NUMERO: 866

DATA: 12/03/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Prone

MATERIA: Analisi Matematica I

Prof. Tilli

Analisi Matematica I

1

Proposizione: affermazione (P) che può essere vera o falsa

ex $2 \geq 1$ (V) , $5 < 4$ (F) $\geq$ = maggiore o uguale

$1 = 0,\bar{9}$ vera!

ex: $0,\bar{3} = \frac{1}{3}$

$3 \cdot 0,\bar{3} = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$

$x < 4$ non è 1 proposizione, ma è 1 affermazione

→ è 1 predicato

Predicato: Affermazione che contiene una o più variabili libere → ogni valore

$P(x)$ → predicato
$P(2)$ → proposizione

QUALIFICATORI

$\forall$ per ogni $\exists$ esiste

Quantificatore + predicato = proposizione

$P(x) =$ "$x < 4$"

"$\forall x, x < 4$" → proposizione FALSA

allora è **vera** la proposizione negata:

"Not $\forall x, x < 4$" $\Leftrightarrow$ "$\exists x \mid$ not $x < 4$"

"NOT $\forall x, P(x)$" $\Leftrightarrow$ "$\exists x \mid$ NOT $P(x)$"

"$\exists x \mid Q(x)$" $\Leftrightarrow$ "not $\forall x$ not $Q(x)$"

"not $\exists x \mid Q(x)$" $\Leftrightarrow$ "$\forall x$ not $Q(x)$"

SOTTOINSIEMI DI $\mathbb{R}$

2

x esempio: gli intervalli

$[a,b]$: intervallo CHIUSO $= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

(a,b): intervallo APERTO $= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

$[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$

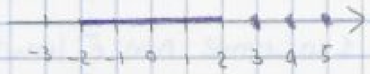
n° pari $= \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2n \text{ con } n \in \mathbb{N}\}$

successione $= \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{n} \text{ con } n \in \mathbb{N}\}$

progressioni

altro esempio: $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 2 \text{ or } x \in \mathbb{N}\}$

↳ equivalente a: $[-2,2] \cup \mathbb{N}$



- Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Un elemento $M \in A$ si dice MASSIMO di A se vale la seguente condizione: $\forall x \in A,\ x \leq M$

- Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Un numero $M \in \mathbb{R}$ si dice MAGGIORANTE di A se vale la seguente condizione: $\forall x \in A,\ x \leq M$

esempi:

$A\ [2,5]$ ha infiniti maggioranti $[5,+\infty)$ e massimo $M=5$

$A\ [2,5)$ ha infiniti maggioranti $[5,+\infty)$ ma non ha massimo

$A\ [1,+\infty)$ non ha maggioranti né massimo

ossimoro: l'insieme di tutti i maggioranti $A \subseteq \mathbb{R}$ o è vuoto oppure è 1 semiretta

- l'elemento massimo si indica: $M = \max A$

esempi: $\max [2,5] = 5$ $\max [2,5) =$ non esiste

- Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice LIMITATO SUPERIORMENTE se ammette maggiorante.

- Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Il più piccolo maggiorante di A, SE ESISTE, si chiama ESTREMO SUPERIORE e si indica $\sup A$

Esempi: $A = [2,5]$ $\max A = 5$ $\sup A = 5$

$A = [2,5)$ $\max A = \nexists$ $\sup A = 5$

esempio: $R = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, x^2+y^2=1\}$

$(1,0), (0,1), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \in R$

$R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ = esempio di Relazione tra $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}$
(rappresenta una circonferenza, ma non una funzione)

CONCETTO DI FUNZIONE

Siano A e B insiemi non vuoti. Si chiama "Funzione da A in B" la relazione R tra A e B tale che: per ogni elemento $x \in A$ esiste un unico elemento $y \in B$ tale che $(x,y) \in R$

$\forall x \in A : \exists ! \, y \in B \mid (x,y) \in R$ N.B. "$\exists !$" = "esiste ed è unico"

- Una "Funzione da A in B" è una legge che associa ad ogni elemento di A ($x \in A$) un unico elemento di B ($y \in B$)

- Se R è una funzione, il fatto che $(x,y) \in R$ si può scrivere: $y = R(x)$ o, più comunemente, $y = f(x)$

- $f: A \to B$ "f è una funzione da A in B"
  ex: $y = \ln x$ $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

- L'insieme A si chiama **DOMINIO di f** (e va dichiarato)
- L'insieme B si chiama **CODOMINIO di f** (e va dichiarato)

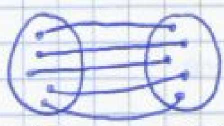
- se $C \subseteq A$ è un sottoinsieme di A, si chiama "IMMAGINE DI C TRAMITE f" il seguente insieme:
  $\{y \in B \mid \exists x \in C \mid f(x) = y\}$

  IMMAGINE = $f(\{x\}) = \{f(x)\}$

- L'insieme $f(A)$ si chiama IMMAGINE di f (si calcola)

- Se $D \subseteq B$ è un sottoinsieme di B, si chiama "CONTROIMMAGINE DI D TRAMITE f" il seguente insieme: $f^{-1}(D)$
  $\{x \in A \mid f(x) \in D\}$

- Funzione **BIETTIVA** o **BIUNIVOCA**: funzione che è sia suriettiva che iniettiva



A(x) B(f(x))

Allora è **INVERTIBILE**

(1). $g(f(x)) = x$, $\forall x \in A$ implica che f è INIETTIVA
(2). $f(g(y)) = y$, $\forall y \in B$ implica che f è SURIETTIVA

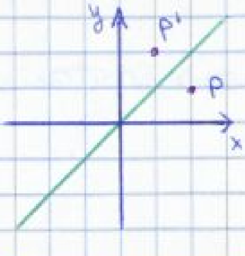
(1). se prendo $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 \neq x_2$, $g(f(x_1)) = x_1$ e $g(f(x_2)) = x_2$
(2). se prendo $y \in B$ e pongo $x = g(y)$, ottengo $f(x) = y$

- se una funzione è solo iniettiva, per renderla biettiva devo restringere il CODOMINIO
- se una funzione è solo suriettiva, per renderla biettiva devo restringere il DOMINIO

- Graficamente l'inversa è rappresentata come la SIMMETRIA (o RIFLESSIONE) rispetto alla BISETTRICE di 1° e 3° quadrante

- Il grafico di una funzione $f: A \to B$, con $A, B \in \mathbb{R}$ (funzione numerica) è il luogo dei punti tale che:

$$G(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \in A,\ y = f(x)\}$$



$P(x, f(x))$ $P'(f(x), x)$

$$G(f^{-1}) = (y, f^{-1}(y))$$

Data la funzione: $f: A \to B$

- la CONTROIMMAGINE dell'IMMAGINE di un insieme $C \subseteq A$

$f(C)$ = immagine $f^{-1}(f(C))$ = controimmagine

$\to f^{-1}(f(C)) \supseteq C$ se f è iniettiva, allora $= C$

(saper verificare) 5

$\lim_{n\to\infty} a_n = L$

$\rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 : \exists m_\varepsilon \in \mathbb{R} \mid |a_n - L| < \varepsilon \quad \forall n > m_\varepsilon$

- se $P(n)$ è un qualunque predicato, la scrittura abbreviata "$P(n)$ definitivamente" significa: "$\exists m \mid P(n)$ è vera $\forall n > m$"

$\rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 : |a_n - L| < \varepsilon$ definitivamente

Definitivamente = "da un certo punto in poi"

$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

- $\forall M \in \mathbb{R} : \exists m_M \mid a_n > M, \ \forall n > m_M$

$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

- $\forall M \in \mathbb{R} : \exists m_M \mid a_n < M, \ \forall n > m_M$

- Una successione si dice:

