NUMERO: 864

DATA: 12/03/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Giunto

MATERIA: Analisi Matematica II + Eserc.

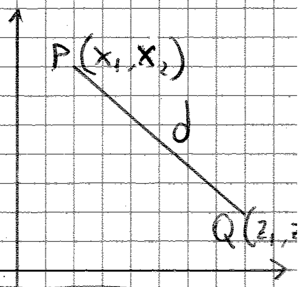
Prof. Mazzi

03\10

Topologia dello spazio

$\mathbb{R}^n = (x_1, \dots, x_n) \quad x_i \in \mathbb{R}$

distanza in $\mathbb{R}^2$: $d(P,Q) = \sqrt{(z_1 - x_1)^2 + (z_2 - x_2)^2}$



distanza euclidea in $\mathbb{R}^n$:

$P = (x_1, \dots, x_n) \quad Q = (z_1, \dots, z_n) \quad d(P,Q) = \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + \dots + (x_n - z_n)^2}$

proprietà:

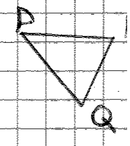
1- $d(P,Q) \geq 0$

$d(P,Q) = 0 \iff P \equiv Q$

2- $d(P,Q) = d(Q,P)$ simmetria

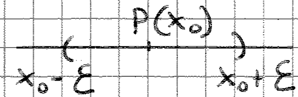
3- $\forall P,Q,R \in \mathbb{R}^n$ simmetria triangolare

$d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q)$



$\mathbb{R}^n$ è uno spazio metrico $\to$ perché al suo interno esiste una definizione di distanza

Intorno:



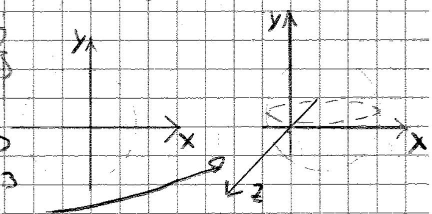
$I = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : d(x, x_0) < \varepsilon\}$

$P \in \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0$ Intorno (sferico) di P di raggio ε

$B_\varepsilon(P) = B(P; \varepsilon) = \{X \in \mathbb{R}^n : d(X,P) < \varepsilon\}$

disco in $\mathbb{R}^2$ $\longrightarrow$

"palla" o sfera in $\mathbb{R}^3$



$\boxed{\text{DEF}}$ $A \subseteq \mathbb{R}^n$. $P \in A$ è interno ad A se $\exists B_\varepsilon(P) : B_\varepsilon(P) \subseteq A$

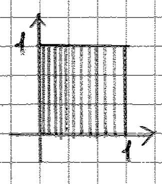
$\boxed{\text{DEF}}$ $P \in \mathbb{R}^n$ è esterno ad A se $\exists B_\varepsilon(P) : B_\varepsilon(P) \subseteq (\mathbb{R}^n \setminus A)$

$\boxed{\text{DEF}}$ $P \in \mathbb{R}^n$ è un punto di frontiera di A se

$\forall B_\varepsilon(P) : B_\varepsilon(P) \cap A \neq \emptyset \ \wedge \ B_\varepsilon(P) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$

EX.

1- $A = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1 \ \wedge \ 0 \leq y \leq 1 \ \wedge \ x \in \mathbb{Q}\}$



$\forall \varepsilon \quad B_\varepsilon(P) \cap A \neq \emptyset \ \wedge \ B_\varepsilon(P) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ A non ha punti interni

Tutti i punti di A sono punti di frontiera

$\forall (x,y) : 0 \leq x \leq 1 \ \wedge \ 0 \leq y \leq 1$ sono punti di frontiera perché i loro intorni intersecano sia A che il suo complementare

DEF. A è compatto se è chiuso e limitato

Funzioni

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$ $\to$ scalari

$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, m > 1$ $\quad F(x_1, \dots, x_n) = (F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_m(x_1, \dots, x_n))$ vettoriali

$\bar{x}$ punto di accumulazione di A. lim?

$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\exists \lim_{x \to \bar{x}} f(x) = l \in \mathbb{R}$ se $\forall B_\varepsilon(l)\ \exists B_\delta(\bar{x})$

$x \in (B_\delta(\bar{x}) \setminus \{\bar{x}\}) \cap A \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(l)$

In $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\quad \exists \lim_{x \to \bar{x}} F(x) = L \in \mathbb{R}^m = (l_1, \dots, l_m)$ se

$\forall B_\varepsilon(L) \subseteq \mathbb{R}^m, \exists B_\delta(\bar{x})$ $\quad x \in (B_\delta(\bar{x}) \setminus \{\bar{x}\}) \cap A \Rightarrow F(x) \in B_\varepsilon(L)$

PROP. $\lim_{x \to \bar{x}} F(x) = L = (l_1, \dots, l_m) \Leftrightarrow \lim_{x \to \bar{x}} F_i(x) = l_i$

F è continua in $\bar{x} \in A = \text{dom} F$ se:

$\forall B_\varepsilon(F(\bar{x})), \exists B_\delta(\bar{x}) : x \in B_\delta(\bar{x}) \cap A \Rightarrow F(x) \in B_\varepsilon(F(\bar{x}))$

se $\bar{x}$ è un punto di accumulazione per F:

F è continua in $\bar{x} \Leftrightarrow \lim_{x \to \bar{x}} F(x) = F(\bar{x})$

se $\bar{x}$ è isolato:

F è continua in $\bar{x}$ perché $x \in B_\delta(\bar{x}) \cap A = \{\bar{x}\}$

TH Teorema di Weierstrass

- A è compatto (chiuso e limitato)
- $f: A \to \mathbb{R}$ è continua

$\Rightarrow \exists \bar{x}, \underline{x} \in A : \forall x \in A \quad f(\underline{x}) \le f(x) \le f(\bar{x})$

minimo assoluto ($\underline{x}$) — massimo assoluto ($\bar{x}$)

PROP. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua

$\Rightarrow \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < 0\}, \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > 0\}$ sono aperti di $\mathbb{R}^n$

$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \le 0\}, \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \ge 0\}$ sono chiusi di $\mathbb{R}^n$

04\10

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x_0$ interno a dom f

f è derivabile in x_0 se $\exists$ ed è finito $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$ coefficiente della

1- $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ è la t_g al grafico di f in x_0

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$ per $x \to x_0$

2- se f è derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ è continua in x_0

$\forall \bar{x}\ \exists L_{\bar{x}}$ che si chiama differenziale di f in $\bar{x}$

TH Teorema del differenziale

- f è differenziabile in (x_0, y_0) interno a dom f

$\Rightarrow$ 1- f è continua in (x_0, y_0)

2- $\exists$ le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

3- $\forall \vec{v}$ versore, $\exists\ \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \cdot \vec{v}$

4- $\exists$ il piano tangente al grafico di f in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ e ha equazione $y = f(x_0, y_0) + L(x - x_0, y - y_0)$

$\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right) \rightarrow$ gradiente di f in (x_0, y_0)
$\rightarrow$ vettore delle derivate parziali

$$L(x - x_0, y - y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \cdot (x - x_0, y - y_0) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$\Rightarrow$ piano tg. $= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$

EX. $f(x,y) = x^3 y - 3x \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^3$

continuità di $f(x,y)$:

PROP. · se $f(x,y) = g(x)$ e g è continua in $\mathbb{R}$ come funzione di una variabile $\Rightarrow$ lo è anche come funzione di più variabili
· somma, prodotto, rapporto con funzioni $\neq 0$ continue è continu
· composizione di funzioni continue è continua

DEF f è di classe C^1 su un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^n$; $f \in C^1(A)$ se:
$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ esistono e sono continue su A

TH $f \in C^1(A)$, A aperto di $\mathbb{R}^n \Rightarrow f$ è differenziabile in A
$g(x)$ è di classe C^1 su $\mathbb{R}$
$\Rightarrow f(x,y) = g(x)$ è una funzione di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$

Derivate successive alla prima:

$\exists\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ su un aperto

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x+h, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{h} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \lim_{k \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{k} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

$\boxed{TH}$ Se F è di classe C^1 in un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ (cioè se JF è una matrice di funzioni continue) $\Rightarrow F$ è differenziabile $\forall \bar{x} \in A$

Se f è derivabile in $\bar{x}$ e g in $f(\bar{x}) \Rightarrow g \circ f$ è derivabile in $\bar{x}$

$$(g \circ f)'(\bar{x}) = g'(f(\bar{x})) \cdot f'(\bar{x})$$

$\boxed{TH}$ Chain rule

$$\underbrace{\mathbb{R}^n \xrightarrow{F} \mathbb{R}^m \xrightarrow{G}}_{G \circ F} \mathbb{R}^p$$

- $\bar{x}$ punto interno al dominio di $G \circ F$
- F differenziabile in $\bar{x}$
- G differenziabile in $F(\bar{x})$

$\Rightarrow G \circ F$ differenziabile in $\bar{x}$

$$\underset{p \times n}{J(G \circ F)(\bar{x})} = \underset{p \times m}{J(G)(F(\bar{x}))} \cdot \underset{m \times n}{J(F)(\bar{x})}$$

EX.

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

$t \to (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ $\qquad \gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \dots, \gamma_n'(t))$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\qquad \nabla f(\bar{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x})\right)$

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \nabla f(\gamma(t)) \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t) \end{pmatrix} = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t)) \cdot \gamma_1'(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\gamma(t)) \cdot \gamma_n'(t)$$

$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x, y) \to x^2 + y^2$ $\qquad f \circ \gamma(t) = f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma(t)) = 0$$

$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$ $\qquad \nabla f = (2x, 2y)$

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma(t)) = \nabla f(\gamma(t)) \gamma'(t) = (2\cos t, 2\sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) =$$

$$= -2\cos t \sin t + 2 \sin t \cos t = 0$$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^n \xrightarrow{F} \mathbb{R}^m$$

$F(\gamma(t)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

$$\frac{d}{dt} F(\gamma(t)) = \underset{n \times m}{JF(\gamma(t))} \cdot \underset{n \times 1}{\gamma'(t)}$$

$J(L^{-1})(L(x)) = [JL(x)]^{-1} = A^{-1}$

$\Downarrow$ l'applicazione inversa è associata alla matrice inversa

EX. $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(\rho, \theta) \to (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ $\quad f_1(\rho,\theta) = \rho\cos\theta \quad f_2(\rho,\theta) = \rho\sin$

$JF = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$ $\quad \det JF = \rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta = \rho \neq 0 \quad \forall \rho \neq 0$

$F(\rho,\theta) = F(\rho, \theta + 2\pi) \quad \forall \theta$

$\Downarrow$ non è globalmente invertibile perché periodica

Cambiamento di variabili in $\mathbb{R}^n$:

$\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1 è 1 cambiamento di variabile se:

1- $\operatorname{dom}\varphi = \mathbb{R}^n$ $\qquad$ 2- $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$

3- φ è biunivoca (invertibile globalmente)

4- $J\varphi$ è invertibile $\forall x \in \mathbb{R}^n$ (inversa è di classe C^1)

$\Rightarrow \varphi^{-1}$ è di classe C^1 (perché la 4- garantisce che φ^{-1} è differenziabile ed è C^1 su ogni intorno $\forall y$)

$$J\varphi(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}(x) \\ & \vdots & \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

$\det J\varphi(x)$ = si ottiene mediante somme e prodotti delle derivate

$\det J\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è continua

TH degli zeri:

f continua su intervallo I e $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$

$\Downarrow$ i valori sono tutti positivi o tutti negativi

Per funzioni da $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con dominio $\mathbb{R}^n$ il TH degli zeri vale

se $\exists \bar{x}: f(\bar{x}) < 0$ e $\exists \tilde{x}: f(\tilde{x}) > 0$

$\Rightarrow \exists z: f(z) = 0$

$\det J\varphi(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

continuità di φ

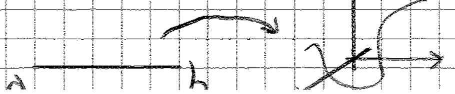
$\Rightarrow \det J\varphi(x)$ ha lo stesso segno su $\mathbb{R}^n$ (se $\varphi \in C^1$)

Curva in forma parametrica di $\mathbb{R}^n$:

$\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ continua

γ iniettiva, cioè se $t_1 \neq t_2 \Rightarrow \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$

sostegno di $\gamma = \operatorname{Im}\gamma = \{\gamma(t) : t \in [a,b]\} \subseteq \mathbb{R}^n$



iniettiva (no auto-intersezioni)

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita su un rettangolo R e limitata su R

$\exists\, M > 0 \quad \forall (x,y) \in R, \ |f(x,y)| \leq M$

Una funzione a scala h definita su R è una maggiorante a scala di f se $f(x,y) \leq h(x,y) \quad \forall (x,y) \in R$

Una funzione a scala g definita su R è una minorante a scala di f se $f(x,y) \geq g(x,y) \quad \forall (x,y) \in R$

$$\int_R g \leq \int_R h$$

$$\sum c_{ij} \cdot \text{area}(R_{ij}) \leq \sum d_{ij} \cdot \text{area}(R_{ij}) \quad \text{perché } c_{ij} \leq d_{ij}$$

$$\exists \sup\left\{\int_R g,\ g \text{ minorante a scala}\right\} \leq \inf\left\{\int_R h,\ h \text{ maggiorante a scala}\right\}$$

$\boxed{\text{DEF.}}$ $\underline{\int_R} f = \sup\left\{\int_R g,\ g \text{ minorante a scala di } f\right\}$

↓ integrale inferiore di f su R

$\overline{\int_R} f = \inf\left\{\int_R h,\ h \text{ maggiorante a scala di } f\right\}$

↓ integrale superiore di f su R

$\forall f$ limitata su $R \quad \underline{\int_R} f \leq \overline{\int_R} f$

$\boxed{\text{DEF.}}$ Se $\underline{\int_R} f = \overline{\int_R} f = \int_R f$ si dice che f è Riemann-integrabile su R

Ex.

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad \text{su } R = [0,1] \times [0,1] \text{ non è integrabile}$$

$$\underline{\int_R} f = 0 \qquad \overline{\int_R} f = 1$$

$\boxed{\text{TH}}$ Tutte le funzioni continue su un rettangolo chiuso R sono Riemann-integrabili su R.

Se una funzione è continua su $\mathring{R}$ e limitata su R

$\Rightarrow f$ è Riemann-integrabile su R

$\boxed{\text{TH}}$ Formule di riduzione

Se f è integrabile su $R = [a,b] \times [c,d]$

1- Se $\forall y \in [c,d] \quad \exists\, g(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$

$$\Rightarrow \int_R f = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy = \int_c^d g(y)\,dy$$

2- Se $\forall x \in [a,b] \quad \exists\, h(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$

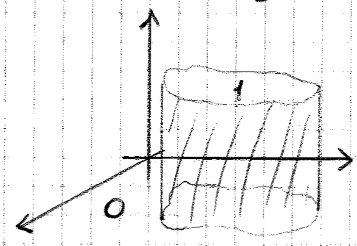
$$\Rightarrow \int_R f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx = \int_a^b h(x)\,dx$$

Se il dominio di una funzione $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ non è un rettangolo:

Insiemi misurabili secondo Peano-Jordan:

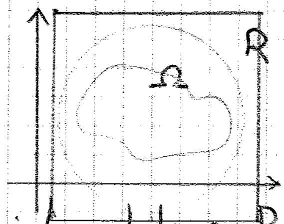
$\mathrm{dom} f = \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ $\qquad \underset{\text{chi}}{\chi}_\Omega(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \Omega \\ 0 & \text{se } x \notin \Omega \end{cases}$

funzione caratteristica di Ω



Se Ω è limitato (può essere contenuto in un cerchio) $\exists$ rettangolo $R : \Omega \in R$

$\Rightarrow \chi_\Omega$ è definita su R

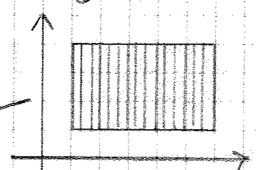


DEF. Ω è misurabile (secondo Peano-Jordan) se χ_Ω è integrabile su R

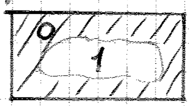
Ex.

$\Omega = \{(x,y) : 0 \le x \le 1 \land x \in \mathbb{Q}, 0 \le y \le 1\}$

χ_Ω non è integrabile



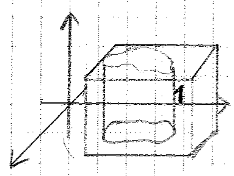
Se Ω è misurabile, si chiama misura (di Peano-Jordan) di Ω $|\Omega| = \int_R \chi_\Omega$. → bendata → perché non importa la grandezza di R sembra che dipenda dal rettangolo ma non è così perché la parte in più rispetto a Ω vale 0.



1- $|\Omega|$ non dipende dal rettangolo R

2- $|\Omega|$ = area di Ω (per tutte le figure piane di cui so già calcolare l'area)

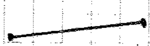
perché il volume $|\Omega|$ è uguale all'area x altezza, ma l'altezza è uguale a 1 $\Rightarrow |\Omega|$ = area



DEF. Un insieme è trascurabile se è misurabile e la sua misura è nulla → $|\Omega| = 0$

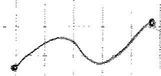
Insiemi trascurabili:

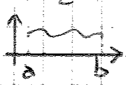
1- I punti $P \in \mathbb{R}^2$

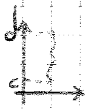
2- I segmenti 

3- $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ continua e iniettiva

sostegno di $\gamma = \{\gamma(t), t \in [a,b]\}$



4- $\{(x, f(x)), x \in [a,b]\}$ 

$\{(f(y), y), y \in [c,d]\}$ 

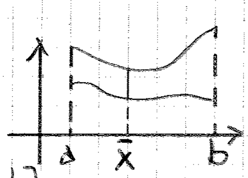
5- unione di un numero finito di insiemi trascurabili

6- intersezioni di insiemi di misura nulla

7- sottoinsiemi di insiemi trascurabili

2- Se f è limitata su Ω e $|\Omega| = 0$

$\Rightarrow \int_\Omega f = 0$

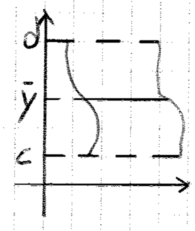


$a \le x \le b \quad \alpha(x) \le y \le \beta(x) \quad \alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$

verticalmente convesso o y-semplice

α, β continue su $[a,b]$

MISURABILI



$c \le y \le d \quad \gamma(y) \le x \ \delta(y) \quad \gamma, \delta : [c,d] \to \mathbb{R}$

orizzontalmente convesso o x-semplice

γ, δ continue su $[c,d]$

TH Teorema di riduzione

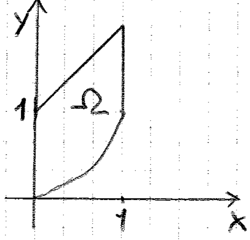
- $\Omega = \{(x,y) : a \le x \le b, \alpha(x) \le y \le \beta(x), \alpha, \beta$ continue su $[a,b]\}$
- f continua (quasi ovunque) su Ω

$\Rightarrow \int_\Omega f = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy\,dx$

- $\Omega = \{(x,y) : c \le y \le d, \gamma(y) \le x \le \delta(y), \gamma, \delta$ continue su $[c,d]\}$
- f continua (quasi ovunque) su Ω

$\Rightarrow \int_\Omega f = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,dx \right) dy = \int_c^d \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,dx\,dy$

EX. $f(x,y) = 2xy \quad \Omega = \{0 \le x \le 1, x^2 \le y \le x+1\}$



$\int_\Omega f = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x+1} 2xy\,dy \right) dx = \int_0^1 [xy^2]_{x^2}^{x+1} dx =$

$= \int_0^1 (x(x+1)^2 - x^5)\,dx = \int_0^1 (x^3 + 2x^2 + x - x^5)\,dx =$

$= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{5}{4}$

perchè $f(x,y) \ge 0 \ \forall x,y \in \Omega \leftarrow$ volume del solido

---

14\10

EX.

