NUMERO: 863

DATA: 12/03/2014

# A P P U N T I

STUDENTE: Bassignana

MATERIA: Fisica I

Prof. Montorsi

# FISICA 1 — 2013

## CINEMATICA

Studia il moto di oggetti puntiformi.
Un corpo si può considerare puntiforme se, nonostante sia grande, tutti i suoi punti si muovono dello stesso moto; oppure se è di dimensioni trascurabili rispetto alle altre grandezze del problema.

### GRANDEZZE FONDAMENTALI:

| | | |
|---|---|---|
| Lunghezza | $L$ | [m] |
| Massa | $M$ | [Kg] |
| Tempo | $T$ | [s] |
| Temperatura | $T$ | [K] |
| Intensità di corrente | $I$ | [A] |

Dalle grandezze fondamentali ricavo tutte le grandezze che usiamo (es. $v = L \cdot T$), sono le grandezze derivate.
Le grandezze sono le dimensioni (lunghezza $L$ ecc.)
e non vanno confuse con le UNITÀ DI MISURA (metri, secondi ecc.)
→ G. FOND. = DIMENSIONI ≠ U. DI MISURA

### ANALISI DIMENSIONALE

- Ad ogni addendo di un'equazione devo avere le stesse dimensioni.

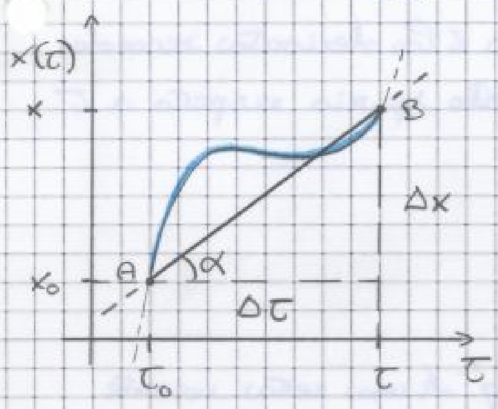
⇒ Per verificare se una formula è SBAGLIATA (o può essere giusta) uso l'ANALISI DIMENSIONALE:

- formula: $v = v_0 + \frac{1}{2} a t^2$
- dimensioni 1° membro: $[v] = \frac{L}{T}$
- dimensioni 2° membro: $\left[\frac{1}{2} a t^2\right] = [a] \cdot [T]^2$
  $= \frac{L}{\cancel{T^2}} \cdot \cancel{T^2} = L$
- confronto: $[v] = \frac{L}{T} \neq \left[\frac{1}{2} a t^2\right] = L$

⇒ $v = v_0 + \frac{1}{2} a t^2$ NON ESISTE !!

→ SIGNIFICATO GEOMETRICO

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow \Delta x = \Delta t \cdot v_m$$



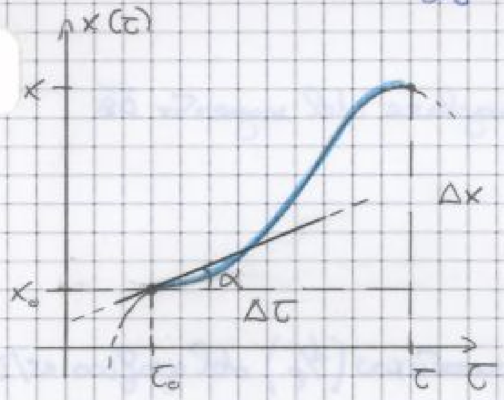

$$x = x_0 + v_m(t - t_0)$$

↳ È l'eq. di una retta che passa per $(t_0, x_0)$ e $(t, x)$

⇒ $v_m$ è il coeff. angolare del segmento $\overline{AB}$

$$v_m = tg\,\alpha$$

$v(t) = \frac{dx}{dt}$ : la vel. istantanea è la derivata dello spazio rispetto al tempo




⇒ Per def. $v(t)$ è il coeff. angolare della retta tangente in $t_0$

[$y'(x_0)$ è il coeff. ang. della tangente in $x_0$]

. Def.: ACCELERAZIONE MEDIA

Variazione di velocità nell'unità di tempo.

$$\boxed{a_m^{(t_0 \rightarrow t)} = \frac{\Delta v}{\Delta t}}$$

ACCELERAZIONE ISTANTANEA

Passo al limite per $\Delta t \rightarrow 0$

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

↳ È il lim. del rapporto incrementale

⇒ $a$ istantanea è la derivata di $v$ rispetto al tempo.

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt}}$$

Ma se: $v(t) = \frac{dx}{dt}$, derivo: $dv = \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)}$

↳ derivata seconda di $x$ rispetto a $t$

→ $a =$

. Problema: Nota $x(t)$ voglio ricavare $v$ e $a$.

↳ Sol.: L'ho già risolto!

$$v = \frac{dx}{dt}$$ , la velocità è la derivata prima di $x(t)$

$$a = \frac{d^2}{d^2t}x$$ , l'accelerazione è la derivata seconda di $x(t)$

. Problema inverso: Nota $v$ o $a$ voglio determinare $x(t)$.

↳ Sol. 1: Data $v(t)$

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$v \cdot dt = dx$$

Voglio passare da infinitesimi a quantità finite → integro!

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v \cdot dt$$

$$x\Big|_{x_0}^{x} = \int_{t_0}^{t} v \cdot dt$$

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v \cdot dt$$

$x$ in funzione di $v$
Posso risolverlo se conosco $v(t)$
o se $v$ è costante (Moto rett. uniforme)

⇒ Se $v$ = costante

$$\boxed{x = x_0 + v(t - t_0)} \quad [MRU]$$

↳ Sol. 2: Data $a(t)$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$dv = a\,dt$$

Integro

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a \cdot dt$$

$$v = v_0 + \int_{t_0}^{t} a \cdot dt$$

$v$ in funzione di $a(t)$
per integrare devo conoscere $a(t)$
oppure deve essere $a$ costante

⟹

## • Moto rettilineo uniformemente accelerato

$$1.\ \begin{cases} x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = x(t) \\ v = v_0 + a t = v(t) \end{cases}$$

→ Voglio trovare un'equazione che mi restituisca la posizione $x$ in funzione della velocità $v \Rightarrow x(v)$, con $a$ costante

⇒ Dalla 1. : $v - v_0 = a t$

ricavo $t$ :

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

sostituisco nella 1. :

$$x - x_0 = v_0 \cdot \frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2} a \cdot \frac{(v - v_0)^2}{a^2}$$

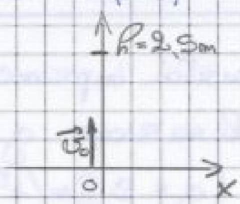
$$x - x_0 = \frac{2 v_0 v - 2 v_0^2 + v^2 + v_0^2 - 2 v_0 v}{2a}$$

$$x - x_0 = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \quad ; \text{ ricavo } v^2 - v_0^2$$

$$\Rightarrow v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

<u>Es.</u> : PROBLEMA: $v_0$ per saltare a $h = 2{,}5\,m$

↳ DATI




$h = 2{,}5\,m$

$a = -|g| \rightarrow a = -9{,}81\,m/s^2$

SVOLGIMENTO : ? = $v_0$

$v^2 - v_0^2 = -2a(x - x_0)$

con : $v^2 = 0$

$x - x_0 = h$

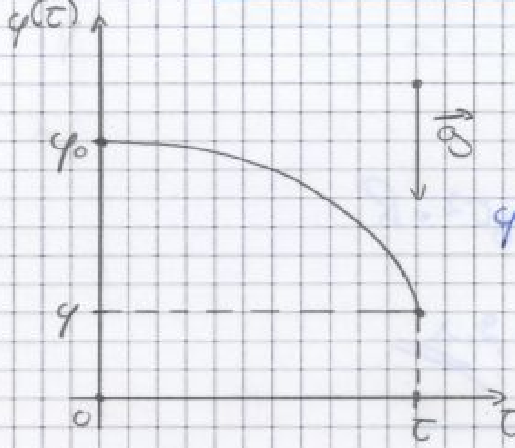
$a = -9{,}81\,m/s^2$

$+v_0^2 = +2 \cdot 9{,}81 \cdot 2{,}5$

$\Rightarrow v_0 = 7\,m/s$

- $v_y = v_{0(y)} - gt$
- $y = y_0 + v_{0(y)} - \frac{1}{2} g t^2$

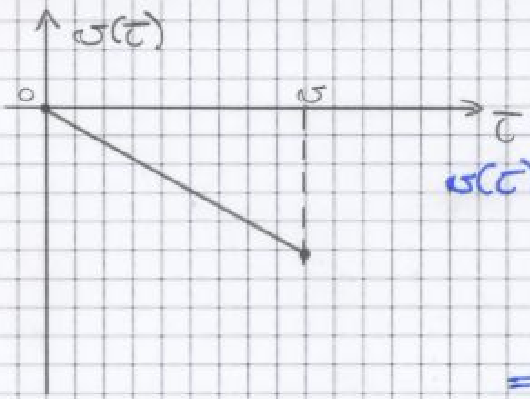
⟹ Moto uniformemente accelerato sull'asse y (è sempre MRUA)




y(t): posizione y sull'asse verticale in funzione di t
NON è un moto parabolico!!

⟹ $y = y_0 + v_{0(y)} - \frac{1}{2} g t^2$

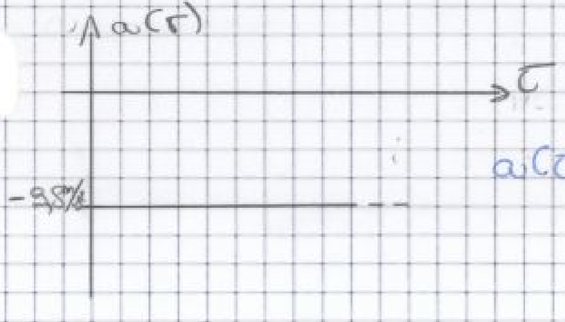
↳ eq. di una parabola, y è funz. di $t^2$




v(t): a è costante ($a = -g$) quindi v cresce linearmente (in modulo) al crescere di t

⟹ $v_y = v_{0(y)} - gt$

↳ eq. di una retta, v è funz. di t




a(t): a è costante
$a = -g \Rightarrow a = -9{,}81\ m/s^2$
(eq. di una retta parallela all'asse x).

- Essendo g costante se non considero l'attrito dell'aria due oggetti con masse anche molto diverse cadrebbero con la stessa velocità e percorrerebbero spazi eguali in tempi eguali (sull'asse y)

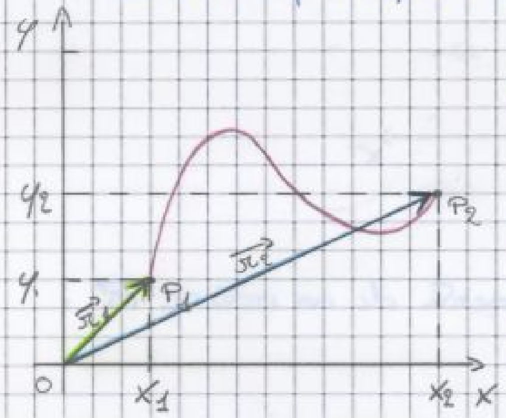
⟹ Nel vuoto una mela e una piuma cadono con la stessa velocità.

# CINEMATICA IN 2 DIMENSIONI

- Per descrivere un moto nello spazio faccio ricorso ai vettori (su una retta bastava indicare il verso di percorrenza).

- VETTORE: Segmento orientato caratterizzato da:
  - ↳ Modulo, $v$: la lunghezza del vettore, ne determina l'intensità
  - ↳ Direzione: la retta su cui giace $\vec{v}$
  - ↳ Verso: come è orientato $\vec{v}$ sulla retta.

NOTA: la maggior parte degli spostamenti nello spazio può essere ridotta a uno spostamento su un piano (2 dimensioni).




