del sistema e da una caratteristica dei corpi che partecipano all'interazione (m = massa gravitazionale)
a priori non c'è nessuna ragione logica per cui la m gravitazionale legata ad una particolare interazione debba essere uguale alla m inerziale che compare nella legge di Newton $F = ma$; quindi la grandezza caratteristica m caratterizza l'inerzia del corpo qualunque sia la forza agente, e sappiamo che essa può essere determinata con misure cinematiche indipendenti dalla forza stessa. Sulla superficie terrestre vale l'equazione:

$$m_I g = \gamma \frac{m_{T,G}\, m_G}{r_T^2}$$

dove m_I e m_G sono le masse inerziale e gravitazionale del corpo attratto dalla terra, la cui massa gravitazionale è $m_{T,G}$. Ne ricaviamo

$$g = \gamma \frac{m_{T,G}}{r_T^2} \frac{m_G}{m_I}$$

Sperimentalmente in uno stesso luogo g è indipendente dai corpi, quindi per qualsiasi corpo il rapporto m_G/m_I è pari ad una costante, indipendente dal corpo. Le due masse sono fra loro proporzionali.
Poiché non c'è un modo diretto per misurare il rapporto m_G/m_I l'ipotesi più semplice è supporre $m_G/m_I = 1$ $m_G = m_I$ e significa che nell'esperimento di Cavendish i valori delle masse delle sfere sono quelli inerziali e che quindi il valore di Cavendish i valori delle masse delle sfere sono quelli inerziali e che quindi il valore di γ si basa sull'ipotesi $m_G = m_I$.
Se il rapporto $\frac{m_G}{m_I}$ dipendesse dai corpi, cioè ad esempio dalla sostanza di cui sono costituiti, sarebbe possibile metterlo in evidenza col

$G_1 \neq G_2$ anche in modulo ma $F_{1,2} = F_{2,1}$.
Tale formula rimane valida fra masse purché siano a geometria sferica o puntiformi.
così come il G è a simmetria sferica cioè centrale. risulta sempre vera la seguente.

$$\boxed{G_i = -\gamma \frac{m_i}{r_i^2} u_i \qquad G = \sum G_i = \sum\left(-\gamma \frac{m_i}{r_i^2} u_i\right)}$$

se ci sono + masse.

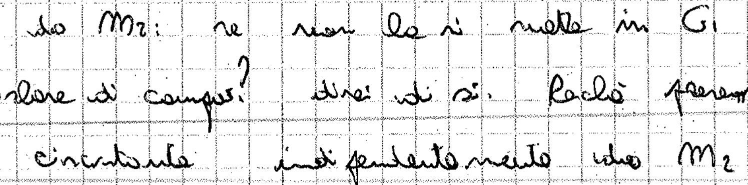
Se si ha una massa estesa, il campo G in P dovuto a M, si calcola in modo analogo suddividendolo in dm ognuna generatrice di dG. $\boxed{dG = -\gamma \frac{dm}{r^2} u}$ e si integra per volumetto

$$\boxed{G(P) = \int_C -\gamma \frac{dm}{r^2} u = \int_V -\gamma \rho \frac{dV}{r^2} u}$$

La forza tra due corpi estesi si ricava calcolando su ciascun elemento di M_2 la forza $dF_{1,2} = dm_2 G_1$

$$\boxed{F_{1,2} = \int_{C_2} G_1 \, dm_2}$$

Lo schema di campo è utile concettualmente per spiegare il teorema di Gauss, per esempio ....
Guardando l'argomento in modo un po' diverso ci si può chiedere se il campo G è una grandezza che ha significato indipendente da M_1 e M_2. Cominciamo da M_2: se non la si mette in G_1 e non si rileva $F_{1,2}$, ha senso parlare di campo? Direi di sì. Perché presenza di M_1 modifica spazio circostante indipendentemente da M_2, come si verifica osservando la traiettoria dei raggi luminosi che attraversano un campo risulta incurvata in accordo con la teoria della relatività generale.
Questa osservazione venne effettuata durante una eclissi di sole Terra Sole Stella



e avverrebbe però una eclisse di luna contemporaneamente. però sole è troppo luminoso.

uno vale anche viceversa anche $E_p = m_1 V_2$.

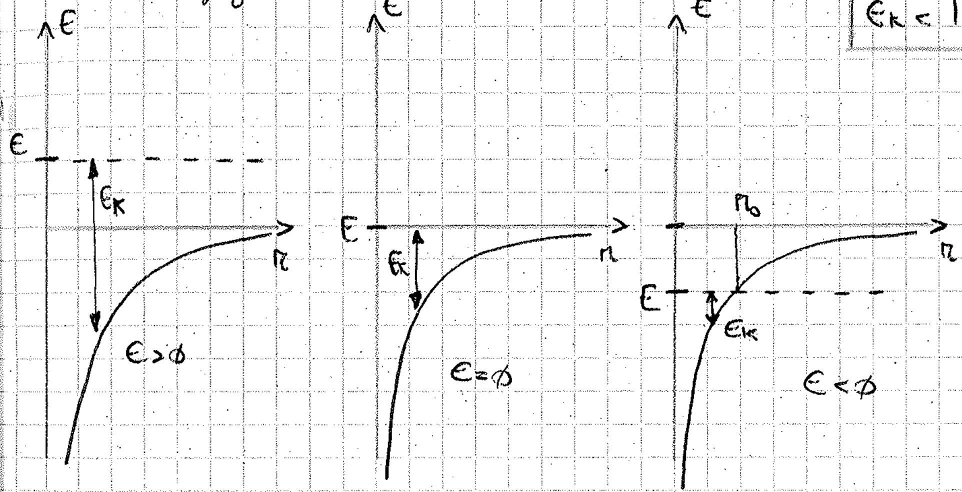
$$\boxed{W = -\Delta E_p = -m_2 \Delta V_1 = -m_2 (V_{1,B} - V_{1,A})}$$

Le prime essere e non specifiche, per V_n si applica stesso concetto di un unito per calcolare G.