1- $f(x,y) = x+y \qquad A = \{0 \le x \le 1, 2x^3 \le y \le 2\sqrt{x}\}$

$\int_0^1 \left(\int_{2x^3}^{2\sqrt{x}} (x+y)\,dy \right) dx = \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{2x^3}^{2\sqrt{x}} dx = \int_0^1 (2x\sqrt{x} + 2x - 2x^4 - 2x^6)\,dx =$

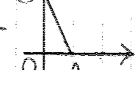
$= \left[\frac{4}{5} x^{5/2} + x^2 - \frac{2}{5} x^5 - \frac{2}{7} x^7 \right]_0^1 = \frac{4}{5} + 1 - \frac{2}{5} - \frac{2}{7} = \frac{39}{35}$

volume del solido perchè $f(x,y) \ge 0 \ \forall x,y \in A$

2- $f(x,y) = \sqrt{x} + 2xy$ sul triangolo T di vertici $(0,0), (1,0), (0,2)$

$T = \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le -2x+2 \end{cases} \qquad y = -2x+2$

convesso sia orizzontalmente che verticalmente



7 - Additività rispetto al dominio

Ω_1, Ω_2 domini misurabili

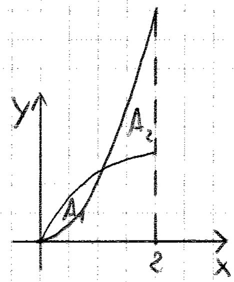
a - $|\Omega_1 \cap \Omega_2| = 0 \Rightarrow \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f = \int_{\Omega_1} f + \int_{\Omega_2} f$

b - $|\Omega_1 \cap \Omega_2| \neq 0 \Rightarrow \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f = \int_{\Omega_1} f + \int_{\Omega_2} f - \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} f$

8 - $f = g$ su $\Omega \setminus C, |C| = 0 \Rightarrow \int_\Omega f = \int_\Omega g$

EX.

1 - $f(x,y) = x + 2y$ A parte di piano tale che $0 \le x \le 2$ e y sta fra $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2$ → verticalmente convesso



$A_1 \cap A_2 = (1,1) \Rightarrow |A_1 \cap A_2| = 0 \Rightarrow$ posso applicare la 7

$$\int_A f = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x+2y)\,dy\,dx + \int_1^2 \int_{\sqrt{x}}^{x^2} (x+2y)\,dy\,dx =$$

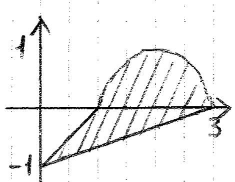
$$= \int_0^1 \left[xy + y^2\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx + \int_1^2 \left[xy + y^2\right]_{\sqrt{x}}^{x^2} dx =$$

$$= \int_0^1 (x\sqrt{x} + x - x^3 - x^4)\,dx - \int_1^2 (x\sqrt{x} + x - x^3 - x^4)\,dx =$$

$$= \left[\frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 - \left[\frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5\right]_1^2 =$$

$$= 2\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{8}{5}\sqrt{2} + 2 - 4 - \frac{32}{5}\right) = \frac{9}{10} - \frac{8}{5}\sqrt{2} - \frac{42}{5} = -\frac{1}{5}(75 + 8\sqrt{2})$$

2 - $f(x,y) = xy$ $D = D_1 \cup D_2$



$$D_1 = \begin{cases} 1 \le x \le 3 \\ 0 \le y \le \sqrt{1-(x-2)^2} \end{cases} \qquad D_2 = \begin{cases} -1 \le y \le 0 \\ 1+y \le x \le 3y+3 \end{cases}$$

$y^2 = 1 - (x-2)^2$

$y^2 + (x-2)^2 = 1$ → arco di circonferenza

$|D_1 \cap D_2| = 0 \Rightarrow \int_D f = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f$

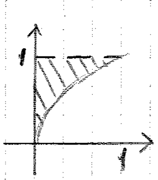
$$\int_D f = \int_1^3 \int_0^{\sqrt{1-(x-2)^2}} (xy)\,dy\,dx + \int_{-1}^0 \int_{1+y}^{3y+3} (xy)\,dx\,dy =$$

$$= \int_1^3 \left[\frac{xy^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-(x-2)^2}} dx + \int_{-1}^0 \left[\frac{x^2 y}{2}\right]_{1+y}^{3y+3} dy =$$

$$= \int_1^3 \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{2} + 2x^2 - 2x\right) dx + \int_{-1}^0 \left(\frac{9}{2}y^3 + \frac{9}{2}y + 9y^2 - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}y^3 - y^2\right) dy =$$

$$= \left[-\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{2}{3}x^3\right]_1^3 + \left[y^4 + 2y^2 + \frac{8}{3}y^3\right]_{-1}^0$$

3 - $f(x,y) = \sin y^3 = \sin(y^3)$ $D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, \sqrt{x} \le y \le 1\}$ → y-semplice



però non sappiamo integrare $\sin y^3$

$D = \{0 \le y \le 1, 0 \le x \le y^2\}$ → x-semplice

$$\int_D f = \int_0^1 \left(\int_0^{y^2} \sin y^3\,dx\right) dy = \int_0^1 \left[x \sin y^3\right]_0^{y^2} dy = \int_0^1 y^2 \sin y^3\,dy =$$

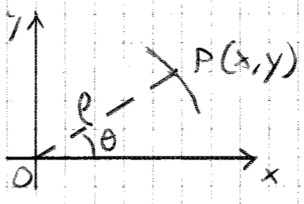
$$= \left[-\frac{\cos y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{\cos 1}{3}$$ → volume

$$\int_{\Omega'} \det \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} ds\,dt = \det \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} \int_{\Omega'} ds\,dt = \det \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} \cdot 1$$

perché è l'area del quadrato $0 \le s \le 1, 0 \le t \le 1$

$\Rightarrow$ determinante controlla la modifica dell'area del dominio

Cambiamento di variabile in coordinate polari:



vedono il piano come un insieme di circonferenze concentriche

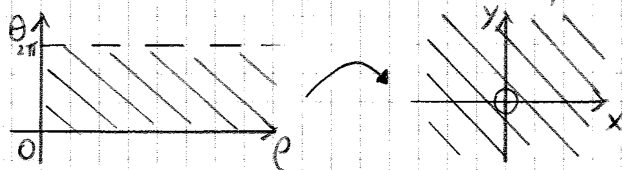
$P \neq O$, $\exists$ un'unica circonferenza passante per P

θ: angolo che la semiretta OP forma con il semiasse delle $x > 0$ $\qquad \rho = \overline{OP}$

$x = \rho\cos\theta \qquad y = \rho\sin\theta \qquad \rho > 0 \qquad 0 \le \theta < 2\pi$

$O = (0,0) \to \rho = 0$, θ qualsiasi $\Rightarrow$ non è biunivoco

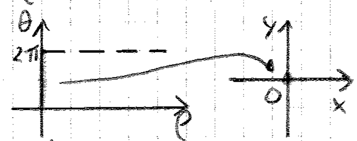
$[0, 2\pi) \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\} \to$ in questo modo è biunivoco



$$\det(J\varphi) = \det \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta = \rho > 0 \text{ se } \rho \neq 0$$

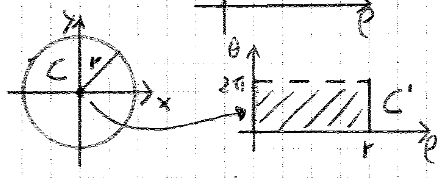
$\varphi(\rho, \theta) = (x, y) \qquad \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad 0 \le \theta < 2\pi,\ \rho > 0$

$\rho = 0 \Rightarrow$ origine $\to$ ma perdo la biunivocità



Area cerchio:

$C: \ x^2 + y^2 \le r^2 \qquad \text{Area}(C) = \pi r^2$



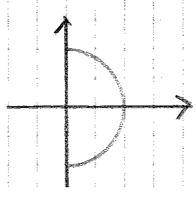
$C = \begin{cases} -r \le x \le r \\ -\sqrt{r^2 - x} \le y \le \sqrt{r^2 - x} \end{cases} \qquad |C| = \int_C 1 \cdot dx\,dy$

$$\int_{-r}^{r} \left(\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} dy \right) dx = \int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$

$\int_C 1\,dx\,dy = \int_{C'} |\det JC|\, d\rho\, d\theta$ posso farlo perché nonostante abbia ampliato il dominio (il segmento è in più), è ampliato di un insieme di misura nulla $\Rightarrow$ integrale non cambia

per lo stesso motivo si può aggiungere $\theta = 2\pi$

$$\int_{C'} |\det JC|\, d\rho\, d\theta = \int_{C'} \rho\, d\rho\, d\theta = \int_0^r \rho\, d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \cdot \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^r = \pi r^2$$

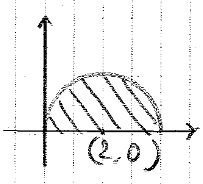


$x = \rho\cos\theta \qquad y = \rho\sin\theta$

al posto di $\quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \ \frac{3\pi}{2} \le \theta \le 2\pi$

uso $\quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

EX.



$C=(2,0) \quad R=2 \ , \ y \geq 0 \qquad f(x,y)=x$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta + 2 & 0 \leq \rho \leq 2 \\ y = \rho\sin\theta & 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

$\det JF = \rho$ perché le derivate di costanti $=0$

$$\int_C x = \int_0^\pi \int_0^2 (\rho\cos\theta + 2)\rho \, d\rho \, d\theta = \int_0^\pi \int_0^2 (\rho^2\cos\theta + 2\rho) \, d\rho \, d\theta =$$

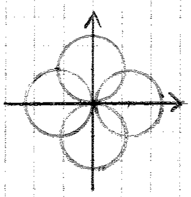
$$= \int_0^2 \rho^2 d\rho \cdot \int_0^\pi \cos\theta \, d\theta + \int_0^2 2\rho \, d\rho \cdot \int_0^\pi 1 \, d\theta =$$

$$= \frac{\rho^3}{3}\Big]_0^2 \cdot \sin\theta\Big]_0^\pi + \rho^2\Big]_0^2 \cdot \theta\Big]_0^\pi = 0 + 4\pi = 4\pi$$

$g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

non si riesce a integrare

$$\int_C g = \int_0^\pi \int_0^2 \sqrt{\rho^2\cos^2\theta + 4\rho\cos\theta + 4 + \rho^2\sin^2\theta} \, d\rho \, d\theta = \int_0^\pi \int_0^2 \sqrt{\rho^2 + 4\rho\cos\theta + 4} \, d\rho \, d\theta$$



Le circonferenze con centro su uno degli assi e tangenti all'altro asse nell'origine possono essere espresse in modo diverso:

centro $(R,0)$ e raggio R

$(x-R)^2 + y^2 \leq R^2 \rightarrow$ punti nella circonferenza

$x^2 - 2xR + \cancel{R^2} + y^2 \leq \cancel{R^2} \qquad x^2+y^2 \leq 2Rx$

$x = \rho\cos\theta \qquad y = \rho\sin\theta$

$\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta \leq 2R\rho\cos\theta \qquad \rho^{\cancel{2}} \leq 2R\cancel{\rho}\cos\theta \qquad \rho \leq 2R\cos\theta$

$\{(x,y) : (x-R)^2 + y^2 \leq R^2\} = \{(\rho,\theta) : 0 \leq \rho \leq 2R\cos\theta, \ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$

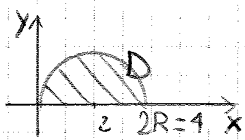
Lo stesso processo può essere ripetuto per le altre 3 circonferenze

EX.

1- $F(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

$D: \{(x,y) : (x-2)^2 + y^2 \leq 4, \ y \geq 0\}$

$D': \{(\rho,\theta) : 0 \leq \rho \leq 4\cos\theta, \ 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$

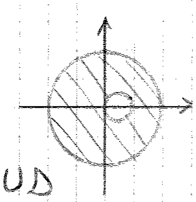


$$\int_C \sqrt{x^2+y^2} \, dx \, dy = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{4\cos\theta} \rho \cdot \rho \, d\rho \right) d\theta = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^{4\cos\theta} d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{64}{3}\cos^3\theta \, d\theta =$$

$$= \frac{64}{3}\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2\theta)\cos\theta \, d\theta = \frac{64}{3}\left[\sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{64}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{128}{9}$$

2- $\iint_\Omega (x^2+y^2)^{3/2} \, dx \, dy \qquad \Omega = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 4, \ x^2+y^2-x \geq 0\}$

$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \geq \frac{1}{4}$



$C = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 4\}$

$D = \{(x,y) : x^2+y^2-x \leq 0\} \qquad \Omega = C - D \qquad C = \Omega \cup D$

$D' = \{(\rho,\theta) : 0 \leq \rho \leq \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}\cos\theta, \ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$

$\int_{\Omega\cup D} F = \int_\Omega F + \int_D F - \int_{\Omega\cap D} F \qquad |\Omega \cap D| = 0 \Rightarrow \int_\Omega F = \int_{\Omega\cup D} F - \int_D F = \int_C F - \int_D F$

massa di $A = M(A) = \iint_A \rho(x,y)\,dx\,dy$

G baricentro

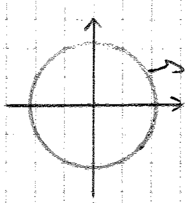
$$x_G = \frac{1}{M(A)} \iint_A x\,\rho(x,y)\,dx\,dy$$

$$y_G = \frac{1}{M(A)} \iint_A y\,\rho(x,y)\,dx\,dy$$

se ρ è costante: $\rho(x,y) = K$

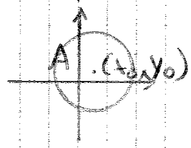
$$M(A) = \iint_A K\,dx\,dy = K|A|$$

$$x_G = \frac{1}{K|A|} \iint_A x K\,dx\,dy = \frac{1}{|A|} \iint_A x\,dx\,dy \qquad y_G = \frac{1}{|A|} \iint_A y\,dx\,dy$$



→ densità costante $\quad A: \int_A x\,dx\,dy \quad B: \int_A y\,dx\,dy$

$(0,0)$, $A=0$, $B=0$ ← coordinate del centro



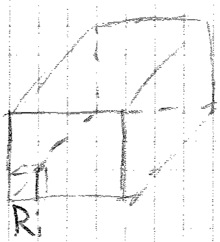
$$\frac{1}{|A|}\int_A x\,dx\,dy = x_0 \qquad \frac{1}{|A|}\int_A y\,dx\,dy = y_0$$

$$\int_A x\,dx\,dy = x_0|A| \qquad \int_A y\,dx\,dy = y_0|A|$$

21\10

Integrali tripli

Domini $D \subseteq \mathbb{R}^3$



↗ processo valido per $\mathbb{R}^n$

→ usiamo le funzioni a scala

↳ divido il parallelepipedo in tanti piccoli parallelepipedi R_i

la funzione a scala ha un valore costante su ogni R_i

↳ $f(x) = \text{costante} = c_i$ su parallelepipedi R_i

parallelepipedo $= [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$

$$\int_R f = \sum_{i=1} c_i \cdot \text{volume}(R_i)$$

Se f è limitata su un parallelepipedo R

$\Rightarrow$ maggiorante a scala h $\qquad g(x) \le f(x) \le h(x)$

minorante a scala g

$$\sup\left\{\int_R g,\ g \text{ minorante}\right\} = \underline{\int_R} f \quad \le \quad \overline{\int_R} f = \inf\left\{\int_R h,\ h \text{ maggiorante}\right\}$$

Se $\underline{\int_R} f = \overline{\int_R} f$ si dice che f è Riemann-integrabile su R

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ limitato → può essere contenuto in una sfera

↳ anche in un parallelepipedo $R: \Omega \subseteq R$

$$\chi_\Omega(x) = \begin{cases} 1 & x \in \Omega \\ 0 & x \notin \Omega \end{cases} \Rightarrow \chi_\Omega \text{ è definito su } R \text{ ed è limitato su } R$$

3- a- se $f \geq 0$ su $\Omega \Rightarrow \int_\Omega f \geq 0$

b- se f è continua su Ω, $\int_\Omega f = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

4- $f(x) = g(x)$ per $\forall x \in \Omega \setminus C$, $|C| = 0$

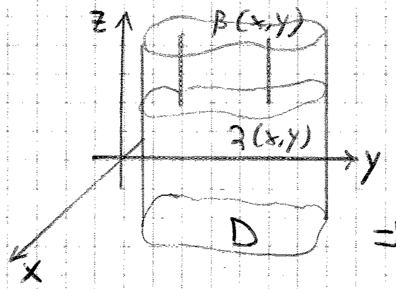
$\Rightarrow f$ è integrabile $\Leftrightarrow g$ è integrabile e $\int_\Omega f = \int_\Omega g$

5- Ω_1, Ω_2 misurabili e f integrabile su Ω_1, Ω_2

$\Rightarrow f$ è integrabile su $\Omega_1 \cup \Omega_2$ e $\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f = \int_{\Omega_1} f + \int_{\Omega_2} f - \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} f$

se $\left.\begin{array}{l} \Omega_1 \cap \Omega_2 \subseteq \partial \Omega_1 \\ \Omega_1 \cap \Omega_2 \subseteq \partial \Omega_2 \end{array}\right\} \Rightarrow |\Omega_1 \cap \Omega_2| = 0$

Integrazione per fili



$D \subseteq \mathbb{R}^2$ misurabile

$\rightarrow$ possiamo visualizzare la figura come un insieme di fili

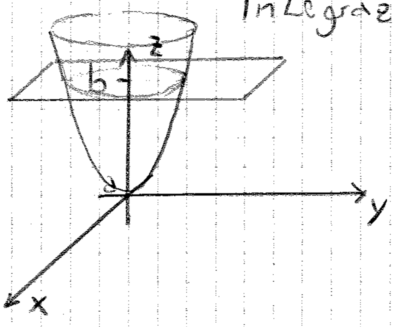
$\Rightarrow \Omega : \{(x,y,z) : (x,y) \in D,\ \alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y),\ \alpha, \beta$ continue su $D\}$ è misurabile

$f(x,y,z)$ continua e limitata su Ω

$\Rightarrow f$ è integrabile su Ω

$\int_\Omega f = \iint_D \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y,z)\, dz \right) dx\, dy$ $\rightarrow$ formula di riduzione da integrale triplo a doppio

Integrazione per strati



$D \subseteq \mathbb{R}^2$ misurabile

$\rightarrow$ possiamo visualizzare Ω come un insieme di strati (piani) $\rightarrow$ cerchi in questo caso

$x^2 + y^2 = z \qquad \bigcup_{z \in [a,b]} \{x^2 + y^2 \leq z\}$

Se $\Omega : a \leq z \leq b$, $\Omega \cap \{z = z_0\} = \Omega_{z_0}$ misurabile $\forall z_0 \in [a,b]$

$\Rightarrow \Omega$ è misurabile

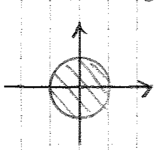
f continua e limitata su $\Omega \Rightarrow \int_\Omega f = \int_a^b \left(\iint_{\Omega_z} f(x,y,z)\, dx\, dy \right) dz$

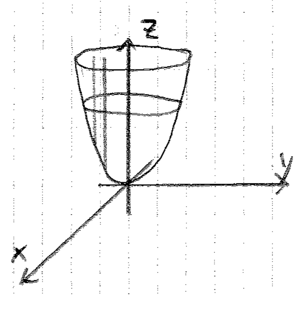
Ex.