Fisso un sistema di riferimento $x, y$ e rappresento la traiettoria di un oggetto da $P_1$ a $P_2$

$\overline{OP_1} = \vec{r_1}$ : vettore posizione $P_1$

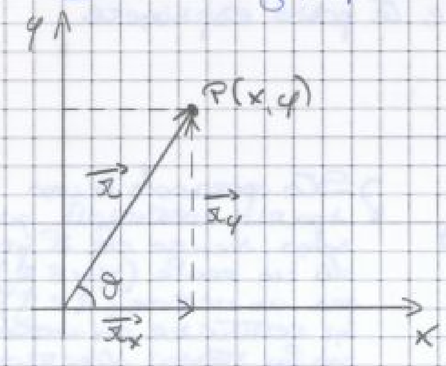
$\overline{OP_2} = \vec{r_2}$ : vettore posizione $P_2$

↳ identità punti/vettori

Specifico un vettore dandone le componenti sugli assi cartesiani:

$$\vec{r}_1 = \left(r_{1(x)}, r_{1(y)}\right) \qquad \vec{r}_2 = \left(r_{2(x)}, r_{2(y)}\right)$$

Dalla trigonometria:

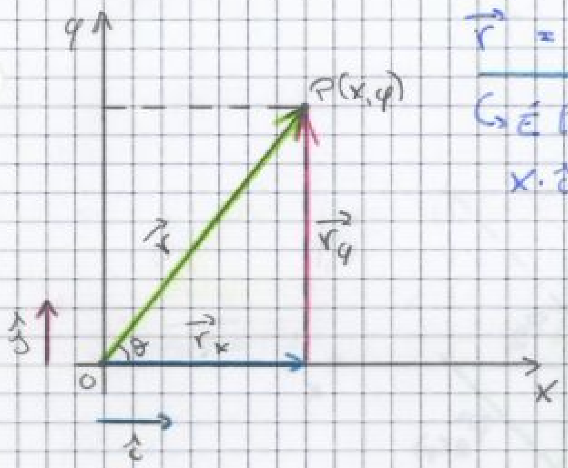



$$r_x = r\cos\vartheta$$

$$r_y = r\sin\vartheta$$

$$\vartheta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

## • Somma di Vettori




$$\vec{r} = x \cdot \hat{i} + y \cdot \hat{j}$$

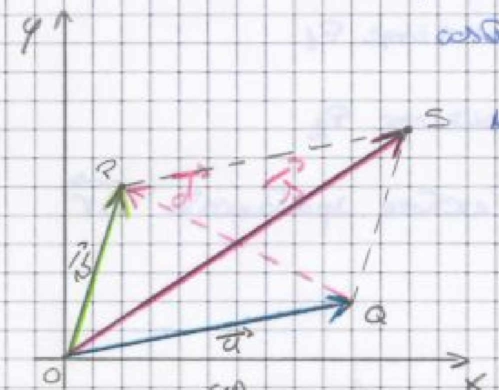
↳ è la somma vettoriale di due vettori sugli assi
$x \cdot \hat{i} = \vec{r}_x$ e $y \cdot \hat{j} = \vec{r}_y$

→ Metodo grafico

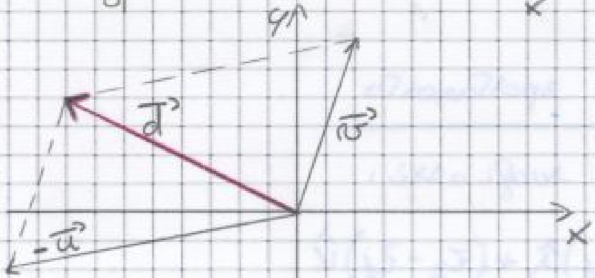
a) Parallelogrammo

Dati $\vec{v} = \overline{OP}$ e $\vec{u} = \overline{OQ}$ tali che $dir(\vec{v}) \neq dir(\vec{u})$

$\Rightarrow \vec{v} + \vec{u} = \vec{s}$, dove $\vec{s}$ è la diagonale maggiore del parallelogrammo costruito con $\vec{v}$ e $\vec{u}$




Nota: $\vec{v} - \vec{u} = \vec{d} = \overline{PQ}$
la differenza tra $\vec{v}$ e $\vec{u}$
è l'altra diagonale del parallelepipedo
[in alternativa costruisco l'opposto di $\vec{u}$ e faccio $\vec{v} + (-\vec{u})$]
$\vec{d}$ punta verso il vettore rimasto positivo ($\vec{v}$ in questo caso).



- Per determinare la velocità in ogni istante passo al limite per $\Delta t \to 0$

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left( \frac{(x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}}{\Delta t} \right)$$ } il lim. di una somma è la somma dei limiti

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \cdot \hat{i} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \hat{j} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} \cdot \hat{k}$$ } sono lim. di rapporti incr.

$$= \frac{dx}{dt} \cdot \hat{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \hat{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \hat{k}$$ raccolgo $d/dt$

$$= \frac{d}{dt}(x \cdot \hat{i} + y \cdot \hat{j} + z \cdot \hat{k})$$ } con: $x \cdot \hat{i} + y \cdot \hat{j} + z \cdot \hat{k} = \vec{r}$ (vettore posizione)

$$\Longrightarrow \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$ : VELOCITÀ ISTANTANEA

$v(t)$ è la derivata del vettore posizione $\vec{r}$ rispetto a $t$

In pratica derivo separatamente ciascuna componente sugli assi del moto rispetto a $t$ e ottengo la velocità istantanea (sempre sugli assi)

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} \quad \Longrightarrow \quad \vec{v}(t) = v_x \cdot \hat{i} + v_y \cdot \hat{j} + v_z \cdot \hat{k}$$

$$v_z(t) = \frac{dz}{dt}$$

- Le componenti di $v$ e $a$ sugli assi sono del tutto indipendenti tra di loro. Ciò che le accomuna è l'istante che scelgo.

- Analogamente a quanto detto per $v$:

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{\Delta v}}{\Delta t} \quad ; \quad \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

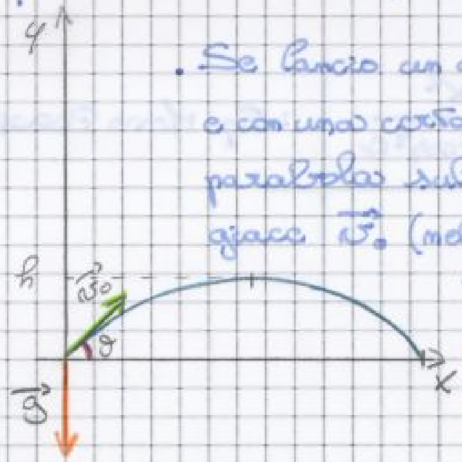
↳ $\vec{a}(t)$ è la der. seconda di $\vec{r}$ in f. di $t$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha(t) = \alpha_0 + v_{0(\alpha)} \cdot t + \frac{1}{2} a_{0(\alpha)} \cdot t^2 \\ v_\alpha(t) = v_{0(\alpha)} + a_{0(\alpha)} \cdot t \end{cases} \quad \text{con } \alpha = x, y, z$$

Posizione e velocità in funzione di $t$ per MUA.

## Moto Parabolico

- Moto di un corpo lungo le due direzioni del sistema di riferimento cartesiano. Il corpo compie sia una traslazione orizzontale lungo l'asse $x$, sia una verticale lungo l'asse $y$; il moto complessivo è la risultante di questi due moti indipendenti.




- Se lancio un oggetto con un certo angolo $\theta$ rispetto al suolo e con una certa velocità $v_0$, questo compirà una parabola sul piano perpendicolare al suolo su cui giace $\vec{v}_0$ (nella direzione in cui lo lancio).

Trascurando l'attrito dell'aria posso scomporre il moto sui due assi di riferimento:

→ asse $x$: velocità costante, il corpo trasla orizzontalmente senza subire l'effetto di altre forze.

→ asse $y$: $a$ costante, il corpo subisce l'effetto della forza di gravità (assunta costante in prossimità della sup.

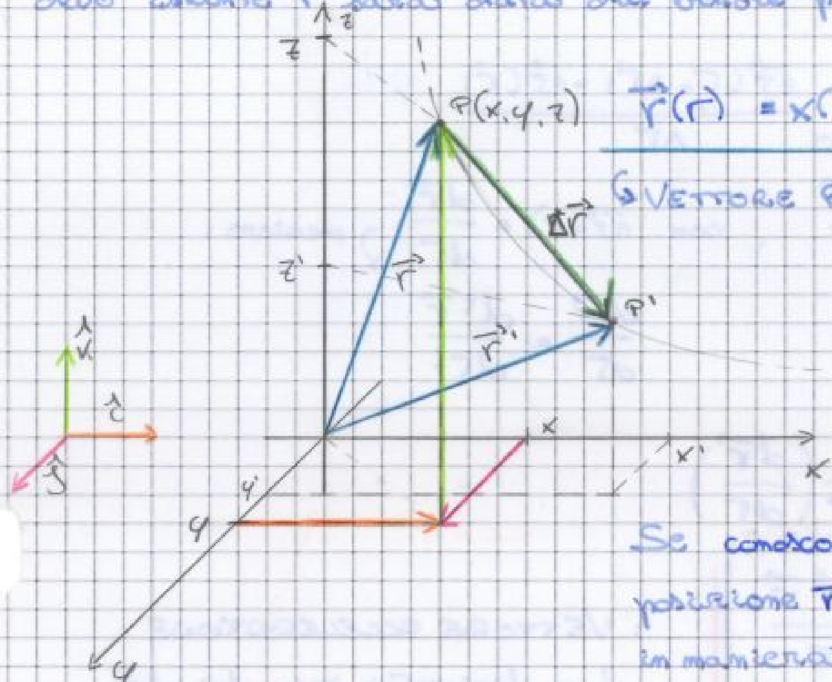
$$\Longrightarrow \begin{cases} x(t) = v_{0(x)} \cdot t \\ y(t) = v_{0(y)} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} , \text{ con } x_0 = 0 \text{ e } y_0 = 0$$

- Voglio trovare un'eq. che descriva il moto parabolico "nel suo insieme", senza scomporlo sugli assi.

Essendo la traiettoria simmetrica mi aspetto l'eq. di una parabola, cioè $y$ sarà funzione di $x^2$

- EQUAZIONI DELLA CINEMATICA IN FORMA VETTORIALE

Studio il moto di un punto nello spazio, la sua posizione a un dato istante $t$ sarà data dal vettore posizione così definito:




$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\cdot\hat{j} + z(t)\cdot\hat{k}$$

↳ VETTORE POSIZIONE in funz. di $t$.

Se conosco la dipendenza del vettore posizione $\vec{r}$ da $t$ posso descrivere in maniera completa il moto.

Se conosco $\vec{r}(t)$ conosco $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$, è vero il contrario. Per l'analogia (corrispondenza biunivoca) tra vettore e punto del piano posso individuare i vettori $\vec{v}$ e $\vec{a}$ conoscendo $\vec{r}(t)$ come ho fatto per $v(t)$ e $a(t)$:

$$\begin{cases} P = (x, y, z) \\ \overline{OP} = \vec{r}(t) \end{cases} \qquad \begin{matrix} P' = (x', y', z') \\ \overline{OP'} = \vec{r}(t+\Delta t) \end{matrix}$$

- Il vettore velocità al tempo $t$ sarà il limite del rapporto incrementale per $\Delta t \to 0$:

$$\frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}}$$

: VETTORE VELOCITÀ
La derivata del vettore posizione rispetto a $t$

$$\vec{v}(t) = x'(t)\cdot\hat{i} + y'(t)\cdot\hat{j} + z'(t)\cdot\hat{k}$$

↳ Derivo solo le leggi orarie sugli assi, i versori sono costanti.

# PROPRIETÁ DEL MOTO PARABOLICO

GITTATA: $R = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} 2\vartheta$

TRAIETTORIA: $y = x \cdot \operatorname{tg}\vartheta - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\vartheta}$

- $R_{max}$:

La gittata é massima se $\vartheta = \pi/4$

infatti $\operatorname{sen} 2\vartheta$ é una funzione limitata ($\frac{v_0^2}{g}$ é una costante).

$$-1 \le \operatorname{sen} 2\vartheta \le 1$$

$$-\pi/2 \le 2\vartheta \le \pi/2$$

$$\hookrightarrow \quad \vartheta \le \pi/4 \longrightarrow R = \frac{v_0^2}{g}$$

$$\Longrightarrow R(max) = \frac{v_0^2}{g}$$

se e solo se $\vartheta = \pi/4$

- $\forall R < R(max) \quad \exists\, \vartheta_1, \vartheta_2 : \vartheta_1 + \vartheta_2 = \pi/2 \wedge \vartheta_1 \neq \vartheta_2$

$$\Longrightarrow R(\vartheta_1) = R(\vartheta_2)$$

Esistono 2 angoli (infinite coppie di angoli) per cui, a parità di $v_0$ la gittata é uguale

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 = \pi/2 \longrightarrow \vartheta_2 = \pi/2 - \vartheta_1$$

$$R(\vartheta_1) = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} 2(\vartheta_1)$$

$$R(\vartheta_2) = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} 2(\pi/2 - \vartheta_1)$$

$\hookrightarrow$ $\operatorname{sen} 2(\pi/2 - \vartheta_1) = \operatorname{sen}(\pi - 2\vartheta_1)$ } dalla trigonometria so che $\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$

$\operatorname{sen}(\pi - 2\vartheta_1) = \operatorname{sen} 2\vartheta_1$

$$\Longrightarrow \operatorname{sen} 2\vartheta_2 = \operatorname{sen}(\pi - 2\vartheta_1) = \operatorname{sen} 2\vartheta_1$$

$$R(\vartheta_2) = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} 2\vartheta_1$$

$\hookrightarrow$ $\frac{v_0^2}{g}$ é costante, $\operatorname{sen} 2\vartheta_1 = \operatorname{sen} 2\vartheta_2$

$$\Longrightarrow R(\vartheta_1) = R(\vartheta_2) \quad c.v.d.$$

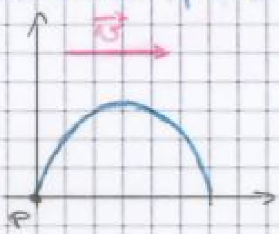
## Sistemi di Riferimento

- Il sistema di riferimento che uso per descrivere un moto é assolutamente arbitrario.
  Peró a seconda di come lo scelgo posso osservare un moto diverso.