CRESCENTE se: $m > n \Rightarrow a_m \geq a_n$ (strettamente crescente $>$)

DECRESCENTE se: $m > n \Rightarrow a_m \leq a_n$ (strettamente decrescente $<$)

LIMITATA se: $\exists M \mid |a_n| \leq M \quad \forall n$

superiormente se: $\exists M \mid a_n \leq M \quad \forall n$

inferiormente se: $\exists M \mid a_n \geq M \quad \forall n$

MONOTONA se è sempre crescente oppure sempre decrescente

TEOREMA: Ogni successione $\{a_n\}$ monotona ha un limite ($\lim_{n\to\infty} a_n$)

- se $\{a_n\}$ è CRESCENTE $\rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = L = \sup\{a_n\}$
  - se è CRESCENTE e LIMITATA SUPERIORMENTE, L è finito (se no $L = +\infty$)
- se $\{a_n\}$ è DECRESCENTE $\rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = L = \inf\{a_n\}$
  - se è DECRESCENTE e LIMITATA INFERIORMENTE, L è finito (se no $L = -\infty$)

TEOREMA e DEFINIZIONE del numero di **Nepero "e"**

La successione $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è CRESCENTE e LIMITATA SUPERIORMENTE

$n=1$ $n=2$ $n=3$ ... $n=100$ ... → tende ad "e"
2 2,19 2,37 2,70

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

- Costante di Nepero, base dei logaritmi naturali. è un numero IRRAZIONALE (no periodicità) e TRASCENDENTALE (non è soluzione di alcuna equazione a coefficiente intero)

Ex $\sqrt{2}$ è solo irrazionale

TEOREMA dell'unicità del limite di $\{a_n\}$ P. 54

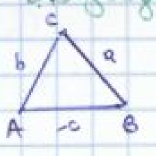
Se: $\lim_{n\to+\infty} a_n = L_1$

$\lim_{n\to+\infty} a_n = L_2$ allora $L_1 = L_2$

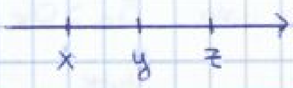
- Supponiamo che $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$
  1) $\forall \varepsilon>0, \ |L_1 - a_n| < \varepsilon$ definitivamente
  2) $\forall \varepsilon>0, \ |L_2 - a_n| < \varepsilon$ definitivamente
- se fisso un $\varepsilon>0$

$$|L_1 - L_2| = |L_1 - a_n + a_n - L_2|$$ applico la disuguaglianza Triangolare

Disuguaglianza triangolare:



vettori: $|\vec{A}-\vec{B}| \le |\vec{A}-\vec{C}| + |\vec{C}-\vec{B}|$ $(c \le b + a)$



$$|x-y| \le |x-z| + |z-y|$$

$$|L_1-L_2| \le |L_1-a_n| + |a_n-L_2| < 2\varepsilon$$
↓
essendo 1) e 2) definitivamente $< \varepsilon$

$|L_1-L_2| \le 2\varepsilon \ \ \forall\varepsilon>0$, perciò questa misura è più piccola di qualsiasi numero positivo, ma non potendo essere negativo a causa del valore assoluto risulta:

$|L_1-L_2| = 0$

Si costruisce, allora, un' estratta crescente

(2) • B ha infiniti elementi, allora definisco la sottosuccessione

$b: B \to \mathbb{R}$

$$b_n = \begin{cases} a_n \text{ se } n \in B & (\text{se } n \text{ è picco}) \\ \text{non definita se } n \notin B \end{cases}$$

b_n risulta essere decrescente

TEOREMA di BOLZANO - WEIERSTRASS

Ogni successione LIMITATA $\{a_n\}$ ammette una sottosuccessione $\{b_n\}$ che ha un LIMITE FINITO.

Dim. Se $\{b_n\}$ è una successione MONOTONA e LIMITATA allora, per definizione, b_n ha un limite finito

LIMITI DI FUNZIONI

LIMITI ALL' INFINITO

• Sia $f: A \to \mathbb{R}$, con A che contiene almeno una semiretta $(a, +\infty)$
definita almeno da un punto in avanti.

- Si dice, se $L \in \mathbb{R}$, che $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = L}$ se

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists m_\varepsilon \mid |L - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x > m_\varepsilon$$

- Si dice che $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$ se

$$\forall M, \ \exists m_M \mid f(x) > M \quad \forall x > m_M$$

- Si dice che $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty}$ se

$$\forall M, \ \exists m_M \mid f(x) < M \quad \forall x > m_M$$

- $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \; (-\infty)}$

$\forall M, \exists \delta > 0 \mid f(x) \overset{(<)}{>} M \quad \forall x \mid 0 < |x - x_0| < \delta$

$x = x_0$ è ASINTOTO VERTICALE di $f(x)$

Riassunto: 9 combinazioni totali di limiti

$\lim f(x) = L$ — $L = x_0 \in \mathbb{R}$ limite finito; $L = +\infty$, $L = -\infty$ limite infinito

$x \to x_0 \in \mathbb{R}$ lim al finito

$x \to +\infty$, $x \to -\infty$ lim all'infinito

Definizione generale

Sia $f: A \to \mathbb{R}$, con A che contiene un intorno di x_0 tranne, eventualmente, x_0.

$\left| \lim_{x \to x_0} f(x) = L \right|$ significa

$\forall I_L$ di L, $\exists I_{x_0}$ di $x_0 \mid f(x) \in I_L, \; \forall x \in I_{x_0}, \; x \neq x_0$

bisogna generalizzare la definizione di "intorno" poiché, così, esprime solo il caso di $x_0 \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$

- Si chiama "intorno di $+\infty$ $(-\infty)$" una qualunque semiretta del tipo $(m, +\infty)$ $((-\infty, M))$

$\lim_{x \to x_0^+ (x_0^-)} f(x) = L$

Si chiama "intorno destro (sinistro)" di un numero $x_0 \in \mathbb{R}$ un qualunque intervallo del tipo: $(x_0, x_0 + \delta)$ $((x_0 - \delta, x_0))$ con $\delta > 0$

LIMITE UNILATERALE da Destra o da Sinistra

$x_0 \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$ o $L = +\infty$ o $L = -\infty$

Destra: $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L^+$ Sinistra: $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L^-$

con I_{x_0} destro o sinistro

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid |f(x) - L| < \varepsilon \quad \forall x \mid$ $0 < x - x_0 < \delta$ destro; $0 < x_0 - x < \delta$ sinistro

Corollario. Se f è continua in x_0 e $f(x_0) > a$, allora $f(x) > a$ in tutto un intorno di x_0

TEOREMA DEL CONFRONTO

Se f e g sono definite almeno in un intorno di x_0, tranne eventualmente x_0 (I_{x_0}):

1. se $f(x) < g(x)$ in I_{x_0} allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x) \quad \text{| se i due limiti esistono |}$$

1. Dimostrazione: Applicare il teorema di permanenza del segno alla funzione $g(x) - f(x)$

2. Teorema dei 2 CARABINIERI:

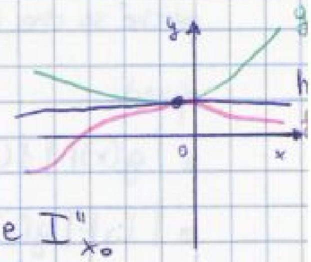
Sia $f \leq h \leq g$ in I_{x_0}

se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = L$

allora $\lim_{x \to x_0} h(x) = L$

2. Dimostrazione:

$$\forall I_L, \exists \begin{cases} I'_{x_0} \mid f \in I_L \quad \forall x \in I'_{x_0} \quad x \neq x_0 \\ I''_{x_0} \mid g \in I_L \quad \forall x \in I''_{x_0} \quad x \neq x_0 \end{cases}$$