● Grafici dell'energia

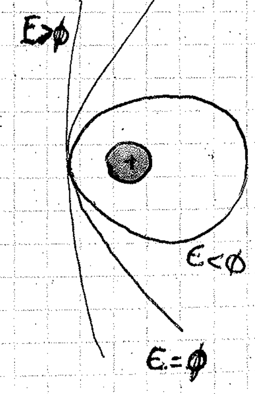
L'energia totale di un sistema di due masse può assumere valore positivo, nullo o negativo a seconda che sia vedremo i grafici:

$$\boxed{E_K > |E_p| \quad E_K = |E_p| \quad E_K < |E_p|}$$



La doppia freccia indica la differenza $E - E_p = E_K$ per un particolare valore r.
La curva continua indica $E_p = -\gamma m_1 m_2 / r$ ed è uguale nei tre casi.

Nei primi due casi non ci sono limiti, uno nel terzo sì. $r \leq r_0$ altrimenti avrei $E_p > E$.



Vedremo che se ▸ $E>\phi$ la traiettoria è iperbolica
▸ $E=\phi$ // orbita parabolica
▸ $E<\phi$ // orbita ellittica

L'ultimo caso implica infatti una orbita limitata.
Controllando v si può scegliere la traiettoria voluta.

● Teorema di Gauss, distribuz. sferica di massa

Consideriamo un certo numero di masse e una superficie geometrica chiusa che ne racchiude m. In ogni punto di Sg. calcoliamo G. che è dovuto a tutte le masse presenti e calcoliamo la quantità scalare:

Se m è distribuita uniformemente in tutto il volume sferico, all'esterno il discorso è lo stesso. $G(r) = \gamma \frac{m}{r^2}$ per $r \geq R$

All'interno invece cambia. $G \neq 0$

Dentro una sfera S_1 di raggio $r<R$ c'è la massa $m(r)$ minore di m visto che la distribuzione di massa è uniforme il rapporto tra $m(r)$ e m è uguale al rapporto tra i volumi sferici $\frac{r^3}{R^3}$ per cui

$$m(r) = m\frac{r^3}{R^3}$$

applicando $\boxed{\Phi(r) = 4\pi r^2 G(r) = 4\pi\gamma m(r) = 4\pi\gamma m \frac{r^3}{R^3} \Rightarrow G(r) = \gamma \frac{m}{R^3} r}$

Il campo all'interno di una sfera omogenea cresce linearmente con la distanza dal centro; il grafico di $G(r)$ è mostrato qui:

Questo caso è il caso di una m estesa che non genera un G vero andamento $1/r^2$ tipico della massa puntiforme m_p

Infine se una massa puntiforme m_p si trova all'interno della sfera omogenea la forza $\boxed{F = m_p G = -\gamma \frac{m\, m_p}{R^3} r = -kr}$

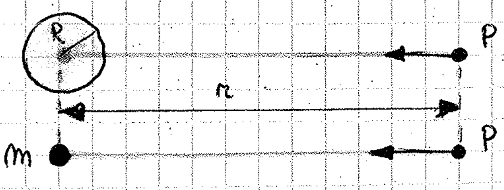
cioè una forza di tipo elastico.

Se lungo un diametro si scava un foro e si abbandona sulla superficie un punto materiale con $v_0 = 0$ questo descriverebbe un moto armonico verso il foro con ampiezza R.

Riassumendo: si vede che il campo gravitazionale in un punto P all'esterno di una distribuzione sferica uniforme di massa in ogni caso vale:

$G(r) = \gamma \frac{m}{r^2} u_r$ indipendente dal raggio della distribuzione

si vede l'equivalenza.



Risultato corretto anche se i raggi delle circonferenze sono paragonabili alla distanza ... non c'è una approssimazione, è corretto.

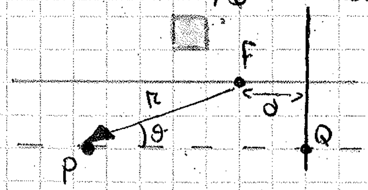
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 400

● determinaz. traiettoria

Si vuole dimostrare ora che l'orbita dei pianeti è ellittica, e che il quadrato del periodo di rivoluzione è proporzionale al cubo del semiasse maggiore.

● parentesi geometrica sulle coniche

Una conica è una curva piana definita come luogo dei punti per i quali il rapporto tra la distanza da un punto e la distanza da una retta è pari ad una costante positiva che si chiama eccentricità $\varepsilon = \frac{PF}{PQ} = \frac{r}{d + r\cos\vartheta}$



Pertanto l'equazione della conica in coordinate polari di centro F è $\frac{1}{r} = \frac{1}{\varepsilon d} - \frac{1}{d}\cos\vartheta$

Se $\varepsilon < 1$ abbiamo una ellisse se $\varepsilon = 1$ una parabola se $\varepsilon > 1$ una iperbole. In particolare per una ellisse di semiassi a e b valgono le relazioni

$$\boxed{a = \frac{\varepsilon d}{1-\varepsilon^2} \; ; \; b = a\sqrt{1-\varepsilon^2} \text{ da cui } \varepsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

$$\text{Area} = \pi \cdot a \cdot b \Rightarrow A = \pi a^2 \sqrt{1-\varepsilon^2}$$

$\varepsilon = 0 \Rightarrow$ corrisponde a circonferenza.

● equazioni del moto e traiettoria

Consideriamo due punti isolati M e m tra i quali agisce la forza di gravità $\gamma Mm / R^2$. In un sistema di riferimento inerziale

$$F = m a_m \qquad -F = M a_M$$

Secondo quanto visto in paragrafo 3 l'accelerazione relativa di m rispetto a M è

$$\boxed{a = a_m - a_M = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) F = \frac{1}{\mu} F}$$

$$\boxed{\mu = \frac{mM}{m+M}}$$

si chiama massa ridotta del sistema ($\mu < m$ e $\mu < M$) pertanto $F = \mu a$ e si crea un moto "equivalente".

Il moto relativo di 2 corpi sottoposti alla loro interazione mutua è equivalente al moto di 1 corpo di massa = a μ e sottoposto a F uguale a quella mutua.