$f(x,y,z) = z \qquad \Omega = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leq z \leq 1,\ 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$

per fili: $\int_\Omega z = \iint_D \left(\int_{x^2+y^2}^1 z\, dz \right) dx\, dy = \iint_D \left. \frac{z^2}{2} \right]_{x^2+y^2}^1 dx\, dy =$

$= \iint_D \left(\frac{1}{2} - \frac{(x^2+y^2)^2}{2} \right) dx\, dy = \iint_D \frac{1}{2} \left(1 - (x^2+y^2)^2\right) dx\, dy$





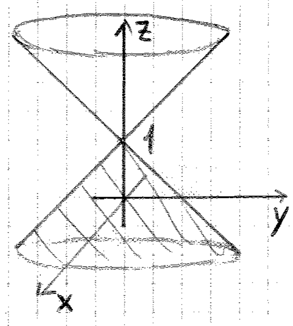
$x = \rho \cos\theta \qquad 0 \leq \rho \leq 1$

$y = \rho \sin\theta \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

$\Rightarrow A = \pi \cdot \frac{\sqrt{9-z^2}}{3}\sqrt{9-z^2} = \frac{\pi}{3}(9-z^2) = $ Area A_z

$\int_0^{1/3} \frac{\pi}{3}(9-z^2)\,dz = \frac{\pi}{3}\left[9z - \frac{z^3}{3}\right]_0^{1/3} = \frac{\pi}{3}\left(1 - \frac{1}{3^4}\right)$

4 - $f(x,y,z) = z \quad A = \{(x,y,z): x^2+y^2 \leq (1-z)^2,\ 0 \leq z \leq 1\}$



solido di rotazione ← trovato il vertice di uno

perché z è uguale per tutti i punti sulla circonferenza $x^2+y^2 = R^2$

$y = 0,\ 1-z \geq 0 \quad \sqrt{x^2} = \sqrt{(1-z)^2} = 1-z \geq 0 \quad x = 1-z$

retta ruotata attorno all'asse z

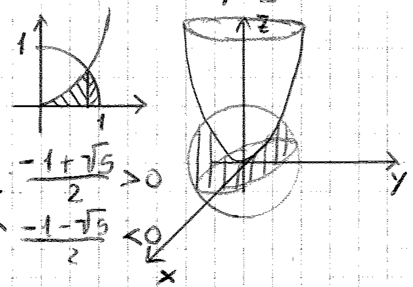
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2 \rightarrow$ cono a sezioni ellittiche

$\int_0^1 \left(\iint_{\Omega_z} z\,dx\,dy\right) dz = \int_0^1 z \left(\underbrace{\iint_{\Omega_z} dx\,dy}_{\text{area}}\right) dz = \int_0^1 z\,\pi(1-z)^2\,dz =$

$= \pi\int_0^1 z(1-z)^2\,dz = \pi\left[\frac{z^4}{4} - \frac{2z^3}{3} + \frac{z^2}{2}\right]_0^1 = \pi\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) = \pi/12$

5 - $f(x,y,z) = 1-z^2 \quad \Omega = \{(x,y,z): z \geq 0,\ x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ z \leq x^2+y^2\}$

non conviene integrarla per fili perché dovrei dividere il dominio in due parti →



per strati: $\begin{cases} z = x^2+y^2 \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{cases} \quad z^2+z-1 = 0$

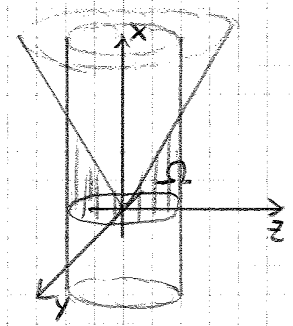
$z = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0 \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0 \end{cases}$

$0 \leq z \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = a$

$\int_0^a \left(\iint_{\Omega_z} (1-z^2)\,dx\,dy\right) dz = \int_0^a (1-z^2)\left(\iint_{\Omega_z} \overset{\text{area}}{\uparrow} dx\,dy\right) dz = \int_0^a (1-z^2)\,\pi\left(\sqrt{1-z^2}^2 - \sqrt{z}^2\right) =$

$= \pi\int_0^a (1-z^2)(1-z^2-z)\,dz = \pi\int_0^a (1-z^2-z-z^2+z^4+z^3)\,dz = \ldots$

6 - $\Omega = A \setminus B \quad A = \{y^2+z^2 \leq 4,\ x \geq 0\} \quad B = \{x \geq \sqrt{y^2+z^2}\}$



Trova il volume di Ω → uso $f(x,y,z) = 1$

$\begin{cases} y^2+z^2 = 4 \\ x = \sqrt{y^2+z^2} \end{cases} \quad x = \sqrt{4} \Rightarrow x = 2 \quad C = \{z^2+y^2 \leq 4,\ 0 \leq x \leq 2\}$

$D = \{x \geq \sqrt{y^2+z^2},\ 0 \leq x \leq 2\}$

$\int_{A\setminus B} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_C f - \int_D f$

perché $C = (A\setminus B) \cup D \quad |(A\setminus B)\cap D| = 0$

$\int_C f = \int_{A\setminus B} f + \int_D f \Rightarrow \int_{A\setminus B} = \int_C f - \int_D f$

25\10

Integrali tripli con cambiamento di variabile

$\varphi: \Omega' \rightarrow \Omega \qquad \Omega, \Omega' \subseteq \mathbb{R}^3$ aperti $\neq \emptyset$

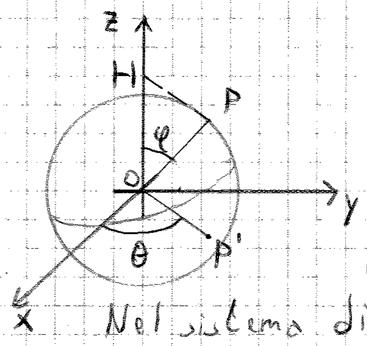
- φ biunivoca
- φ di classe C^1 su Ω'
- $\det J\varphi \neq 0$ su Ω

$x=\sqrt{\frac{1}{3}}\rho\cos\theta \qquad y=\frac{1}{2}\rho\sin\theta \qquad z=z \qquad 0\le\rho\le 1 \qquad 0\le\theta\le 2\pi \qquad 1\le z\le 2$

$$\iiint_{\Omega'}\sqrt{\tfrac{1}{3}}\rho\cos\theta\,\tfrac{1}{2}\rho\sin\theta\,\sqrt{\tfrac{1}{3}}\,\tfrac{1}{2}\rho\,d\rho\,d\theta\,dz=\frac{1}{12}\iiint_{\Omega'}\rho^3\cos\theta\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,dz=$$

$$=\frac{1}{12}\int_0^1\rho^3d\rho\int_1^2dz\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta\,d\theta=\frac{1}{12}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1\left[z\right]_1^2\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{2\pi}=0$$

Coordinate sferiche



Spazio visto come un insieme di circonferenze concentriche.

$\overline{OP}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\rho$

φ: angolo che il semiasse $z>0$ forma con OP

θ: angolo che il semiasse $x>0$ forma con OP'

Nel sistema di coordinate terrestri θ indica il meridiano a partire da quello di Greenwich e φ indica la colatitudine (lo 0 è al polo nord al posto che all'equatore)

$z=\rho\cos\varphi$

$PH=\rho\sin\varphi=OP' \implies \begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta & \rho\ge 0\\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta & 0\le\theta<2\pi\\ z=\rho\cos\varphi & 0\le\varphi<\pi\end{cases}$

se $\rho=0,\ \varphi=0,\ \varphi=\pi \rightarrow$ applicazione non biunivoca

$$\det J\varphi(\rho,\varphi,\theta)=\begin{vmatrix}\sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta\\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta\\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0\end{vmatrix}=\rho^2\sin\varphi\ge 0$$

$\det J\varphi=0$ se $\rho=0$ o $\varphi=0,\pi$

EX.

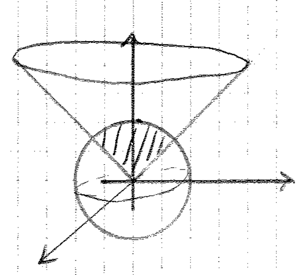
1- Volume della sfera $x^2+y^2+z^2=R^2$

$\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta & 0\le\theta\le 2\pi\\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta & 0\le\varphi\le\pi\\ z=\rho\cos\varphi & 0\le\rho\le R\end{cases}$

$\mathrm{Vol(sfera)}=\int_S 1\,dx\,dy\,dz=\int_{S'}\rho^2\sin\varphi\,d\varphi\,d\rho\,d\theta=$

$=\int_0^R\rho^2d\rho\cdot\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi=\left.\frac{\rho^3}{3}\right]_0^R\left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi}2\pi=\underset{\substack{\uparrow\\ \text{volume sfera}}}{\frac{4}{3}\pi R^3}$

2- $f(x,y,z)=z \qquad \Omega=\{x^2+y^2+z^2\le 1,\ \underset{\text{z positivi}}{z>\sqrt{x^2+y^2}}\}$



$x^2+y^2<z^2\le 1-(x^2+y^2)\rightarrow$ per fili

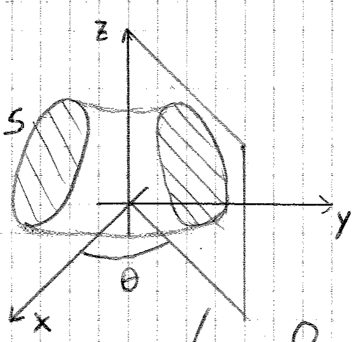
sferiche: $\Omega'=\{0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\varphi\le\pi/4,\ 0\le\rho\le 1\}$

$\int_\Omega z\,dx\,dy\,dz=\int_{\Omega'}\rho\cos\varphi\,\rho^2\sin\varphi\,d\varphi\,d\rho\,d\theta=$

$=\int_0^1\rho^3d\rho\cdot\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_0^{\pi/4}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi=\left.\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1\cdot 2\pi\cdot\left[\frac{\sin^2\varphi}{2}\right]_0^{\pi/4}=\frac{\pi}{8}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 136

Volumi di solidi di rotazione



solido di rotazione
ottenuto prendendo una superficie su un piano ortogonale all'asse e facendolo ruotare attorno all'asse

$S(x, 0, z) \quad x \geq 0$

Ω_s: solido che si ottiene facendo ruotare S intorno a z

per ogni piano ortogonale trovo la stessa superficie

utilizziamo le coordinate cilindriche
z non cambia per tutto il solido

θ: angolo che il semiasse $x>0$ forma col piano preso in considerazione

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = t \end{cases} \qquad (\rho, t) \in S \qquad \theta \in [0, 2\pi)$$

$(\rho, t) \updownarrow (x, z) \rightarrow \rho$ è uguale al valore della x

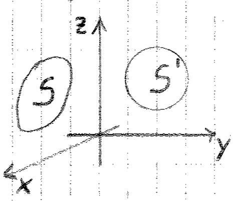
$Vol(\Omega_s) = \iiint_{\Omega_s} 1\,dx\,dy\,dz = \int_{\Omega'_s} \rho\,d\rho\,d\theta\,dt =$ integro per strati

$$= \int_0^{2\pi} \underbrace{\left(\iint_S \rho\,d\rho\,dt\right)}_{\text{numero } N \text{ perché } S \text{ non dipende da } \theta} d\theta = \int_0^{2\pi} N\,d\theta = N \cdot 2\pi = 2\pi \iint_S \rho\,d\rho\,dt =$$

$\begin{cases} \rho = x \\ t = z \end{cases}$

$$= 2\pi \iint_S x\,dx\,dz = |\Omega_s|$$

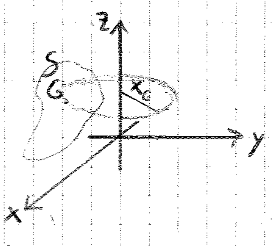
$|\Omega_s| = 2\pi \int_S x\,dx\,dz = 2\pi \int_{S'} y\,dy\,dz \quad$ con $S' \subseteq$ piano yz



$S = \{(x, 0, z),\ x \geq 0\}$ rotazione attorno all'asse $z \rightarrow V$

$$|V| = 2\pi \int_S x\,dx\,dz$$

I teorema di Guldino:



$x_G = x$ del baricentro (geometrico) di S

$$x_G = \frac{1}{|S|} \iint_S x\,dx\,dz \qquad \iint_S x\,dx\,dz = x_G |S|$$

$$\Rightarrow |\Omega_s| = 2\pi \cdot x_G \cdot |S|$$

Il volume del solido ottenuto ruotando S intorno all'asse z è uguale all'area di S moltiplicata per la lunghezza della circonferenza descritta dal baricentro di S nella rotazione attorno all'asse z

un altro modo di vedere $|\Omega_s|$ è:

$|\Omega_s| =$ volume del cilindro di base S e altezza $2\pi x_G$

Curve in forma parametrica

possono essere descritte anche in altri modi però ci viene più comodo averle in forma parametrica ai fini dell'integrazione

Ex. possiamo descriverle come luoghi geometrici $\{(x,y): x^2+y^2=1\}$

DEF. I intervallo

$\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ continua — però anche una funzione costante del tipo $\gamma(t) = (0,0,\dots,0)$ è continua (ma non è una curva)

$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$

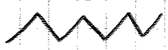
immagine $\gamma(I) \subseteq \mathbb{R}^n$

$\{(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)),\ t \in \mathbb{R})$ → sostegno della curva

1 - γ continua e iniettiva → $t_1 \neq t_2 \Rightarrow \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$

$\Rightarrow \gamma(I)$ è una curva nel senso intuitivo del termine

γ è semplice se è iniettiva → non ha autointersezioni → γ NO

però anche curve del tipo  sono semplici

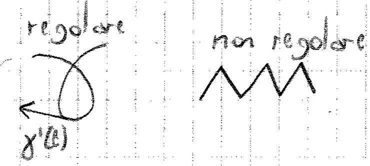
2 - γ è regolare se:

a - γ è di classe C^1 cioè se $\exists$ le derivate e $(\gamma_1'(t), \dots, \gamma_n'(t))$ sono funzioni continue

b - $\forall t \in \mathring{I},\ (\gamma_1'(t), \dots, \gamma_n'(t)) \neq (0,0,\dots,0)$

$\|\gamma'(t)\| \neq 0 \quad \forall t \in I$

$\gamma'(t)$ è il vettore tangente al sostegno della curva γ nel punto $\gamma(t)$

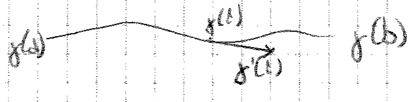


Sotto queste ipotesi $\gamma(I)$ è una curva nel senso intuitivo del termine

$\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ arco di curva → I chiuso

per il TH di Weierstrass $\gamma([a,b])$ è limitato in $\mathbb{R}^n$

perché è l'immagine (continua) di un insieme compatto



$\gamma(t)$ = legge di moto

Se $\gamma'(t)$ è continuo e $\gamma'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a,b]$

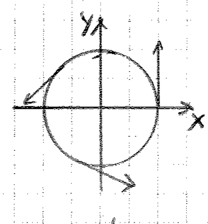
$\Rightarrow$ su $\gamma(I)$ è assegnato anche un verso di percorrenza dato dal verso della tangente

EX.