- Se sono su un treno in movimento (con $v$ costante) e lancio una pallina in aria la vedró compiere una traiettoria dritta verso l'alto e poi riscendere.


Questo perché io mi sposto (traslo) insieme al treno e quindi il mio sistema di riferimento "segue" il moto del treno.

- Se guardo la stessa cosa da terra, fermo mentre passa il treno, vedró la pallina compiere una parabola per ricadere nello stesso punto del treno da dove é partita.




Questo perché il mio sistema di riferimento é fermo mentre il treno si muove (e la palla con lui).

## Es.:

1. Dati $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \pi/6$, $v_2 = 2v_1$

$? = G_2 (G_1)$

$\Rightarrow G = \dfrac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} 2\vartheta$, $G$ é funzione del quadrato di $v_0$

$\rightarrow$ se $v_2 = 2v_1$

$\Rightarrow G_2 = 4G$.

2. Dati

$h_0 = 1m$

$v_0 = 20m/s$

$D = 50m$

$h_p = 2{,}5m$

$? = \vartheta \,/\, 0 \leq h(D) \leq 2{,}5$


Svolgimento

Traslo il sistema di rif. di $\vec{v}(0, 1)$

$h_0 = 0m \,/\, h_p = 1{,}5m$

$$h(D) = D \cdot \operatorname{tg}\vartheta - \frac{1}{2} g \cdot \frac{D^2}{v_0^2 \cos^2\vartheta}$$

$$= 50 \operatorname{tg}\vartheta - \frac{1}{2} \cdot \frac{g \cdot 2{,}5 \cdot 10^3}{v_0^2 \cos^2\vartheta}$$

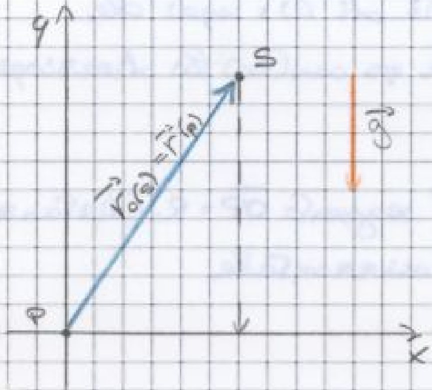
$$= \frac{2v_0^2 \cos^2\vartheta \cdot D \operatorname{tg}\vartheta - gD^2}{2v_0^2 \cos^2\vartheta}$$

$$= \frac{2v_0^2 \cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta \cdot D - gD^2}{\ldots}$$

4. SPARARE A UNA SCIMMIA

Per colpire una scimmia che cade appena sparo devo mirare comunque alla scimmia!!

$\Longrightarrow$ Infatti la scimmia come il proiettile subiscono $g$ e il loro vettore posizione è dato da:




$$\vec{r}_p(t) = \vec{v}_{o(p)}\, t + \frac{1}{2}\vec{g}\, t^2$$

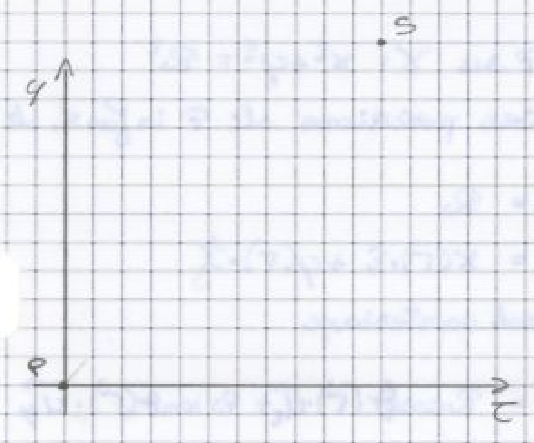
$$\vec{r}_s(t) = \vec{r}_{o(s)} + \frac{1}{2}\vec{g}\, t^2$$

P colpisce S all'istante $t'$ se e solo se $\vec{r}_p(t') = \vec{r}_s(t')$

$$\vec{v}_{o(p)}\, t' + \cancel{\frac{1}{2}\vec{g}\, t'^2} = \vec{r}_{o(s)} + \cancel{\frac{1}{2}\vec{g}\, t'^2}$$

$$\Longrightarrow \vec{r}_{o(s)} = \vec{v}_{o(p)} \cdot t$$

Il vettore $v_0$ di P deve avere la stessa direzione e lo stesso verso di $\vec{r}_{o(s)}$ cioè devo mirare a S.




5. $|\vec{v}|$ = costante $\Longrightarrow$ $a = 0$ : FALSA!!

Se $v$ è costante in MODULO non è detto che $a$ sia nulla.
Perché $a$ sia nulla deve essere il vettore $\vec{v}$ costante (in modulo, dir. e ve...)
Infatti perché un vettore cambi dir. è necessaria una accelerazione!!

N.B.: Gli assi cartesiani non ruotano, quelli polari sì!! perché $\vec{u}_r$ deve sempre avere la direzione di $\vec{r}(t)$

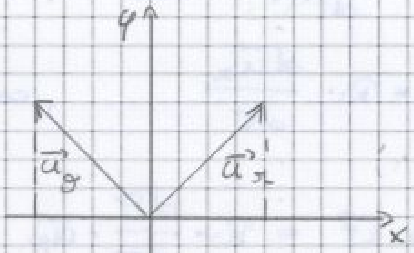
• Esprimo $\vec{u}_r$ e $\vec{u}_\theta$ in funzione di $\hat{i}$ e $\hat{j}$:

$\vec{u}_r = |\vec{u}_r|\cos\theta\cdot\hat{i} + |\vec{u}_r|\,\text{sen}\,\theta\cdot\hat{j}$, con $|\vec{u}_r| = 1$ (è un versore)

$\Longrightarrow \vec{u}_r = \cos\theta\cdot\hat{i} + \text{sen}\,\theta\cdot\hat{j}$

$\vec{u}_\theta = -|\vec{u}_\theta|\,\text{sen}\,\theta\cdot\hat{i} + |\vec{u}_\theta|\cos\theta\cdot\hat{j}$

$\Longrightarrow \vec{u}_\theta = -\text{sen}\,\theta\cdot\hat{i} + \cos\theta\cdot\hat{j}$




• $\vec{r} = x\cdot\hat{i} + y\cdot\hat{j}$

$\vec{r} = R\cos\theta\cdot\hat{i} + R\,\text{sen}\,\theta\cdot\hat{j}$

$= R(\cos\theta\cdot\hat{i} + \text{sen}\,\theta\cdot\hat{j})$, con $\vec{u}_r = \cos\theta\,\hat{i} + \text{sen}\,\theta\cdot\hat{j}$

$\Longrightarrow \boxed{\vec{r}(t) = R\cdot\vec{u}_r(t)}$ : RAGGIO VETTORE

• $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\vec{r})$, con $\vec{r} = R\cdot\vec{u}_r$

$= \dfrac{d}{dt}(R\cdot\vec{u}_r)$, R è costante quindi la porto fuori dalla derivata !!

$= R\cdot\dfrac{d\vec{u}_r}{dt}$, con $\vec{u}_r = \cos\theta\cdot\hat{i} + \text{sen}\,\theta\cdot\hat{j}$

↳ $\dfrac{d\vec{u}_r}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\cos\theta\cdot\hat{i} + \text{sen}\,\theta\cdot\hat{j})$

derivata di funz composta $\text{sen}\,\theta(t)$

$\dfrac{d\cos\theta}{d\theta}\cdot\dfrac{d\theta}{dt}\cdot\hat{i} + \dfrac{d\,\text{sen}\,\theta}{d\theta}\cdot\dfrac{d\theta}{dt}\cdot\hat{j}$

raccolgo $\dfrac{d\theta}{dt}$ ↳ $\dfrac{d\theta}{dt}\left(\dfrac{d\cos\theta}{d\theta}\hat{i} + \dfrac{d\,\text{sen}\,\theta}{d\theta}\hat{j}\right)$

$\dfrac{d\theta}{dt}(-\text{sen}\,\theta\cdot\hat{i} + \cos\theta\cdot\hat{j})$

$\dfrac{d\cos\theta}{d\theta} = -\text{sen}\,\theta$

$\dfrac{d\,\text{sen}\,\theta}{d\theta} = \cos\theta$

$= R\cdot\dfrac{d\theta}{dt}(-\text{sen}\,\theta\cdot\hat{i} + \cos\theta\cdot\hat{j})$

$\Longrightarrow \boxed{\vec{v}(t) = \dfrac{d\theta}{dt}\cdot\vec{u}_\theta\cdot R}$ : VELOCITÀ TANGENZIALE

- Se $\vec{v}$ cambia costantemente dir. e verso deve essere $a \neq 0$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v}) \quad , \text{con } \vec{v} = R \cdot \frac{d\vartheta}{dt} \cdot \vec{u}_\vartheta = R \cdot \omega \cdot \vec{u}_\vartheta$$

$$= \frac{d}{dt}(R \cdot \omega \cdot \vec{u}_\vartheta) \quad \} \; R, \omega = \text{costanti}$$

$$= R \cdot \omega \cdot \frac{d\vec{u}_\vartheta}{dt} \quad , \text{con } \vec{u}_\vartheta = -\text{sen}\vartheta \cdot \hat{i} + \cos\vartheta \cdot \hat{j}$$

$$= R \cdot \omega \cdot \frac{d}{dt}(-\text{sen}\vartheta \cdot \hat{i} + \cos\vartheta \cdot \hat{j}) \quad \} \text{ derivata di funzione composta}$$

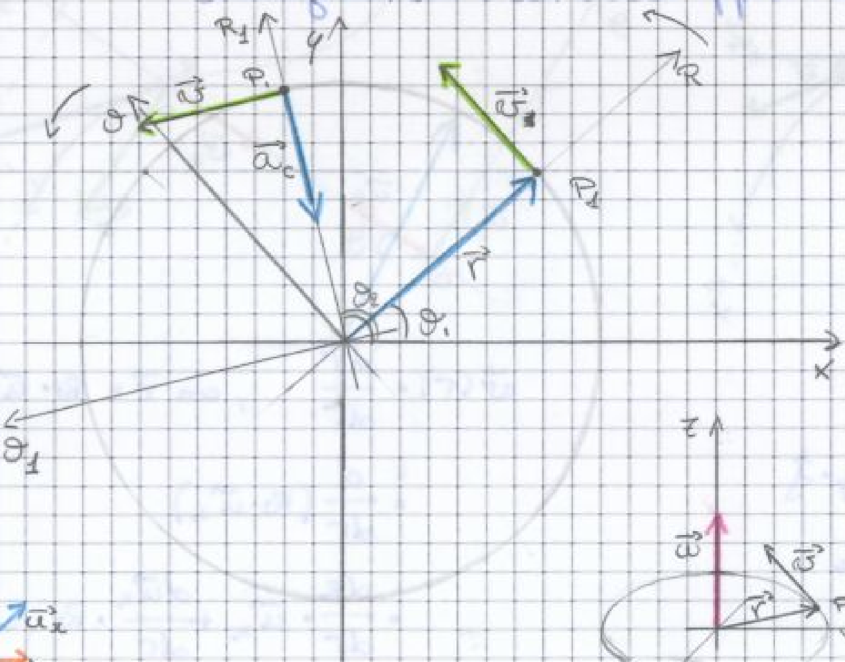
$$= R \cdot \omega \cdot \left(\omega \cdot (-\cos\vartheta \cdot \hat{i}) + \omega \cdot (-\text{sen}\vartheta \cdot \hat{j})\right)$$

$$= -R\omega^2(\cos\vartheta \cdot \hat{i} + \text{sen}\vartheta \cdot \hat{j}) \quad , \text{con } \vec{u}_r = \cos\vartheta \cdot \hat{i} + \text{sen}\vartheta \cdot \hat{j}$$

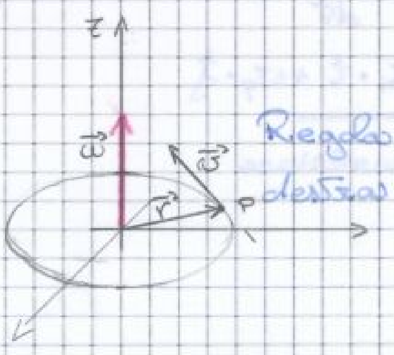
$$= -R\omega^2 \cdot \vec{u}_r$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{a}_r = -R \cdot \omega^2 \cdot \vec{u}_r} \quad : \text{ACCELERAZIONE CENTRIPETA (radiale)}$$

Come mi aspettavo $\vec{a}$ ha un solo componente sull'asse radiale ($\vec{u}_r$) perché $v$ non cambia.
$a_r$ è sempre minore di 0 perché punta verso il centro della circ., in direzione perpendicolare alla circonferenza e con verso opposto rispetto a $\vec{u}_r$.