Per h scelgo I'''_{x_0} uguale al più piccolo tra I'_{x_0} e I''_{x_0}

ALGEBRA DEI LIMITI

Se: $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = L_2$, $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ x_0 finito o infinito

- $\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = L_1 \pm L_2$

importante ⚠

DIMOSTRAZIONE Hp: $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$

Th: $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = L_1 + L_2$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists I_{x_0} \mid |f(x) + g(x) - L_1 - L_2| < \varepsilon \quad \forall x \in I_{x_0}, x \neq x_0$$

- f: $\exists I_{x_0 f} \mid |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in I_{x_0 f}, x \neq x_0$

g: $\exists I_{x_0 g} \mid |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in I_{x_0 g}, x \neq x_0$

$L_1 = \pm\infty \quad L_2 = \pm\infty$

$+\infty + \infty = +\infty$

$-\infty - \infty = -\infty$

$+\infty - \infty =$ forma indeterminata

$(-\infty)(+\infty) = -\infty$

$(+\infty)(+\infty) = (-\infty)(-\infty) = +\infty$

$\frac{+\infty}{-\infty} =$ forma indeterminata

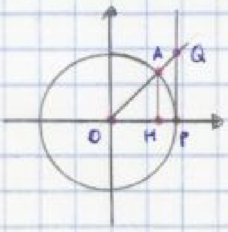
LIMITI NOTEVOLI

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

funzione pari

DIMOSTRAZIONE:

$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x \quad , x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$



$\widehat{AP} = x$, vale la disuguaglianza perché:

$a_1(OPA) = \frac{x}{2}$

$a_2(OPQ) = \frac{\operatorname{tg} x}{2}$

e a_1 è contenuta in a_2

divido per sen x

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x} \rightarrow$$

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$$

applico il teorema dei due carabinieri

$\to 1$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$\frac{1-\cos x}{2} = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)^2$

$\lim_{x \to 0} \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2} = \frac{1}{2}\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{n}{x}\right)^n = e^n$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

TEOREMI DI CONTINUITA'

TEOREMA di WEISTRASS

- Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ e f sia continua, allora f ha almeno un massimo e un minimo. $\exists x_1, x_2 \in [a,b] \mid f(x_1) = \inf_{[a,b]} f(x) = \min_{x \in [a,b]} f(x)$

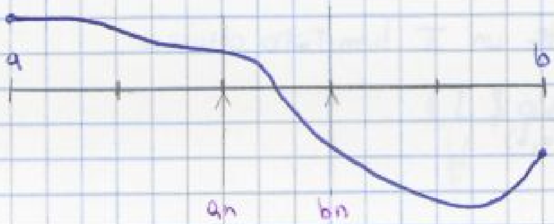
$$f(x_2) = \sup_{[a,b]} f(x) = \max_{x \in [a,b]} f(x)$$

TEOREMA DEGLI ZERI

- Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua
  - Se $f(a)>0$ e $f(b)<0$ (o viceversa) allora:
    $\exists x_0 \in [a,b]$ t.c. $f(x_0)=0$

DIMOSTRAZIONE

Divido $[a,b]$ in n sottointervalli di lunghezza $\frac{b-a}{n}$,
tra questi n sottointervalli, almeno un $[a_n, b_n]$ è t.c.
$f(a_n)>0$ e $f(b_n)<0$. Inoltre $b_n = a_n + \frac{b-a}{n}$



P.S. se $f(b_n)=0$ oppure $f(a_n)=0$,
allora $\exists f(x_0)=0$

- Suppongo che $\exists \lim_{n\to\infty} a_n$, chiamo $x_0 = \lim_{n\to\infty} a_n$, allora
  anche $x_0 = \lim_{n\to\infty} b_n$

$$f(x_0) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n) \geq 0$$

per la permanenza del segno: $f(a_n)>0$, $f(b_n)<0$

$$f(x_0) = \lim_{n\to+\infty} f(b_n) \leq 0$$

quindi $f(x_0)=0$

TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua

Allora f assume su $[a,b]$ tutti i valori compresi

1. tra $f(a)$ e $f(b)$
2. tra $\min_{[a,b]} f$ e $\max_{[a,b]} f$

DIMOSTRAZIONE

- Se $f(a)=f(b)$ è ovvio
- se $f(a) \neq f(b)$ e y è compreso tra $f(a)$ e $f(b)$
  - applico il teorema degli zeri alla funzione $g(x) = f(x) - y$
  allora $g(a)$ e $g(b)$ hanno segno opposto, allora:
  $\exists x_0 \in (a,b)$ t.c. $g(x_0)=0$, cioè $f(x_0)=y$

- $x^{\alpha} = o(x^{\beta})$ per $x \to 0^+$ è VERA per $\alpha > \beta$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^{\alpha}}{x^{\beta}} = \lim_{x \to 0^+} x^{(\alpha-\beta)} = 0$$ prevale l'esponente MINORE

- $x^{\alpha} = o(x^{\beta})$ per $x \to +\infty$ è VERA per $\alpha < \beta$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\alpha}}{x^{\beta}} = \lim_{x \to +\infty} x^{(\alpha-\beta)} = 0$$ prevale l'esponente MAGGIORE

- $x^{\alpha} = x^{\beta}$ per $x \to 0^+$, per $x \to +\infty$ $\Leftrightarrow$ $\alpha = \beta$
- $x^{\alpha} = o(e^{x})$ per $x \to +\infty$ è VERA per $\forall \alpha$
- $e^{\alpha x} = o(e^{\beta x})$ per $x \to +\infty$ è VERA per $\beta > \alpha$
- $x^{\alpha} = o(\ln x)$ per $x \to +\infty$ è VERA per $\alpha \leq 0$
- $\ln x = o(x^{\alpha})$ per $x \to +\infty$ è VERA per $\alpha > 0$

OSSERVAZIONE

$f \sim g$ per $x \to x_0$ $\Leftrightarrow$ $g \sim f$ per $x \to x_0$

$\boxed{\text{invece}}$

$$\left.\begin{array}{l} f = o(g) \text{ per } x \to x_0 \\ g = o(f) \text{ per } x \to x_0 \end{array}\right\} \text{Sono INCOMPATIBILI}$$

GENERALE

- $f \sim g$ per $x \to x_0$ Si può esprimere così:

$$\left[f = g + o(g) \text{ per } x \to x_0\right] \to \left[f - g = o(g) \text{ per } x \to x_0\right] \to$$

$$\to \left[\lim_{x \to x_0} \frac{f-g}{g} = 0\right] \to \left[\lim_{x \to 0} \left(\frac{f}{g} - 1\right) = 0\right] \Leftrightarrow \left[\lim_{x \to x_0} \frac{f}{g} = 1\right]$$

limite $x \to 0$	$\sim$	$o(\ )$
$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$	$\operatorname{sen} x \sim x$	$\operatorname{sen} x = x + o(x)$
$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$	$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$	$1-\cos x = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

5. $h \cdot o(g) = o(g \cdot h)$

- Se f è continua in x_0, allora $f(x) = f(x_0) + o(1)$ per $x \to x_0$.
  Se $f(x_0) \neq 0$, allora $f(x_0)$ è la parte principale di f

DERIVATE

- Una funzione f si dice "derivabile in $x_0 \in \mathbb{R}$" se esiste finito il limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = L$$