$x^2+y^2=1$

$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi) \qquad \gamma: [0,2\pi) \to \mathbb{R}^2$

$t \to (\cos t, \sin t)$

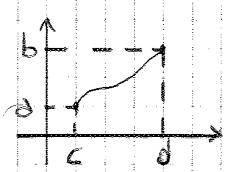


$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t) \neq (0,0) \quad \forall t \in [0, 2\pi)$

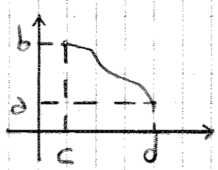
$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$ → vettore tangente ha sempre lo stesso modulo

$\Rightarrow$ per il TH dell'esistenza degli zeri $\exists\ \hat{s}: a'(\hat{s})=0$
ma ciò è contro l'ipotesi iniziale

$\Rightarrow$ $a'(s)>0 \quad \forall s \in [c,d] \rightarrow a$ è strettamente crescente
$a'(s)<0 \quad \forall s \in [c,d] \rightarrow a$ è strettamente decrescente



$a'(s)>0$



$a'(s)<0$

$\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n \qquad \delta: [c,d] \rightarrow \mathbb{R}^n$

γ e δ differiscono per un cambiamento di parametrizzazione
se $\exists$ un cambiamento di variabili $a: [c,d] \xrightarrow{a} [a,b]$
tale che $\delta(s) = \gamma(a(s))$ perché a è biunivoca

Proprietà:

1- $\gamma([a,b]) = \delta([c,d]) \rightarrow$ i sostegni sono uguali

2- $s_1 \neq s_2 \Rightarrow \delta(s_1) \neq \delta(s_2) \quad \forall s_1, s_2 \in [c,d]$
$\Rightarrow$ anche γ è semplice perché
$\gamma(a(s_1)) = \gamma(t_1) = \delta(s_1)$
$\gamma(a(s_2)) = \gamma(t_2) = \delta(s_2)$

3- γ è chiuso $\Leftrightarrow$ δ è chiusa

4- γ è regolare $\Leftrightarrow$ δ è regolare

PROP. $\delta: [c,d] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ regolari
$\exists\ a: [c,d] \rightarrow [a,b]$ cambiamento di variabile regolare
$\delta(s) = \gamma(a(s)) \quad \forall s \in [c,d]$

$\Rightarrow \vec{\delta}'(s) = a'(s)(\vec{\gamma}'(a(s))) \rightarrow$ differiscono per uno scalare
- $a'(s)>0 \Rightarrow$ i due vettori hanno lo stesso verso
- $a'(s)<0 \Rightarrow$ i due vettori hanno verso opposto

DIM. $\delta(s) = (\delta_1(s), \dots, \delta_n(s)) \qquad \vec{\delta}'(s) = (\delta_1'(s), \dots, \delta_n'(s))$
$\gamma(a(s)) = (\gamma_1(a(s)), \dots, \gamma_n(a(s)))$
$$\frac{d}{ds}(\gamma(a(s))) = (\gamma_1'(a(s))a'(s), \dots, \gamma_n'(a(s))a'(s)) =$$
$$= a'(s)(\gamma_1'(a(s)), \dots, \gamma_n'(a(s))) = a'(s)\,\vec{\gamma}'(a(s))$$

Se δ e γ differiscono per un cambiamento di parametrizzazione
che non cambia orientamento $\Rightarrow$ δ e γ si dicono equivalenti $\rightarrow a'(s)>0$
Se $a'(s)<0 \Rightarrow \gamma$ e δ hanno orientamenti opposti

EX.
$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0,2\pi]$
$\delta(t) = (\cos 2s, \sin 2s) \quad s \in [0,\pi]$

$a: [0,\pi] \rightarrow [0,2\pi]$
$s \rightarrow 2s = t$

$\boxed{\text{TH}}$ $\alpha: [c,d] \to [a,b]$ α cambiamento di variabile regolare
$\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ regolare
$\delta: [c,d] \to \mathbb{R}^n$ regolare $\quad \delta(s) = \gamma(\alpha(s))$
$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua $\quad \delta([c,d]) \subseteq A$

$$\Rightarrow \int_\delta f\,ds = \int_\gamma f\,ds$$

DIM. $\vec{\delta}'(s) = \alpha'(s) \cdot \vec{\gamma}'(\alpha(s)) \quad \forall s \in [c,d]$

$$\int_\delta f\,ds = \int_c^d f(\delta(s)) \cdot \|\delta'(s)\|\,ds \qquad t = \alpha(s) \quad dt = \alpha'(s)\,ds$$

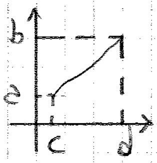
$$\int_\gamma f\,ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\|\,dt \qquad t = a \to s = \alpha^{-1}(a)$$

$$t = b \to s = \alpha^{-1}(b)$$

$$\Rightarrow \int_\gamma f\,ds = \int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)} f(\gamma(\alpha(s))) \cdot \|\gamma'(\alpha(s))\| \cdot \alpha'(s)\,ds$$

- se $\alpha'(s) > 0$ α è strettamente crescente $\quad \alpha^{-1}(a) = c$

$$\delta'(s) = \alpha'(s) \cdot \gamma'(\alpha(s)) \qquad \alpha^{-1}(b) = d$$



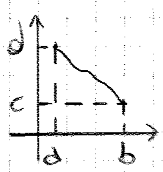
$$\|\delta'(s)\| = \|\alpha'(s) \cdot \gamma'(\alpha(s))\| = |\alpha'(s)| \cdot \|\gamma'(\alpha(s))\|$$

ma $\alpha'(s) > 0 \Rightarrow \|\delta'(s)\| = \alpha'(s) \cdot \|\gamma'(\alpha(s))\|$

$$\Rightarrow \int_c^d f(\delta(s)) \cdot \|\delta'(s)\|\,ds = \int_\gamma f\,ds$$

- se $\alpha'(s) < 0$ α è strettamente decrescente $\quad \alpha^{-1}(a) = d$

$$\|\delta'(s)\| = |\alpha'(s)| \cdot \|\gamma'(\alpha(s))\| = -\alpha'(s) \cdot \|\gamma'(\alpha(s))\| \qquad \alpha^{-1}(b) = c$$



$$\Rightarrow \int_d^c f(\delta(s)) \left[-\alpha'(s) \cdot \|\gamma'(\alpha(s))\|\right] ds = \int_\gamma f\,ds =$$

$$= -\int_d^c f(\delta(s))\,\alpha'(s) \cdot \|\gamma'(\alpha(s))\|\,ds = \int_c^d f(\delta(s))\,\alpha'(s) \cdot \|\gamma'(\alpha(s))\|\,ds$$

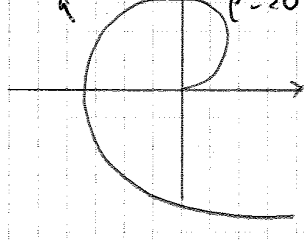
QDE

04\11

EX.

1- curvo $\rho = 2\theta$ (in polari) $\quad 0 < \theta \leq 4\pi$

densità: $f(\rho,\theta) = 4\theta \quad M?$



spirale di Archimede

$\rho = 2\theta$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \to \gamma: \begin{cases} x = 2\theta\cos\theta \\ y = 2\theta\sin\theta \end{cases} \quad \theta \in [0, 4\pi]$$

$$\gamma: [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2$$

$$\gamma'(\theta) = (2\cos\theta - 2\theta\sin\theta,\ 2\sin\theta + 2\theta\cos\theta)$$

$$\|\gamma'(\theta)\|^2 = 4\cos^2\theta + 4\theta^2\sin^2\theta - 8\theta\cos\theta\sin\theta + 4\sin^2\theta + 4\theta^2\cos^2\theta + 8\theta\cos\theta\sin\theta =$$

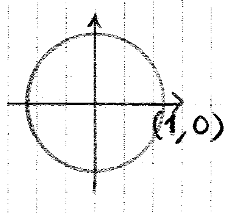
$$= 4(\cos^2\theta + \sin^2\theta + \theta^2\sin^2\theta + \theta^2\cos^2\theta) = 4(1+\theta^2)$$

$$M = \int_0^{4\pi} 4\theta\sqrt{4(1+\theta^2)}\,d\theta = 8\int_0^{4\pi} \theta\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta =$$

$$= 8(1+\theta^2)^{3/2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{3}\Big]_0^{4\pi} = \frac{8}{3}(1+16\pi^2)^{3/2} - \frac{8}{3} = \frac{8}{3}(1+16\pi^2)^{3/2}$$

$$\Rightarrow \int_\gamma F \cdot dP = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

Ex. $F(x,y) = (-y, x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$



$$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int F(\gamma(\theta)) \cdot \gamma'(\theta) d\theta$$

$F(\gamma(\theta)) = (-\sin\theta, \cos\theta)$ $\quad \gamma'(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta)$

$F(\gamma(\theta)) \cdot \gamma'(\theta) = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_0^{2\pi} 1 \cdot d\theta = 2\pi$$

Proprietà:

1- $F, G : \Omega \to \mathbb{R}^n$ campi continui

$\gamma : [a,b] \to \Omega$ curva regolare

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ $\quad \int_\gamma (aF + bG) dP = a\int_\gamma F\, dP + b \int_\gamma G\, dP \to$ linearità

2- Additività rispetto al dominio

$\gamma_1 \wedge \gamma_2$ $\quad \gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ $\quad \int_\gamma F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP + \int_{\gamma_2} F \cdot dP$

se γ è regolare a tratti

$\Rightarrow$ posso calcolare sia gli integrali di linea che quelli curvilinei lungo γ $\to$ spezzo γ come curva somma

3- A $\nearrow$ B $\quad \int_\gamma f \cdot ds$ non cambia a seconda del verso

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_a^b (F(\gamma(t)) \cdot T(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$

$\int_\gamma (F \cdot T) ds$ non dipende dalla parametrizzazione perchè è un integrale curvilineo

però $T(t)$ cambia a seconda della direzione

$\to$ versi opposti $\Rightarrow$ segni opposti

$\Rightarrow$ nella direzione opposta cambia il segno dell'integrale

$\boxed{TH}$ · F campo vettoriale continuo

· γ, δ curve che differiscono per un cambiamento di parametrizzazione

1- se γ e δ sono equivalenti (hanno lo stesso orientamento)

$$\Rightarrow \int_\gamma F \cdot dP = \int_\delta F \cdot dP$$

2- se γ e δ hanno orientamenti opposti

$$\Rightarrow \int_\gamma F \cdot dP = -\int_\delta F \cdot dP$$

$\int_{\gamma_1} F\cdot dP = -\int_{-\gamma_1} F\cdot dP \qquad -\gamma'(t) = (1,-1)$

$\int_{\gamma_1} F\cdot dP = -\int_{-\gamma_1} F\cdot dP = -\int_{-\gamma_1} (\cos t, -t+1)(1,-1)\, dP = -\int_{-\gamma_1} (\cos t + t - 1)\,dt =$

$= -\int_0^1 (\cos t + t - 1)\,dt = \sin t + \frac{1}{2}t^2 - t\Big]_0^1 (-1) = -\left(\sin 1 + \frac{1}{2} - 1\right) = \frac{1}{2} - \sin 1$

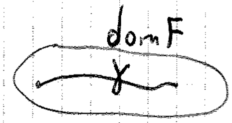
$\gamma_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} \quad t \in [0,1] \implies -\gamma_2 \quad -\gamma_2'(t) = (0,1) \quad F(\gamma(t)) = (1,t)$

$-\int_{-\gamma_2} F\cdot dP = -\int_0^1 (1,t)\cdot(0,1)\,dt = -\int_0^1 t\,dt = -\frac{t^2}{2}\Big]_0^1 = -\frac{1}{2}$

$\gamma_3 : \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \quad t \in [0,1] \quad \gamma_3'(t) = (1,0) \quad F(\gamma_3(t)) = (\cos t, 0)$

$\int_{\gamma_3} F\cdot dP = \int_0^1 (\cos t, 0)\cdot(1,0)\,dt = \int_0^1 \cos t\,dt = \sin 1$

$\implies \int_\gamma F\cdot dP = \frac{1}{2} - \sin 1 - \frac{1}{2} + \sin 1 = 0$



$F: \Omega \to \mathbb{R}^2$

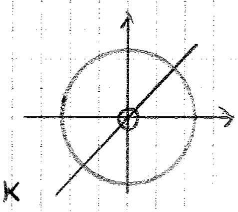
$\gamma: [a,b] \to \Omega$ → deve essere tutto contenuto nel dominio di F

Ex.

$F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) \qquad \mathrm{dom}F = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

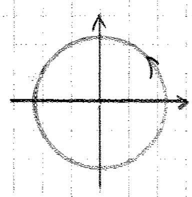
a- $\gamma: y = x, \ -1 \le x \le 1$

non posso calcolarlo perché il campo non è definito nel dominio di F



b- $\gamma: x^2+y^2 = 4$ orientata in senso orario ⇒ OK

$\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases} \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$



$\int_\Gamma F\cdot dP = -\int_\gamma F\cdot dP$

$F(\gamma(\theta)) = \left(-\frac{2\sin\theta}{4\cos^2\theta + 4\sin^2\theta}, \frac{2\cos\theta}{4}\right) = \left(-\frac{1}{2}\sin\theta, \frac{1}{2}\cos\theta\right)$

$\gamma'(\theta) = (-2\sin\theta, 2\cos\theta)$

$F(\gamma(\theta))\cdot\gamma'(\theta) = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\int_\gamma F\cdot dP = \int_0^{2\pi} 1\,d\theta = 2\pi \implies \int_\Gamma F\cdot dP = -2\pi$

07\11

Superfici

$\sigma: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ continua $\qquad A$ aperto, $\neq \emptyset$, connesso

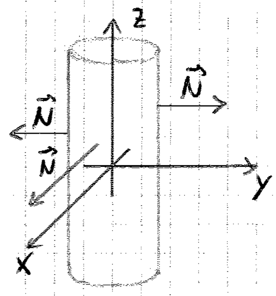
per ogni coppia di punti c'è una curva che li unisce senza uscire dall'insieme

$(u,v) \to \left.\begin{array}{l} x = \sigma_1(u,v) \\ y = \sigma_2(u,v) \\ z = \sigma_3(u,v) \end{array}\right\} = \sigma(u,v)$

$\Rightarrow$ una superficie regolare ha un orientamento

Ex.

1 - $\sigma : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$



$$\begin{cases} x = \cos u \\ y = \sin u \\ z = v \end{cases} \qquad x^2+y^2 = \cos^2 u + \sin^2 u = 1 \qquad x^2+y^2=1$$

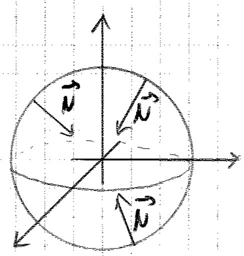
$$J\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} -\sin u & 0 \\ \cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ $\to$ vettori colonna sono linearmente indipendenti

la scelta della variabile da derivare prima è arbitraria

cambia il segno ma non è importante ai fini dell'integrazione

$$N(u,v) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v) = \begin{vmatrix} \vec{i} & -\sin u & 0 \\ \vec{j} & \cos u & 0 \\ \vec{K} & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos u\,\vec{i} + \sin u\,\vec{j} = (\cos u, \sin u, 0)$$

2 - $x^2+y^2+z^2=1$



$$\begin{cases} x = \cos\theta \sin\varphi & 0 < \theta \le 2\pi \\ y = \sin\theta\sin\varphi & 0 < \varphi < \pi \\ z = \cos\varphi \end{cases} \qquad (\varphi, \theta) \in \mathbb{R}^2$$

$$|J\sigma(\theta,\varphi)| = \begin{vmatrix} \vec{i} & -\sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi \\ \vec{j} & \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi \\ \vec{K} & 0 & -\sin\varphi \end{vmatrix} = \vec{i}(-\cos\theta\sin^2\varphi) - \vec{j}(\sin\theta\sin^2\varphi) + \vec{K}(-\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi - \cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi) =$$

$$= (-\cos\theta\sin^2\varphi, -\sin\theta\sin^2\varphi, -\sin\varphi\cos\varphi) = \vec{N}(\theta,\varphi)$$

$\varphi = 0, \pi \to \vec{N}$ non è definito $\Rightarrow$ questa non è una buona parametrizzazione

non importante in questo caso

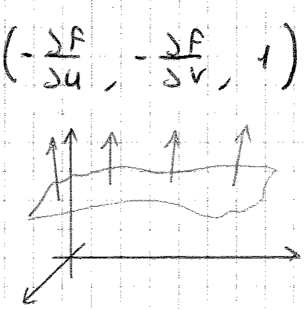
3 - $z = f(x,y)$ con f di classe C^1

$(x,y) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$ $\quad$ A aperto, $\neq 0$, connesso

$$\begin{cases} x = u = \sigma_1(u,v) \\ y = v = \sigma_2(u,v) \\ z = f(u,v) = \sigma_3(u,v) \end{cases} \qquad (u,v) \in A$$

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & 1 & 0 \\ \vec{j} & 0 & 1 \\ \vec{K} & \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial u}\vec{i} - \frac{\partial f}{\partial v}\vec{j} + \vec{K} = \left(-\frac{\partial f}{\partial u}, -\frac{\partial f}{\partial v}, 1\right)$$

$$\vec{N}(x,y) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial f}{\partial y}(x,y), 1\right)$$



Cambiamento di parametrizzazione

$A' \xrightarrow{\phi} A$ $\quad$ ϕ cambiamento di variabili su $\mathbb{R}^2$

$\phi \in C^1(A')$, $\det J\phi \neq 0$ su A

$\sigma : A \to \mathbb{R}^3$ superficie regolare

$\delta : A' \to \mathbb{R}^3$ superficie regolare

σ e δ differiscono per un cambiamento di parametrizzazione se:

$\exists\, \phi : A' \to A$ cambiamento di variabili regolare tale che

$$\delta(s,t) = \sigma(\phi(s,t)) \quad \forall (s,t) \in A'$$

$$\begin{tikzcd} \overset{(s,t)}{A'} \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\delta"'] & \overset{(u,v)}{A} \arrow[d, "\sigma"] \\ & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

Proprietà:

1 - $\delta(A') = \sigma(A)$ $\to$ stesso sostegno

2 - σ è regolare $\Leftrightarrow$ δ è regolare

3 - σ è iniettiva $\Leftrightarrow$ δ è iniettiva

4 - $\vec{N}_\delta(s,t) = \frac{\partial \delta}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial \delta}{\partial t}(s,t)$

$$\det J\phi(s,t) \cdot N_\sigma(\phi(s,t)) = \left(\det J\phi(s,t)\right) \cdot \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}(\phi(s,t)) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\phi(s,t))\right)$$

a - se $\det J\phi(s,t) > 0 \quad \forall (s,t) \in A'$

se lo è in un punto lo è dappertutto

$\Rightarrow$ $\vec{N}_\delta$ e $\vec{N}_\sigma$ hanno lo stesso verso e le superfici hanno lo stesso orientamento

b - se $\det J\phi(s,t) < 0 \quad \forall (s,t) \in A'$

$\Rightarrow$ $\vec{N}_\delta$ e $\vec{N}_\sigma$ hanno verso opposto e le superfici hanno orientamento opposto

$\boxed{\text{TH}}$ · σ e δ sono calotte superficiali regolari che differiscono per un cambiamento di parametrizzazione

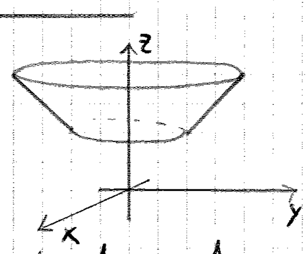
· $f : \Omega \to \mathbb{R}$ continua

$$\Rightarrow \int_\sigma f \, d\sigma = \int_\delta f \, d\sigma$$

08\11

EX.