L'energia totale di m è la somma di Et e Ep:

$$\boxed{E = \frac{1}{2}\mu v^2 - \gamma\frac{mM}{r} = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\mu r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \gamma\frac{mM}{r}}$$

$$L = \mu r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

Il primo termine della □ si può trasformare ricordando che

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt} = \frac{\sin\theta}{d}\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{1}{2}\mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\mu\frac{r^4}{d^2}\sin^2\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 =$$

$$\frac{1}{2}\frac{\sin^2\theta}{d^2}\frac{L^2}{\mu}$$

e trasformo anche il 2° termine

$$\frac{1}{2}\mu r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu r^2}$$

ed infine il 3° termine:

$$-\gamma\frac{mM}{r} = \frac{L^2}{\varepsilon d\mu r}$$

Unendo i vari risultati trovo:

$$\boxed{E = \frac{1}{2}\frac{\sin^2\theta}{d^2}\frac{L^2}{\mu} + \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu r^2} - \frac{L^2}{\varepsilon d\mu r}}$$

e utilizzando la $\frac{1}{r} = \frac{1}{\varepsilon d} - \frac{1}{d}\cos\theta$ troverei:

$$\boxed{E = \frac{L^2}{2\mu\varepsilon^2 d^2}(\varepsilon^2 - 1) = \gamma\frac{mM}{2\varepsilon d}(\varepsilon^2 - 1)}$$

anche l'energia totale si ricava dai parametri dell'orbita; viceversa dati L ed E si possono calcolare ε e d

Poiché il sistema pianeta sole è legato, l'energia totale è negativa e quindi l'orbita del pianeta è una ellisse come prescrive la 1° legge di Keplero.

Nel caso particolare di orbita ellittica

$$\boxed{\begin{aligned} L^2 &= \gamma\mu mM a(1-\varepsilon^2) \\ E &= -\gamma\frac{mM}{2a} \end{aligned}}$$

$$\boxed{T = 2\mu\frac{A}{L} = 2\mu\frac{\pi a^2}{L}\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$ Periodo.

che congiunto con □ dà:

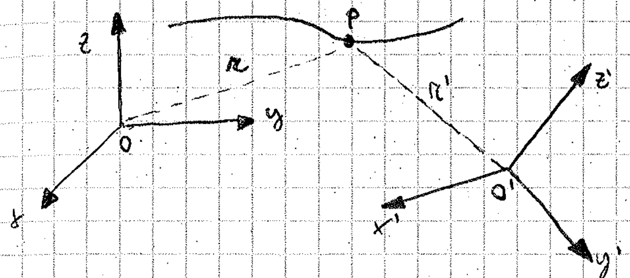
$$\boxed{T^2 = \frac{4\pi^2\mu a^3}{\gamma mM} = \frac{4\pi^2}{\gamma(m+M)}a^3 = k a^3}$$

3° legge di Keplero!

MOTI RELATIVI 5° CAPITOLO

sperimentalmente è provato con certezza che le leggi fisiche non dipendono dalla scelta del sistema di riferimento.
ciò che si prova in un sist., è vero anche per altri esterni in moto traslatorio del primo. => lo spazio appare omogeneo e isotropo. Si cita sempre come esempio quello della persona seduta su un mezzo di trasporto in moto.

● **Teorema delle v. relative** in figura è rappresentato un punto P in movimento lungo una generica traiettoria. Il suo moto viene osservato da una terna cartesiana con centro in O che per convenienza chiamiamo sistema FISSO



e da una con centro O' detta MOBILE. Vogliamo stabilire una relazione tra x v a di P misurate da fisso e le relative grandezze misurate nel mobile.

La relazione tra le posizioni del punto P misurate rispetto ai due sistemi di riferimento è la seguente:

$$\boxed{r = OO' + r'}$$

con

$r = x u_x + y u_y + z u_z$ $\quad r' = x' u_{x'} + y' u_{y'} + z' u_{z'}$ $\quad OO' = x_{O'} u_x + y_{O'} u_y + z_{O'} u_z$

ammesso che $u_x \; u_y \; u_z$ siano fissi.

La velocità è data da $v = \frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt} u_x + \frac{dy}{dt} u_y + \frac{dz}{dt} u_z$

mentre la velocità relativa è $v' = \frac{dx'}{dt} u_{x'} + \frac{dy'}{dt} u_{y'} + \frac{dz'}{dt} u_{z'}$

ma $v_{O'} = \frac{dOO'}{dt} = \frac{dx_{O'}}{dt} u_x + \frac{dy_{O'}}{dt} u_y + \frac{dz_{O'}}{dt} u_z$

e la derivata rispetto al tempo di $r = OO' + r'$ fornisce

$$\boxed{v = \frac{dr}{dt} = \frac{dOO'}{dt} + \frac{dr'}{dt} = \frac{dx_{O'}}{dt} u_x + \frac{dy_{O'}}{dt} u_y + \frac{dz_{O'}}{dt} u_z + \frac{dx'}{dt} u_{x'} + \frac{dy'}{dt} u_y + \frac{dz'}{dt} u_z + x' \frac{du_{x'}}{dt} + y' \frac{du_{y'}}{dt} + z' \frac{du_{z'}}{dt}}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 400

moto per sistema mobile $a' = \frac{d^2x'}{dt^2} u_{x'} + \frac{d^2y'}{dt} u_{y'} + \frac{d^2z'}{dt^2} u_{z'}$

$a_{O'} = \frac{dv_{O'}}{dt}$ rispetto al sistema fisso.

