NUMERO: 861

DATA: 12/03/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Bassignana

MATERIA: Analisi Matematica I

Prof. Serra

ANALISI I

INSIEMI

- Sono un concetto primitivo e vengono definiti da ciò che contengono.

  $A = \{1, 2, 3\}$, $1 \in A$ $\quad 2 \notin A$

- $A \subset B$: A è contenuto in B (A è sottoinsieme di B)

  Negazione: $A \not\subset B$
  Almeno 1 el. di A
  non è contenuto in B

  Es.: $A = \{1, 2, 3\}$ $\quad B = \{5, 7\}$ $\quad A' = \{1, 5\}$

  $A \not\subset B$ e $A' \not\subset B$, gli el. non si ripetono!!

- RAPPRESENTAZIONE IMPLICITA:

  Descrive la proprietà che caratterizza gli elementi dell'insieme:

  $A = \{x \in X \;/\; P(x)\}$ supposta la proprietà $P(x)$ vera

  ↳ Insieme UNIVERSO

  L'insieme UNIVERSO è importante:

  $A = \{x \;/\; 2x - 1 = 0\}$

  ↳ in $\mathbb{N}$ sarà $A = \emptyset$

  in $\mathbb{R}$ sarà $A = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

- RAPPRESENTAZIONE ESPLICITA:

  Si elencano gli elementi : $A = \{a, b, c\}$

- RAPPRESENTAZIONE GRAFICA

- OPERAZIONI CON GLI INSIEMI

  → UNIONE : Dati $A, B \subset X$

  $\Rightarrow A \cup B = \{x \in X \;/\; x \in A \vee x \in B\}$

  Es.: $A = \{1, 2, 3\}$ $\quad B = \{2, 3, 4\}$

  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$ → gli elementi non si ripetono!!

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 166

- PROPOSIZIONI

Ogni proposizione in matematica deve essere VERA o FALSA ma prima di tutto ACCETTABILE

$2 > 3$ accettabile e falsa

$2 >$ non accettabile

$x > 2$ non accettabile, così può essere sia vera che falsa, dipende dalla x

↳ !! Tutte le volte che in una proposizione compare una variabile bisogna specificare per quali valori della variabile si intende la proposizione.

I quantificatori rendono accettabili le prop. con la variabile.

- QUANTIFICATORI

→ $\forall$ quantificatore UNIVERSALE (per ogni / qualsiasi)

→ $\exists$ quantificatore ESISTENZIALE (esiste / per qualche)

($\exists!$: esiste ed è unico)

Es. : $\forall x > 2$ é accettabile e FALSA

$\exists x > 2$ é accettabile e VERA (esiste un numero >2)

Con 2 variabili:

$x + y = 1$ é una prop. non accettabile

→ $\forall x \ \exists y : x + y = 1$ é accettabile e VERA

Dim. : $y = x - 1$ comunque è scelta la x trovo una y che soddisfa la relazione.

→ $\exists y \ \forall x : x + y = 1$ é accettabile MA FALSA!!

Se fisso la y non é detto che tutte le x soddisfino la relazione!!

→ I quantificatori non godono della proprietà COMMUTATIVA

- LOGICA: NEGAZIONE DI UNA PROPOSIZIONE

$P(x) \rightarrow$ NOT $P(x)$ é VERA $\Leftrightarrow$ $P(x)$ é falsa

$\rightarrow$ Negazione di proposizioni quantificate:

$P(x)$: il banco x é occupato

$\forall x$, $P(x)$: tutti i banchi sono occupati

la nego: NOT$(\forall x, P(x)) \Leftrightarrow \exists x$, NOT $P(x)$

Esiste almeno un banco libero.

$\exists x$, $P(x)$: almeno un banco é occupato

NOT$(\exists x, P(x)) \Leftrightarrow \forall x$, NOT $P(x)$

Tutti i banchi sono liberi

Es.: $P(x)$: $x+y=1$

$\exists y \ \forall x, P(x)$

NOT$(\exists y \ \forall x, x+y=1)$ $\rightarrow$ Non é vero che esiste un y che sommato a qualsiasi x sia 1.