1 - $F(x,y,z) = 3x^2 + 5y^2$ $\qquad$ $\Sigma = \begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ 1 \le z \le 2 \end{cases}$



posso descrivere la superficie in forma cartesiana perché l'integrale non dipende dall'orientamento

$\int_\Sigma (3x^2 + 5y^2)\, dx\, dy$ $\qquad$ $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = \sqrt{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta} = \rho \end{cases}$ $\quad$ $1 \le \rho \le 2$, $\quad 0 \le \theta \le 2\pi$

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$

$1 < z < 2$

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \gamma_1'(t)\cos\theta & -\gamma_1(t)\sin\theta \\ \vec{j} & \gamma_1'(t)\sin\theta & \gamma_1(t)\cos\theta \\ \vec{k} & \gamma_2'(t) & 0 \end{vmatrix} = -\gamma_1(t)\gamma_2'(t)\cos\theta\,\vec{i} - \gamma_1(t)\gamma_2'(t)\sin\theta\,\vec{j} + \vec{k}\left(\gamma_1(t)\gamma_1'(t)\cos^2\theta + \gamma_1(t)\gamma_1'(t)\sin^2\theta\right) =$$

$$= -\gamma_1(t)\gamma_2'(t)\cos\theta\,\vec{i} - \gamma_1(t)\gamma_2'(t)\sin\theta\,\vec{j} + \gamma_1(t)\gamma_1'(t)\,\vec{k}$$

$$\|\vec{N}(t,\theta)\|^2 = \gamma_2'(t)^2\gamma_1(t)^2\cos^2\theta + \gamma_2'(t)^2\gamma_1(t)^2\sin^2\theta + \gamma_1(t)^2\gamma_1'(t)^2 =$$

$$= \gamma_2'(t)^2\gamma_1(t)^2 + \gamma_1(t)^2\gamma_1'(t)^2 = \gamma_1(t)^2\left(\gamma_2'(t)^2 + \gamma_1'(t)^2\right) =$$

$$= \gamma_1(t)^2\|\gamma'(t)\|^2 \qquad \gamma_1(t) \geq 0 \text{ per ipotesi}$$

$$\Rightarrow \|\vec{N}(t,\theta)\| = \gamma_1(t)\,\|\gamma'(t)\|$$

$$\text{Area}(\Sigma) = \int_K \|N(t,\theta)\|\,dt\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_a^b \gamma_1(t)\|\gamma'(t)\|\,dt\,d\theta = 2\pi\int_a^b \gamma_1(t)\|\gamma'(t)\|\,dt$$

integrale di linea di $f(x,y,z) = x$ $\quad f(\gamma(t)) = \gamma_1(t)$

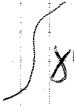
$x = \gamma_1(t) \qquad y = 0 \qquad z = \gamma_2(t)$

$$2\pi\int_\gamma x\,ds = 2\pi\int_a^b \gamma_1(t)\|\gamma'(t)\|\,dt$$

L'area della superficie che si ottiene facendo ruotare la curva γ (curva nel piano xz con $x \geq 0$) intorno all'asse è uguale a:

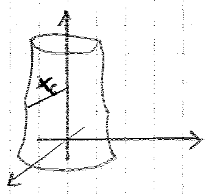
$2\pi\int_\gamma x\,ds \to$ integrale di linea su γ di $f(x,y,z) = x$

II teorema di Guldino:



$\gamma(t)$

$$x_G = \frac{1}{L(\gamma)}\int_\gamma x\,ds \qquad \int_\gamma x\,ds = x_G\,L(\gamma)$$



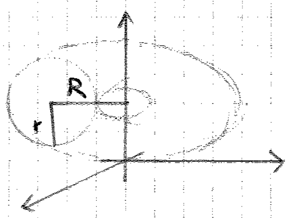
$\Rightarrow$ Area (superficie rotazione) $= 2\pi\,L(\gamma)\cdot x_G = (2\pi x_G)\,L(\gamma)$

area di un cilindro di raggio x_G e altezza $L(\gamma)$

L'area della superficie generata dalla rotazione di una curva γ (contenuta nel semipiano xz, $x \geq 0$) intorno all'asse z è uguale alla lunghezza di γ moltiplicata per la lunghezza della circonferenza di raggio x_G

Ex.

1-

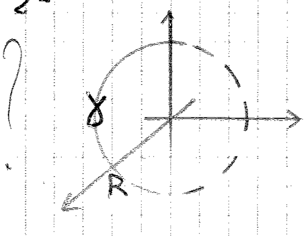


Area della superficie torica di raggio r

$x_G = R$

$$\text{Area}(\text{toro}) = 2\pi x_G\,L(\gamma) = 2\pi R\,2\pi r = 4\pi^2 rR$$

2-



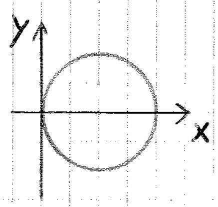
Area di una sfera di raggio r

γ : semicirconferenza

Area(sfera) $= 2\pi x_G L(\gamma) = 2\pi R\,(2$

11\11

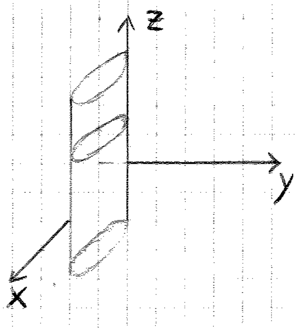
Ex.



1- $F(x,y,z) = (x, zy^2, yz)$

$\Sigma : \{ (x-1)^2 + y^2 = 1,\ 1 \leq z \leq 2 \}$

orientata in senso uscente da Σ



$$\begin{cases} x = 1 + \cos\theta \\ y = \sin\theta \\ z = t \end{cases} \qquad (x-1)^2 + y^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$K : \begin{cases} 1 \leq t \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\vec{N}(\theta, t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & -\sin\theta & 0 \\ \vec{j} & \cos\theta & 0 \\ \vec{k} & 0 & 1 \end{vmatrix} = \underbrace{\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}}_{us}$$

$$F(\sigma(\theta, t)) = (1 + \cos\theta,\ t\sin^2\theta,\ t\sin\theta)$$

$$F(\sigma(\theta, t)) \cdot \vec{N}(\theta, t) = \cos\theta + \cos^2\theta + t\sin^3\theta$$

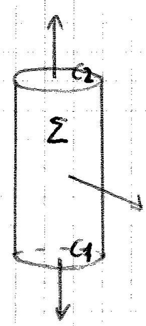
$$\phi = \iint_K \vec{F}(\sigma(\theta,t)) \cdot \vec{N}(\theta,t)\, dt\, d\theta = \int_1^2 \int_0^{2\pi} (\cos\theta + \cos^2\theta + t\sin^3\theta)\, d\theta\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos\theta + \cos^2\theta)\, d\theta \int_1^2 dt + \int_0^{2\pi} \sin^3\theta\, d\theta \cdot \int_1^2 t\, dt =$$

$$= -\sin\theta + \frac{\theta + \sin\theta\cos\theta}{2} \Big]_0^{2\pi} \cdot t \Big]_1^2 + \frac{t^2}{2}\Big]_1^2 \cdot \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2\theta)\sin\theta\, d\theta =$$

$$= \pi + \left(2 - \frac{1}{2}\right) \cdot \underbrace{\left[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3} \right]_0^{2\pi}}_{0} = \pi$$

2- Integrale di flusso uscente dal bordo del solido



$V : \{ (x-1)^2 + y^2 \leq 1,\ 1 \leq z \leq 2 \} \qquad F(x,y,z) = (x, zy^2, zy)$

$$\phi = \int_{\partial V} F \cdot \vec{N} = \int_{\Sigma} F \cdot \vec{N} + \int_{C_1} F \cdot \vec{N} + \int_{C_2} F \cdot \vec{N}$$

$$C_1 : \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \\ z = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 + \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = 1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{matrix}$$

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \vec{j} & \sin\theta & \rho\cos\theta \\ \vec{k} & 0 & 0 \end{vmatrix} = (\rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta)\vec{k} = \rho\vec{k} \quad \rho > 0$$

C_1: $\vec{N} = -\rho\vec{K}$ ⇐ verso sbagliato

$$C_2 : \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \\ z = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 + \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = 2 \end{cases} \qquad \vec{N} = \rho\vec{K}$$

$\int_{C_1} F \cdot \vec{N} \qquad \vec{N} = (0, 0, -\rho) \Rightarrow F \cdot \vec{N} = (\dots, \dots, \rho\sin\theta) \cdot (0, 0, -\rho) = -\rho^2\sin\theta$

$\int_{C_2} F \cdot \vec{N} \qquad \vec{N} = (0, 0, \rho) \Rightarrow F \cdot \vec{N} = (\dots, \dots, 2\rho\sin\theta) \cdot (0, 0, \rho) = 2\rho^2\sin\theta$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 136

$df(x_0)h = f'(x_0)\cdot h$ → forma utilizzata negli integrali

$df(x_0) = f'(x_0)\,dx \qquad dx(h) = h$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

ω è una 1-forma differenziale in $\mathbb{R}^n$

$\omega = f_1(x)\,dx_1 + \dots + f_n(x)\,dx_n$

$x \to \{$applicazione lineare $f_1(x)dx_1 + \dots + f_n(x)dx_n\}$

$F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) \longleftrightarrow \underbrace{f_1dx_1 + \dots + f_ndx_n}_{\text{base del campo vettoriale}}$

$$\gamma(t) = \begin{cases} x_1 = \gamma_1(t) \\ \vdots \\ x_n = \gamma_n(t) \end{cases} \to \begin{cases} dx_1 = \gamma_1'(t) \\ \vdots \\ dx_n = \gamma_n'(t) \end{cases}$$

$$\int_\gamma F\cdot dP = \int_\gamma \left(F_1(\gamma(t))\cdot\gamma_1'(t) + \dots + F_n(\gamma(t))\cdot\gamma_n'(t)\right)dt =$$

$$= \int_\gamma (F_1(\gamma(t))\,dx_1 + \dots + F_n(\gamma(t))\,dx_n) = \int\omega$$

$\omega = F_1dx_1 + \dots + F_ndx_n \qquad \gamma = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$

$$\int_\gamma F\cdot dP = \int_\gamma \omega = \int_\gamma F_1dx_1 + \dots + F_ndx_n$$

$$\left.\begin{aligned} dx_1 &= \gamma_1'(t)\,dt \\ &\vdots \\ dx_n &= \gamma_n'(t)\,dt \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \int_a^b F_1(\gamma(t))\gamma_1'(t)\,dt + \dots + F_n(\gamma(t))\gamma_n'(t)\,dt$$

Ex.

$f(x,y): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad \gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^2 \qquad \omega = f\,dx + 0\,dy$

$$\int_\gamma f\,dx = \int_\gamma (f,0)\cdot dP = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma_1'(t)\,dt + \cancel{0\cdot\gamma_2'(t)\,dt}$$

$\omega_2 = 0\,dx + g\,dy \qquad \int_\gamma g\,dy = \int_\gamma 0\,dx + g\,dy = \int_\gamma (0,g)\cdot dP$

$F = (F_1, \dots, F_n) \longleftrightarrow F_1dx_1 + \dots + F_ndx_n$

$(f,0) \longleftrightarrow f\,dx + 0\,dy = f\,dx$

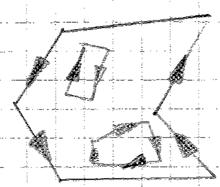
$\boxed{\text{DEF.}}$ ~~· $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, limitato, misurabile, $\neq 0$~~

~~· ∂A = unione di un numero finito di curve chiuse e regolari a tratti~~

~~$\Rightarrow A$ è un aperto con bordo~~ DOPO

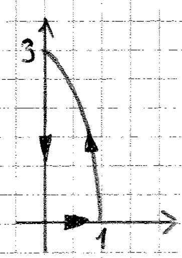
$\boxed{\text{DEF.}}$ · $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto con bordo

∂A è orientato positivamente se un osservatore di cammino su ∂A vede A alla sua sinistra



EX.

1- $\int_\gamma (e^{x^2}-y)\,dx + \left(\frac{x^4}{4}+e^y\right)dy$



lungo γ bordo orientato positivamente di

$A = \{(x,y) : 9x^2+y^2 \le 9,\ x\ge 0,\ y \ge 0\}$ → quarto d'ellisse

$x^2 + \frac{y^2}{9} \le 1 \quad a=1 \quad b=3$

$(F_1, F_2)(x,y) = \left(e^{x^2}-y,\ \frac{x^4}{4}+e^y\right) \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{4x^3}{4} + 1 = x^3+1$

$\int_{\partial A = \gamma} F \cdot dP = \iint_A (x^3+1)\,dx\,dy = \qquad \begin{cases} x = \rho\cos\theta & 0 \le \rho \le 1 \\ y = 3\rho\sin\theta & 0 \le \theta \le \pi/2 \end{cases}$

$= \int_0^1\int_0^{\pi/2} (\rho^3\cos^3\theta - 1)\, 3\rho\, d\rho\, d\theta =$

$= 3\int_0^1\int_0^{\pi/2} (\rho^4\cos^3\theta - \rho)\,d\rho\,d\theta = 3\frac{\rho^5}{5}\Big]_0^1 \int_0^{\pi/2}\cos\theta(1-\sin^2\theta) - 3\frac{\rho^2}{2}\Big]_0^1 \frac{\pi}{2} =$

$= \frac{3}{5}\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2\theta)\cos\theta - \frac{3}{4}\pi = \frac{3}{5}\left[\sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3}\right]_0^{\pi/2} - \frac{3}{4}\pi = \frac{2}{5} - \frac{3}{4}\pi$

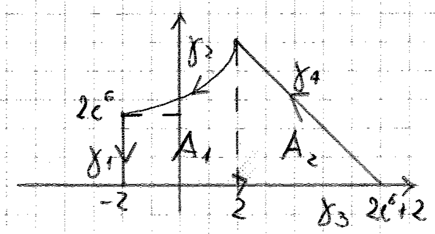
2- $F = (-3y, 2x) \qquad \gamma$ curva chiusa orientata in senso antiorario

$\gamma_1:\ y = 2e^{3x} \quad -2 \le x \le 2$

$\gamma_2:\ x = -2 \quad 0 \le y \le 2e^{-6}$

$\gamma_3:\ y = 0 \quad -2 \le x \le 2e^6+2$

$\gamma_4:\ x+y = 2+2e^6 \quad 2 \le x \le 2+2e^6$



$\int_\gamma (-3y, 2x)\cdot dP = \iint_A \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dx\,dy = \iint_A (2+3)\,dx\,dy = 5\underbrace{\iint_A dx\,dy}_{Area(A)}$

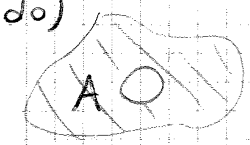
A_2: triangolo di base $2e^6$ e altezza $2e^6$

$\Rightarrow$ area $= 2e^6 \cdot 2e^6 \cdot \frac{1}{2} = 2e^{12}$

$A_1:\ -2 \le x \le 2 \qquad 0 \le y \le 2e^{3x}$

$5\iint_A 1\,dx\,dy = 5\left[area(A_2) + \int_{-2}^2 2e^{3x}dx\right] = 5\left(2e^{12} + \frac{2}{3}e^{3x}\Big]_{-2}^2\right) = 5\left(2e^{12} + \frac{2}{3}(e^6 - e^{-6})\right)$

Per calcolare l'area di A (se A è aperto con bordo) si considera un campo F tale che $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1$



$\Rightarrow m(A) = \iint_A 1\,dx\,dy = \iint_A \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dx\,dy = \int_{\partial A} F \cdot dP$

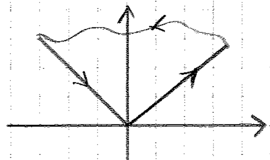
misura

∂A orientato positivamente

$F(x,y) = (0, x) \qquad F(x,y) = (-y, 0) \qquad F(x,y) = \left(-\frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x\right)$

EX.

1-



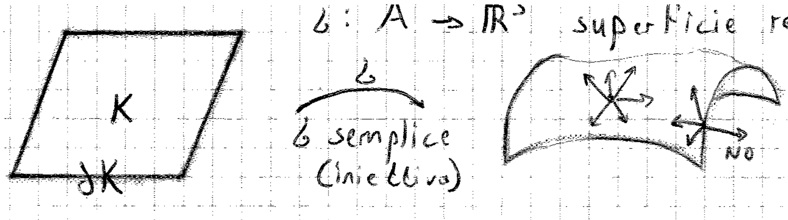
$\rho = \rho(\theta) \qquad \theta_1 < \theta < \theta_2 \qquad 0 \le \rho \le \rho(\theta)$

$F(x,y) = \left(-\frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x\right)$

$m(A) = \iint_A dx\,dy = \int_{\partial A} F(x,y)\cdot dP = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2(\theta)\cdot d\theta$

il contributo dei due segmenti è nullo

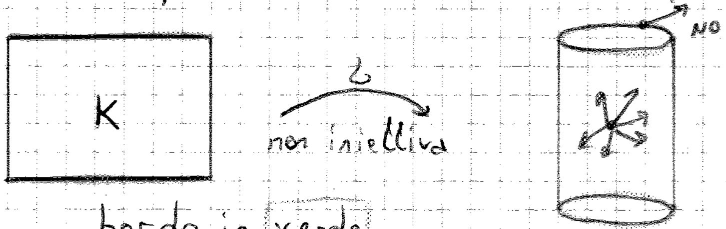
$\sigma : A \to \mathbb{R}^3$ superficie regolare



$\partial\sigma = \sigma(\partial K)$

Il bordo di σ è l'insieme dei punti del sostegno di σ in cui un osservatore non può muoversi in tutte le direzioni rimanendo sul sostegno di σ

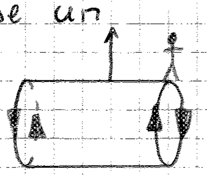
↳ una superficie chiusa è una superficie priva di bordo



bordo in verde

$\Rightarrow$ non per forza tutto il bordo di K (∂K) si trasforma in bordo di σ ($\partial\sigma$)

DEF. Una calotta superficiale σ con bordo $\partial\sigma$ e orientamento fissato $\vec{n}$ ha bordo $\partial\sigma$ orientato positivamente se un osservatore orientato come il vettore normale $\vec{n}$ che si muove sul bordo di σ vede il sostegno di σ alla sua sinistra



↳ $\partial\sigma$ è l'unione di un numero finito di curve chiuse, semplici, regolari a tratti con i sostegni disgiunti

TH Teorema di Stokes

- $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ campo vettoriale su Ω aperto, $\neq 0$
- $F \in C^1(\Omega)$
- $\sigma : K \to \Omega$ calotta superficiale orientata con bordo
- $\partial\sigma$ orientato positivamente

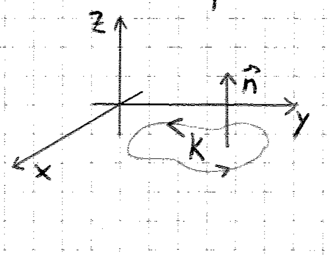
$$\Rightarrow \int_{\partial\sigma} F \cdot dP = \int_{\sigma} \operatorname{rot}\vec{F} \cdot \vec{n}$$

↳ unione di curve ↳ insieme bidimensionale

15\11

Posso interpretare il TH di Green come il TH di Stokes nel caso in cui σ sia una superficie con il sostegno $\subseteq$ piano xy

$K \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto con bordo



$$\sigma : \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 0 \end{cases} \qquad (x, y) \in K$$

$$F(x, y) = (F_1(x,y), F_2(x,y), 0)$$

$$\int_{\partial\sigma} F \cdot dP = \int_{\sigma} \operatorname{rot}\vec{F} \cdot \vec{n} \qquad \partial\sigma = \partial K$$