Derivando $v = v_{O'} + v' + \omega \times r'$ rispetto al tempo otteniamo:

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv_{O'}}{dt} + \frac{dv'}{dt} + \frac{d\omega}{dt} \times r' + \omega \times \frac{dr'}{dt}}$$

$$\frac{dv'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx'}{dt} u_{x'} + \frac{dy'}{dt} u_{y'} + \frac{dz'}{dt} u_{z'}\right) = \frac{d^2x'}{dt^2} u_{x'} + \frac{d^2y'}{dt} u_{y'} + \frac{d^2z'}{dt} u_{z'} +$$

$$+ \frac{dx'}{dt} \frac{du_{x'}}{dt} + \frac{dy'}{dt} \frac{du_{y'}}{dt} + \frac{dz'}{dt} \cdot \frac{du_{z'}}{dt} = a' + \omega \times v'$$

e le derivate essendo nuovamente usate le formule di Poisson per le derivate dei versori degli assi mobili. Inoltre:

$$\omega \times \frac{dr'}{dt} = \omega \times v' + \omega \times (\omega \times r')$$

e pertanto:

$$\boxed{a = a' + a_{O'} + \omega \times (\omega \times r') + \frac{d\omega}{dt} \times r' + 2\omega \times v'}$$

Teorema delle accelerazioni relative

L'accelerazione di trascinamento, se uno dei due sistemi non coincidono ma non in relazione da tale teorema

$a_T = a$ $\Rightarrow$ a' e v' sono nulle e dalla precedente

$$\boxed{a_T = a_{O'} + \omega \times (\omega \times r') + \frac{d\omega}{dt} \times r'}$$

Possiamo quindi riscrivere la formula del teorema come:

$\boxed{a = a' + a_t + a_c}$ dove $\boxed{\text{con } a_c = \text{acc. di Coriolis} = 2\omega \times v'}$

e dipende dal moto di P rispetto al sistema mobile tramite v'.

L'accelerazione di Coriolis è relativa in particolare con il moto relativo, ovvero il caso in cui si trattano le v e a di un punto rispetto ad un altro, proprio perché vedere un punto da due sistemi ma vedere un punto dato punto.

1) Sfruttiamo i risultati appena trovati

È evidente che la definizione di sistema di riferimento inerziale ha significato solo se siamo in grado di verificare in modo diverso che il punto non è soggetto a forze. È ragionevole supporre che questa situazione si verifichi solo quando P è sufficientemente lontano da ogni altro corpo in modo da poter trascurare ogni interazione, solo quando è possibile bilanciare le forze agenti in modo che $R = 0$.

In un sistema inerziale la legge di Newton ha l'espressione più semplice: a 1° membro abbiamo le forze vere (quelle derivabili dalle interazioni fondamentali) e la R è proporzionale alla acc. misurata in tale sistema.

Se consideriamo invece un diverso sistema ~~inerziale~~ che si muove di moto traslatorio rettilineo uniforme rispetto ad uno inerziale.

$v_{O'} = cost \qquad a_{O'} = 0 \qquad \omega = 0$

allora $a = a'$ => le acc. misurate nei due sistemi sono uguali. Anche il 2° è inerziale.

=> Definito un sistema inerziale qualsiasi sistema in moto rettilineo uniforme rispetto ad esso è inerziale. Qui non ha senso il concetto di moto assoluto. ➡ relatività galileiana

Se il moto del 2° sistema è accelerato rispetto al 1° (inerziale), sia perché $a \neq 0$ oppure $\omega \neq 0$ o pure entrambi, si osserva che la legge di Newton non è più valida, la forza vera che agisce sul punto considerato non è più proporzionale alla accelerazione.

Infatti se $F = ma$ in sist. inerziale, in quello mobile in moto accelerato non può sussistere la relazione $F = ma'$ ~~perché~~ $a' \neq a$.

D'altra parte abbiamo che

$$\boxed{F - ma_T - ma_C = ma'}$$

dove a_T e a_C sono le accelerazioni di trascinamento e di Coriolis come definite rispettivamente nelle pagine precedenti.

Quest'ultima perciò una forma modificata della legge di Newton: in un sistema non inerziale il prodotto della massa del P per a'

• moto di trascin. rettilineo accelerato

Prendiamo stesso geometria precedente ma ora $a_{O'} = a_T$ e $v_0 = v_{IN} \neq 0$

andiamo considerati ad $X \equiv X'$ la velocità e la posizione di O' sono quindi espresse da $x_{O'} = v_{IN} t + \frac{1}{2} a_t t^2$ $\quad v_{O'} = v_{IN} + a_t t$

Le formule di trasformazione diventano:

$r' = r - OO'$ $\quad x' = x - v_{IN} t - \frac{1}{2} a_t t^2$ $\quad y' = y$ $\quad z' = z$

$v' = v - v_{O'}$ $\quad v_x = v_x - v_{IN} - a_t t$ $\quad v_{y'} = v_y$ $\quad v'_z = v_z$

$a' = a - a_{O'}$ $\quad a'_x = a_x - a_t$ $\quad a_{y'} = a_y$ $\quad a_{z'} = a_z$

Come nel caso di trascinamento rettilineo uniforme vanno ora analizzate le a che sono legate nei due sistemi, O inerziale e O' non inerziale e quindi la diversità delle forze agenti con conseguente comparsa delle forze di inerzia secondo $\boxed{F - m a_T - m a_c = m a'}$

• moto di trascinamento rotatorio uniforme

supponiamo per comodità, che sia rotatorio uniforme solamente e pensiamo coincidenti le due origini. $v_0 = \emptyset$ $\quad a_{O'} = \emptyset$ $\quad \omega$ = costante

$v = v' + \omega \times R$ $\qquad a = a' + \omega \times (\omega \times r) + 2\omega \times v'$

riscriviamo così

$$F + F_{centr} + F_{cor} = m a'$$

$F_{centr} = m\omega \times (\omega \times r)$ $\quad F_{cor} = 2m\,\omega \times v'$ stesso ruolo della forza $-ma_T$ vista nel paragrafo ~~x~~ precedente.

Si può ad esempio assumere gli assi x' y' solidali ad un disco posto nel piano xy che ruota attorno a z.

Pensiamo un punto materiale su un disco, con attrito nullo tra il punto e il piano del disco, il punto rimane fermo mentre il disco gira. Se il punto lasciasse una traccia osserveremmo una circonferenza di raggio R con centro nell'origine comune dei due sistemi.

In O => punto è in quiete; per O' => P = moto circolare uniforme.

sistema O $\quad a = \emptyset$, $v = \emptyset$ $\quad$ sistema O' $\quad \cancel{v' = -\omega \times (\omega \times R) - 2\omega \times (\omega \times r)}$

Notiamo che se il moto di trascinamento è rotatorio uniforme o vario è sempre $a_T \neq 0$ e quindi non può mai sussistere uguaglianza $a = a'$: non esiste l'analogo rotatorio della relatività galileiana;

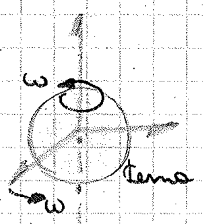
Riprendiamo brevemente le forze di Inerzia.