$\Updownarrow$

$\forall y \ \exists x, x+y \neq 1$

Per ogni y esiste un x che sommato a y non fa 1.

INSIEMI NUMERICI

- $\mathbb{N}$: numeri naturali (interi positivi)

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$

In $\mathbb{N}$ é sempre possibile fare la somma e la sottrazione.

- $\mathbb{Z}$: numeri interi positivi e negativi e dello zero

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2 \ldots\}$

In $\mathbb{Z}$ sono possibili le operazioni di somma, sottrazione e moltipl.

- $\mathbb{Q}$: numeri razionali

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \ / \ p, q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0\right\}$

In $\mathbb{Q}$ sono possibili le operazioni di somma, sottrazione, molt. e divisione.

- $\mathbb{R}$: Numeri reali, sono possibili tutte le operazioni, compresa la radice. Comprende "tutti i numeri".

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ con $\mathbb{I}$ = numeri irrazionali, con espansioni decimali illimitate e non periodiche.

I numeri reali posti su una retta non lasciano "buchi"

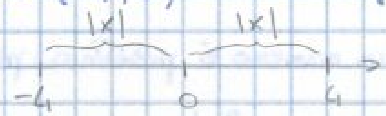
$\Longrightarrow$ I numeri reali sono in corrispondenza biunivoca con i punti di una retta.

VALORE ASSOLUTO

Def.: La distanza di un punto x da 0 si chiama valore assoluto, o modulo, di x : $|x|$.

Es. : $x = 4$, $x = -4$

$d(-4;0) = 4 \quad d(0;4) = 4 \rightarrow |4| = 4 \; , \; |-4| = 4$



Def. analitica :

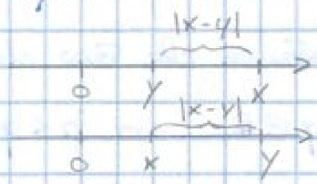
$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Es. :

- $$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{se } x \geq 2 \\ 2-x & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

- $|x-y|$ è la distanza di x da y

$$|x-y| = \begin{cases} x-y & \text{se } x \geq y \\ y-x & \text{se } x < y \end{cases}$$



Proprietà :

- $|x| \geq 0$
- $|-x| = |x| \rightarrow$ sono infatti simmetrici rispetto a 0 e la loro distanza da 0 è perciò la stessa.
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

INTERVALLI LIMITATI

Sia $A \subset \mathbb{R}$

Def.: si dice che A é limitato superiormente se $\exists M \in \mathbb{R} : x \leq M \quad \forall x \in A$

I numeri M che soddisfano questa proprietà sono detti MAGGIORANTI.

Es.: $A = (0, 100]$

100 é un maggiorante perché $x \leq 100 \quad \forall x \in A$

102 é un maggiorante perché $x \leq 100 \quad \forall x \in A$

99 non é un maggiorante perché $x \leq 99 \quad \forall x \in A$ non é vero !!

$\Rightarrow$ Si dice che un insieme A é limitato superiormente se ha un maggiorante (quindi ne ha infiniti).

Def.: si dice che A é limitato inferiormente se $\exists m \in \mathbb{R} : x \geq m \quad \forall x \in A$

Es.: $A = \left\{ \frac{n}{n+1} \;/\; n = 1, 2, 3, 4 \ldots \right\}$

$M = 1$ perché $x \leq 1 \quad \forall x \in A$ infatti:

$\frac{n}{n+1} \leq 1 \rightarrow \cancel{n} \leq \cancel{n} + 1 \rightarrow 0 \leq 1 \Rightarrow \frac{n}{n+1} \leq 1 \quad \forall n$

$\Rightarrow$ A é limitato superiormente.

Def.: un maggiorante di A che appartiene ad A si chiama massimo di A, max A.