- L si chiama "derivata di f in x_0" e si indica $f'(x_0)$. Al variare di x_0, si ottiene una nuova funzione $f'(x)$. Il dominio di f' sono tutti i punti in cui f è derivabile

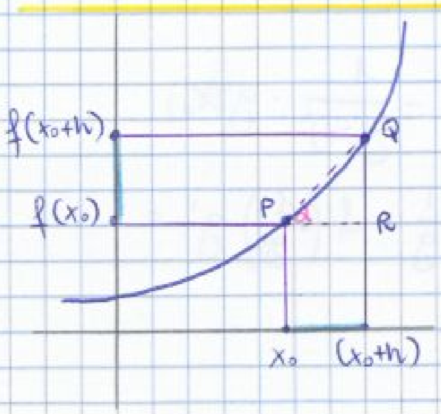
$D(e^x)$ $$\lim_{h \to 0} \frac{e^{(x_0+h)} - e^{x_0}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x_0} \cdot e^h - e^{x_0}}{h} = e^{x_0} \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

$D(\operatorname{sen} x)$ $$\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x_0+h) - \operatorname{sen} x_0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} x_0 \cos h + \cos x_0 \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x_0}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{-\operatorname{sen} x_0 \underbrace{(1 - \cos h)}_{\to 0}}{h} + \cos x_0 \underbrace{\frac{\operatorname{sen} h}{h}}_{\to 1} \right) = \cos x$$

$D(\cos x) = -\operatorname{sen} x$ $\qquad$ $D(\ln x) = \frac{1}{x}$

$D(x^n) = n x^{(n-1)}$ $\qquad$ $D(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{QR}}{\overline{PR}} = f'(x)$$

Coefficiente angolare di $\overline{PQ}$ (pendenza)

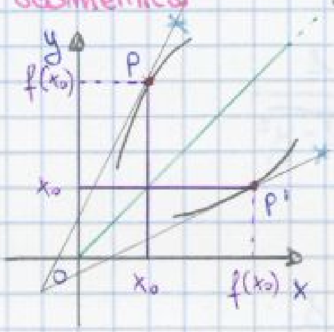
$f'(x)$ è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f in $P(x_0, f(x_0))$

• Derivata della funzione inversa

Se f è derivabile in x_0, con $f'(x_0) \neq 0$ ed è invertibile in un intorno x_0, allora

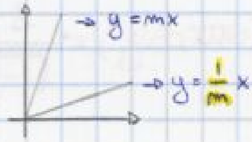
$$D(f^{-1})(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Dim. Geometrica



* rette tangenti al grafico, la retta tangente dell'inversa passa per $P'(f(x_0), x_0)$

– noi sappiamo che:



Dim. Algebrica

$$g(x) = f^{-1}(f(x)) = x$$

$$Dg(x) = Df^{-1}(f(x)) \cdot f'(x) = 1 \qquad Df^{-1}(t) = \frac{1}{Df(f^{-1}(t))} = Df(t)$$

$$\left[Df^{-1}(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \right]$$

Se $Df(x)$ è nulla $(=0)$, allora l'inversa non esiste perché si otterrebbe una retta verticale

$$D(\ln|x|) = \frac{1}{x} \qquad x \neq 0$$

Dim. $\quad f(\overset{y}{x}) = e^x \qquad Df(\overset{y}{x}) = e^x \qquad x \neq 0$

$$f^{-1}(y) = \ln y \qquad y > 0$$

$$D \ln y = \frac{1}{Dy} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$$

$$D(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

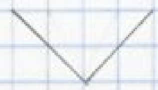
Dim. $\quad D(\operatorname{tg}(x)) = D\underbrace{\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)}_{\text{uso D della divisione}} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = L \iff f'(x_0^+) = f'(x_0^-) = L \in \mathbb{R}$

PUNTO ANGOLOSO

$f'(x_0^+)$ e $f'(x_0^-)$ esistono entrambi finiti e

$f'(x_0^+) \neq f'(x_0^-)$ ex: $y = |x|$

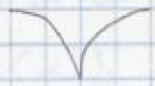


PUNTO A TANGENTE VERTICALE

$f'(x_0^+) = f'(x_0^-) = +\infty \, (-\infty)$ ex: $y = \sqrt[3]{x}$

PUNTO DI CUSPIDE

$f'(x_0^+) = +\infty \, (-\infty)$ e $f'(x_0^-) = -\infty \, (+\infty)$ ex: $y = \sqrt{|x|}$



PUNTI DI MASSIMO E DI MINIMO

- Sia $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, si dice "PUNTO DI MINIMO (MASSIMO) RELATIVO" se $\exists I_{x_0} \mid f(x_0) \leq (\geq) f(x) \ \forall x \in I_{x_0}$ $(I_{x_0} \in A)$

TEOREMA DI FERMAT

- Se $x_0 \in (a,b)$ è punto di minimo (massimo) relativo per $f(a,b) \to \mathbb{R}$, e se f è derivabile in x_0, allora $f'(x_0) = 0$
  - Condizione necessaria, ma non sufficiente (ex. punto di flesso orizz.)

Dimostrazione:

Sia $x_0 \in (a,b)$ punto di minimo relativo: $\exists I_{x_0} \mid f(x_0) \leq f(x)$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$ per la permanenza del segno

(→ ipotesi)

$$= \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$ per la permanenza del segno

(→ positivo x ipotesi)

quindi $f'(x_0)$ deve essere contemporaneamente ≥ 0 e ≤ 0, perciò $f'(x_0) = 0$

[N.B. se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, non posso usare entrambe le derivate laterali, quindi il teorema non vale]

TEOREMA DI DERIVABILITÀ in un punto di raccordo

Se f è continua in x_0 ed esistono finiti i due limiti

$\lim_{x \to x_0^-} f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x_0) = L$, allora f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = L$

(La dimostrazione deriva da Lagrange e usa il teorema dei due carabinieri)

LEGAME TRA MONOTONIA E CONCETTO DI DERIVATA

Sia f definita su un intervallo I, allora:

1. f è crescente su $I \iff f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$

Dim $\Rightarrow$

Se f è crescente, allora $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ per la permanenza del segno

Dim $\Leftarrow$

Se $f'(x_0) \geq 0$, con $x_1 < x_2$, applico Lagrange in $[x_1, x_2]$

$\exists x_0 \in (x_1, x_2) \mid f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$ quindi, essendo per ipotesi $x_2 > x_1$, allora $f(x_2) > f(x_1)$, perciò la funzione è crescente!

2. Se $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$ è strettamente crescente

Dim

Se $f'(x) > 0$, ripeto il ragionamento della Dim $\Leftarrow$ e trovo

$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_0) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$: strettamente crescente

3. Se f è strettamente crescente $\Rightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$ e $\exists x \mid f'(x) > 0$ strett. e $f'=0$: es. flesso orizzontale

Teorema

Se $f : I \to \mathbb{R}$ allora:

1. se f è costante su $I \Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in I$
2. se $f'(x) = 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$ è costante su I

N.B. non vale se I non è un intervallo

Applico Lagrange in $[a, b] \subseteq I \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0) = 0$

(se esiste)

- f è STRETTAMENTE CONVESSA se vale $\Leftrightarrow f'' > 0$
  CONCAVA $f'' < 0$

- se f è CONVESSA, il grafico di f è al di sopra di ogni retta tangente al grafico
- se f è CONCAVA, il grafico di f è al di sotto di ogni retta tangente al grafico.