Regola della mano destra.

$$\vec{v}(t) = \frac{dR}{dt}\cdot\vec{u}_r + \frac{d\vartheta}{dt}\cdot\vec{u}_\vartheta\cdot R$$

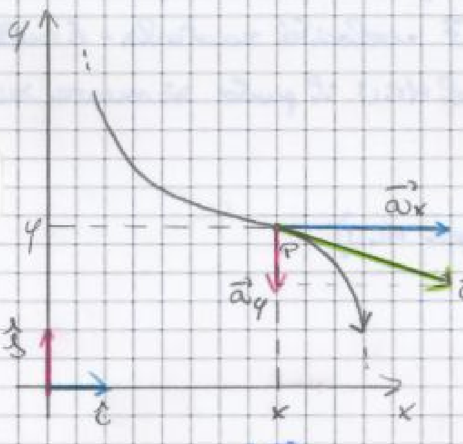
$$\vec{v}(t) = \vec{v}_r + \vec{v}_\vartheta$$

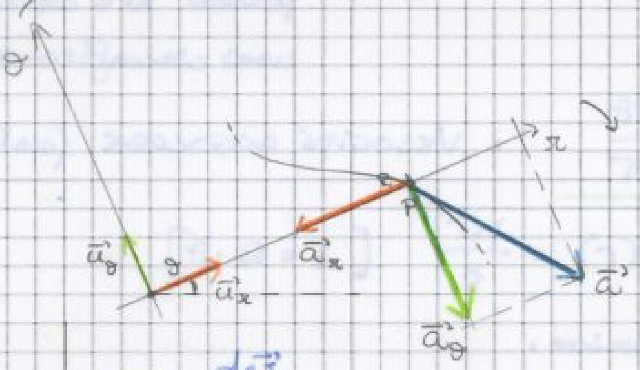
↳ $\vec{v}(t)$ nelle coord. polari ha 2 componenti una tangenziale ($\vec{v}_\vartheta$) e una radiale ($\vec{v}_r$)

$$\vec{v}(t) = \frac{dx}{dt}\cdot\hat{i} + \frac{dy}{dt}\cdot\hat{j}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{dR}{dt}\cdot\vec{u}_r + \frac{d\vartheta}{dt}\cdot\vec{u}_\vartheta\cdot R$$

## VELOCITÀ VETTORIALE




$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$\Longrightarrow \vec{a}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}\cdot\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\cdot\hat{j}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dR}{dt}\cdot\vec{u}_r + \frac{d\vartheta}{dt}\cdot R\cdot\vec{u}_\vartheta\right)$$

...

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_r + \vec{a}_\vartheta$$

↳ anche a ha due componenti come previsto

Dalle componenti polari a quelle cartesiane

$$a_x = \frac{dv}{dt}\cos\vartheta - \frac{v^2}{R}\operatorname{sen}\vartheta$$

$$a_y = \frac{dv}{dt}\operatorname{sen}\vartheta - \frac{v^2}{R}\cos\vartheta$$

, con $\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{v}{R}$

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}\cdot\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\cdot\hat{j}$$

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_r + \vec{a}_\vartheta, \text{ con } a_\vartheta = \frac{v^2}{R}$$

## ACCELERAZIONE VETTORIALE

## Periodo e frequenza

**Def.:** Si chiama periodo di rivoluzione il tempo impiegato a compiere una rivoluzione completa.

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \text{con } 2\pi = \text{rivoluzione } \measuredangle$$

**Def.:** Si chiama frequenza il numero di giri fatti nell'unità di tempo

$$f = \frac{1}{T}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}; \quad f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\Rightarrow \underline{\omega = 2\pi \cdot f}$$

## Moto circolare uniformemente accelerato

- Se la velocità tangenziale varia linearmente nel tempo allora la componente tangenziale di $\vec{a}$, $\vec{a}_\vartheta$, è diversa da zero ed è costante.

$\hookrightarrow$ $\vec{a} = \text{costante}$

$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_\vartheta$, con $\vec{a}_r, \vec{a}_\vartheta = \text{cost.}$

Oltre alla componente radiale (a. centripeta), c'è anche la componente tangenziale $\vec{a}_\vartheta$

$$\vec{a}_\vartheta = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vartheta}{dt} \cdot \vec{u}_\vartheta \cdot R\right), \quad \text{con } R \text{ costante}$$

?!!

$$\vec{a}_\vartheta = R \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vartheta}{dt} \cdot \vec{u}_\vartheta\right)$$

$$= R \cdot \frac{d^2\vartheta}{dt^2} \cdot \vec{u}_\vartheta + R \cdot \frac{d\vec{u}_\vartheta}{dt} \cdot \frac{d\vartheta}{dt}$$

## Moto circolare

$s = R \cdot \theta$

$v = R \cdot \frac{d\theta}{dt} = R \cdot \omega$

$a_\theta = R \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = R \cdot \alpha$

$a_r = \omega^2 \cdot R = \frac{v^2}{R}$

## Moto rettilineo uniforme

$x(t)$

$v = \frac{dx}{dt}$

$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$

. Ho ridotto il moto circolare (ad eccezione di $\vec{a}_r$) ad un moto rettilineo

. Posso risolvere il problema inverso come per MRU !!

. Se $\alpha$ è costante posso integrare (devo solo cambiare le coord.: $x \to \theta$, $v \to \omega$, $a \to \alpha$)

## Problema inverso (MC)

. Dato $\vec{a}$

$\vec{a} = \vec{a}_\theta + \vec{a}_r$

Lo risolvo esattamente come nel moto 1-D

$\Longrightarrow$ MCUA

$\alpha = \text{cost.}$

$\omega = \omega_0 + \alpha t$

$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$

$\alpha$

$a_\theta = \omega^2$

$a_\theta = \omega^2 \alpha \cdot R$

$v_\theta = \omega R$ , $\omega = \frac{v_\theta}{R}$

$\cancel{a_\theta = R \cdot \omega^2}$

$\alpha = \frac{a_\theta}{R}$

$a_r = -\omega^2 R$

# DINAMICA

## LE LEGGI DI NEWTON

- Già Galileo aveva intuito che la variazione dello stato di quiete o di moto di un corpo è dovuta all'interazione dello stesso con l'ambiente circostante, espressa dal concetto di FORZA.

⇒ PRINCIPIO D'INERZIA

Se la risultante delle forze agenti su un corpo è nulla questo non subisce variazioni di velocità, cioè rimane in quiete se $v=0$ o si muove di moto rettilineo uniforme se $v=k$ (costante non nulla).

Collego la FORZA ad una VARIAZIONE DI VELOCITÀ, quindi all'accelerazione!!

⇒ LA FORZA

È la grandezza che esprime e misura l'interazione tra i sistemi fisici. È una grandezza vettoriale, cioè esprimibile con modulo, direzione e verso.

Fu Newton a dare al principio di inerzia una legge quantitativa nel suo libro Principia Matematica (1687):

- PRIMA LEGGE DI NEWTON (Principio d'inerzia)

Un corpo non soggetto a forze esterne permane nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme se osservato in un qualunque sistema di riferimento inerziale.

[È anche la def. di S.R.I. nella prima legge di Newton]

- SECONDA LEGGE DI NEWTON

La forza risultante che agisce su un corpo è data dalla somma vettoriale delle singole forze ed è pari al prodotto della massa per l'accelerazione. (F e a sono direttamente proporzionali).

$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m \cdot \vec{a} \quad , \quad F = m \cdot a$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 106

# CLASSIFICAZIONE DELLE FORZE

1. FORZE DI CONTATTO

   Forze che spingono o tirano e sono applicate da un corpo su un altro a diretto contatto con esso.

2. FORZE A DISTANZA
   - gravità (la più debole)
   - elettromagnetismo
   - interazioni forti

   N.B.: In realtà tutte le forze sarebbero a distanza, i nuclei degli atomi non si toccano mai!
   Le forze con maggiore intensità agiscono sulle distanze più piccole, cambiano le scale su cui agiscono:
   ↳ NUCLEO: le interazioni forti si bilanciano e lo rendono stabile
   ATOMI: atomi e molecole si organizzano per minimizzare le interazioni elettrostatiche
   SPAZIO: resta solo più la forza gravitazionale.

- FORZA DI GRAVITÀ

  La forza di gravità tra due corpi $m$ e $M$ è sempre attrattiva ed è data dalla formula:

$$F_g = (G \cdot M \cdot m) \cdot \frac{1}{R^2}$$

, con: $G$ = costante di gravitazione universale

$R$ = distanza tra $M$ e $m$

$$\Rightarrow G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{Kg \cdot s^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{F_g = G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2}}$$

- La $F_g$ all'esterno di una massa sferica estesa è identica alla forza che sentirei se tutta la massa fosse concentrata nel centro della sfera.

  → Per calcolare la forza di gravità a cui è sottoposto un corpo di massa $m$ sulla Terra devo tener conto del raggio terrestre e dell'altezza sul livello del mare a cui si trova.

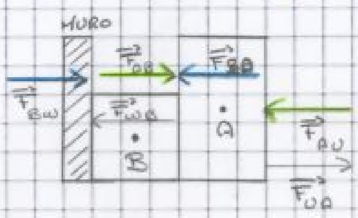
$\vec{F}^{(g)}_{m M_T} = m \cdot g = P$ : FORZA PESO

- Sulla superficie terrestre ogni oggetto di massa m subisce la forza peso $\vec{P} = m\vec{g}$
  $\vec{P}$ è diretta verso il centro della terra sulla congiungente tra m e C.

## TERZA LEGGE DI NEWTON

- Per ogni azione c'è una reazione uguale e contraria che agisce sul corpo che ha provocato l'azione.
  Sono uguali in modulo e direzione ma opposte in verso, quindi si annullerebbero ma $a \neq 0$ perché sono applicate su corpi diversi

- DIAGRAMMA DEL CORPO LIBERO
  Considero ogni corpo separatamente e segno le forze che agiscono su quel corpo anche se provocate da altri corpi che non considero.




↳ CORPO LIBERO A
Sono solo le frecce verdi, che agiscono su A (primo termine al pedice)


$\vec{F}_{AU}$ : è la spinta data dall'uomo
$\vec{F}_{AB}$ : è la reazione di B su A per la forza F

↳ CORPO LIBERO B
Sono le frecce blu, che agiscono su B

## ATTRITO STATICO

- Si manifesta solo nel momento in cui cerco di spostare un corpo sul piano dove poggia, finché la risultante delle forze era nulla non ho attrito statico (altrimenti paradossalmente si muoverebbe solo a causa dell'attrito).
- Se applico una forza parallela al piano sul corpo avrò una forza di attrito statico uguale e contraria alla forza da me applicata fino a quando non raggiunge il valore massimo e il corpo comincia a muovers

$$f_s = \mu_s \cdot N$$ : forza di attrito statico massima.

- $\mu_s > \mu_d$
- L'attrito statico non dipende dall'estensione delle superfici a contatto, ma solo da $N$.

## ATTRITO IN UN FLUIDO

FLUIDO: sistema di particelle liquide o gassose, che si muovono liberamente e non hanno un volume proprio.

- I fluidi si oppongono al moto dei corpi con una forza, detta forza di attrito viscoso o FORZA DI DERIVA.

⇒ La FORZA DI DERIVA dipende dalla velocità del corpo nel fluido quindi se il corpo è fermo non abbiamo questa forza di attrito.
[dipende dalla vel. del corpo relativamente al mezzo!]

- La forza di deriva è dir. prop. a $v$ secondo un coefficiente di prop. chiamato $b$

$$F_D = b \cdot v^n$$ , con $n \in N$ variabile a seconda dei casi, è det. sperimentalmente.

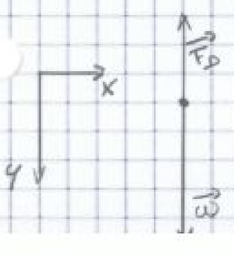
ES:

1. VELOCITÀ MAX DI CADUTA

DATI

$t = 0\,s$ : $F_D = 0$ , aumenta con $t$ perché $v$ cresce per effetto di grav.

$w = mg$ , costante




$\rightarrow F_D = b \cdot v$

asse y: $w - F_D = m \cdot a$

$mg - bv = ma$ ? quando $F_D = w$ ($F_d = mg$)

Velocità di un corpo in un fluido:

$$v(t) = v_0 e^{-\gamma t} + \frac{g}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma t}\right)$$

- $v(0) = v_0 \cdot e^{-\gamma \cdot 0} + \frac{g}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma \cdot 0}\right)$

$= v_0 \cdot 1 + \frac{g}{\gamma}(1-1)$

$v(0) = v_0$ : la $v$ al tempo 0 è la $v$ iniziale!