- Esse non hanno esistenza reale (non derivano dalle interazioni fondamentali e non compaiono nella descrizione del moto effettuato in un sistema di riferimento). In sistema NON inerziale esse hanno effetti genuini e sono necessarie per spiegare le osservazioni sperimentali. Ad esempio in sistema rotante è comodo attribuire alla forza centrifuga la tendenza allo spostamento radiale verso l'esterno e alla acc. di Coriolis l'incurvamento della traiettoria. In una auto che accelera lo spostamento all'indietro è reale e si spiega solo con $-ma_t$. Importante capire il loro significato la loro origine e usarle correttamente solo dove servono.

Il moto rispetto alla terra

Esempio di sistema inerziale: sistema con O nel centro di massa del sistema solare e gli assi diretti verso determinate stelle fisse è con ottima approssimazione un sistema inerziale, come lo sono tutti gli altri in moto rett. unif. rispetto ad esso.

Invece qualsiasi sistema dell'tipo con assi rotanti insieme alla terra NON è inerziale. (studio dei moti degli altri pianeti sarebbe difficilissimo e pieno di bisogno di correzioni)



$m_T = 5,98\ 10^{24}$ Kg $\quad R = 6,37 \cdot 10^6$ m $\quad R_0 = 1,49 \cdot 10^{11}$ m $\quad T_0 = 3,16 \cdot 10^7$ s

Un sistema di riferimento solidale alla terra, con asse z orientato da sud a nord e assi x y nel piano equatoriale ruota con velocità angolare $\omega = \omega u_z$ essendo u_z versore asse z $\omega = 7,29\ 10^{-5} \frac{rad}{sec}$

Un punto in moto vicino alla superficie terrestre è sottoposto alla forza peso mg_0 e in base a $a = a' + a_0 + \omega \times (\omega \times r') + \frac{d\omega}{dt} \times r' + 2\omega \times v'$

L'esperimento è stato eseguito alle nostre latitudini ma con risultati apprezzabili.

N.B. moto curioso: è dimostrato che i punti di lancio del giavellotto o del disco a parità di condizioni atmosferiche e di attrito dell'aria sono influenzati in ~~modo~~ NON ININFLUENTE dalla F centrifuga e dalla F di Coriolis.

DINAMICA DEI SISTEMI DI PUNTI MATERIALI 6° CAPITOLO

Sistemi di punti, forze interne e forze esterne

Consideriamo un sistema di n punti materiali, con n maggiore di 1.

La forza F_i agente nell'i-esimo punto si pensa come risultante delle forze esterne F_i^E agenti nell'i-esimo punto, e degli altri $n-1$ punti = F INTERNE F_i^I

$$\boxed{F_i = F_i^I + F_i^E}$$

moto del punto = F_i lo determina. distinzione tra F^E e F^I dipende da come viene definito il sistema.

Alle forze interne si applica la terza legge di Newton, o principio di azione e reazione, introdotto nel capitolo 2°. (rivedilo)

La natura delle F^I può essere qualsiasi: elastiche, di attrito, di peso, ecc...

→ possono essere sia conservative che non conservative

In generale la risultante F_i^I delle forze interne agenti nell'i-esimo punto è diverso da $\emptyset$; però la risultante di tutte le forze interne del sistema è nulla perché in base al principio di azione e reazione

Esse sono a due a due uguali ed opposte

$$\boxed{R = \Sigma_i F_i^I = \Sigma_{i,j} F_{i,j} = \emptyset}$$

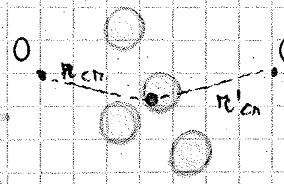
Notiamo che il principio di azione e reazione si applica a qualsiasi interazione e anche alle forze esterne

Se consideriamo corpi interagenti tra loro e di ognuno si studia singolarm. il moto.

Esempio: si prendano due corpi in moto relativo m_1 e m_2 con una forza risultante di attrito radente nella superficie di contatto.

Si nota che la posizione del CM rispetto agli n punti materiali NON dipende dal sistema di riferimento mentre le sue coordinate invece variano a seconda del sistema prescelto (così le sue coordinate r_i.)

Se i punti si muovono, il centro di massa varia



$$\boxed{v_{cm} = \frac{dr_{cm}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{dr_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i v_i}{\sum_i m_i} = \frac{P}{m}}$$

quantità di moto

Vediamo quindi che P coincide con la quantità di moto $m v_{cm}$ del centro di massa considerato come punto materiale che abbia la posizione r_{cm}, la velocità v_{cm} e massa pari a quella totale del sistema.

Analogo ragionamento per a_{cm}

$$\boxed{a_{cm} = \frac{d^2 r_{cm}}{dt^2} = \frac{\sum_i m_i \frac{dv_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i a_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i a_i}{m}}$$

se il sistema di riferimento è inerziale

$m_i a_i = F_i = F_i^I + F_i^E$ ⇒ sostituendo otteniamo

$$\boxed{m a_{cm} = \sum_i m_i a_i = \sum_i F_i^I + F_i^E = R^E + R^I = R^E}$$

R^I è sempre nullo (vedi pagina precedente) ▷ $R^E = m a_{cm}$

esprime il teorema del moto del centro di massa

Il centro di massa si muove come un punto materiale in cui sia concentrata tutta la massa del sistema e a cui sia applicata la risultante delle forze esterne.

$$R^E = m a_{cm} = m \frac{dv_{cm}}{dt} = \frac{d}{dt}(m v_{cm}) = \frac{dP}{dt}$$

La risultante delle forze esterne è la derivata rispetto al tempo della quantità di moto totale.