$\rightarrow M = \max A \iff x \leq M \quad \forall x \in A \wedge M \in A$

. M é max di A se: - M é maggiorante di A
- $M \in A$

- Definire in $\mathbb{R}$ $\sqrt{2}$:

$\sqrt{2}$ è l'estremo superiore dell'insieme A così definito:

$\{x \in \mathbb{R} / x^2 < 2\}$

$\Rightarrow \sqrt{2} \overset{def}{=} \sup\{x \in \mathbb{R} / x^2 < 2\}$

FUNZIONE

Def.: Una funzione f tra due insiemi X e Y è una legge che ad ogni elemento di X associa uno e uno elemento di Y

$$f : X \to Y$$

DOMINIO: Il più grande sottoinsieme di X dove ha senso fare $f(x)$ si chiama dominio di f, $\mathrm{dom}(f)$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sottintende:

$f : \mathrm{dom}(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Dato $f : X \to Y$

se $x \in \mathrm{dom}(f) \Rightarrow f(x)$ si chiama immagine di x secondo f.

NOTA: Dato $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x)$ = soluzioni dell'eq. $y^2 = x \Rightarrow f$ NON è una FUNZIONE!!

$\to$ Sarebbe infatti: $y = \pm\sqrt{x}$

$\Rightarrow$ ad ogni x corrispondono 2 immagini, e ciò non è possibile.

- Prendo $A \subset \mathrm{dom}(f)$

$A = \{f(x) / x \in A\} = f(A)$: immagine di A tramite f

Può essere un numero come un intervallo.

$\hookrightarrow$ Es.: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

$f(3) = 9$

$f([1, 2]) = [1, 4]$

$\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 166

~~INSIEME DELLE IMMAGINI~~

INSIEME DELLE CONTROIMMAGINI

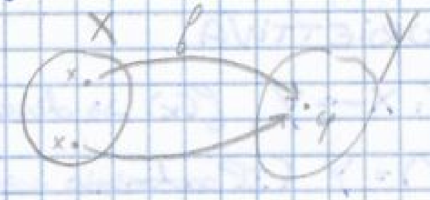
Fissato $y \in Y$ e la funzione $f: X \to Y$

chiamo insieme delle controimmagini di y l'insieme così definito:

$$f^{-1}(y) = \{x \in X \ / \ f(x) = y\}$$

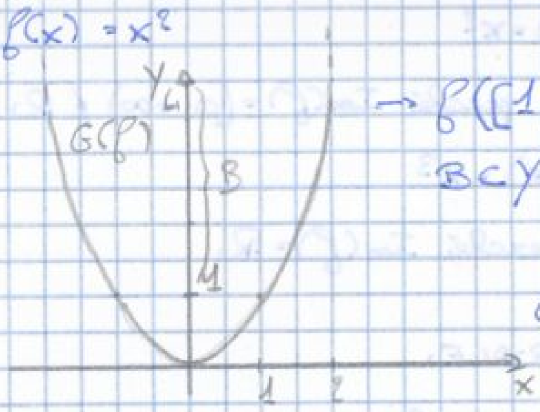
$x \xrightarrow{f} f(x)$

$f^{-1}(y) \xleftarrow{f^{-1}} y$



Es: $X = Y = \mathbb{R} \to f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^2$



$\to f([1,2]) = [1,4]$

$B \subset Y: B = [1,4]$

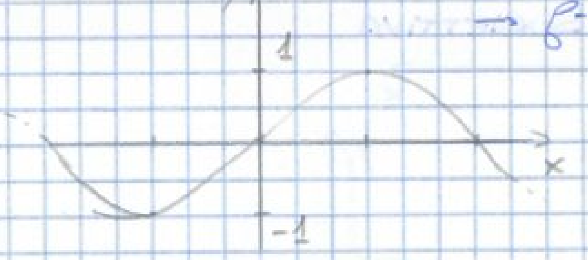
$f^{-1}(B) = [-2,-1] \cup [1,2]$

↳ Infatti $y = x^2$ NON è una FUNZ.