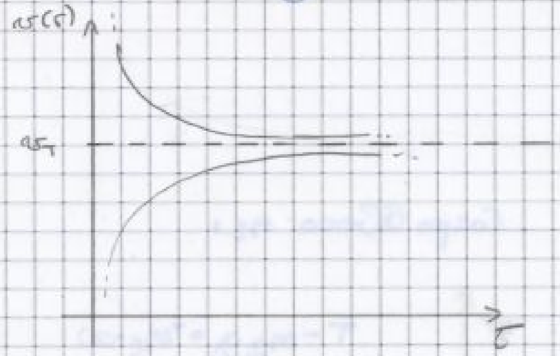
- $v(+\infty)$, $t \to +\infty \to$ voglio che $v$ sia $v_T$ (terminale)

$v(+\infty) = v_0 \cdot 0 + \frac{g}{\gamma}(1-0)$

$= 0 + \frac{g}{\gamma} \cdot 1$ , $v_0$ non compare più! $\to$ $v_T$ NON DIPENDE da $v_0$!!

$= \frac{g}{\gamma}$, con $\gamma = \frac{b}{m}$

$\Rightarrow v_T = \frac{mg}{b}$ , come avevo ricavato sopra!! $\to$ l'eq. è giusta.




Per $t \to +\infty$ la forza di deriva tende a far diventare il moto rett. uniforme.

N.B.: Adesso posso ricavare $a$ in funzione di $t$!!

$v(t) = v_0 e^{-\gamma t} + \frac{g}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma t}\right)$ , con $\frac{g}{\gamma} = v_T$

$= v_0 e^{-\gamma t} + v_T\left(1 - e^{-\gamma t}\right)$

$v(t) = v_T - e^{-\gamma t}(v_T - v_0)$

$\Rightarrow a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left[v_T - e^{-\gamma t}(v_T - v_0)\right]$

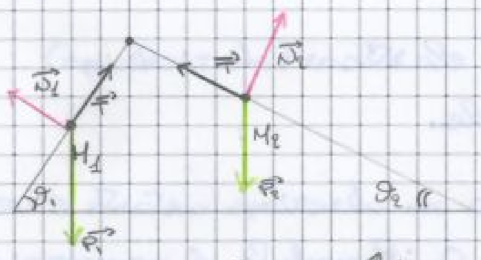
$$a(t) = \gamma e^{-\gamma t}(v_T - v_0)$$

Se $v_0 = 0$: $a(0) = \frac{b}{m} \cdot v_T = g$

Se $t \to +\infty$: $a(+\infty) = 0$ c.v.d.

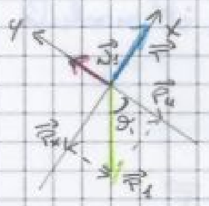
## Es.: Macchina di Atwood su piani inclinati

### 1. Dati




$M_1$ e $M_2$ su una carrucola ideale poggiano su due piani inclinati di $\vartheta_1$ e $\vartheta_2$. Voglio trovare $a$

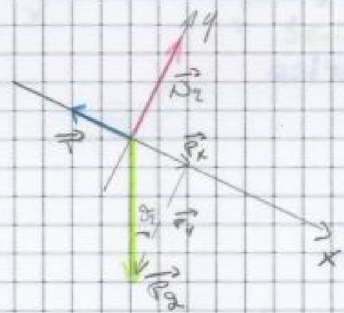
C.L. $M_1$:




asse x: $T - M_1 g \operatorname{sen}\vartheta_1 = M_1 \cdot a$

asse y: $N_1 = M_1 g \cos\vartheta_1$

C.L. $M_2$:




asse x: $-T + M_2 g \operatorname{sen}\vartheta_2 = M_2 \cdot a$

asse y: $N_2 = M_2 g \cos\vartheta_2$

Sull'asse y non c'è moto, considero l'asse x.

Ricavo a:

$$\Rightarrow \begin{cases} M_1 a = T - M_1 g \operatorname{sen}\vartheta_1 \\ M_2 a = -T + M_2 g \operatorname{sen}\vartheta_2 \end{cases} \quad T, a = \text{incognite}$$

$$\begin{cases} T = M_1 a + M_1 g \operatorname{sen}\vartheta_1 \\ M_2 a = -M_1 a - M_1 g \operatorname{sen}\vartheta_1 + M_2 g \operatorname{sen}\vartheta_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \to \\ a(M_2 + M_1) = g(M_2 \operatorname{sen}\vartheta_2 - M_1 \cancel{g} \operatorname{sen}\vartheta_1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{a = g \frac{M_2 \operatorname{sen}\vartheta_2 - M_1 \operatorname{sen}\vartheta_1}{M_1 + M_2}}$$

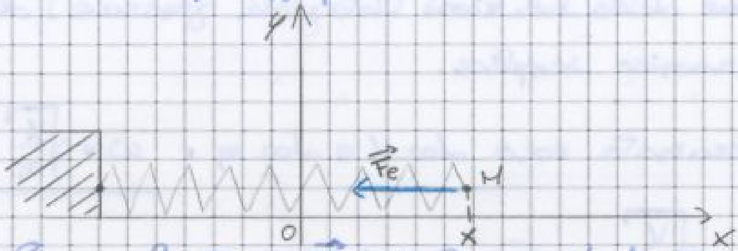
↳ a dipende dalle masse ma anche dagli angoli!!

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 106

# Moto Armonico

- Se allungo una molla e la lascio andare questa produrrà un moto oscillatorio al corpo attaccato alla sua estremità.
- Se cambia posizione cambiano costantemente $\vec{F}$ e $\vec{a}$!!

→ Devo risolvere eq. diff. per trovare a!




La forza elastica $\vec{F_e}$ richiama M da x verso O fino a quando non lo raggiunge, $F_e$ diminuisce al tendere a 0 di x
Ma quando arriva a 0 ha un'accelerazione $a \neq 0$ che permette a M di comprimere la molla. A quel punto $\vec{F_e}$ cambia verso e cresce all'aumentare di x (in valore assoluto).
⟹ Se la molla è ideale ho un moto armonico!!

- $\vec{F_x} = m \cdot \vec{a}$ (eq. vettoriale)

$-kx = m \cdot a \Rightarrow a = -\frac{k}{m} \cdot x$

Ma è anche

$a = \frac{d^2x}{dt^2}$ ⟹ le eguaglio

$$\begin{cases} a = -\frac{k}{m}x \\ a = \frac{d^2x}{dt^2} \end{cases}$$

$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{kx}{m}$, con $\frac{k}{m} = \omega^2$ ($\omega$ al quadrato perché $\frac{k}{m}$ è sempre posi

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

: Eq. differenziale del moto armonico semplice.

↳ È un'eq. differenziale di 2° ordine, lineare e omogenea a coeff. costanti.
Ha due soluzioni:

$\text{sen}\,\omega t \rightarrow \frac{d^2 \text{sen}\,\omega t}{dt^2} = -\omega^2 \text{sen}\,\omega t$

$\cos\omega t \rightarrow \frac{d^2 \cos\omega t}{dt^2} = -\omega^2 \cos\omega t$

# PERIODO

- Si chiama periodo $T$ l'intervallo di tempo così definito:

Def.: PERIODO $T \,/\, x(t+T) = x(t)$

- $\begin{cases} x(t+T) = a \cdot \cos[\omega(t+T) + \phi_0] \\ x(t) = a \cos(\omega t + \phi_0) \end{cases}$

$\hookrightarrow \cancel{a} \cdot \cos[\omega(t+T) + \phi_0] = \cancel{a} \cdot \cos(\omega t + \phi_0)$

$\cos(\omega t + \omega T + \phi_0) = \cos(\omega t + \phi_0)$

$\cos(\omega t + \phi_0)\cos\omega T - \text{sen}(\omega t + \phi_0)\,\text{sen}\,\omega T = \cos(\omega t + \phi_0)$

$\hookrightarrow$ È un'eguaglianza, 1° e secondo termine devono essere uguali.

$\Longrightarrow \begin{cases} \cos\omega T = 1 \\ \text{sen}\,\omega T = 0 \end{cases} \Longrightarrow \omega T = 2\pi$, con $T$: Periodo

$$\Longrightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$ : Periodo moto armonico semplice.

# VELOCITÀ (MOTO ARMONICO)

- $v(t) = \dfrac{dx}{dt}$

$\Longrightarrow v(t) = \dfrac{d}{dt}\left(a \cdot \cos(\omega t + \phi_0)\right)$

$= a \cdot \left(-\text{sen}(\omega t + \phi_0) \cdot \omega\right)$

$$\Longrightarrow \boxed{v(t) = -\omega \cdot a \cdot \text{sen}(\omega t + \phi_0)}$$ : Velocità in funzione del tempo (moto armonico semplice).

Risolvo l'eq. differenziale per trovare l'equazione che descrive il moto armonico semplice della molla verticale:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = g$$

cambio di variabile: $u = y - y_{eq}$, con $y_{eq} = \frac{m}{k} g$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2u}{dt^2}$$

$$\omega^2 y = \omega^2 (u + y_{eq})$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega^2(u + y_{eq}) = g$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega^2 u + \omega^2 \cdot \frac{m}{k} g = g \quad , \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega^2 u + \frac{\cancel{k}}{\cancel{m}} \cdot \frac{\cancel{m}}{\cancel{k}} g = g$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega^2 u + \cancel{g} = \cancel{g} \implies \frac{d^2u}{dt^2} + \omega^2 u = 0$$

→ Ho ricavato l'eq. differenziale del moto armonico semplice solo sull'asse $y$ e non sulle ascisse.

$$\implies u(t) = A\cos(\omega t + \phi_0) ,$$

con $u = y - y_{eq}$

$$\implies y(t) = y_{eq} + A\cos(\omega t + \phi_0)$$

↳ Legge oraria del moto armonico semplice di una molla verticale.

L'oscillazione avviene tra $y_{eq} + A$ e $y_{eq} - A$

- Risolvo l'eq. differenziale:

La soluzione sarà del tipo:

$$x = e^{\alpha\tau}$$

$$\frac{dx}{d\tau} = \alpha e^{\alpha\tau} \quad , \quad \frac{d^2x}{d\tau^2} = \alpha^2 e^{\alpha\tau}$$

- $$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{dx}{d\tau} 2\gamma + \omega_0^2 \cdot x = 0$$

$$\alpha^2 \cancel{e^{\alpha\tau}} + 2\gamma \cdot \alpha e^{\alpha\tau} + \omega_0^2 \cdot \cancel{e^{\alpha\tau}} = 0$$

$$\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2 = 0$$

↳ Risolvo per $\alpha$ e trovo le due sol. dell'eq. diff.

$$\alpha_{1,2} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}{1}$$ , quando la radice è reale ho un moto smorzato esponenzialmente.

$$\alpha_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$\alpha_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$\longrightarrow x_1(\tau) = e^{\alpha_1 \tau} \quad ; \quad x_2(\tau) = e^{\alpha_2 \tau}$$

⇒ INTEGRALE GENERALE:

$$x(\tau) = A e^{\alpha_1 \tau} + B e^{\alpha_2 \tau}$$

- $$\alpha_{1,2} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}{1}$$

↳ Se $\Delta < 0$ $(\gamma < \omega_0)$:

ho un numero immaginario, approssimo $\gamma^2 - \omega_0^2 = -\omega^2$

$$\sqrt{-\omega^2} = i\omega$$

L'int. gen. diventa:

$$x(\tau) = A e^{(-\gamma + i\omega)\tau} + B e^{(-\gamma - i\omega)\tau}$$

$$= e^{-\gamma\tau} \left( A e^{i\omega\tau} + B e^{-i\omega\tau} \right)$$

con $e^{i\omega\tau} = \cos\omega\tau + i \operatorname{sen}\omega\tau$

$x(\tau)$ deve essere un numero REALE!!

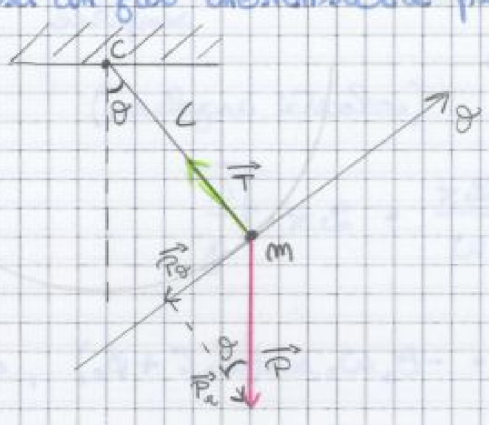
Prendo solo la parte reale della soluzione.

$$x(\tau) = e^{-\gamma\tau} \operatorname{Re}\left( A e^{i\omega\tau} + B e^{-i\omega\tau} \right) \quad , \quad c \in \mathbb{C} \rightarrow c = c_0 + i c_1$$

$$\Longrightarrow x(\tau) = x_0 e^{-\gamma\tau} \cdot \operatorname{sen}(\omega\tau + \phi_0)$$ Debole smorzamento

# Il Pendolo Semplice

- Una massa $m$ su un filo inestensibile privo di massa di lunghezza $L$.