Il moto di CM è determinato solo dalle forze esterne

● OSSERVAZIONI

La definizione di CM è matematica nel senso che il vero CM non è un punto materiale, ma la massa è distribuita nei singoli punti che si muovono sotto l'azione delle forze interne ed esterne. Questo CM gode di molte proprietà.

- $v_{cm} = \frac{P}{m}$ $m v_{cm} = \sum m_i v_i$
- la sua a è risultante delle forze esterne agenti sul sistema.

Il principio di conservazione della quantità di moto per un sistema isolato di due punti ha come conseguenza che le forze che si esercitano tra i due punti sono uguali in modulo e di verso opposto ciò non implica che le due abbiano stessa retta di azione.

Riprendiamo l'argomento parlando della conservazione ~~della quantità di moto~~ del momento angolare di un sistema isolato di punti materiali.

Sotto questo precisione potremmo dire che c'è equivalenza tra conservazione della quantità di moto e principio di azione e reazione generalizzabile a sistemi più complessi.

Il principio di conservazione della quantità di moto permette anche di definire dinamicamente la massa, indipendentemente dalla forza peso.

Consideriamo infatti 2 punti materiali fermi agli estremi di una molla compressa. Dato che il centro di massa è in quiete la quantità di moto dei due punti è nulla $P = \phi$. Si lascia espandere la molla.

I due punti hanno versi opposti di movimento ma perché agiscono solo forze interne al sistema resta sempre vero che $P = \phi$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = \phi \Rightarrow \boxed{m_2 = m_1 \frac{v_1}{v_2}}$$

così è possibile misurare il valore di qualsiasi massa rispetto ad m campione, attraverso misure di velocità.

- Teorema del momento angolare.

determiniamo ora in corso come avviene la variazione di momento angolare totale di sistema di punti materiali.

Consideriamo L totale di un sistema di punti materiali rispetto ad O.

$$L = \Sigma_i\, r_i \times m_i v_i$$

Teniamo presente che in generale O non è un origine e può non essere fisso, e che quindi il raggio vettore r_i può avere entrambi gli estremi in movimento con velocità v_i e v_0 nel sistema di riferimento inerziale.

se ci muoviamo i punti. →

- Non agiscono forze esterne, il sistema è isolato allora L si conserva rispetto a qualsiasi polo per il quale $v_0 \times v_{CM} M = 0$; In questa situazione per cui anche $R^E = 0$ si ha pure la conservazione della quantità di moto $P = cost$ (si osservi che $R^E = 0$ non ha come conseguenza $M^E = 0$)
- Il momento delle forze esterne è nullo rispetto ad un determinato polo, ma non rispetto a qualsiasi polo, pure in presenza di forze esterne pertanto si ha conservazione di L solo rispetto a tale polo.

L'osservazione che per un sistema isolato si conserva il momento angolare conferma la validità di $\frac{dL}{dt} = M^E$ e quindi che sia $M^I = 0$. Infatti se fosse $M^I \neq 0$ anche in un sistema isolato il momento angolare potrebbe non conservarsi. Di conseguenza si ammette ammettere che le forze interne a due a due abbiano la stessa retta di azione; costituiscono cioè coppie di forze con braccio nullo.
Conservazione di L discende dalla caratteristica dello spazio di essere isotropo, cioè dal fatto che non esiste una direzione privilegiata.

- sistema di riferimento del centro di massa   108 Vol MAZZOLDI

Nello studio della dinamica dei sistemi di punti materiali è molto utile considerare il sistema di riferimento del centro di massa. Esso ha le seguenti caratteristiche:

- origine in CM.
- Gli assi mantengono sempre la stessa direzione rispetto agli assi del sistema inerziale e in particolare, possono essere assunti paralleli a questi
- Si tratta in generale di un sistema NON inerziale: in base a ciò il moto del sistema del CM è traslatorio, ma non necessariamente rettilineo e uniforme. Ciò avviene solo se $R^E = 0 \Rightarrow a_{CM} = 0$

Indichiamo con un apice le grandezze relative al CM
Si vede che per il punto P_i $\quad r_i = r_i' + r_{CM}$ si vede figura

Il momento angolare rispetto al centro di massa ha lo stesso valore sia nel sistema di riferimento inerziale che nel sistema del CM.

Il momento angolare rispetto al CM calcolato in sistema inerziale è:

$$L = \Sigma_i r_i' \times m_i v_i = \Sigma_i r_i' \times m_i (v_i' + v_{CM})$$
$$= \Sigma_i r_i' \times m_i v_i' + \Sigma_i r_i' \times m_i v_{CM} = L' + (\Sigma_i m_i r_i') \times v_{CM} = L'$$

Di conseguenza $\boxed{\frac{dL'}{dt} = M'^{(E)}}$

Il teorema del momento angolare vale anche nel sistema NON INERZIALE del CM purché come polo si assuma l'origine del CM e al calcolo contribuiscono solo le forze vere.

● Teoremi di Konig

I teoremi di Konig stabiliscono le relazioni tra i momenti angolari e le energie cinetiche di un sistema di punti materiali, valutati in un sistema di rif. inerziale (L, E_K) e nel sistema di riferimento di CM.

□ momento angolare

Assumiamo come origine il polo del sistema inerziale: momento angolare è dato da $\boxed{L = \Sigma_i r_i \times m_i v_i}$

riscrivendolo come se avessimo $r_i = r_i' + r_{CM}$ e $v_i = v_i' + v_{CM}$

$$L = \Sigma_i (r_i' + r_{CM}) \times m_i (v_i' + v_{CM}) = \Sigma_i r_i' \times m_i v_i' + \Sigma_i r_i' \times m_i v_{CM} +$$
$$+ \Sigma_i r_{CM} \times m_i v_i' + \Sigma_i r_{CM} \times m_i v_{CM})$$

Il 1° termine rappresenta $> L' = \Sigma_i r_i' \times m_i v_i'$ mom. ang. rispetto a CM

Il secondo e 3° termine fanno a $> \Sigma_i (m_i r_i') \times v_{CM}$ e $> r_{CM} \times (\Sigma_i m_i v_i')$ sono ENTRAMBI NULLI

L'ultimo: $> r_{CM} \times M v_{CM} = r_{CM} \times P$

rappresenta il mom. angolare rispetto all'origine di un punto che ha come massa la massa totale del sistema, coincide con CM e ha la stessa velocità.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 400

esaminiamo i casi di nullità: per il singolo punto materiale $L = r \times m v$ quindi $L = r \times P$ se $P = \emptyset$ allora $L = \emptyset$ ma per un sistema di punti non basta più dire $P = \emptyset$ perché il sist. può essere mediam. fermo ($v_{CR} = \emptyset$) però i singoli punti no. $\Rightarrow L \neq 0$ rispetto a L'
Viceversa $L = \emptyset$ non comporta $P = \emptyset$ ma solo $L' = -L_{CR}$.
Stesso caso per E_K, a parte che se $E_K = \emptyset$ allora $E'_K = E_{K CR} = \emptyset$ (NON PUÒ ESSERE NEGATIVA).