DERIVATE SUCCESSIVE

- $f: I \to \mathbb{R}$ è DERIVABILE n VOLTE se f è derivabile, f' è derivabile con $f'' = (f')'$, f'' è derivabile con $f''' = (f'')'$, ..., $f^{(n-1)}$ è derivabile con $f^{n} = (f^{(n-1)})'$

- $C^n(I)$ indica la famiglia di tutte le $f: I \to \mathbb{R}$ derivabili n volte con tutte le derivate continue su I ($f', f'', f''', ..., f^{(n)}$)

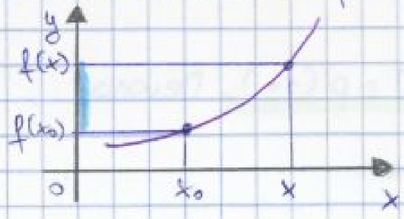
  Ex. $f \in C^2((a,b)) \Leftrightarrow f$ è derivabile su (a,b) con f' e f'' continue

  $C^\infty(I) \Leftrightarrow f$ è derivabile infinite volte su I

  Se $f^{(n)}$ (la più alta) è continua, allora tutte le derivate prima sono continue.

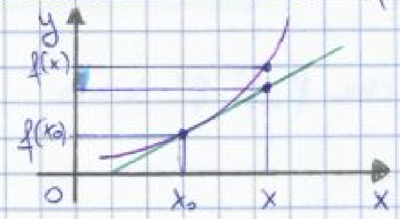
SVILUPPI DI TAYLOR

(1) f continua in $x_0 \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) + \underbrace{o(1)}_{\text{Errore}}$ per $x \to x_0$



approssimazione di f con una funzione costante $y = f(x_0)$

(2) f derivabile in $x_0 \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \underbrace{o(x - x_0)}_{\text{Errore}}$ per $x \to x_0$



approssimazione di f con una retta $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

- in (2) l'errore è molto più piccolo, così come l'approssimazione. Inoltre l'errore è più piccolo della distanza tra x e x_0

perciò $f(x) = p(x) + o((x-x_0)^2)$ per $x \to x_0$

EQUIVALE AL SISTEMA

$$\begin{cases} p(x_0) = f(x_0) \\ p'(x_0) = f'(x_0) \\ p''(x_0) = f''(x_0) \end{cases}$$

Si può scrivere $p(x)$ come $p(x) = \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$

poiché:

se $x \to x_0$ $\quad p(x_0) = f(x_0)$

se $x \to x_0$ e derivo una volta $\quad p'(x_0) = f'(x_0) \quad p'(x) = \frac{f''(x)}{2} \cdot 2(x-x_0) + f'(x_0)$

se $x \to x_0$ e derivo due volte $\quad p''(x_0) = f''(x_0)$

- perciò se f è derivabile 2 volte: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2)$ per $x \to x_0$

- all'aumentare della derivata $f^{(n)}$, l'errore diventa sempre più trascurabile
  (N.B. la derivata di $f^{(n)}$ si divide per $n!$)

FORMULA DI TAYLOR

- Sia $f \in C^n(I)$, $x_0 \in I$ allora:

$$f(x) = \overbrace{\underbrace{P_n(x, x_0)}_{\text{polinomio di Taylor di grado } n} + \underbrace{E_n(x-x_0)}_{\text{errore di approssimazione}}}^{\text{Sviluppo di Taylor}}$$

x_0 = centro dello sviluppo

$$P(x,x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''}{3!}(x-x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$E_n(x,x_0) = o((x-x_0)^n)$ per $x \to x_0$

$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \iff \operatorname{sen} x = x + o(x)$ per $x \to 0$

in realtà $\operatorname{sen} x = x + o(x^2)$ per $x \to 0$

f DISPARI $\to$ f' PARI $\to$ f'' DISPARI $\to$ ...

ogni f dispari verifica $f(0) = f''(0) = f^{IV}(0) = 0$.
quindi il $P_n(x,0)$ di f ha SOLTANTO potenze dispari.

$$P_K(x,0) = \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

COS X $\quad f \in C^\infty(\mathbb{R}) \quad x_0 = 0$

$f = \cos x \quad f(0) = 1$
$f' = -\operatorname{sen} x \quad f'(0) = 0$
$f'' = -\cos x \quad f''(0) = -1$
$f''' = \operatorname{sen} x \quad f'''(0) = 0$
$f^{IV} = \cos x \quad f^{IV}(0) = 1$

$$P_m(x,0) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$E_m(x,0) = o(x^{2n+1}) \qquad m = 2n+2$$

$$P_K(x,0) = \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$\boxed{y = \frac{1}{1-x}} \quad f \in C^\infty((-\infty, 1))$

$f = (1-x)^{-1} \quad f(0) = 1$
$f' = (1-x)^{-2} \quad f'(0) = 1$
$f'' = 2(1-x)^{-3} \quad f''(0) = 2$
$f''' = 3!(1-x)^{-4} \quad f'''(0) = 3!$
$f^{(n)} = n!(1-x)^{-n-1} \quad f^{(n)}(0) = n!$

$P_n(x,0) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n)$
per $x \to 0$

$\left(y = \frac{1}{1+x}\right)$
$P_n(x,0) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

$$f(x) = \frac{a + bx + cx^2 + \ldots + o(x^n)}{A + Bx + Cx^2 + \ldots + o(x^n)} =$$

$A \neq 0$, poiché $A = h(x)$ e $x = x_0 = 0$

$$= \frac{a + bx + cx^2 + \ldots + o(x^n)}{A} \cdot \frac{1}{1 + \underbrace{\frac{B}{A}x + \frac{C}{A}x^2 + \ldots + o(x^n)}_{t}} =$$

$$= \frac{a + bx + cx^2 + \ldots + o(x^n)}{A} \cdot \left(1 - t + t^2 - t^3 + \ldots + o(t^n)\right)$$

$$* \quad \frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots + (-1)^n t^n + o(t^n)$$

$\ln(1+x)$ $\quad f(0) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{1+x}$ $\quad f'(0) = 1$ $\qquad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$

si comporta come $\frac{1}{1+x}$

però $\frac{1}{1+t} = D(\ln(x+1))$

quindi $P'_{n+1}(x)$ è il polinomio di Taylor di grado n relativo a $f'(x)$

- la parte principale di $f(x)$, con lo sviluppo di Taylor, per $x \to x_0$, rispetto al campione $(x - x_0)$, è $f(x_0)$ se $f(x_0) \neq 0$; è $f'(x_0)(x - x_0)$ se $\begin{cases} f(x_0) = 0 \\ f'(x_0)(x - x_0) \neq 0 \end{cases}$; - - - .

  Perciò la parte principale è sempre il primo termine non nullo dello sviluppo

- Se tutti i coefficienti del polinomio sono uguali a zero, allora la parte principale non è determinabile

c) Se so che $f'(x_0)=0$ e $f''(x_0)=0$, allora non posso sapere se x_0 è punto di massimo, di minimo o di flesso

- Se abbiamo uno sviluppo di Taylor di ordine n

$$f(x) = A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)^2 + \dots + A_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

allora possiamo ricavare i valori di f nel punto x_0 e di tutte le sue derivate fino all'ordine n, essendo:

$$A_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \rightarrow f^{(n)}(x_0) = A_n \cdot n!$$

Dallo sviluppo: x_0 è punto critico $\Leftrightarrow A' = 0$

se $A'=0$ e $A''>0 \Rightarrow x_0$ è minimo locale stretto

se $A'=0$ e $A''<0 \Rightarrow x_0$ è massimo locale stretto

se $A'>0 \Rightarrow f$ è strettamente crescente in I_{x_0}

se $A'<0 \Rightarrow f$ è strettamente decrescente in I_{x_0}

se $A''>0 \Rightarrow f$ è strettamente convessa in I_{x_0}

se $A''<0 \Rightarrow f$ è strettamente concava in I_{x_0}

Sia x_0 punto critico per $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, con f derivabile almeno n volte, siano $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ e $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ allora:

1. Se n è pari e $f^{(n)}(x_0)>0 \rightarrow x_0$ è punto di minimo relativo
2. Se n è pari e $f^{(n)}(x_0)<0 \rightarrow x_0$ è punto di massimo relativo
3. Se n è dispari $\rightarrow x_0$ è punto di flesso

Lo sviluppo di Taylor diventa:

$$y = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

quindi, se $x \rightarrow x_0$, allora $o((x-x_0)^n)$ è trascurabile rispetto a $(x-x_0)^n$

Integrali principali:

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \qquad \text{per } \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c \qquad \text{per } \alpha = -1$$

$$\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + c \qquad \int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c \qquad \int$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + c \quad x>0 \qquad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen} x + c \;\; (-1,1) \qquad \int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + c \;\; (-1,1)$$

Sostituzione

$$\int f(g(x)) \, dx \qquad \text{pongo } y = g(x)$$

con g invertibile e derivabile con $g' \neq 0$

1) sostituire x con $g^{-1}(y)$
2) sostituire dx con $g^{-1}(y)' \, dy$

Primitive di funzioni razionali

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx \qquad p(x), q(x) \text{ polinomi}$$

$$\int \frac{p(x)}{Ax^2 + Bx + C} dx$$

1. Se grado $\deg(p) \geq 2$, svolgo la divisione tra polinomi ottenendo:
polinomio di grado $(n-2)$ + resto $\dfrac{\text{polinomio con deg} \leq 1}{Ax^2 + Bx + C}$

da qui 2 casi ...

Teorema: definizione dell'integrale

continue a tratti: continue o che presentano diversi punti di discontinuità con salto.

Sia f continua a tratti su $[a, b]$, allora ESISTE FINITO il limite:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(a + j\,\frac{b-a}{n}\right) \frac{b-a}{n} = L$$

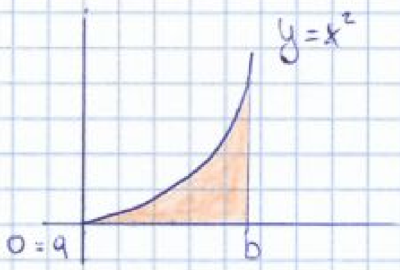
L si chiama "integrale di f su $[a, b]$" e si indica:

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad a, b \text{: estremi di integrazione.}$$

Rappresenta l'area (con segno!) della figura delimitata da:

$x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = f(x)$

Archimede



essendo $a = 0$

$$\frac{b}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{j^2 b^2}{n^2} = \frac{b^3}{n^3} \sum_{j=0}^{n-1} j^2$$

- la somma dei quadrati fino a $(n-1)^2$ $(1, 4, 9, 16, \dots, (n-1)^2)$ è circa $\sim \frac{(n-1)^2 (n-1)}{3} \sim$ area piramide

- Il numero $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$ è il VALOR MEDIO di $f(x)$ su $[a, b]$

Proprietà dell'integrale

(con f e g continue a tratti

1. $(b-a) \inf_{[a,b]} f \le \int_a^b f(x)\,dx \le (b-a) \sup_{[a,b]} f$

$$S_n = \sum_{j=0}^{n-1} f\left(a + j\,\frac{b-a}{n}\right) \frac{b-a}{n}$$

$$(b-a) \inf_{[a,b]} f \le S_n \le (b-a) \sup_{[a,b]} f$$

Teorema: Teorema fondamentale del calcolo

Se f è continua su I

1) Fissata $a \in I$, la funzione $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ $(x \in I)$ è derivabile su I, e

$F'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$. Cioè F è una primitiva di f su I, quella che verifica $F(a) = 0$

Dim. prendo $x \in I$ con $x+h \in I$, $\frac{F(x+h) - F(x)}{h} =$

$$= \frac{1}{h}\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \frac{1}{h}\int_a^x f(t)\,dt =$$

(voglio verificare che sia derivabile)

$$= \frac{1}{h}\left[\int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right] =$$

$$= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = \text{media integrale di } f \text{ su } (x, x+h)$$

applico il teorema della media

- $f(C_h)$ con C_h intermedio tra x e $x+h$
- Quindi $\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(C_h) = f(x)$

perché $f(x)$ è continua in x e $C_h \to x$ quando $h \to 0$

2) Se $G(x)$ è una qualunque primitiva di f su I, allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) \qquad \forall a, b \in I$$

Dim. Segue da 1 così:

Se $G(x)$ è una primitiva di f su I, allora sappiamo che $G(x) = F(x) + c$, per un'opportuna c. Allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) = F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$$

- Se il limite esiste, ma vale $\pm\infty$, l'integrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ si dice **DIVERGENTE** a $\pm\infty$
- Se il limite non esiste, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ si dice **INDETERMINATO**

- $$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{c\to-\infty} \int_c^b f(x)\,dx$$

2. Def. $[a,b]$ intervallo $(a,b \in \mathbb{R})$
f continua a tratti su $[c,b]$, per ogni $c>a$, ma <u>non</u> continua a tratti su $[a,b]$. Allora si definisce
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$$

INTEGRALI IMPROPRI FONDAMENTALI

1. $$\int_1^{+\infty} x^\alpha\,dx$$

$\alpha = -1$
$$\int_1^{+\infty} x^{-1}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \left(\ln x \Big|_1^c \right) = \lim_{c\to+\infty} (\ln c - \ln 1) = +\infty \quad \text{DIVERGENTE}$$

$\alpha < 0$, $\alpha \neq -1$
$$\int_1^{+\infty} x^\alpha\,dx = \lim_{c\to+\infty} \left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_1^c \right) = \lim_{c\to+\infty} \left(\frac{c^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} \right)$$

se $\alpha > -1$: $+\infty$ DIVERGENTE

se $\alpha < -1$: $-\frac{1}{\alpha+1}$ CONVERGENTE

Perciò: $\int_1^{+\infty} x^\alpha\,dx$ CONVERGENTE se $\alpha < -1$
DIVERGENTE se $\alpha \geq -1$

In generale $\int_a^{+\infty} x^\alpha\,dx$ ($a>0$):
- CONVERGENTE $\alpha < -1$: $\boxed{-\frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1}}$
- DIVERGENTE $\alpha \geq -1$ a $+\infty$

2) Se $\int_a^b |f(x)|\,dx$ è convergente, allora lo è anche $\int_a^b f(x)\,dx$

3) Teorema del confronto

Se $0 \leq f(x) \leq g(x)$, allora se:

- $\int_a^b g(x)\,dx$ converge $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ converge
- $\int_a^b g(x)\,dx$ diverge $\Rightarrow$ non so nulla di $f(x)$
- $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge $\Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx$ diverge
- $\int_a^b f(x)\,dx$ converge $\Rightarrow$ non so nulla di $g(x)$

4) Teorema del confronto asintotico

Se $f, g \geq 0$,

- Se $f = o(g)$ per $x \to +\infty$ allora $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge

5) Se $f, g > 0$,

- Se $f \sim g$ per $x \to +\infty$ allora $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ e $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ hanno lo stesso comportamento

cioè sono entrambi o convergenti o divergenti

Dati $u = (a, b)$, $v = (c, d)$, $n \in \mathbb{R}$ $\quad u, v \in \mathbb{C}$

SOMMA $\quad u \pm v = (a \pm c, b \pm d)$ regola parallelogramma

PRODOTTO $\quad u \cdot v = (ac - bd, ad + bc)$ n.b. $v \cdot u = u \cdot v$

$$u \cdot n = (na, nb)$$

- I numeri complessi del tipo $(x, 0)$ sono numeri reali (caso specifico)
- I numeri complessi del tipo $(0, y)$ sono NUMERI IMMAGINARI