$m$ percorre una semicirconferenza di centro C e raggio $L$
$\rightarrow$ Uso coordinate polari.

$$r: \begin{cases} T = P\cos\vartheta \\ -P_\vartheta = m\cdot a_\vartheta \end{cases}$$ 

$\vartheta:$ , sull'asse radiale non ho moto (è vincolato dalla fune)

Dir. tang.:
$-P_\vartheta = mg \operatorname{sen}\vartheta$

$-\cancel{m}g\operatorname{sen}\vartheta = \cancel{m}\cdot a_\vartheta$ , moto indipendente dalla massa

$$a_\vartheta = \alpha \cdot L$$

$$\alpha = \frac{d^2\vartheta}{dt^2} \rightarrow a_\vartheta = L\cdot\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$$

$$L\cdot\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + g\operatorname{sen}\vartheta$$

: Eq. diff. del moto armonico del pendolo semplice, 2° ordine a coeff. costanti NON LINEARE (trascendente).

- Risolvo l'eq. diff. e trovo l'eq. del moto del pendolo semplice:

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{g}{L}\operatorname{sen}\vartheta = 0 \quad , \quad \frac{g}{L} = \omega^2$$

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \omega^2\operatorname{sen}\vartheta = 0$$

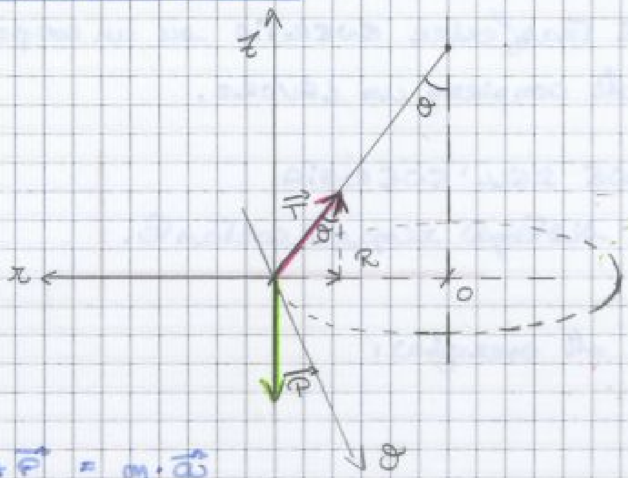
↳ Se $\vartheta \ll 1$ (cioè $\vartheta \simeq \pi/30$)

Posso troncare lo sviluppo in serie di Taylor di $\operatorname{sen}\vartheta$ al secondo ordine:

$$\operatorname{sen}\vartheta = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{\vartheta^{2n+1}}{(2n+1)!} \Longrightarrow \operatorname{sen}\vartheta = \vartheta$$

$$\Longrightarrow \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \omega^2\vartheta = 0$$ : Eq. moto armonico semplice.

# Pendolo Conico




Uso 3 assi di riferimento
$x, z, \vartheta$

- $\vec{T} + \vec{P} = m \cdot \vec{a}$

asse z: $-mg + T\cos\vartheta = 0$

$$\Rightarrow T = \frac{mg}{\cos\vartheta}$$

asse x: $-T\operatorname{sen}\vartheta = m \cdot a_x$ , $a_x = \frac{v^2}{R}$

$$\Rightarrow T = \frac{mv^2}{R \operatorname{sen}\vartheta}$$

↳ Le eguaglio:

$$\begin{cases} T = \dfrac{mg}{\cos\vartheta} \\ T = \dfrac{mv^2}{R \operatorname{sen}\vartheta} \end{cases} \longrightarrow \frac{\cancel{m}g}{\cos\vartheta} = \frac{\cancel{m}v^2}{R \operatorname{sen}\vartheta}$$

$$\Rightarrow \boxed{v^2 = gR \operatorname{tg}\vartheta}$$

$\hookrightarrow [W] = [N]\cdot[m] = P \cdot \frac{L}{T^2} \cdot L = P \cdot \frac{L^2}{T^2} = \left[Kg \cdot \frac{m^2}{s^2}\right]$

$\Longrightarrow \left[Kg \cdot \frac{m^2}{s^2}\right] = [J]$, JOULE

L'unità di misura del lavoro è il Joule, J.

- Il lavoro fatto da una forza $\vec{F}$ è legato alla velocità di m:

$$W_{\vec{F}} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$ , con $v_0$ = v. iniziale, $v$ = v. finale.

Def.: Definisco ENERGIA CINETICA, K, la grandezza $\frac{1}{2}mv^2$

$\Longrightarrow K = \frac{1}{2}mv^2$ : ENERGIA CINETICA

TEOREMA LAVORO-ENERGIA CINETICA

- Il lavoro fatto da una forza $\vec{F}$ è uguale alla variazione di energia cinetica del corpo di massa m.

$$W_{\vec{F}} = K - K_0 = \Delta K$$

- Se agiscono più forze:

$\hookrightarrow \sum_{i=1}^{m} W_{\vec{F_i}} =$

$= \vec{F_1}\cdot\Delta\vec{r} + \dots \vec{F_n}\cdot\Delta\vec{r} =$ , raccolgo $\Delta\vec{r}$

$= \Delta\vec{r}\,(\vec{F_1} + \dots \vec{F_n}) =$ , è una somma vettoriale di forze

$= \Delta\vec{r}\cdot\vec{F_R}$ → è la forza risultante $\vec{F_R}$

$\Longrightarrow W_{\vec{F_R}} = \vec{F_R}\cdot\Delta\vec{r}$

$\hookrightarrow$ Il lavoro fatto da n forze su un dato spostamento $\Delta\vec{r}$ è uguale al lavoro fatto dalla forza risultante $\vec{F_R}$ (Il lavoro è una quantità additiva).

- Il tempo non è importante!

L'intervallo di tempo per cui applichiamo la forza che compie lavoro non influisce sul lavoro stesso.

- Il lavoro è nullo ($W=0$) se:

$\hookrightarrow F = 0$, $\Delta r = 0$ , $\vec{F} \perp \Delta\vec{r}$ (perché $W = F\cdot\Delta r\cdot\cos\vartheta$, se $\vartheta = \pi/2 \to \cos\pi/2 = 0$)

N.B.: In generale il lavoro fatto da una forza $\vec{F}$ variabile non dipende solo da $x_0$ e $x$, ma anche dal percorso fatto.

. IL TEOREMA LAVORO-ENERGIA CINETICA vale anche per le forze variabili:

<u>Dim.:</u>

$$W_{\vec{F}_R} = \int_{x_0}^{x} F_R \cdot dx = \int_{x_0}^{x} m \cdot a \, dx$$

$$= \int_{v_0}^{v} m \cdot \frac{dv}{dt} \cdot dx \quad , \quad \text{con } \frac{dx}{dt} = v$$

$$= \int_{v_0}^{v} m \cdot v \cdot dv \quad , \quad m \text{ é costante}$$

$$= m \int_{v_0}^{v} v \, dv$$

$$= m \left[ \frac{1}{2} v^2 \right]_{v_0}^{v} =$$

$$\Longrightarrow W_{\vec{F}_R}(x_0 \to x) = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \Delta K \qquad \text{c.v.d.}$$

## LAVORO DI UNA FORZA ELASTICA

$$W_{\vec{F}_e}(x_0 \to x) = \int_{x_0}^{x} F_e \, dx \quad , \text{ é una forza variabile che dipende dalla posizione } x.$$

$$= \int_{x_0}^{x} (-kx) \, dx \quad , \ -k \text{ é costante}$$

$$= -k \int_{x_0}^{x} x \, dx = -k \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_{x_0}^{x}$$

$$\Longrightarrow W_{\vec{F}_e}(x_0 \to x) = -\frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} k x_0^2$$

LAVORO DELLA FORZA ELASTICA
↳ Dipende solo da $x_0$ e $x$ !!

$W_{\vec{F}_e} > 0$ se $x < x_0$

$W_{\vec{F}_e} < 0$ se $x > x_0$

$W_{\vec{F}_e} = \Delta K$

$W_{\vec{F}_e} = -\frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} k x_0^2$

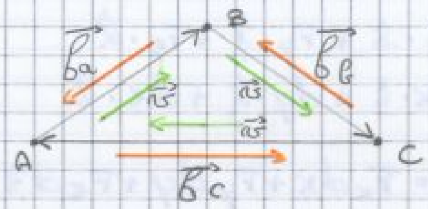
$$\Longrightarrow -\frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} k x_0^2 = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

# Lavoro della forza di attrito

- Dipende dal percorso fatto!!

Su un percorso chiuso $W_{\vec{F_a}} \neq 0$!!

Dim.:




Sposto una massa $m$ con velocità $v$ su $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = \ell$

$$W_{\vec{F_a}}(A \to B) = \vec{F_a} \cdot \ell(\cos\pi) = -F_a \cdot \ell$$

con $F_a = \mu_d mg$

$$W_{\vec{F_a}}(A \to B) = -\mu_d mg \cdot \ell$$

$$W_{\vec{F_a}} = W_{\vec{F_B}} = W_{\vec{F_C}}$$

$$\Rightarrow W_{\vec{F_d}}(A \to A) = -3\mu_d mg \cdot \ell$$

$W_{\vec{F_d}} \neq 0$!! anche se il percorso è chiuso!

$$\Rightarrow \boxed{W_{\vec{F_d}}(\ell) = -F_d \cdot \ell} \quad : \text{lavoro di } \vec{F_d} \text{ su } \ell$$

Es.:

Molla e massa con attrito

- Come il problema di prima, ma anche $\vec{F_d}$ fa lavoro!!

$$W_T = W_{\vec{F_e}} + W_{\vec{F_d}} = \Delta K$$

$$W_{\vec{F_e}} = \frac{1}{2}Kd^2 \quad , \quad W_{\vec{F_d}} = -\mu_d mgd \quad , \quad \Delta K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\frac{1}{2}Kd^2 - \mu_d mgd = \frac{1}{2}mv^2$$

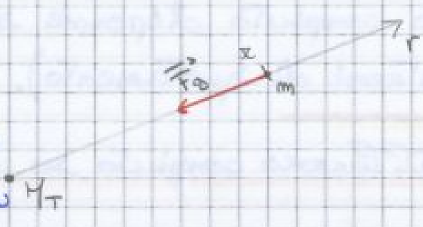
$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{K}{m}d^2 - 2\mu_d gd}$$

ES:

## INTERAZIONE GRAVITAZIONALE

$$\boxed{\vec{F}_g = -G \cdot \frac{m \cdot M_T}{r} \cdot \hat{r}}$$

↳ Forza gravitazionale esercitata dalla Terra ($M_T$) su una massa $m$ a distanza $r$ da $M_T$

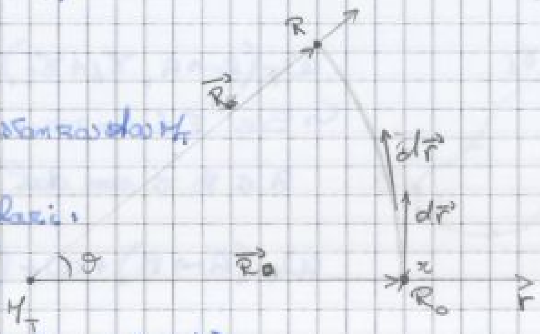


$W_{\vec{F}_g}(R_0 \to R) = \int \vec{F}_g \cdot d\vec{r}$

↳ $W_{\vec{F}_g}$ dipende dalla distanza da $M_T$

Scrivo $d\vec{r}$ in coord polari:

$d\vec{r} = dR \cdot \hat{r} + R \cdot d\vartheta \cdot \hat{\vartheta}$



$$W_{\vec{F}_g}(R_0 \to R) = \int_{R_0}^{R} \vec{F}_g (dR\,\hat{r} + R\,d\vartheta \cdot \hat{\vartheta})$$

$$= \int_{R_0}^{R} \left(-G \cdot \frac{m \cdot M_T}{r^2} \cdot \hat{r}\right)(dR\,\hat{r} + d\vartheta \cdot R \cdot \hat{\vartheta}) \quad , \quad \text{con:} \begin{array}{l} \hat{r} \cdot \hat{r} = 1 \\ \hat{r} \cdot \hat{\vartheta} = 0 \end{array}$$

$$= \int_{R_0}^{R} -G \cdot \frac{m \cdot M_T}{r^2} \cdot dR$$

$$= -G m M_T \int_{R_0}^{R} \frac{1}{r^2} dR = -G m M_T \left[-\frac{1}{r}\right]_{R_0}^{R} = \underline{\underline{-G m M_T \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0}\right)}}$$

⟹ Il lavoro di $\vec{F}_g$ dipende solo da quanto vario la mia distanza dal centro di gravità.

## Energia potenziale gravitazionale

- $\Delta U_{\vec{g}} = -W_{\vec{g}}$

$$\Longrightarrow \Delta U_{\vec{g}} = mg(y_B - y_A)$$

$$\Longrightarrow U_{\vec{g}}(y) = mgy + C$$

: En. potenziale gravitazionale in funzione della posizione $y$. $C$ si fissa dove voglio nulla l'en. potenziale.