- teor. en. cinetica

Calcoliamo il lavoro compiuto ad un sistema di punti materiali
Come già visto nel caso di un solo punto, il lavoro per uno spostamento dr_i del punto P_i è $dW_i = F_i \cdot dr_i = F_i^E \cdot dr_i + F_i^I \cdot dr_i = dW_i^E + dW_i^I$
Sommando su tutti i punti e integrando lungo le traiettorie Γ_i percorse si ottiene il lavoro totale $\boxed{W = W^E + W^I}$
Somma del lavoro delle F^E e F^I stavolta contributo di F^I non sempre nullo: dW^I è formato da tanti termini del tipo
$F_{i,j} \cdot dr_j + F_{j,i} \cdot dr_i = F_{i,j} \cdot (dr_j - dr_i) = F_{i,j} \cdot d(r_j - r_i) = F_{i,j} \cdot dr_{i,j}$
In generale non nulli e come somma diversa da $\emptyset$. La struttura di dW^I implica che il lavoro delle forze interne è legato una variazione di distanza mutua tra i vari punti. Se questi non possono variare per esempio in un corpo rigido si avrebbe $W^{(I)} = \emptyset$
Partendo dall'espressione $dW_i = F_i \cdot dr_i$ sappiamo dal 2° capitolo che esso è uguale a $m_i v_i dv_i$, sommando su tutti i punti ed integrando
$W = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i,B}^2 - \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i,A}^2 = E_{K,B} - E_{K,A}$
dove $v_{i A}$ e $v_{i B}$ sono i moduli delle ($dW = F \cdot ds = ma \, ds = m \frac{dv}{dt} ds = m \, dv \cdot v$) velocità dell'i-esimo punto nella configurazione iniziale A e quella finale B. Mettendo insieme i risultati $\boxed{W^E + W^I = E_{K,B} - E_{K,A} = \Delta E_K}$
che è la legge del teorema dell'en. cinetica per i sistemi di punti materiali

VISTO COME EN. CINETICA DEL GRUPPO SOMMA DELLE SINGOLE DI OGNI PUNTO

Subito dopo l'urto i punti hanno v che avevano CM un istante prima.
Le variazioni di qtà moto dei singoli punti sono $m_1 v_{CM} - m_1 v_1$
e $m_2 v_{CM} - m_2 v_2$ e sono uguali ed opposte

Calcoliamo E_K prima e dopo urto $\boxed{E_{K\,IN} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = E_K' + \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{CM}^2}$
avendo applicato il teorema di König
Invece

$$\boxed{E_{K\,FIN} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{CM}^2 < E_{K,IN}}$$

In effetti dopo l'urto non c'è più moto rispetto al CM con cui i due punti vengono a coincidere. In questo tipo di urto è assorbita proprio E_K'

$$\Delta E_K = E_{K\,FIN} - E_{K\,IN} = -E_K' = \cancel{\frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{CM}^2}$$

i due corpi, durante l'urto si deformano in modo permanente e restano compenetrati. Il lavoro compiuto a spese di E_K per la deformazione non viene recuperato; forze interne NON CONSERVATIVE

- **Urto elastico**

Ora si conserva anche l'energia cinetica del sistema e quindi F^I sono conservative e i due corpi subiscono deformazioni elastiche riprendendo la configurazione iniziale subito dopo l'urto.

$$\boxed{P_{IN} = P_{FIN}} \qquad \boxed{E_{K\,IN} = E_{K\,FIN}}$$

L'urto più generale è tridimensionale e abbiamo sei incognite: le velocità delle componenti dopo l'urto, ma solo quattro equazioni.
Anche per l'urto nel piano abbiamo 4 INC e 3 equaz. quindi per risolvere un problema di urto nel piano è spesso necessario avere qualche altra informazione, sulle v dopo l'urto.
Nel caso unidimensionale c'è due equaz. e due INCOGNITE. Si possono risolvere il problema. Scriviamo sempre in questo caso.

$$\boxed{m_1 v_{1\,IN} + m_2 v_{2\,IN} = m_1 v_{1\,FIN} + m_2 v_{2\,FIN} = (m_1 + m_2) v_{CM}}$$

e ...

ritorno dei corpi alla configurazione iniziale. Se l'urto fosse elastico i due impulsi sarebbero uguali mentre per il COMPLET. ANELASTICO il 2° sarebbe $\emptyset$.

Consideriamo il sistema del CM:

Il punto con quantità di moto $P'_{1\,IN}$ nell'istante precedente all'urto vede, per effetto dell'impulso nella fase di deformazione, ridursi progressivamente a $\emptyset$ la sua quantità di moto fino ad arrestarsi. Nella fase successiva il punto va recuperando fino a $P'_{1\,FIN}$, opposto in verso e minore in modulo rispetto a $P'_{1\,IN}$. Si definisce coefficiente di restituzione il rapporto

$$\boxed{-\frac{P'_{1\,FIN}}{P'_{1\,IN}} = e = -\frac{v'_{1\,FIN}}{v'_{1\,IN}} = -\frac{v'_{2\,FIN}}{v'_{2\,IN}}}$$

Essendo $P' = \emptyset$ coeff. di restituzione è uguale anche per la 2° particella.