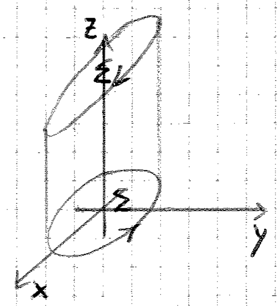
$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} -\sin^3\theta\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta = 0$$ → perché $\sin^3\theta$ è dispari

$$\int_0^{2\pi} \cos^3\theta\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} (1-\sin^2\theta)\cos\theta\, d\theta = 2\int_0^{\pi} (1-\sin^2\theta)\cos\theta\, d\theta =$$

$$= 2\int_0^{\pi} (\cos\theta - \sin^2\theta\cos\theta)\, d\theta = 2\left[\sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3}\right]_0^{\pi} = 0$$

$$\Rightarrow \int_\Sigma \mathrm{rot}F\cdot\vec{n} = 0$$

2- Σ: intersezione fra $x^2+y^2=1$ e $z=0$ e $x+\frac{y}{2}+z=3$
orientato in senso uscente



$$\oint_{\partial\Sigma} z^2dx + xyz\,dy + 2xz\,dz = \int_{\partial\Sigma} (z^2, xyz, 2xz)\cdot dP$$

$$\int_{\partial\Sigma} F\cdot dP = \int_\Sigma \mathrm{rot}F\cdot\vec{n}$$

$$\begin{cases} x = \cos\theta & 0\le\theta<2\pi \\ y = \sin\theta & 0\le t\le 3-(x+\frac{y}{2}) \\ z = t & 0\le t\le 3-(\cos\theta+\frac{\sin\theta}{2}) \end{cases}$$

$$\mathrm{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \partial/\partial x & z^2 \\ \vec{j} & \partial/\partial y & xyz \\ \vec{k} & \partial/\partial z & 2xz \end{vmatrix} = (-xy, -(2z-2z), yz) = (-xy, 0, yz)$$

$\vec{N} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$ → calcolato precedentemente

$$\int_\Sigma \mathrm{rot}F\cdot\vec{n} = \iint_K (-\cos\theta\sin\theta, 0, t\sin\theta)\cdot(\cos\theta,\sin\theta,0)\,d\theta\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{3-(\cos\theta+\frac{\sin\theta}{2})} -\cos^2\theta\sin\theta\, dt\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\Big(-3\cos^2\theta\sin\theta + \overset{\text{dispari}}{\cos^3\theta\sin\theta} + \frac{1}{2}\cos^2\theta\sin^2\theta\Big)d\theta$$

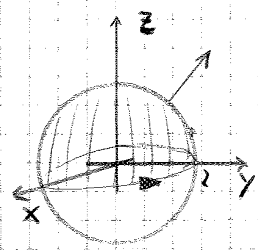
$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta\, d\theta = \int_0^{\pi}(\cos\theta\sin\theta)^2 d\theta = \qquad 2\cos\theta\sin\theta = \sin 2\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi}\sin^2 2\theta\, d\theta = \qquad 2\theta = u \quad du = 2d\theta \quad d\theta = \frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\sin^2 u\, du = \frac{1}{8}\left[\frac{u-\sin u\cos u}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{8}$$

3- $F(x,y,z) = \left(-\frac{1}{8}x^2y, \frac{1}{8}x^3+z^2, \arctan e^{x+y+z}\right)$

Flusso del rotore attraverso $\Sigma: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ z\ge 0 \end{cases}$
Flusso uscente dalla sfera



$$\int_\Sigma \mathrm{rot}F\cdot\vec{n} = \int_{\partial\Sigma} F\cdot dP \qquad \gamma: \begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \\ z = 0 \end{cases}$$

$$F(\gamma(\theta))\cdot\gamma'(\theta) = \left(-\tfrac{1}{8}4\cos^2\theta\, 2\sin\theta, \tfrac{1}{8}\cdot 8\cos^3\theta, \dots\right)\cdot(-2\sin\theta, 2\cos\theta, 0) =$$

$$= 2\cos^2\theta\sin^2\theta + \underbrace{2\cos^4\theta} \to \cos^2\theta\cos^2\theta = (1-\sin^2\theta)\cos^2\theta$$

$$\Rightarrow \cancel{2\cos^2\sin^2\theta} + 2\cos^2\theta - \cancel{2\cos^2\sin^2\theta} = 2\cos^2\theta$$

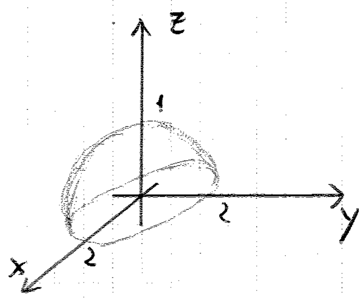
$$\int_S \mathrm{rot}F\cdot\vec{n} = \int_{\partial S} F\cdot dP = \int_0^{2\pi} 2\cos^2\theta\, d\theta = 2\left[\frac{\theta+\cos\theta\sin\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 2\pi$$

$$= \iint \rho^3 t + \frac{t^3}{3}\rho \Big]_{\rho^2}^{1} d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(\rho^3 + \frac{\rho}{3} - \rho^5 - \frac{1}{3}\rho^7\right) d\rho\, d\theta =$$

$$= 2\pi \left[\frac{\rho^4}{4} + \frac{\rho^2}{6} - \frac{\rho^6}{6} - \frac{\rho^8}{24}\right]_0^1 = 2\pi\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{24}\right) = \frac{5}{12}\pi$$

2- Flusso di $F(x,y,z) = (xz, y, -2)$ attraverso

$$\Sigma: \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{4} + z^2 = 1 \\ z \geq 0 \end{cases}$$



$$\partial K = \Sigma \cup \left\{ \frac{x^2+y^2}{4} \leq 1,\ z = 0 \right\}$$

$$\int_{\partial K} F\cdot\vec{n} = \iiint_K \operatorname{div}F\, dx\,dy\,dz = \int_\Sigma F\cdot\vec{n} + \int_C F\cdot\vec{n}$$

$$\int_\Sigma F\cdot\vec{n} = \iiint_K \operatorname{div}F\, dx\,dy\,dz - \int_C F\cdot\vec{n} \qquad K: \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2 \leq 1 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

$$\iiint_K \operatorname{div}F\, dx\,dy\,dz = \iiint_K (z+1)\, dx\,dy\,dz$$

per strati: $0 \leq z \leq 1$ $\quad K_z: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} \leq 1 - z^2 \quad x^2 + y^2 \leq 4 - 4z^2$

$$\int_0^1 \left(\iint_{K_z} (z+1)\, dx\,dy\right) dz = \int_0^1 (z+1)\cdot\Big(\underbrace{\iint_{K_z} dx\,dy}_{\text{area di } K_z}\Big) dz = \int_0^1 (z+1)\pi\cdot 4(1-z^2) =$$

$$= \int_0^1 4\pi(1-z^2)(z+1)\, dz = 4\pi\int_0^1 (z - z^2 + 1 - z^3)\, dz = 4\pi\left[\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} + z - \frac{z^4}{4}\right]_0^1 =$$

$$= 4\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{11}{3}\pi$$

$$C: \left\{ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} \leq 1,\ z = 0 \right\} \quad x^2 + y^2 \leq 4 \qquad R: \begin{cases} x = \rho\cos\theta & 0 \leq \rho \leq 2 \\ y = \rho\sin\theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \vec{j} & \sin\theta & \rho\cos\theta \\ \vec{k} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}(\rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta) = \underbrace{\rho\vec{k}}_{\text{verso sbagliato}} \qquad \vec{N} = -\rho\vec{k} = (0,0,-\rho)$$

$$\int_C F\cdot\vec{n} = \int_R (\rho\cos\theta\cdot 0, \rho\sin\theta, -2)\cdot(0,0,-\rho)\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^2 2\rho\, d\rho\, d\theta =$$

$$= 2\pi\left(\frac{2\rho^2}{2}\Big]_0^2\right) = 2\pi\cdot 4 = 8\pi \implies \int_\Sigma F\cdot\vec{n} = \frac{11}{3}\pi - 8\pi = -\frac{13}{3}\pi$$

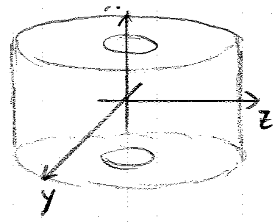
3- $F(x,y,z) = (2x^3 - 10, 2y^3, e^{z/2})$ $\quad \operatorname{rot}F$?

$\int_\gamma F\cdot dP$ dove $\gamma = \{x^2+y^2 = 4,\ z = 4\}$ in senso antiorario

$$\operatorname{rot}F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \partial/\partial x & 2x^3 - 10 \\ \vec{j} & \partial/\partial y & 2y^3 \\ \vec{k} & \partial/\partial z & e^{z/2} \end{vmatrix} = \vec{i}(0-0) - \vec{j}(0-0) + \vec{k}(0-0) = 0$$

$$C = \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ z = 4 \end{cases} \qquad \text{Stokes: } \int_{\gamma = \partial C} F\cdot dP = \int_C \operatorname{rot}F\cdot\vec{n} = \int_C 0\cdot\vec{n} = 0$$

$\iiint_D \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz \quad \begin{cases} y=\rho\cos\theta \\ z=\rho\sin\theta \\ x=t \end{cases} \quad D': \begin{cases} -1\le t\le 1 \\ 1\le\rho\le 3 \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$



$$\iiint_D \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D'} \frac{1}{\rho^2+t^2}\,\rho\, d\rho\, dt\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} \cdot \frac{1}{2}\log(\rho^2+t^2)\Big]_1^3\, dt\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}\log(t^2+9)-\frac{1}{2}\log(t^2+1)\right)dt\,d\theta = \dots$$

$$\int \log(a+t^2)\,dt = t\log(a+t^2) - 2t + 2\arctan t + c$$

22\11

Campi conservativi

- $F: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\quad\Omega$ aperto, $\neq 0$
- F continuo su Ω

F è conservativo su Ω se:

$$\exists g: \Omega \to \mathbb{R},\ g\in C^1(\Omega): \nabla g(x) = F(x) \quad \forall x\in\Omega$$

g campo scalare

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(x) = F_1(x), \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n}(x) = F_n(x) \quad \forall x\in\Omega$$

g è un potenziale di F su Ω

$\omega = F_1dx_1 + \dots + F_ndx_n \to$ Forma differenziale di F

campo conservativo $\to \omega = \frac{\partial g}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial g}{\partial x_n}dx_n \to$ Forma esatta

F è campo conservativo $\Leftrightarrow$ ω è 1-forma esatta

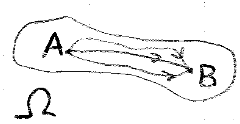
PROP. Se g è un potenziale di F su Ω
$\Rightarrow \forall K\in\mathbb{R}$, $g(x)+K$ è ancora un potenziale di F

DIM. g è un potenziale di F su $\Omega \Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = F_i(x)$ $\quad \forall x\in\Omega$, $\forall i=1,\dots,n$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(g(x)+K) = \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = F_i(x) \quad \forall x\in\Omega$$

QDE

PROP.
- Ω aperto, $\neq 0$, connesso $\longrightarrow$



- $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ campo conservativo su Ω
- $g: \Omega\to\mathbb{R}$ potenziale di F su Ω
- $\gamma: [a,b]\to\Omega$ $\quad \gamma(a)=A \quad \gamma(b)=B \quad \gamma$ regolare

$\Rightarrow \int_\gamma F\cdot dP = g(B)-g(A) \to$ non dipende dalla curva data

analogia con $\int_a^b f(x)\,dx = G(b)-G(a) \to G(x)$ primitiva

DIM.

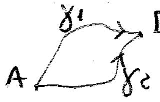
γ regolare $\quad h(t) = g(\gamma(t)): [a,b]\to\mathbb{R}$ di classe $C^1(a,b)$

$h'(t) = \nabla g(\gamma(t))\cdot\gamma'(t) = F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)$ $\qquad$ perché γ è regolare

DIM. ① campo conservativo $\overset{\text{già fatta}}{\Longrightarrow}$ ② $\int_\gamma F \cdot dP$
$\Longleftarrow$

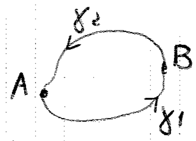
$\oint F \cdot dP = 0$ ③ $\Uparrow\Downarrow$ → se dimostriamo le 3 mancanti segue che ① ⟺ ③

② ⟹ ③



So che $\int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_{\gamma_2} F \cdot dP$

devo dimostrare che $\forall \gamma$ chiusa, $\oint F \cdot dP = 0$



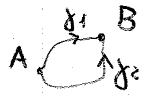
prendo γ curva chiusa → A, B e sostegno di γ

$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ $\quad \int_\gamma F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP + \int_{\gamma_2} F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP - \int_{-\gamma_2} F \cdot dP = 0$

$\int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_{-\gamma_2} F \cdot dP$ ⟸ curva da A a B $\quad$ curva da A a B

QDE

③ ⟹ ②



devo dimostrare che se $\oint_\gamma F \cdot dP = 0 \Rightarrow \int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_{\gamma_2} F \cdot dP$

γ_1 e γ_2 curve che uniscono A a B

$\gamma_1 - \gamma_2 = \gamma$ curva chiusa → da A a B, poi da B ad A

$$\oint_\gamma F \cdot dP = 0 = \int_{\gamma_1 - \gamma_2} F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP + \int_{-\gamma_2} F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP - \int_{\gamma_2} F \cdot dP$$

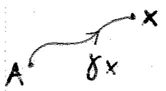
$$\int_{\gamma_1} F \cdot dP - \int_{\gamma_2} F \cdot dP = 0 \Rightarrow \int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_{\gamma_2} F \cdot dP$$

QDE

② ⟹ ①

So che $\forall$ curva che unisce A a B (sostegno $\subseteq \Omega$) $\int_\gamma F \cdot dP$ è lo stesso

Fisso $A \in \Omega$, prendo $x \in \Omega$ e chiamo $\gamma(x)$ una $\forall$ curva che unisce A a x (sostegno $\subseteq \Omega$)



$g(x) = \int_{\gamma_x} F \cdot dP$ $\quad$ voglio dimostrare che $g(x)$ è un potenziale di F su Ω (⟹ F è conservativo su Ω)

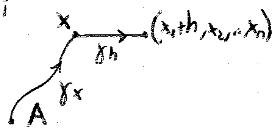
dipende solo dall'estremo (x)

cioè $\nabla g(x) = F(x) \quad \forall x \in \Omega$

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = F_i(x) \quad \forall x \in \Omega, \forall i = 1, \dots, n$$

dimostriamo che $\frac{\partial g}{\partial x_1}(x) = F_1(x) \quad \forall x \in \Omega$ → le altre componenti seguono

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x_1 + h, x_2, \dots, x_n) - g(x_1, x_2, \dots x_n)}{h}$$ → se la derivata parziale di $g(x)$ esiste è così



$\gamma_h = (x_1 + t, x_2, \dots, x_n) \quad 0 \le t \le h$ (se $h \ge 0$)

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\int_{\gamma_x + \gamma_h} F \cdot dP - \int_{\gamma_x} F \cdot dP}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_{\gamma_x} F \cdot dP + \int_{\gamma_h} F \cdot dP - \int_{\gamma_x} F \cdot dP\right] =$$

$$= \frac{1}{h} \int_{\gamma_h} F \cdot dP = \frac{1}{h} \int_0^h F(x_1 + t, x_2, \dots, x_n) \cdot (1, 0, \dots, 0)\, dt =$$

25\11

$\boxed{TH}$ - $F \in C^1(\Omega)$, Ω aperto, $\neq 0$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$
- F è conservativo su Ω $\qquad F = (F_1, \dots, F_n)(x_1, \dots, x_n)$

$$\Rightarrow \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) \quad i,j = 1, \dots, n$$

OSS.
in particolare: se $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \Rightarrow \operatorname{rot} F(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \partial/\partial x & F_1 \\ \vec{j} & \partial/\partial y & F_2 \\ \vec{k} & \partial/\partial z & F_3 \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) - \vec{j}\left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) =$$

$$= \vec{i}(0) - \vec{j}(0) + \vec{k}(0) = 0 \text{ su } \Omega \iff \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \text{ su } \Omega \quad i,j = 1,2,3$$

DIM.
Se F è conservativo su $\Omega \Rightarrow \exists g$ potenziale di F su Ω
cioè $\exists g$: $\nabla g(x) = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n}\right)(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))$

$$\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x_i} \in C^1(\Omega) \Rightarrow g \in C^2(\Omega) \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$\Rightarrow$ vale il TH di Schwarz, cioè $\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_i}(x) \quad \forall x \in \Omega$

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)(x) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_i}(x)$$
sono uguali per il TH di Schwarz
$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial g}{\partial x_j}\right)(x) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$
indispensabile che $F \in C^1(\Omega)$

$$\Rightarrow \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x)$$

QDE

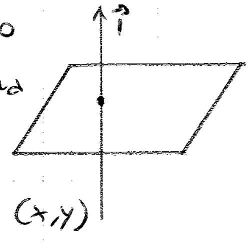
$\boxed{DEF}$ F è irrotazionale su Ω se $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) \quad \forall x \in \Omega \quad \forall i,j = 1, \dots, n$

$\Rightarrow$ TH precedente dice che se F è conservativo e di classe C^1 su Ω
$\Rightarrow F$ è irrotazionale

$\boxed{COR}$ se $F \in C^1(\Omega)$ e F non è irrotazionale, cioè:
$$\exists x \in \Omega, \exists i,j = 1, \dots, n : \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) \neq \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x)$$
$\Rightarrow F$ non è conservativo

OSS.
$\exists$ campi con $\operatorname{rot} F = 0$ che NON sono conservativi

EX.
$$F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$
$\to$ campo creato da un filo percorso da corrente continua



$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \frac{-(x^2+y^2) - (-y)2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = \frac{x^2+y^2-x(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$$

$\boxed{\text{in } \mathbb{R}^3}$ voglio far vedere che $\forall\gamma$ curva chiusa semplice con il sostegno $\subseteq \Omega$, $\int_\gamma F\cdot dP = 0$

prendo γ curva chiusa semplice; poiché Ω è semplicemente connesso $\exists\, \sigma : K \to \mathbb{R}^3$ calotta superficiale con bordo di cui γ è il bordo

TH di Stokes: $\int_{\gamma=\partial\sigma} F\cdot dP = \int_\sigma \operatorname{rot} F \cdot \vec{n} = 0$ perché $\operatorname{rot} F = 0$

$\Rightarrow F$ è conservativo QDE

se Ω non è semplicemente connesso, può essere che γ non sia uguale al bordo di σ

Ex.