## Conservazione dell'energia meccanica

- $W_{\vec{F_R}}(A \to B) = \Delta K$

$$W_{\vec{F_R}}(A \to B) = \sum_{i=1}^{n} W_{\vec{F_R}_i}(A \to B) \quad , \text{con } \Delta U_F = -W_F$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} U_{F_i}(A \to B) = -\Delta U_{\vec{F_R}}$$

$$\Longrightarrow \Delta K = -\Delta U_{\vec{F_R}}$$

$$K_B - K_A = -U_B + U_A$$

$$K_B + U_B = K_A + U_A = \text{costante}$$

$$\Longrightarrow K_i + U_i = \text{ENERGIA MECCANICA}$$

↳ L'energia meccanica si conserva se sul corpo agiscono solo forze conservative.

$$\Longrightarrow E = K + U \quad : \text{ENERGIA MECCANICA}$$

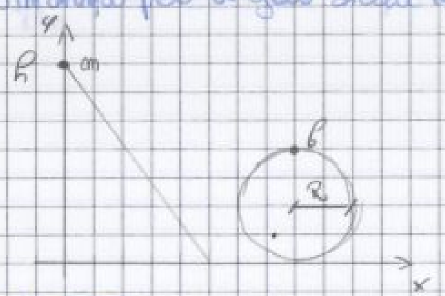
## VELOCITÀ DI FUGA

. È la velocità necessaria per allontanarsi infinitamente da un campo gravitazionale.

$$v_f = \sqrt{2gR}$$ , con $g$ costante grav. per ogni pianeta
$R$
e $g = \frac{GM}{R^2}$ (per un pianeta qualsiasi)

ES.:

1. Altezza minima per il giro della morte. (no $\vec{F}_a$)




SVOLGIMENTO

Vedi appunti.

# EQUILIBRIO IN UN SISTEMA

- Un corpo di massa m ha come posizioni di equilibrio i punti di MINIMO dell'energia potenziale.

$$\text{EQUILIBRIO} \iff \vec{F}_R = 0 \quad \text{(per leggi di Newton)}$$

Dim.: Dimostro che $\vec{F}_R = 0$ identifica i punti di minimo di U.

$$\vec{F}_R = -\vec{\nabla} U$$ , con $\vec{\nabla} U$: gradiente dell'energia potenziale.
È la derivata vettoriale.

$$\vec{\nabla} = \hat{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \cdot \frac{\partial}{\partial z}$$

↳ derivate parziali.

In 1-D:

$$\omega = \int \vec{F}_R \, dx$$

$$d\omega = \vec{F}_R \, dx = -dU \quad , \text{con } \omega_F = -\Delta U \text{ !!}$$

↳ Il lavoro infinitesimo è uguale alla forza per lo spostamento (anch'esso infinitesimo) ed è uguale alla variazione infinitesima di en. potenziale.

$$F_R \, dx = -dU$$

$$\Rightarrow F_R = -\frac{dU}{dx}$$

↳ La forza è la derivata di U rispetto a x (cambiata di segno)

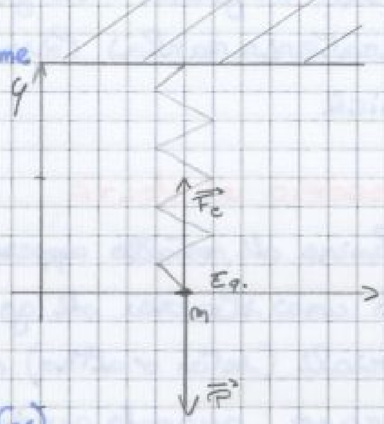
$\Rightarrow F_R = 0$ significa:

$$-\frac{dU}{dx} = 0$$ , i punti in cui la derivata prima si annullano sono detti PUNTI CRITICI e sono appunto punti di max e min. !!

c.v.d.

Es.:

1. Mostriamo che il punto di equilibrio di una molla verticale si può ottenere minimizzando l'energia potenziale.




. Scrivo l'en. pot. in funzione di $y$ per $\vec{F}_{el}$ e per $\vec{P}$:

$$U_{\vec{F}_{el}}(y) = \frac{1}{2} k y^2$$

$$U_{\vec{P}}(y) = mgy$$

$$\Rightarrow U(y) = U_{\vec{F}_{el}}(y) + U_{\vec{P}}(y)$$

En. potenziale totale. $\Rightarrow U(y) = \frac{1}{2} k y^2 + mgy$

Per trovare $y_{eq.}$ trovo il minimo della funzione $U(y)$ (che esiste perché $\oint \Sigma \vec{F}\, dy = 0$ - perché $\vec{F}_{el}$ e $\vec{P}$ sono conservative)

↳ Derivo $U(y)$:

$$\frac{dU}{dy} = ky + mg$$

Pongo $\frac{dU}{dy} = 0$ (cerco i punti critici):

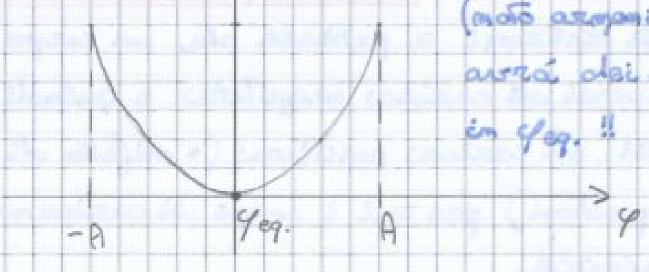
$$ky + mg = 0$$

$\Rightarrow y = -\frac{mg}{k}$ : é l'unico punto dove $\frac{dU}{dy} = 0$

$\rightarrow$ se $F = -\frac{dU}{dy}$

per $y = -\frac{mg}{k} \Rightarrow \vec{F}_R = 0$ !!

$$\Rightarrow \boxed{y_{eq.} = -\frac{mg}{k}}$$




Se m oscilla fra A e -A (moto armonico) in A e -A $U(y)$ avrá dei massimi e ha un minimo in $y_{eq.}$ !!

- I materiali si dividono in:
  ↳ CONDUTTORI:
  Gli $e^-$ sono liberi di muoversi.
  (es.: i metalli)

  ISOLANTI:
  Una volta carichi gli $e^-$ non si muovono più
  (es.: vetro, legno...)

# LEGGE DI COULOMB

LEGGE DELLA FORZA ELETTROSTATICA (1785)

- LEGGE DI COULOMB:
  Due cariche puntiformi nello spazio si attraggono o si respingono con una forza che è direttamente proporzionale al prodotto delle due cariche e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza.

$$\vec{F_c} = K \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \hat{r}_{12}$$ : FORZA DI COULOMB

con: $q_1, q_2$ = cariche puntiformi

$K$ = costante di proporzionalità,

↳ $K = 9 \cdot 10^9 \, N \cdot \frac{m^2}{C^2}$

oppure:

$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

(L'unità di misura della carica elettrica è il COULOMB (C), $1C = 1A \cdot 1s$)

- La carica è QUANTIZZATA (Millikan)
  e l'unità fondamentale della carica elettrica è la carica dell'elettrone, $e^-$:

$$e^- = 1,6 \cdot 10^{-19} C$$

# CAMPO ELETTRICO

- Se ho $n$ cariche $q_i$ nello spazio, aggiungo una carica $q'$ e calcolo $\vec{F}_R$ su $q'$:

$$\vec{F}_{R,q} = \sum_{n=1}^{i} \vec{F}_{q,i}$$

$$= \underbrace{Kq\left(\frac{q_1}{r_1^2}\cdot\hat{r}_1 + \frac{q_2}{r_2}\cdot\hat{r}_2 + \ldots + \frac{q_n}{r_n}\hat{r}_n\right)}$$

, $r_i$: distanza tra $q'$ e $q_i$

Questa grandezza non dipende da $q'$!!
Dipende solo da $\hat{r}_n$.
La forza che subisce $q'$ dipende da un parametro che è indipendente da $q'$!!
Chiamiamo questa grandezza CAMPO ELETTRICO

Def.: $\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q}$, esprime il valore di $\vec{F}$ in un dato punto dello spazio

Rappresenta la forza per unità di carica, è una grandezza vettoriale.

CAMPO ELETTRICO GENERATO DA CARICHE PUNTIFORMI

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i^2}\cdot\hat{r}_i$$

DISTRIBUZIONE DI CARICA

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r^2}\cdot\hat{r}$$

- Il campo elettrico è una grandezza vettoriale e viene rappresentato dalle LINEE DI CAMPO

↳ LINEE DI CAMPO:
- Escono dalle cariche + ed entrano nelle cariche −
- Il loro numero è dir. prop. alla quantità di carica.
- Il vettore $\vec{E}$ è sempre tangente alle linee.
- La densità delle linee è prop. alla intensità di $\vec{E}$.

- Interpretiamo il flusso come il "numero che passa attraverso l'area che ci interessa".

↳ L'integrale è su una superficie chiusa !!

$\vec{E} \cdot d\vec{S}$ :

- È un prodotto scalare quindi $\Phi_E$ è uno scalare.
- Il vettore di integrazione $d\vec{S}$ è NORMALE alla superficie, e punta verso l'esterno;
  $\Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{S}$ è la componente di $\vec{E}$ perpendicolare a S !!
- Nel calcolare il flusso perciò tengo solo conto della componente normale di $\vec{E}$ a S.
- + : esce , − : entra.

## LEGGE DI GAUSS !!

LEGGE FONDAMENTALE DELL'ELETTROSTATICA:

Il flusso elettrico netto attraverso una data superficie chiusa è proporzionale alla carica all'interno della superficie stessa.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \Phi_E = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

- La uso per ricavare $\vec{E}$ quando ci sono particolari simmetrie !!
  Se infatti "scelgo" bene la superficie di Gauss posso fare in modo che $\vec{E}$ vi sia // o ⊥ così l'integrale diventa facile da risolvere. Inoltre scelgo la superficie in modo da assimilarla alle superfici equipotenziali (dove E ha lo stesso valore per ogni punto).

# SISTEMI DI RIFERIMENTO NON INERZIALI

. Premesse:

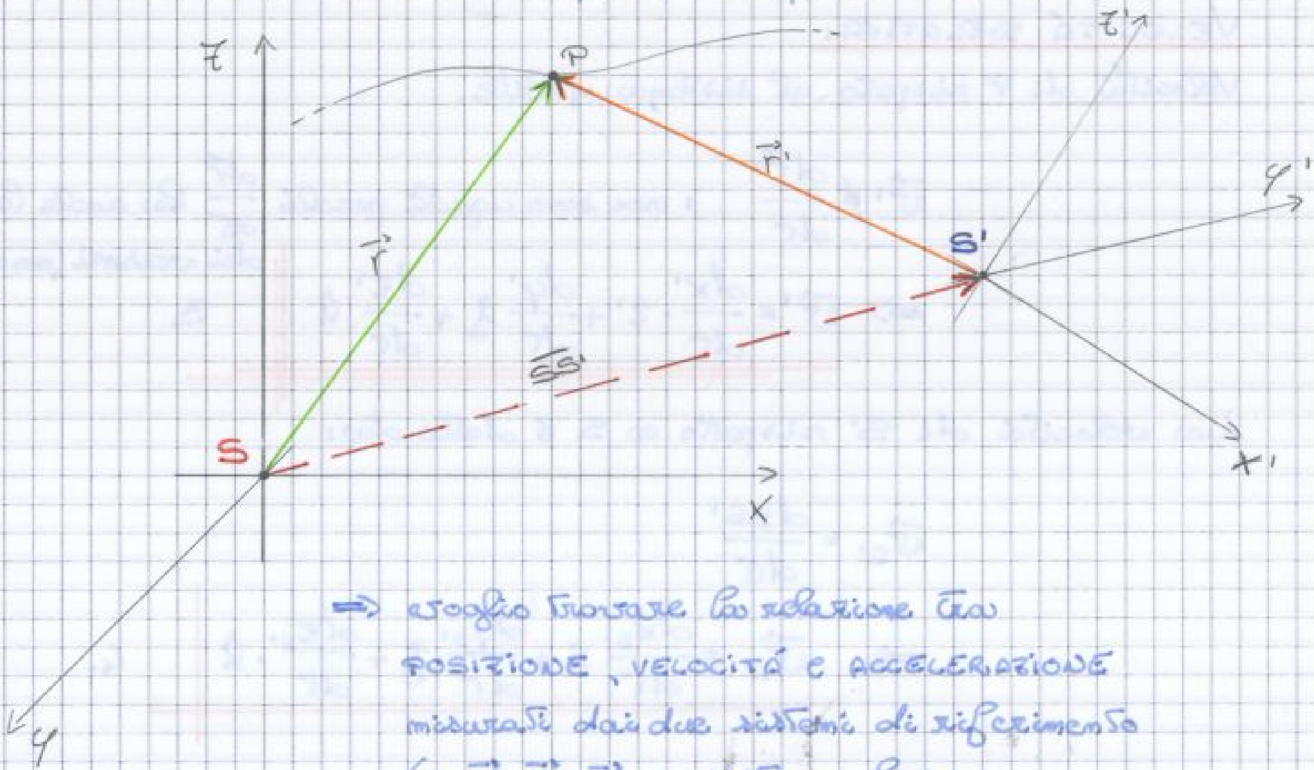
Le leggi fisiche non dipendono dal sistema di riferimento che scegliamo. Se fissiamo un s.r. e dimostriamo una certa proprietà questa sarà vera anche se cambio il s.r. (con una rototraslazione qualsiasi). Ma se osservo il moto di un corpo da due sistemi di riferimento che siano in moto uno rispetto all'altro questo viene descritto da leggi diverse per i due s.r.