$\Rightarrow$ Dato $B \subset Y$

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \ / \ f(x) \in B\}$$

$f(x) = \operatorname{sen} x$



$\to f^{-1}(1) = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z} \right\}$

CODOMINIO / INSIEME DELLE IMMAGINI

- Definisco CODOMINIO come l'insieme "di arrivo" della funzione $f: \mathbb{R} \to \underline{\mathbb{R}}$, $\mathbb{R}$ è il codominio
- Definisco Insieme delle immagini, $Im(f)$, l'insieme di tutti gli elementi (che appartengono al codominio $\to Im(f) \subset$ Codominio) che hanno almeno una controimmagine in $dom(f)$.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 166

FUNZIONE INIETTIVA

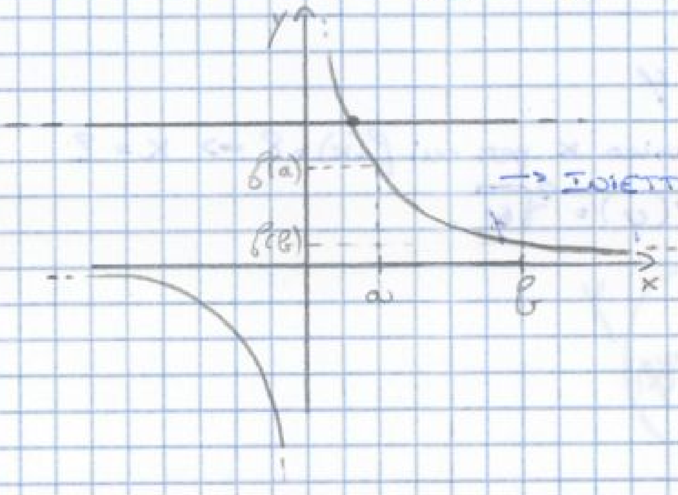
<u>Def.</u>: f si dice iniettiva se e solo se

- $\forall y \in Y$, $f^{-1}(y)$ contiene al più un punto

oppure (per ogni y, $f^{-1}(y)$ è vuoto o ha un solo punto)

- $\forall a, b \in dom(f) \,/\, a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$

Es.: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$

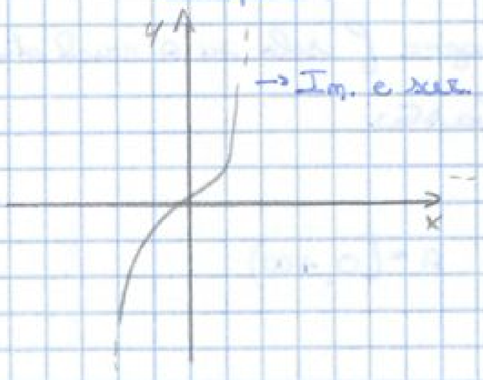


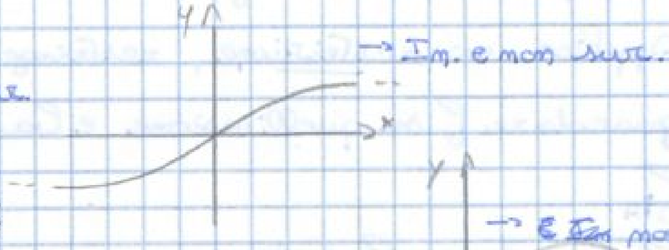
↳ REGOLA GENERALE

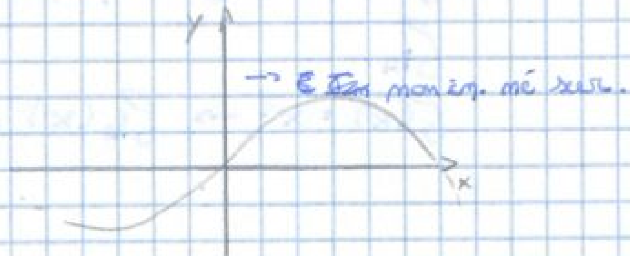
f è <u>iniettiva</u> se e solo se ogni retta **orizzontale** taglia il grafico di f in <u>al più un solo punto</u>

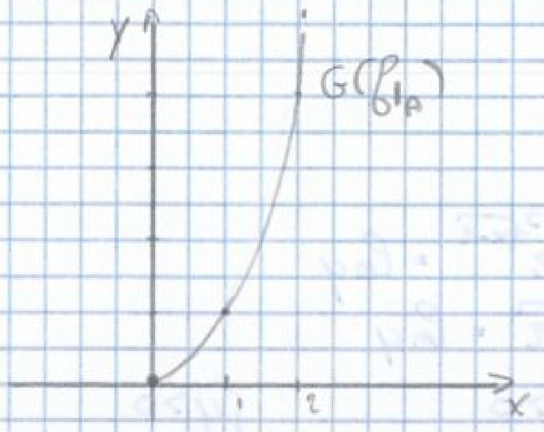
⇒ Se una funzione è sia iniettiva che suriettiva ogni retta **orizzontale** taglia il grafico di f in <u>un solo punto</u>!!