L'energia cinetica del sistema delle due particelle dopo l'urto è data da

$$\boxed{E'_{K\,FIN} = \frac{1}{2} m_1 v'^2_{1\,FIN} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2\,FIN} = e^2\left(\frac{1}{2} m_1 v'^2_{1\,IN} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2\,IN}\right)}$$

$\Rightarrow E'_{K\,FIN} = e^2 E'_{K\,IN}$

La variazione relativa di energia ~~ell~~ cinetica nell'urto è:

$$\delta = \frac{E'_{K\,FIN} - E'_{K\,IN}}{E'_{K,IN}} = e^2 - 1 \qquad \left(\text{un po' come } \varepsilon = \frac{\Delta e}{e} \quad \delta = \frac{\Delta E_K}{E_K}\right)$$

urto elastico $e = 1$ $\delta = \emptyset$

urto compl. anelastico $e = \emptyset$ $\delta = 1$

per Anelastico $\boxed{0 < \delta < 1}$

$\blacktriangleright$ $E'_{K\,FIN} < E'_{K\,IN}$ sempre

Per ricavare relazione tra v nel sistema inerziale scriviamo:

$$v'_{1\,FIN} = v_{1\,FIN} - v_{CM} = -e\, v'_{1\,IN} = -e(v_{1\,IN} - v_{CM})$$

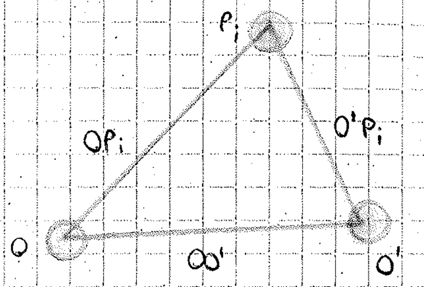
$$v'_{2\,FIN} = v_{2\,FIN} - v_{CM} = -e\, v'_{2\,IN} = -e\,(v_{2\,IN} - v_{CM})$$

$v_{1\,FIN} = v_{CM}(1+e) - e\, v_{1\,IN}$ $\qquad$ $v_{2\,FIN} = v_{CM}(1+e) - e\, v_{2\,IN}$

ma

$\Rightarrow$ $v_{CM} = \dfrac{v_{1\,IN} m_1 + v_{2\,IN} m_2}{m_1 + m_2}$ si ottiene infine

● proprietà dei sistemi di forze applicate a punti diversi.
sistema di F applicato in punti diversi dello spazio. per esempio gli n punti che costituiscono il sistema



$R = \Sigma F_i$ la risultante delle forze e con

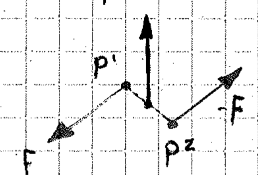
$$\boxed{M_O = \Sigma_i \, OP_i \times F_i = \Sigma_i \, r_i \times F_i}$$

momento risultante rispetto ad O.
Se cambio polo ottengo $\boxed{M_{O'} = \Sigma_i \, r_i' \times F_i}$ con $\boxed{r_i = OO' + r_i'}$

Per cui:

$$\boxed{M_O = \Sigma_i (OO' + r_i') \times F_i = OO' \times \Sigma_i F_i + \Sigma_i \, r_i' \times F_i = OO' \times R + M_{O'}}$$

Il momento dipende dal polo a meno che non sia $R = \emptyset$ (vedi parallelo sistema detto).
Il caso è il caso della coppia di forze. forze uguali e verso opposto con retta di azione differente. distanza $= b =$ braccio della coppia
$R_{TOT} = \emptyset$ ma $M_O \neq 0$ e non dipende dal polo.



▶ $M = b \cdot F$

Le forze interne ad un sistema di punti viste nei capitoli precedenti costituiscono un insieme di coppie a braccio nullo (F_{ij} e F_{ji} ; $b = \emptyset$)
Si dimostra così che $M^I = \emptyset$.
In generale dato un qualsiasi sistema di forze, i vettori R e M_O non sono ortogonali tra loro e quindi o quindi non è possibile trovare due punti O e P tali che $M_O = OP \times R$, ciò vuole dire che M_O è indipendente da R e consegue che le equazioni

$\boxed{R^E = m \, a_{cm}}$ e $\boxed{\frac{dL}{dt} = M^E}$ sono indipendenti

Questa ultima considerazione ci porta a concludere che un sistema di forze applicate in punti diversi non può in generale essere rappresentato

Il centro di gravità o baricentro $\equiv$ CM.

momento risultante delle forze è $M = OC \times mg = r_{CM} \times mg$

Si noti che il centro di forze parallele non coincide sempre con il centro di massa e ciò avviene solo se le forze parallele hanno modulo proporzionale alla massa. (come m; g appunto)

Notiamo in fine che il metodo di calcolo e il concetto stesso di centro perdono significato se la risultante delle forze è nulla; in tal caso il momento è $M_O \neq 0$.

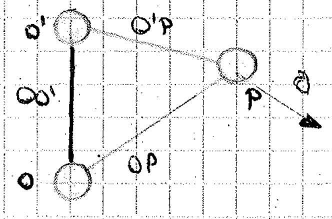
Momento assiale

Dato un vettore generico a che può essere sia una forza che una quantità di moto calcoliamo il suo momento rispetto ai poli O O'

$M_O = OP \times a$ $\quad M_{O'} = O'P \times a$

ma abbiamo dimostrato nella appendice C che $M_O = OO' \times a + M_{O'}$

Poiché risulta che il vettore $M_O - M_{O'} = OO' \times a$ risulta ortogonale a OO' e conseguentemente i momenti M_O e $M_{O'}$ devono avere lo stesso componente lungo la direzione dell'asse OO'



In conclusione se si calcola M di un vettore rispetto ai vari punti di un dato asse, al variare di O varia M, però la sua componente lungo l'asse è indipendente da dove si sceglie il polo

Massa variabile

si vedano nastro trasportatore, razzo mobile, veicolo con carburante.

qtà di moto cambia sia a causa di v che di m

$$\boxed{F = \frac{dp}{dt} = m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt}}$$

e appunto, in particolare se il moto deve avvenire a v costante, è pur sempre necessaria una forza perché varia la massa.