⇒ Non sussiste INVARIANZA delle leggi fisiche rispetto a due sistemi di riferimento in moto qualsiasi uno rispetto all'altro.

. Fisso due sistemi di riferimento: S e S' centrati rispettivamente in S e S'.

Per convenzione considero S sistema fisso e S' sistema mobile.

Considero la traiettoria di un punto P rispetto a S e S'.




⇒ voglio trovare la relazione tra POSIZIONE, VELOCITÀ e ACCELERAZIONE misurate dai due sistemi di riferimento

↳ $\vec{v}, \vec{r}, \vec{a}$ : sistema fisso

$\vec{v}', \vec{r}', \vec{a}'$ : sistema mobile

⇒ Assumo $\hat{i}, \hat{j}$ e $\hat{k}$ costanti nel tempo (per convenzione S è il sistema fisso).

- Dalla 1. e 2. ricavo:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(\vec{r}' + \vec{SS'}) = \frac{d\vec{SS'}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} \quad \text{, per proprietà derivate}$$

$$\vec{v} = \frac{dx_{S'}}{dt}\hat{i} + \frac{dy_{S'}}{dt}\hat{j} + \frac{dz_{S'}}{dt}\hat{k} + \frac{dx'}{dt}\hat{i}' + \frac{dy'}{dt}\hat{j}' + \frac{dz'}{dt}\hat{k}' + \qquad 5.$$

$$+ x'\frac{d\hat{i}'}{dt} + y'\frac{d\hat{j}'}{dt} + z'\frac{d\hat{k}'}{dt}$$

con $\frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v}' + x'\frac{d\hat{i}'}{dt} + y'\frac{d\hat{j}'}{dt} + z'\frac{d\hat{k}'}{dt}$

↳ compaiono le derivate di $\hat{i}'$, $\hat{j}'$ e $\hat{k}'$ perché non sono costanti nel tempo!!

- Formule di Poisson:

$\hat{i}'$, $\hat{j}'$ e $\hat{k}'$ ruotano ma restano costanti in modulo
→ la loro derivata si può scrivere come:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{u} \quad \text{, dove } \omega \text{ è la velocità angolare.}$$

$$\Rightarrow \frac{d\hat{i}'}{dt}x' = (\vec{\omega} \times \hat{i}')x' \; ; \; \frac{d\hat{j}'}{dt}y' = (\vec{\omega} \times \hat{j}')y' \; ; \; \frac{d\hat{k}'}{dt}z' = (\vec{\omega} \times \hat{k}')z'$$

$$\Rightarrow (\vec{\omega} \times \hat{i}')x' + (\vec{\omega} \times \hat{j}')y' + (\vec{\omega} \times \hat{k}')z' = \vec{\omega} \times (\hat{i}'x' + \hat{j}'y' + \hat{k}'z')$$

per prop. associativa del prodotto vettoriale e scalare.

↳ $\vec{\omega} \times \vec{r}'$ 6. $\quad \boxed{\frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'}$

- TEOREMA DELLE VELOCITÀ RELATIVE:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_{S'} + \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'}$$

↳ Relazione tra le velocità misurate nel sistema fisso e in quello mobile.

# TEOREMA DELLE ACCELERAZIONI RELATIVE

Considero ancora i sistemi di riferimento S e S'.
Ricavo la relazione tra l'accelerazione misurata nel sistema fisso e nel sistema mobile.

- ACCELERAZIONE ASSOLUTA

Accelerazione di P rispetto a S (sistema fisso).

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k}$$

- ACCELERAZIONE RELATIVA

Accelerazione di P rispetto al sistema mobile S'.

$$\vec{a}' = \frac{d^2x'}{dt^2}\hat{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k}$$

- L'accelerazione di O' rispetto a O è data da:

$$\vec{a}_{S'} = \frac{d\vec{v}_{S'}}{dt}$$

$$\text{con } \vec{v}_{S'} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$= v' + x'\frac{d\hat{i}'}{dt} + y'\frac{d\hat{j}}{dt} + z'\frac{d\hat{k}}{dt}$$

$$= v' + \vec{\omega} \times \vec{r}' \quad (\text{dalla } 6.)$$

$$\vec{a}_{S'} = \frac{d}{dt}(\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}')$$

$$= \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

$$= \vec{v}_x' \cdot \frac{d\hat{i}'}{dt} + \vec{v}_y' \frac{d\hat{j}'}{dt} + \vec{v}_z' \cdot \frac{d\hat{k}'}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

$$\text{• con } \frac{d\hat{i}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{i}', \quad \frac{d\hat{j}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{j}', \quad \frac{d\hat{k}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{k}'$$

$$\hookrightarrow \vec{v}_x'(\vec{\omega} \times \hat{i}') + \vec{v}_y'(\vec{\omega} \times \hat{j}') + \vec{v}_z'(\vec{\omega} \times \hat{k}')$$

per propr. associativa e distributiva : →

# MOTO DEL CORPO RIGIDO

**Def.: CENTRO DI MASSA**

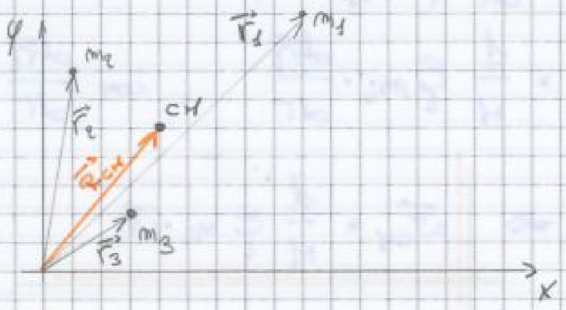
!! Il centro di massa è la posizione media pesata delle masse di un sistema di n particelle.

**Def.: CORPO RIGIDO**

!! In un corpo rigido assumiamo che la distanza di ogni punto dal centro di massa rimane la stessa.

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

: POSIZIONE DEL C.M. in un sistema di n particelle.




N.B.: Se sono nel S.R. del centro di massa è ovvio che $\vec{R}_{CM} = \vec{0}$ !!

- Se ho solo due particelle

$\Rightarrow$ il C.M. sta sulla retta congiungente $m_1$ e $m_2$.

$$\vec{R}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{(m_1+m_2)} = \frac{(m_1+m_2)\vec{r}_1 + m_2(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{(m_1+m_2)}$$

$$\vec{R}_{CM} = \vec{r}_1 + \frac{m_2}{M}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

↳ Se sono due particelle con massa uguale:

$$R_{CM} = \vec{r}_1 + \frac{1}{2}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \quad \dots$$

- Se ho un solido continuo devo passare ad un integrale:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\int \vec{r}\, dm}{\int dm}$$ , con dm : infinitesimo di massa e $\int dm = M$

$$\Rightarrow \quad \vec{R}_{CM} = \frac{\int \vec{r}\, dm}{M}$$

: CENTRO DI MASSA DI UN SOLIDO CONTINUO

N.B.: La sua posizione è una proprietà intrinseca del

# Quantitá di Moto

**Def.:** Quantitá di moto, $\vec{p}$

!! La quantità di moto per una singola particella si definisce come

$$\boxed{\vec{p} = m \cdot \vec{v}}$$

$\vec{p}$ é un vettore quindi lo posso scomporre sugli assi.

- $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

$= m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$ , m é costante lo porto dentro

$= \frac{d m\vec{v}}{dt}$ , con $m\vec{v} = \vec{p}$

$$\Rightarrow \boxed{F = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$ : Forma alternativa della 2° legge di Newton.

- Per un sistema di n particelle:

$\vec{p} = \sum_i \vec{p_i} = \sum_i m_i \cdot \vec{v_i}$ , con $\sum_i m_i \vec{v_i} = M \cdot \vec{v}_{CM}$

$\Rightarrow \vec{p} = M \cdot \vec{v}_{CM}$ : Quantitá di moto di un sistema

- Se derivo $\vec{p}$:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = M \cdot \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = M \cdot \vec{a}_{CM} = \vec{F}_R^{ext}$$

$$\hookrightarrow \vec{F}_R^{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

- Prima equazione cardinale della dinamica

!! $$\boxed{\vec{F}_R^{ext} = M \cdot \vec{a}_{CM}} \quad \text{oppure} \quad \boxed{\vec{F}_R^{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

# TEOREMA IMPULSO - $\vec{p}$

- Abbiamo: $\vec{I} = \int_{t_0}^{t} \vec{F} dt$ , con $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

$$\hookrightarrow \vec{I} = \int_{t_0}^{t} \vec{F} \cdot dt = \int_{t_0}^{t} \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot dt = \int_{t_0}^{t} d\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_0 = \Delta\vec{p}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{I} = \Delta\vec{p}}$$

L'impulso di una forza è uguale alla variazione della quantità di moto del corpo su cui agisce la forza.

N.B.: $\vec{I}$ dipende solo dalla variazione di $\vec{p}$, non dal tipo di urto!

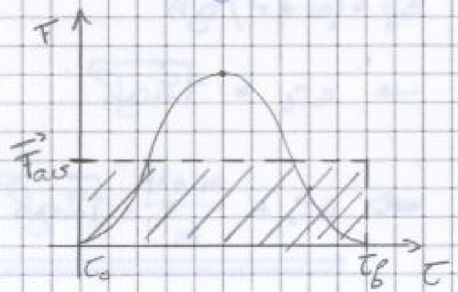
- FORZA MEDIA DURANTE UN URTO

Considero $\Delta t = t_f - t_0$

$$\vec{F}_{av} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_f} F dt \text{ , teorema della media di un integrale.}$$

$$= \frac{I}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{F}_{av} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}}$$ : FORZA MEDIA durante un urto.

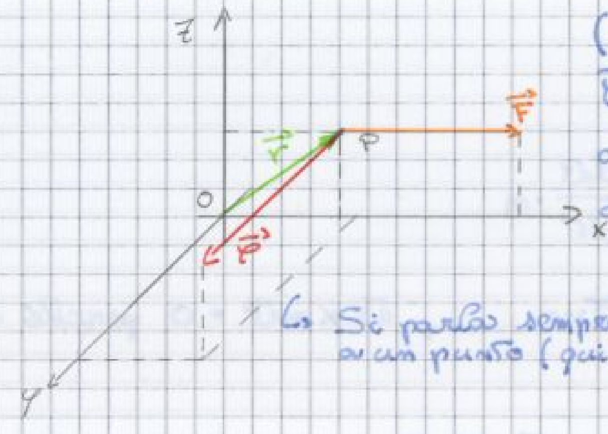


# Momento di una forza

**Def.:** Il momento di una forza, $\vec{\ell}$ è definito come:

$$\vec{\ell}_0 = \vec{r} \times \vec{F}$$

Dove F è la forza applicata in O e $\vec{r}$ il braccio.




($\vec{r}$ e $\vec{F}$ sono sul piano xz)
$\vec{\ell}$ è sempre ⊥ al piano di $\vec{r}$ ed $\vec{F}$ e il verso è dato dalla regola della mano dx.

↳ Si parla sempre di momento di $\vec{F}$ rispetto a un punto (qui è O).

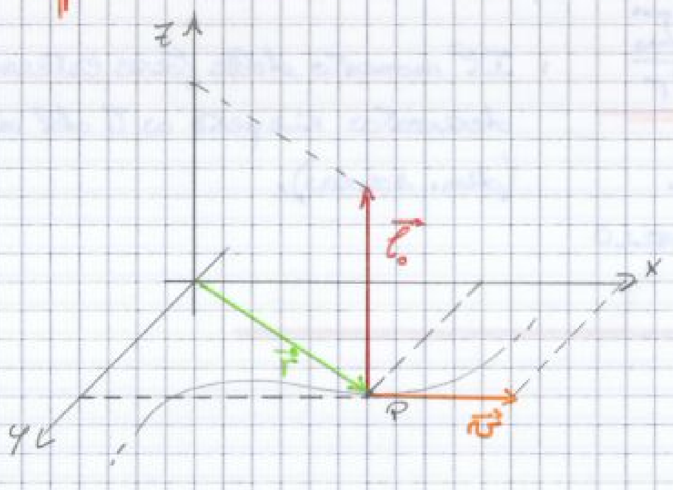
- $\vec{\ell}$ si calcola rispetto a un polo (da dove parte $\vec{r}$) se cambio polo:

$$\vec{\ell}_{0'} = \vec{\ell}_0 + \vec{O'O} \times \vec{F}$$

# Momento angolare

**Def.:** Il momento angolare è definito come il momento del vettore $\vec{p}$ (quantità di moto), sempre rispetto ad un punto O:

$$\vec{\ell}_0 = \vec{r} \times \vec{p} \quad , \quad \ell_0 = r\,m\,v$$




- $\vec{\ell}_0 = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$

$$\Rightarrow \vec{\ell}_0 = \vec{r} \times m\vec{v}$$

- Se cambio il polo:

$$\vec{\ell}_{0'} = \vec{\ell}_0 + \vec{OO'} \times m\vec{v}$$