Il numero $(0, 1)$ si chiama UNITA' IMMAGINARIA e si indica con $i = (0, 1)$

- Se z è immaginario, cioè se $z = (0, y)$, allora

$$z^2 = (0, y) \cdot (0, y) = (-y^2, 0), \quad \text{Reale negativo}$$

- Zero Complesso $(0, 0)$

- Se $u = (a, b) \neq (0, 0)$, allora esiste il suo reciproco, cioè un $v \in \mathbb{C}$ t.c. $v \cdot u = 1 = (1, 0)$

  - Infatti $\quad v = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right) = \frac{1}{a^2+b^2} (a, -b)$

$$u \cdot v = \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}, \frac{-ab}{a^2+b^2} + \frac{ab}{a^2+b^2} \right) = (1, 0)$$

QUOZIENTE

$$\frac{u}{v} = \frac{(a,b)}{(c,d)} = (a, b) \cdot (c, d)^{-1} = (a, b) \left(\frac{c}{c^2+d^2}, \frac{-d}{c^2+d^2} \right)$$

NB $\quad z = (x, y) = x + iy$

SIGNIFICATO GEOMETRICO del PRODOTTO

$u = (a + ib)$

$v = (c + id)$

$u \cdot v = ac - bd + i(ad + bc)$

- $u = R\cos\alpha + iR\,\text{sen}\,\alpha \qquad R = |u| \qquad \alpha \in \arg(u)$
- $v = r\cos\beta + ir\,\text{sen}\,\beta \qquad r = |v| \qquad \beta \in \arg(v)$

$u \cdot v = (R\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha R)(r\cos\beta + ir\,\text{sen}\,\beta) =$

$= rR\cos\alpha\cos\beta + iRr\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta + iRr\,\text{sen}\,\alpha\cos\beta + i^2 rR\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta =$

$= irR(\text{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta) + rR(\cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta)$

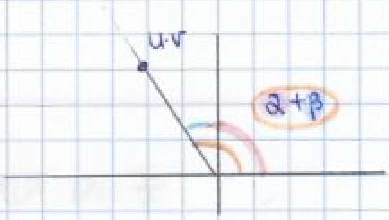
$= rR(\cos(\alpha+\beta) + i\,\text{sen}(\alpha+\beta))$

quindi $|u \cdot v| = Rr = |u| \cdot |v|$

modulo del prodotto = prodotto dei moduli

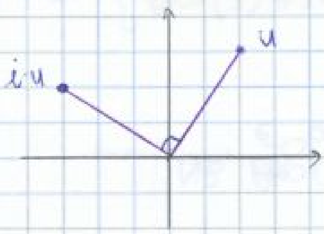
$\arg(u \cdot v) = (\alpha + \beta)$

gli argomenti si sommano tra loro



$i \cdot u \qquad \text{Arg}(i) = \frac{\pi}{2}$

$|i| = 1$



$i \cdot u$ si ottiene ruotando di $\frac{\pi}{2}$ ↺ u

$\text{Arg}(u \cdot v) \in \arg(u \cdot v)$

$\arg(u^n) = n\arg(u)$

ESPONENZIALE DI UN NUMERO COMPLESSO

se $z = x + iy$

$e^z = e^{x+iy} = e^x\cos y + ie^x\,\text{sen}\,y = e^x(\cos y + i\,\text{sen}\,y)$

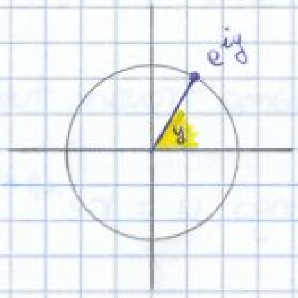
$|e^{x+iy}| = e^x$

$\arg(e^{x+iy}) = y$

e^z è periodica di $2\pi i$

in particolare, se $x = 0$, $\operatorname{Arg}|e^z| = y$

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y \qquad |e^{iy}| = 1$$



Sviluppo:

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \frac{(iy)^6}{6!}$$

$$e^{iy} = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!}\right)$$

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$$

l'esponenziale complesso permette una scrittura sintetica della forma polare di un numero

$$u = R\cos\alpha + iR\operatorname{sen}\alpha = R(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha) = Re^{i\alpha}$$

$$R = |u|, \ \alpha \in \arg(u)$$

- per le potenze di u

$$u^n = R^n e^{in\alpha}$$

De Moivre

RADICE N-ESIMA

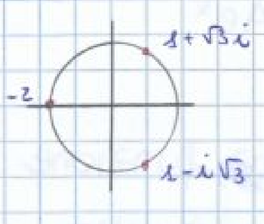
Teorema: ogni numero $z = Re^{i\alpha}$ con $R > 0$ ha n radici n-esime DISTINTE

Esse sono
$$u_k = R^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$$

per $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

le radici n-esime di z sono i vertici di un poligono regolare di n lati e raggio $|z|^{\frac{1}{n}}$

- Radice cubica di -8 $\sqrt[3]{-8}$ raggio $= |-8|^{\frac{1}{3}} = 2$



TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

ogni polinomio di grado n, $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$, a coefficienti complessi ha ESATTAMENTE n radici complesse (contando la molteplicità); ovvero esistono n numeri $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tali che $p(x) = a_n (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$ - prodotto di polinomi -

- In particolare, se $p(x)$ ha coefficienti reali, ha n radici complesse; ma quelle NON REALI sono coniugate a 2 a 2

MOTIVO: se $p(x)$ ha coefficienti reali, $p(\bar{x}) = a_0 + a_1\bar{x} + a_2 \bar{x}^2 + \dots + a_n \bar{x}^n$

$p(\bar{x}) = \overline{p(x)}$, perché $(\overline{u \cdot v}) = \bar{u} \cdot \bar{v}$

Se $p(x) = 0$, allora $p(\bar{x}) = \overline{p(x)} = \bar{0} = 0$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

- Un'equazione differenziale di ordine n è una relazione che coinvolge una funzione incognita $y(x)$ assieme alle sue derivate fino all'ordine n.

ex. $y' + 2y^2 = 5$ eq. del 1° ordine

$y'' + y' + 3y = 0$ eq. del 2° ordine $\quad y = y(x)$

ex. $y' = 0$ soluzioni: $y(x) = $ costante

$y' = y$ soluzione: $y(x) = e^x, e^{x+c}, 0, Ae^x$

- Dimostro che le soluzioni di $y' = y$ sono tutte del tipo $y(x) = Ae^x$

$y'(x) = y(x) \sim y'(x) - y(x) = 0$

moltiplico tutto per e^{-x}: $e^{-x} y'(x) - e^{-x} y(x) = 0$

EQUAZIONI LINEARI DEL PRIMO ORDINE

Sono equazioni del tipo $y'(x)+a(x)\,y(x)=b(x)$

dove $a(x)$ e $b(x)$ sono due funzioni date e continue su I

ex. $y'(x)+\operatorname{sen}x\,y(x)=e^x$

Teorema ogni soluzione su I ha la seguente forma:

$$y(x)=e^{-A(x)}\left(\int e^{A(x)}\,b(x)\,dx+c\right)$$

dove c è una costante arbitraria e $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$ su I