1- $F(x,y,z) = (2xy + yz - 2xz,\ x^2 + xz + z,\ xy - x^2 + y + z)$

dom $F = \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ semplicemente connesso

$F \in C^\infty(\mathbb{R}^3) \Rightarrow$ se F è irrotazionale allora F è conservativo

$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2x + z \qquad \frac{\partial F_2}{\partial y} = 2x + z \Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ su $\mathbb{R}^3$

$\frac{\partial F_1}{\partial z} = y - 2x \qquad \frac{\partial F_3}{\partial x} = y - 2x \Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}$ su $\mathbb{R}^3$

$\frac{\partial F_2}{\partial z} = x + 1 \qquad \frac{\partial F_3}{\partial y} = x + 1 \Rightarrow \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}$ su $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow F$ è irrotazionale $\Rightarrow F$ è conservativo su $\mathbb{R}^3$ semplicemente connesso

g è un potenziale di F su Ω se $\nabla g = F$ su $\mathbb{R}^3$, cioè se:

$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = F_1(x,y,z) = 2xy + yz - 2xz$

$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = F_2(x,y,z) = x^2 + xz + z$

$\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) = F_3(x,y,z) = xy - x^2 + y + z$

$\int (2xy + yz - 2xz)\,dx = x^2 y + xyz - x^2 z + h(y,z) = g(x,y,z)$

impongo che $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) = F_2(x,y,z)$

$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) = \cancel{x^2} + \cancel{xz} + \frac{\partial h}{\partial y}(y,z) = \cancel{x^2} + \cancel{xz} + z \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial y}(y,z) = z$

$\int z\,dy = zy + K(z) \qquad \Rightarrow g(x,y,z) = yx^2 + xyz - x^2 z + zy + K(z)$

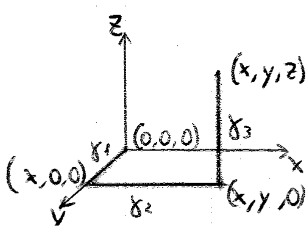
impongo che $\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) = F_3(x,y,z)$

$\cancel{xy} - \cancel{x^2} + \cancel{y} + \frac{\partial K}{\partial z}(z) = \cancel{xy} - \cancel{x^2} + \cancel{y} + z$

$\frac{\partial K}{\partial z} = z = K'(z) \qquad \Rightarrow K(z) = \int z\,dz = \frac{1}{2}z^2 + K$

$\Rightarrow g(x,y,z) = yx^2 + xyz - x^2 z + zy + \frac{1}{2}z^2 + K,\ K \in \mathbb{R}$

metodo più semplice rispetto a $g(x,y,z) = \int_\gamma F\cdot dP$



$\Rightarrow g(x,y) = \log|x^2+y^2-1| - x + K \quad , K \in \mathbb{R} \qquad \operatorname{dom} g = \operatorname{dom} F$

$A_1: x^2+y^2-1<0 \Rightarrow g(x,y) = \log(1-x^2-y^2) - x + K \;,\; K \in \mathbb{R}$

potenziali di F su A_1

$A_2: x^2+y^2-1>0 \Rightarrow g(x,y) = \log(x^2+y^2-1) - x + h, \; h \in \mathbb{R}$

potenziali di F su A_2

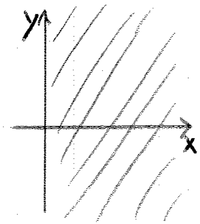
$\Rightarrow F$ conservativo su $\operatorname{dom} F$ perché ammette potenziale su tutto $\operatorname{dom} F$

le costanti (h, K) sono diverse perché essendo il dominio sconnesso, sono completamente indipendenti una dall'altra

2- $F(x,y) = \left(\frac{\varphi(y)}{x} + \cos y \;,\; 2y\log x - x\sin y\right)$

determina una funzione di classe C^1 $\varphi(y)$ tale che $\varphi(1)=1$ che renda il campo F conservativo

determina $g(x,y): g(1,\frac{\pi}{2}) = 0$



$\operatorname{dom} F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x>0\}$

connesso e semplicemente connesso

$\Rightarrow$ se $\operatorname{rot} F = (0,0)$ il campo è conservativo sul suo dominio

$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{2y}{x} - \sin y \qquad \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\varphi'(y)}{x} - \sin y$ impongo che $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y} \;\; \forall x>0$

$\frac{2y}{x} - \sin y = \frac{\varphi'(y)}{x} - \sin y \Rightarrow 2y = \varphi'(y) \qquad \varphi(y) = \int 2y\,dy = y^2 + c$

$\varphi(1) = 1 + c = 1 \Rightarrow \varphi(y) = y^2$ è tale che F sia conservativo su $\operatorname{dom} F$

$F(x,y) = \left(\frac{y^2}{x} + \cos y, 2y\log x - x\sin y\right) \qquad \nabla g(x,y) = F(x,y) \;\; \forall (x,y) \in \operatorname{dom} F$

$\int\left(\frac{y^2}{x} + \cos y\right)dx = y^2\log|x| + x\cos y + K(y) = g(x,y)$

$\frac{\partial g}{\partial y} = 2y\log x - x\sin y + K'(y) = 2y\log x - x\sin y \Rightarrow K'(y) = 0 \quad K(y) = K$

l'insieme di tutti i potenziali di F è $\{y^2\log x + x\cos y + K, \; K \in \mathbb{R}\}$

$g(1,\frac{\pi}{2}) = 0 + 0 + k = 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow g(x,y) = y^2\log x + x\cos y$

3- $F(x,y) = (|x^2+y^2-4|, \; y^2 - 2xy)$

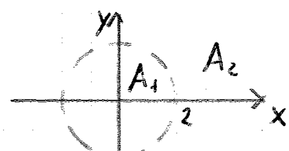
verificare che F sia conservativo in un insieme contenente l'origine

calcolare i potenziali di F sull'insieme trovato

calcolare $\int_\gamma F \cdot dP \quad \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 \qquad \gamma_1(t) = (\sin^2 t, t) \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{4}$

$\gamma_2(t) = (t, \frac{\pi^2}{16}) \quad \frac{1}{2} \le t \le 4$

$\operatorname{dom} F = \mathbb{R}^2 \to$ campo continuo



$F_1(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2-4 & \text{se } x^2+y^2-4 \ge 0 \\ -x^2-y+4 & \text{se } x^2+y^2-4 < 0 \end{cases}$

A_1 è semplicemente connesso, A_2 non è semplicemente connesso

$\int_\gamma F \cdot dP = g(B) - g(A) \quad A: \gamma(0) = (0,0,0) \quad B: \gamma(2) = (2,8,4)$

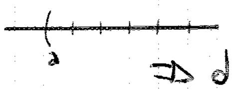
$\int_\gamma F \cdot dP = g(2,8,4) - g(0,0,0) = \log |x^2+y+2z^2+1| \Big]_A^B = \log 35 - \log 1 = \log 35$

Successioni

$\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ oppure il $\operatorname{dom} F = \{n \in \mathbb{N} : n > n_0\}$
non vengono solitamente trattate come funzioni
↳ si descrive l'insieme delle immagini → EX. $\{a_n = (-1)^n\}$ $n \in \mathbb{N}$
notazioni: $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ EX. $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1} = \left\{\frac{1}{n}, n \geq 1\right\} = \frac{1}{n}, n \geq 1$

$\boxed{\text{DEF.}}$ Una successione soddisfa "definitivamente" una certa proprietà (EX. parità, positività) se $\exists n_0 : \forall n \geq n_0$ la successione soddisfa tale proprietà

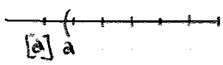
EX. $\{n^2 - 4\}_{n \geq 0}$
$n = 2 \to 4 - 4 = 0$
$n = 3 \to 9 - 4 = 5 > 0$
$n \geq 3 \to n^2 - 4 > 0$
⇒ questa successione è definitivamente positiva



$\forall a, (a, +\infty) \cap \mathbb{N} \neq 0$
⇒ dico che $+\infty$ è un punto di accumulazione di $\mathbb{N}$
poiché i limiti possono essere calcolati solo per i punti di accumulazione, l'unico limite calcolabile è $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$

$\boxed{\text{DEF}}$ $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists B(+\infty) = (a, +\infty) : n > a \wedge n \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$
↳ $\forall B_\varepsilon(l), \exists B(+\infty) : n \in B(+\infty) \cap \mathbb{N} \Rightarrow a_n \in B_\varepsilon(l)$



$n > a \Rightarrow n > [a] = n_0$ → parte intera di a

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ se:

$\forall B_\varepsilon(l) \ \exists n_0 : n > n_0 \Rightarrow a_n \in B_\varepsilon(l)$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : n > n_0 \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon \to l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$

OSS. se $n_0 = [a+1] \Rightarrow n \geq n_0$ al posto di $n > n_0$ (se $n_0 = [a]$)

$\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty \quad \forall M \ \exists n_0 : n > n_0 \Rightarrow a_n > M$

$\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = -\infty \quad \forall M \ \exists n_0 : n > n_0 \Rightarrow a_n < M$

DEF $\{a_n\}$ è crescente se $\forall n,m \in \mathbb{N}, n<m \Rightarrow a_n \le a_m$

$\{a_n\}$ è decrescente se $\forall n,m \in \mathbb{N}\ n<m \Rightarrow a_n \ge a_m$

PROP.

$\{a_n\}$ è crescente $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ a_n \le a_{n+1}$

$\{a_n\}$ è strettamente crescente $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ a_n < a_{n+1}$

$\{a_n\}$ è decrescente $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ a_n \ge a_{n+1}$

$\{a_n\}$ è strettamente decrescente $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ a_n > a_{n+1}$

nelle successioni basta confrontare i termini successivi

DIM.

$n<m \quad m-n=p \quad \Rightarrow m=n+p$

$\Rightarrow$) se a_n è crescente $\Rightarrow a_n \le a_{n+1}\ \forall n$

$\Leftarrow$) se $a_n \le a_{n+1}\ \forall n \Rightarrow a_n \le a_{n+1} \le a_{n+2} \le \ldots \le a_{n+p}$

$\Rightarrow$ se $a_n \le a_{n+1}\ \forall n \Rightarrow a_n \le a_m\ \forall m > n$

QDE

TH Se $\{a_n\}$ è una successione monotona $\Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} a_n$

In particolare:

- se a_n è crescente $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \{a_n\}$
- se a_n è decrescente $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \{a_n\}$

TH Criterio del rapporto

- Sia $\{a_n\}$ una successione: $a_n > 0\ \forall n$ ($a_n>0$ definitivamente)
- $\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \ge 0$

$\Rightarrow$ se $q<1 \Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

se $q>1 \Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

se $q=1 \Rightarrow$ il TH non fornisce informazioni

DIM.

supponiamo $\boxed{q<1}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : n \ge n_0 \Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - q\right| < \varepsilon$

scelgo $\varepsilon = 1-q > 0 \Rightarrow -\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} - q < \varepsilon$

$q-\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < q+\varepsilon \Rightarrow \forall n \ge n_0\ \frac{a_{n+1}}{a_n} < q+(1-q)=1 \Rightarrow a_{n+1} < a_n$

$\Rightarrow$ la successione $\{a_n\}$ è definitivamente decrescente

per il TH precedente

$\Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \{a_n\} = l \ge 0 \quad \Rightarrow 0 \le l \le a_n\ \forall n$

supponiamo $l \ne 0$: $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{l}{l} = 1 \ne q$ → avevamo supposto che $q<1$

Ex.

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to+\infty} n^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} e^{\log n^{1/n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\log n}{n}}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\log n}{n}} = 1$

Serie numeriche

$\{a_n\}_{n\geq 0} \quad a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \to$ non si riesce a dare un significato alla somma

numeri come π hanno una rappresentazione illimitata non periodica:

$\pi = 3,14159\ldots = 3 + (1\cdot 10^{-1}) + 4\cdot 10^{-2} + 1\cdot 10^{-3} + \ldots$

π come serie $\to$ somma di infiniti termini

$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n\geq 0} a_n \to$ simbolo formale

per fare la somma ci fermiamo a un certo numero di termini

$s_0 = a_0$

$s_1 = a_0 + a_1 = s_0 + a_1$

$s_2 \quad a_0 + a_1 + a_2 = s_1 + a_2$

$\vdots$

$s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n = s_{n-1} + a_n$

$\{s_n\}$ = successione delle ridotte

$\lim_{n\to+\infty} s_n =$
- $s \in \mathbb{R} \to$ la serie converge a s e s è la somma della serie
- $+\infty$ / $-\infty \to$ la serie diverge positivamente / negativamente
- $\nexists \to$ la serie è indeterminata o oscillante

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad a_n$: termine generale della serie

$s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$ ridotta n-esima

Serie geometrica di ragione q: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$

prodotto notevole:
$1 - x^{n+1} = (1-x)(1+x+x^2+\dots+x^n)$

$s_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n$

se $q \neq 1$, $1 + q + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = s_n$

$\lim_{n\to+\infty} (1+q+\dots+q^n) = \lim_{n\to+\infty} s^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

$$\lim_{n\to+\infty} q^{n+1} = \begin{cases} 0 & -1<q<1 \\ \nexists & q=-1 \\ \nexists & q<-1 \\ +\infty & q>1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & -1<q<1 \\ \nexists & q\leq -1 \\ +\infty & q>1 \end{cases}$$

$q = 1 \quad q^n = 1 \quad \forall n$

$s_n = q^0 + q^1 + \dots + q^n = n+1 \to +\infty$ per $n\to+\infty$

- se $\exists \lim_{n\to+\infty} s_n = s \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} t_n = s - s_{n_0} + t_{n_0} \in \mathbb{R}$ → se s converge anche t converge
- se $\exists \lim_{n\to+\infty} s_n = \pm\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} t_n = \pm\infty$ → diverge (con lo stesso segno di s)
- se $\nexists \lim_{n\to+\infty} s_n \Rightarrow \nexists \lim_{n\to+\infty} t_n$

QDE

Ex.

1- $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = s = 2$ → $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$

$$\sum b_n = \underset{a_0}{2} + \underset{a_1}{\frac{1}{4}} + \underset{a_2}{\frac{1}{4}} + \underset{a_3}{\frac{1}{2^3}} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

$$t_n = 2 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) \qquad s_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$\Rightarrow t_n = s_n - \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(2 + \frac{1}{4}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} t_n = s - \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(2 + \frac{1}{4}\right)$$

2- $\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$ differisce da $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ per $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$

la somma sarà $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = 2 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$

Serie di Mengoli: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$

$$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n-1} = \frac{A(n-1) + Bn}{n(n-1)} \qquad \begin{cases} A + B = 0 \\ -A = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$$s_2 = a_2 = 1 - \frac{1}{2} \qquad s_3 = a_2 + a_3 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3}$$

$$s_4 = s_3 + a_4 = \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4} \qquad \Rightarrow s_n = 1 - \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1 \qquad \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1$$

$\sum\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$ → serie telescopica

nella ridotta n-esima un termine ha un segno mentre nella ridotta n+1-esima lo stesso termine ha segno opposto

Ex.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \qquad \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \log(n+1) - \log n = a_n$$

$$s_1 = a_1 = \log 2 - \log 1 = \log 2 \qquad s_2 = s_1 + a_2 = \log 2 + (\log 3 - \log 2) = \log 3$$

$$\Rightarrow s_n = \log(n+1) \qquad \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \log(n+1) = +\infty$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ diverge positivamente

$\boxed{TH}$ sia $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e sia $\sum_{n\geq 0} a_n$ una serie

- se $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge a s
  $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} \lambda a_n$ converge a λs $\to$ $\sum_{n\geq 0} \lambda a_n = \lambda \left(\sum_{n\geq 0} a_n \right)$
- se $\sum_{n\geq 0} a_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} \lambda a_n$ diverge $\to$ se $\lambda > 0 \to$ divergono allo stesso ∞
  $\searrow$ se $\lambda < 0 \to$ diverge all'∞ opposto
- se $\sum_{n\geq 0} a_n$ è indeterminato $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} \lambda a_n$ è indeterminata

DIM.

$s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$

$t_n = \lambda a_0 + \lambda a_1 + \dots + \lambda a_n = \lambda(a_0 + a_1 + \dots + a_n) = \lambda s_n$

$$\lim_{n\to+\infty} t_n = \lim_{n\to+\infty} \lambda s_n = \lambda \lim_{n\to+\infty} s_n = \begin{cases} \lambda s & \text{se la serie } \sum_{n\geq 0} a_n \text{ converge} \\ \pm\infty & \text{se la serie diverge} \\ \nexists & \text{se la serie è indeterminata} \end{cases}$$

OSS. se $\lambda = 0$ $\quad \sum 0 \cdot a_n = \sum 0 = 0 \quad s_n = 0$

Somma di serie:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$	$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$	$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$
s	t	$s+t$
$+\infty$	t	$+\infty$
$-\infty$	t	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	?
$-\infty$	$+\infty$	
$\nexists$	$\nexists$	?

$\to$ ne basta una indeterminata

DIM.

$s_n = a_0 + \dots + a_n \qquad t_n = b_0 + \dots + b_n$

$l_n = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + \dots + (a_n + b_n)$ $\to$ numero finito di termini

$\Rightarrow$ posso usare la proprietà associativa

$\Rightarrow l_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n + b_0 + b_1 + \dots + b_n = s_n + t_n$ = ridotta n-esima di $\sum(a_n + b_n)$

se $s_n \to s$ e $t_n \to t$: $\lim_{n\to+\infty} (s_n + t_n) = s + t$

se $s_n \to +\infty$ e $t_n \to t$: $\lim_{n\to+\infty} s_n + t_n = +\infty$

se $s_n \to +\infty$ e $t_n \to +\infty$: $\lim_{n\to+\infty} s_n + t_n = +\infty$

se $s_n \to +\infty$ e $t_n \to -\infty$: $\lim_{n\to+\infty} s_n + t_n = +\infty - \infty$ $\to$ forma indeterminata

QDE

$\boxed{\text{TH}}$ **Criterio del confronto**

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n \qquad \forall n \ \ 0 \le a_n \le b_n$$

$\Rightarrow$ 1- se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge a t $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge a $s \le t$

2- se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge (a $+\infty$) $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge

DIM.

$$s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n \le t_n = b_0 + b_1 + \dots + b_n$$

perché s_n è una somma di termini più piccoli di quelli di t_n

poiché le serie sono a termini ≥ 0, $\exists \lim_{n \to +\infty} s_n$ e $\exists \lim_{n \to +\infty} t_n$

1- se $\lim_{n \to +\infty} t_n = t \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} s_n = s \le t$ per il I TH del confronto sui limiti

2- se $\lim_{n \to +\infty} s_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} t_n = +\infty$ per il I TH del confronto sui limiti

QDE

OSS. il TH del confronto sui limiti è valido solo se siamo sicuri che il limite esiste $\to$ nelle serie positive il limite esiste sempre

EX.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots \qquad n \cdot n = n^2 \ge n(n-1) \ge 0 \quad \forall n \ge 0, \forall n \ge 2$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 3} \qquad 0 \le \frac{1}{n^2} \le \frac{1}{n(n-1)} \quad \forall n \ge 2$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ è maggiorata da $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge a $s \le 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}}_{s \le 1} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge a } t \le 1 + 1 = 2$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ con $a \ge 2$

$$n^a \ge n^2 \quad \forall a \ge 2, \forall n \ge 1$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{1}{n^a} \le \frac{1}{n^2} \quad \forall a \ge 2, \forall n \ge 1$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge $\Rightarrow$ per il criterio del confronto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ converge per $a \ge 2$

se $a < 2$ $\quad n^a \le n^2 \to \frac{1}{n^a} > \frac{1}{n^2}$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge $\to$ non ci dà alcuna informazione

$a = 1$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serie armonica

$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ diverge

$\log(1+x) \le x \quad \forall x \ge 0 \quad \to f(x) = \log(1+x) - x$ studio l'andamento di $f(x)$

$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1-1-x}{1+x} = -\frac{x}{1+x} < 0 \quad \forall x > 0 \Rightarrow f$ è strettamente decrescente su $[0, +\infty)$

$\Rightarrow f(x) = \log(1+x) - x < 0 \quad \forall x > 0$

$\Rightarrow \log(1+x) < x \quad \forall x > 0$

↳ continua

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge

la DIM è analoga per la divergenza

segue che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge

QDE

Ex.

1- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^2+2n+\sqrt{n}}$ $\quad \frac{n+3}{n^2+2n+\sqrt{n}} \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} = b_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^2+2n+\sqrt{n}}$ diverge

2- $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n^3}$ $\quad \sin t \sim t$ per $t \to 0$ $\quad \sin\frac{1}{n^3} \sim \frac{1}{n^3}$ per $t \to +\infty$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n^3}$ converge

3- $\sum (1+e^{1/n})$ $\quad 1+e^{1/n} \to 2 \neq 0$ per $n \to +\infty \Rightarrow$ diverge

4- $\sum_{n=1}^{\infty} (e^{1/n}-1)$ $\quad e^t - 1 \sim t$ per $t \to 0$ $\quad e^{1/n}-1 \sim \frac{1}{n}$ per $n \to +\infty$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (e^{1/n}-1)$ diverge

5- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+\sin n^2+\sqrt{n}}{2n^3-3n\sqrt{n}}$ $\quad \sim \frac{3n}{2n^3} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+\sin n^2+\sqrt{n}}{2n^3-3n\sqrt{n}}$ converge

6- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n^4+n^2}}$ $\quad \sqrt[5]{n^4+n^2} = \sqrt[5]{n^4\left(1+\frac{n^2}{n^4}\right)} \sim n^{4/5}$ per $n \to +\infty$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n^4+n^2}} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/5}}$ $\quad \frac{4}{5} = \alpha < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/5}}$ diverge

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n^4+n^2}}$ diverge

TH Criterio del rapporto

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad a_n > 0 \ \forall n \geq 0$ $\quad$ se $\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$

1- se $l < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

2- se $l > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge

3- se $l = 1$, il criterio non ci dà alcuna informazione

TH Criterio della radice

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad a_n \geq 0 \ \forall n \geq 0$ $\quad$ se $\exists \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$

1- se $l < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

2- se $l > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge

3- se $l = 1$, il criterio non fornisce informazioni

$0.\bar{9} = 1 \qquad 0.\bar{9} = 9 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2} + 9 \cdot 10^{-3} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} 9 \cdot 10^{-n} = 9\left(\frac{1}{1-1/10} - 1\right) =$

$= 9\left(\frac{10}{9} - 1\right) = 9 \cdot \frac{1}{9} = 1$

$0.\overline{81} = 81 \cdot 10^{-2} + 81 \cdot 10^{-4} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} 81 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{2n} = 81 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{100}\right)^{n}$

Integrali impropri e serie numeriche

f decrescente su $[a, +\infty) \Rightarrow f$ è integrabile su ogni intervallo $[a,b]$

$\Rightarrow$ si può studiare il comportamento di $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\,dx = \begin{cases} l \in \mathbb{R} & \text{converge} \\ \pm\infty & \text{diverge} \\ \nexists & \text{indeterminata} \end{cases}$

se $f(x) \geq 0 \Rightarrow F(t) = \int_a^t f(x)\,dx \geq 0$ è crescente

e $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\,dx = \begin{cases} l \geq 0 \\ +\infty \end{cases}$ → perché essendo $f(x) \geq 0$ l'integrale rappresenta l'area; per $t \to +\infty$ aggiungo porzioni di area $\Rightarrow$ l'integrale è crescente

se $f(x) \geq 0$ ed è integrabile su $\forall [a,b]$

$\Rightarrow \underbrace{\lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\,dx}_{F(t)} = \lim_{n \to +\infty} \int_a^n f(x)\,dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$a_n = F(n)$ → se F è crescente $F(n)$ e $F(x)$ hanno lo stesso comportamento

in generale non è vero che hanno lo stesso comportamento

Ex. $F(t) = \sin 2\pi t$ → non ha limite

$F(n) = \sin 2\pi n = 0 \to 0$ per $n \to +\infty$

$F(t) \to l$ per $t \to +\infty \Leftrightarrow \forall b_n \to +\infty,\ F(b_n) \to l \quad F(n) \to l$

$\boxed{\text{COR}}$ se $f(x) \geq 0 \ \forall x \geq a$ e f è integrabile su $\forall [a,b]$

$\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} \int_a^n f(x)\,dx$

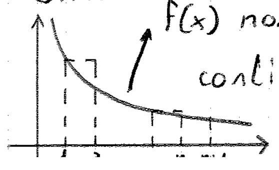
$\boxed{\text{TH}}$ Criterio di Maclaurin (o criterio dell'integrale)

- $f(x) \geq 0$ su $[1, +\infty)$
- $f(x)$ decrescente su $[1, +\infty)$

$\Rightarrow$ 1- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ e $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ hanno lo stesso comportamento

2- se la serie e l'integrale convergono $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} f(n) \leq \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$

DIM.



$f(x)$ non necessariamente continua

$\forall x \in [n, n+1] \Rightarrow f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$

$\displaystyle\int_n^{n+1} f(n+1)\,dx \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq \int_n^{n+1} f(n)\,dx$

DIM.

1 - se a_n ha ordine a rispetto a $1/n$ con $a \leq 1$

$\Rightarrow$ per il criterio del confronto asintotico diverge

2 - se a_n ha ordine inferiore a $1/n^a$

$$\Rightarrow \frac{1/n^a}{a_n} \to 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \; n \geq n_0 \Rightarrow -\varepsilon < \frac{1/n^a}{a_n} < \varepsilon$$

$\Rightarrow \frac{1}{n^a} < \varepsilon (a_n)$ se $a \leq 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge per il TH del confronto

3 - se a_n ha ordine superiore o uguale a $a > 1$

$$\Rightarrow a_n = o\left(\frac{1}{n^\beta}\right) \text{ per } \forall \beta \in (1, a) \Rightarrow -\varepsilon < \frac{a_n}{1/n^\beta} < \varepsilon$$

$\Rightarrow 0 \leq a_n \leq \varepsilon \cdot \frac{1}{n^\beta}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\beta}$ converge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge per il TH del confronto

QDE

EX.

1 - $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$ $\quad e^{-n^2}$ è un infinitesimo di ordine > di ogni potenza di $1/n^a$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$ converge

2 - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ $\quad \frac{1/n^n}{1/n^a} = \frac{n^a}{n^n} \to 0$ per $n \to +\infty, \forall a$ $\Rightarrow$ la serie converge

3 - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{\sqrt{n^5}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n^{5/2}}$ $\quad \frac{\frac{e^{-n}}{n^{5/2}}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{e^{-n}}{n^{5/2}} \cdot n^2 = \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} \to 0 \;\forall a$

$\Rightarrow \frac{e^{-n}}{n^{5/2}}$ è un infinitesimo di ordine > 2 $\Rightarrow$ la serie converge

caso in cui non posso usare il criterio del confronto asintotico:

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^a n}$ $\quad \frac{1}{n\log^a n}$ ha ordine di infinitesimo > 1 rispetto a $\frac{1}{n}$ ma $< \beta$, $\forall \beta > 1$

$\frac{\frac{1}{n\log^a n}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\log^a n} \to 0$ per $n \to +\infty$ $\Rightarrow$ ha ordine di infinitesimo > 1 rispetto a $1/n$

$$\frac{\frac{1}{n\log^a n}}{\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}} = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\log^a n}}{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^\varepsilon}} = \frac{n^\varepsilon}{\log^a n} \to +\infty \; (n \to +\infty) \quad \forall \varepsilon > 0, \forall a$$

$\Rightarrow \frac{1}{n\log^a n}$ ha ordine di infinitesimo inferiore a $\beta = 1 + \varepsilon$ $\forall \beta > 1$ (rispetto a $1/n$)

$\Rightarrow$ provo a usare il criterio di Maclaurin

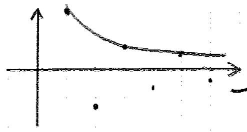
$\frac{1}{n\log^a n} = f(n)$ $\quad f(x) = \frac{1}{x \log^a x}$ $\quad$ se $x > 1$ $\frac{1}{x\log^a x} > 0$ ed è decrescente

$$(x\log^a x)' = \log^a x + x\left(a \log^{(a-1)} x\right)\frac{1}{x} = \log^a x + a \log^{a-1} x > 0 \quad \forall x > 1$$

$\Rightarrow x\log^a x$ è crescente e > 0 su $(1, +\infty)$

$\Rightarrow \frac{1}{x\log^a x}$ è decrescente su $(1, +\infty)$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ converge



rispetto a $\sum \frac{1}{n}$ questi termini sono sottratti al posto che sommati

$|r_n| = |s - s_n| \leq b_{n+1} = \frac{1}{n+1}$

se voglio approssimare la somma delle serie alla seconda cifra decimale: $r_n = |s - s_n| \leq \frac{1}{101}$

per approssimare s alla seconda cifra decimale devo sommare 100 termini $\rightarrow$ sono pochi per definire la serie

la serie converge molto lentamente

per arrivare a un numero vicino alla somma devo sommare un numero altissimo di termini

DIM.

$b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq \dots \geq 0 \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$

$s_0 = (-1)^0 b_0 = b_0 \quad \geq \quad s_1 = b_0 + (-1)^1 b_1 = b_0 - b_1$

$s_2 = b_0 \underbrace{- b_1 + b_2}_{\leq 0} \leq s_0 \qquad s_2 \geq s_3 = \underbrace{b_0 - b_1}_{s_1} + \underbrace{b_2 - b_3}_{\geq 0} \geq s_1$

$s_1 \; s_3 \; s_{2n+1} \; s_{2n} \; s_2 \; s_0$

s_{2n+1} crescente $\quad s_{2n}$ decrescente

$s_{2n+1} \leq s_{2k} \quad \forall n, \forall k \qquad$ monotone $\Rightarrow \exists \lim$

$\lim_{n\to+\infty} s_{2n+1} = \sup\{s_{2n+1}\} = l \leq m \qquad \lim_{k\to+\infty} s_{2k} = \inf\{s_{2k}\} = m$

perché $s_{2n+1} \leq s_{2k}$

$\lim_{n\to+\infty} (s_{2n+1} - s_{2n}) = l - m \qquad s_{2n+1} = s_{2n} + (-1)^{2n+1} b_{2n+1}$

$s_{2n+1} - s_{2n} = (-1)^{2n+1} b_{2n+1} \qquad \lim_{n\to+\infty} (-1)^{2n+1} b_{2n+1} = 0$

$\Rightarrow 0 = l - m \Rightarrow l = m \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} s_{2n} = s$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} s_n = s \Rightarrow$ la serie converge

$s_1 \; s_3 \; s_{2n+1} \; s \; s_{2n} \; s_2 \; s_0$

$s_{2n+1} - s_{2n} \leq s - s_{2n} \leq 0$

$-b_{2n+1} \leq \underbrace{s - s_{2n}}_{r_{2n}} \leq 0$

$0 \leq s - s_{2n+1} \leq \underbrace{s_{2n+2} - s_{2n+1}}_{b_{2n+2}}$

$\Rightarrow |s - s_{2n}| \leq b_{2n+1}$

$r_{2n+1} = |s - s_{2n+1}| \leq b_{2n+2}$

$\Rightarrow r_n = |s - s_n| \leq b_{n+1}$

QDE

EX.

1- $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n+2}$ può sembrare che soddisfi i criteri ma:

$\frac{n+1}{n+2} \to 1 \Rightarrow (-1)^n \frac{n+1}{n+2}$ non ha limite $= 0$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n+2}$ non converge

Ex.

1- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ $\quad \sum \left| (-1)^n \frac{1}{n^2} \right| = \sum \frac{1}{n^2}$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ converge

2- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2 \log n}$ $\quad \left| \frac{\sin n}{n^2 \log n} \right| \le \frac{1}{n^2 \log n} \le \frac{1}{n^2} \to \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge

$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{n^2 \log n} \right|$ converge $\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2 \log n}$ converge e converge assolutamente

3- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{2}{n^3} \right)$ $\quad \frac{2}{n^3} \to 0 \quad \cos \frac{2}{n^3} \to 1 \Rightarrow 1 - \cos \frac{2}{n^3} \to 0 \Rightarrow$ può convergere

$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ per $t \to 0$ $\quad 1 - \cos t = \frac{1}{2} t^2 + o(t^2)$ per $t \to 0$

$1 - \cos \frac{2}{n^3} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{n^3} \right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{n^3} \right)^2 \right)$ per $n \to +\infty$

$\underbrace{1 - \cos \frac{2}{n^3}}_{} = \frac{2}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6} \right)$ per $n \to +\infty$

$a_n \to$ ha ordine di infinitesimo $= 6 > 1$ per $n \to +\infty \Rightarrow$ la serie converge

4- $\sum_{n=1}^{\infty} 1 - \cos \frac{n+3}{n\sqrt[3]{n} + 2n + 1}$ $\quad \frac{n+3}{n\sqrt[3]{n} + 2n + 1} \sim \frac{n}{n\sqrt[3]{n}} = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

$1 - \cos \frac{n+3}{n\sqrt[3]{n} + 2n + 1} \sim \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \right)^2 \sim \frac{1}{2} \frac{1}{n^{2/3}}$ $\to$ ordine $2/3 < 1$ rispetto a $1/n$

$\Rightarrow$ la serie diverge

5- $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+2}{3n^2+5}$ $\quad b_n = \frac{n^2+2}{3n^2+5} \to \frac{1}{3}$ per $n \to +\infty$

$\Rightarrow$ la serie non converge (non posso dire se sia divergente o indeterminata)

6- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 + 2n + \sin n}{n^3 - n}$ $\quad \frac{n^2 + 2n + \sin n}{n^3 - n} \sim \frac{1}{n} \to$ diverge $\Rightarrow$ la serie diverge

7- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \log^2 n}$ $\quad n \log^2 n > 0$ e crescente $\Rightarrow \frac{1}{n \log^2 n}$ è decrescente

$\frac{1}{n \log^2 n} \to 0 \quad \Rightarrow$ per Leibniz la serie è convergente

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^a n} = \begin{cases} \text{conv. } a > 1 \\ \text{dir. } a \le 1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ la serie converge assolutamente

$\forall$ converge semplicemente

8- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n (\log n)^{1/2}}$ non converge assolutamente

però per Leibniz vediamo che è convergente

b_n è decrescente perché $f(x) = x \sqrt{\log x}$

$f'(x) = \sqrt{\log x} + \frac{1}{2\sqrt{\log x}} > 0 \to$ perché somma di numeri positivi

9- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ non converge perché $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{n+1}$ $\quad \sin\frac{\pi}{n+1} \sim \frac{\pi}{n+1} \sim \frac{\pi}{n} \to 0$ per $n \to +\infty$

ha ordine di infinitesimo 1 rispetto a $1/n$ per $n \to +\infty$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\frac{\pi}{n+1}$ non converge assolutamente

$\sin\frac{\pi}{n+1} \geq 0 \ \forall n \geq 1 \quad \sin\frac{\pi}{n+1} \to 0$ per $n \to +\infty$

$\frac{\pi}{n+1}$ è crescente $\quad \sin t$ è crescente se $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$\Rightarrow \sin\frac{\pi}{n+1}$ è decrescente $\Rightarrow$ per Leibniz la serie converge

6 - $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} + \frac{(-1)^{2n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ $\to$ convergono entrambe $\Rightarrow$ la somma converge

converge assolutamente?

$n^2 \geq n \to \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} \quad \frac{1}{n} + (-1)^n \frac{1}{n^2} > 0 \quad \forall n > 0$

$\Rightarrow \left|(-1)^n\left(\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2}\right)\right| = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2}$ $\to$ diverge perchè è la somma di una serie convergente e una divergente

oppure perchè: $\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$

$\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ diverge perchè ha ordine 1 rispetto a $1/n$ per $n \to +\infty$

$\Rightarrow$ non converge assolutamente

7 - $\sum_{n=1}^{\infty} [2\arctan(n+1) - \pi] \cos[(n+1)\pi]$ $\qquad (n+1) \to n$

$\sum_{n=1}^{\infty} [2\arctan(n) - \pi] \cos n\pi = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n [2\arctan n - \pi]$

$2\arctan n - \pi \to 2 \cdot \frac{\pi}{2} - \pi = 0$ per $n \to +\infty$

$2\arctan n - \pi < 0 \ \forall n \quad \to \quad -\sum_{n=1}^{\infty} (-2\arctan n + \pi)(-1)^n$

$f(x) = \arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \ \forall x > 0$

$\hookrightarrow f'(x) = 0 \ \forall x > 0 \Rightarrow f(x) = cost. \ \forall x > 0$

$f(1) = \arctan 1 + \arctan 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{\pi}{2}$

$\arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x} \to 2\arctan - \pi = -2\arctan\frac{1}{n}$

$\Rightarrow -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\pi - 2\arctan n) = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2\arctan\frac{1}{n} = -2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arctan\frac{1}{n}$

$\arctan\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ per $n \to +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\frac{1}{n}$ diverge

$\Rightarrow$ la serie non converge assolutamente

12\12

$\boxed{\text{DEF}}$ $f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ su I se
$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon) : x \in I,\ n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

OSS.
se non riesco a trovare $f(x)$ posso approssimare $f(x)$ a $f(n)$ su I con una n abbastanza grande
se n è piccolo $\to f_n(x)$ converge velocemente
se n è grande $\to f_n(x)$ converge lentamente

NOTAZIONE
$f_n(x) \to f(x)$ converge puntualmente
$f_n(x) \twoheadrightarrow f(x)$ converge uniformemente

OSS. La convergenza uniforme implica quella puntuale
l'unica differenza è che in quella uniforme un unico n_0 basta per tutte le $f_n(x)$

PROP.
Se $f_n(x) \twoheadrightarrow f(x)$ su I $\Rightarrow$ $f_n(x) \to f(x)$ su I

PROP.
$$f_n(x) \twoheadrightarrow f(x) \text{ su } I \iff \lim_{n\to+\infty} \left(\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|\right) = 0$$
si dice che $f_n(x)$ converge a f nella norma del sup

DIM

$\Leftarrow)$ $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists n_0 : n \geq n_0 \Rightarrow \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists n_0 : n\geq n_0 \ \forall x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow f_n(x) \twoheadrightarrow f(x)$ su I

$\Rightarrow)$ se $f_n(x) \twoheadrightarrow f(x)$ su I

$\forall \varepsilon>0 \ \exists n_0 : n \geq n_0,\ x\in I \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

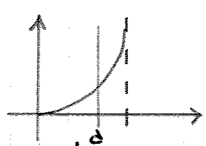
maggiorante di $|f_n(x) - f(x)|$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists n_0 : n \geq n_0 \ x \in I \Rightarrow \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

QDE

EX.

1- $x^n \to \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$



su $[0,a]$ $a<1$: $x^n \twoheadrightarrow 0$ su $[0,a]$

su $[0,1]$: non converge uniformemente a 0 su $[0,1]$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : n \geq n_0 \ x \in I \Rightarrow |x^n - 0| < \varepsilon$

se $\varepsilon > 1 \to$ è ovvio che x^n sia $< \varepsilon$ su I