Dimostrazione

Sia $A(x)$ una primitiva di $a(x)$ su I, cioè $A'(x)=a(x)$

moltiplico l'equazione per $e^{A(x)}$ e trovo

$$e^{A(x)}y'(x)+a(x)e^{A(x)}y(x)=e^{A(x)}b(x)\;\rightarrow$$

$$\rightarrow\;\left(e^{A(x)}\cdot y(x)\right)'=e^{A(x)}b(x)\;\rightarrow$$

$$\rightarrow\;e^{A(x)}y(x)=\int e^{A(x)}b(x)\,dx+c$$

$$y(x)=e^{-A(x)}\left(\int e^{A(x)}b(x)\,dx+c\right)$$

Ex $y'(x)-2y(x)=x$ $\qquad y'(x)=+b(x)+a(x)\,y(x)$

$a(x)=+2 \qquad A(x)=2x$

$b(x)=+x$

$$y(x)=e^{2x}\left(\int e^{-2x}\,x\,dx+c\right)$$

Sia F una primitiva di $\frac{1}{f(t)}$ e G una primitiva di $g(x)$, ovvero:

$$F'(t) = \frac{1}{f(t)} \quad e \quad G'(x) = g(x)$$

perciò l'equazione diventa: $F'(y(x)) = G'(x)$, quindi sono uguali a meno di una costante: $F(y(x)) = G(x) + c$

ricavando $y(x)$: $y(x) = F^{-1}(G(x)+c)$

posso farlo poiché F' non si annulla mai perciò F risulta strettamente monotona e quindi invertibile

ex. $y' = y^2 x$ $\quad f(y) = y^2 \quad g(x) = x$

① soluz. costanti: $y^2 = 0 \quad y = 0$

② soluz. non costanti:

$$F(t) = \int \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t}$$
$$G(x) = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$$

$$F(y) = G(x) + c \rightarrow -\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + c \rightarrow y = -\frac{1}{\frac{x^2}{2}+c}$$

③ Soluz tot: $y(x) = 0$, $y(x) = -\frac{1}{\frac{x^2}{2}+c}$ $\forall c \in \mathbb{R}$ (infinite)

PROBLEMA DI CAUCHY

per 1 equazione del 1° ordine. È un sistema di:

$$\begin{cases} \text{Equaz. differenziale} \\ \text{Condizione iniziale} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

- Si utilizza per isolare una o più soluzioni

risolvere questo sistema permette di trovare un intervallo I e una funzione $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ che risolve l'equazione differenziale su I e verifichi $y(x_0) = y_0$ (ovviamente dev'essere $x_0 \in I$)

ex. $y'' - y = 0$ $\quad a = 0$, $b = -1$, $f(x) = 0$

$y(x) = Ae^{x} + Be^{-x}$ è soluzione su $\mathbb{R}$ per $\forall A, B \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} y'' - y = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} A - B = 0 \\ A + B = 2 \end{cases}$$

$y(x) = Ae^{x} + (2-A)e^{-x}$, risolve per $\forall A$

Tecnica risolutiva di $y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x)$

- come trovare le soluzioni nel caso omogeneo

$$y'' + ay' + by = 0$$

- Cerco soluzioni del tipo $y = e^{nx}$

Sostituisco nell'equazione e trovo:

$n^2 e^{nx} + a n e^{nx} + b e^{nx} = 0 \rightarrow \cancel{e^{nx}}(n^2 + an + b) = 0$

perciò $y = e^{nx}$ risolve l'equaz. diff. $\Leftrightarrow$ n risolve l'equaz. di 2° grado:

$n^2 + an + b = 0$ $\qquad n = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$ $\qquad$ trovo n_+ e n_-

Distinguo 3 casi:

1. $\Delta > 0$

n_+ e n_- soluzioni reali e distinte

Allora la soluzione generale dell'equaz. è data da

$$y(x) = Ae^{n_+ x} + Be^{n_- x}$$ al variare di A, B in $\mathbb{R}$

Ex. $y'' - y = 0$ $\qquad y'' - 5y' + 6y = 0$

$n^2 - 5n + 6 = 0$ $\qquad \Delta = 1$ $\qquad n \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$ $\qquad y = Ae^{3x} + Be^{2x}$

EQUAZIONI DEL 2° ORDINE NON OMOGENEE

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

come trovare le soluzioni: "trovata una, trovate tutte"

- se trovo una soluzione $y_p(x)$, allora la soluzione generale è data da

$$y(x) = y_p(x) + y_0(x)$$

dove $y_0(x)$ è la soluzione generale dell'equazione omogenea associata:
$y'' + ay' + by = 0$

Dim.

Se $y(x)$ è una soluzione della non omogenea, allora se pongo $y_0(x) = y(x) - y_p(x)$; la $y_0(x)$ risolve l'equazione omogenea $y'' + ay' + by$

$$y'' - y''_p + ay' - ay_p' + by - by_p = f(x) - f(x) = 0$$

perciò $y(x) = \underbrace{y_p(x)}_{\text{soluz delle non omogenea}} + \underbrace{y_0(x)}_{\text{soluz delle omogenea}}$

Come trovare $y_p(x)$: - dipende da $f(x)$ -

- se $f(x) = p(x)e^{nx}$, dove $p(x)$ è un polinomio di grado $m \geq 0$,

1 e $n \in \mathbb{R}$, allora si può trovare $y_p(x)$ del tipo

$y_p(x) = x^c \cdot q(x) \cdot e^{nx}$ dove $q(x)$ è un polinomio, da determinare, di grado m e c:

$$c = \begin{cases} 0 \text{ se } n \text{ non è radice di } n^2 + an + b = 0 \\ 1 \text{ se } n \text{ è radice di } n^2 + an + b = 0 \text{ con molteplicità } 1 \\ 2 \text{ se } n = n_+ = n_- \text{ è radice doppia di } n^2 + an + b = 0 \end{cases}$$

2 • Se $f(x) = p(x)e^{nx}\begin{cases} \operatorname{sen} wx \\ \cos wx \end{cases}$ dove $p(x)$ è un polinomio di grado $m \geq 0$, e $n, w \in \mathbb{R}$, allora si può trovare $y_p(x)$ del tipo

$$y_p(x) = x^c\, q(x)\, e^{nx}\,[A \operatorname{sen} wx + B\cos wx]$$

dove $q(x)$ è un polinomio da determinare di grado m, e c:

$$c = \begin{cases} 0 \text{ se } n + iw \text{ non è radice di } n^2 + an + b = 0 \\ 1 \text{ se } n \pm iw \text{ sono le due radici complesse di } n^2 + an + b = 0 \end{cases}$$

EX. $y'' + y' - 6y = \operatorname{sen} 4x$

1. omogeneo, $y_o = Ae^{2x} + Be^{-3x}$ $\quad n_1 = 2 \quad n_2 = -3$

2. $y_p(x) = x^c\, q(x)\, e^{nx}\,[A \operatorname{sen} wx + B\cos wx]$

$n = 0 \quad c = 0 \quad p(x) = 1 \quad w = 4$

$y_p(x) = C\,[A \operatorname{sen} 4x + B\cos 4x] = A \operatorname{sen} 4x + B\cos 4x$ (inglobo la costante C)

$y'' + y' - 6y = \operatorname{sen} 4x \rightarrow -16A \operatorname{sen} 4x - 16B\cos 4x + 4A\cos 4x - 4B \operatorname{sen} 4x - 6A \operatorname{sen} 4x +$
$- 6B\cos 4x = \operatorname{sen} 4x \rightarrow$

$\rightarrow \cos 4x\,(4A - 16B - 6B) + \operatorname{sen} 4x\,(-16A - 4B - 6A) = \operatorname{sen} 4x$

$$\begin{cases} -22A - 4B = 1 \\ 4A - 22B = 0 \end{cases}$$