- Dire che $f(x)$ è suriettiva significa che l'eq. $f(x) = b$, con $b \in \mathbb{R}$, ha <u>almeno</u> una soluzione
- Dire che $f(x)$ è iniettiva significa che $\forall b \in \mathbb{R}$, $f(x) = b$ ha <u>al più</u> una soluzione.









f_{1_A} é iniettiva!!

$\Rightarrow (f_{1_A})^{-1}(y)$ é l'unico $x \in A$ tale che $f_{1_A}(x) = y$

$(f_{1_A})^{-1}(y) = +\sqrt{y}$

. Se f non ha la funz. inversa si dice che non é invertibile.

$f(x) = x^2$ non é invertibile su $\mathbb{R}$ ma su $A = [0, +\infty)$

GRAFICO DI UNA FUNZIONE INVERSA

Data $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\rightarrow G(f) = \{(a, b) / b = f(a)\}$

$(a, b) \in G(f) \Longleftrightarrow f(a) = b$

Ma $f(a) = b$ equivale a dire:

$f^{-1}(b) = a$ per def. di f^{-1}

$\Rightarrow \{(b, a) / f^{-1}(b) = a\} = G(f^{-1})$

Def.: Data una funzione f, invertibile, il grafico della sua funzione inversa $G(f^{-1})$ sará cosí definito:

$G(f^{-1}) = \{(b, a) / f^{-1}(b) = a\}$

. $(a, b) \in G(f)$
$(b, a) \in G(f^{-1})$ $\Rightarrow$ $G(f^{-1})$ é simmetrico di $G(f)$ rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante.

- $g \circ f \neq f \circ g$

$f(x) = \sqrt{x}$

$g(x) = sen\left(\frac{1}{x+1}\right)$

$\Rightarrow g \circ f = sen\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)$

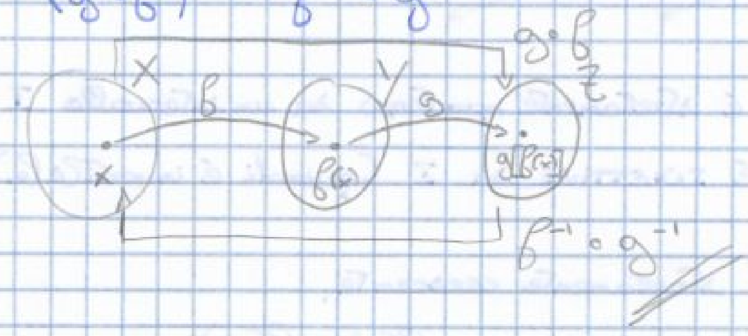
$f \circ g = \sqrt{sen\left(\frac{1}{x+1}\right)}$

- Date g ed f definite in $\mathbb{R}^2$, g e f iniettive

$\Rightarrow g \circ f$ é iniettiva

$\Rightarrow$ esiste la funz. inversa $(g \circ f)^{-1}$

$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$



FUNZIONI CRESCENTI

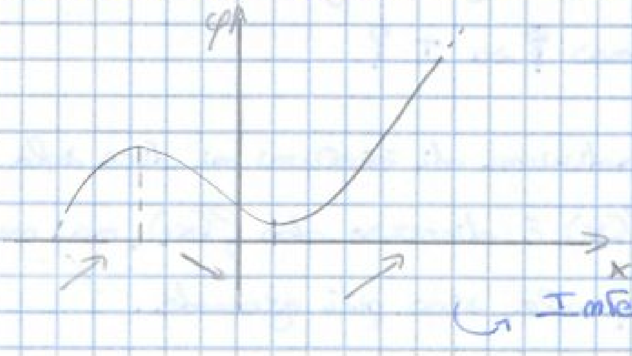
Data $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

Def.: si dice che f é crescente su A se e solo se:

$\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

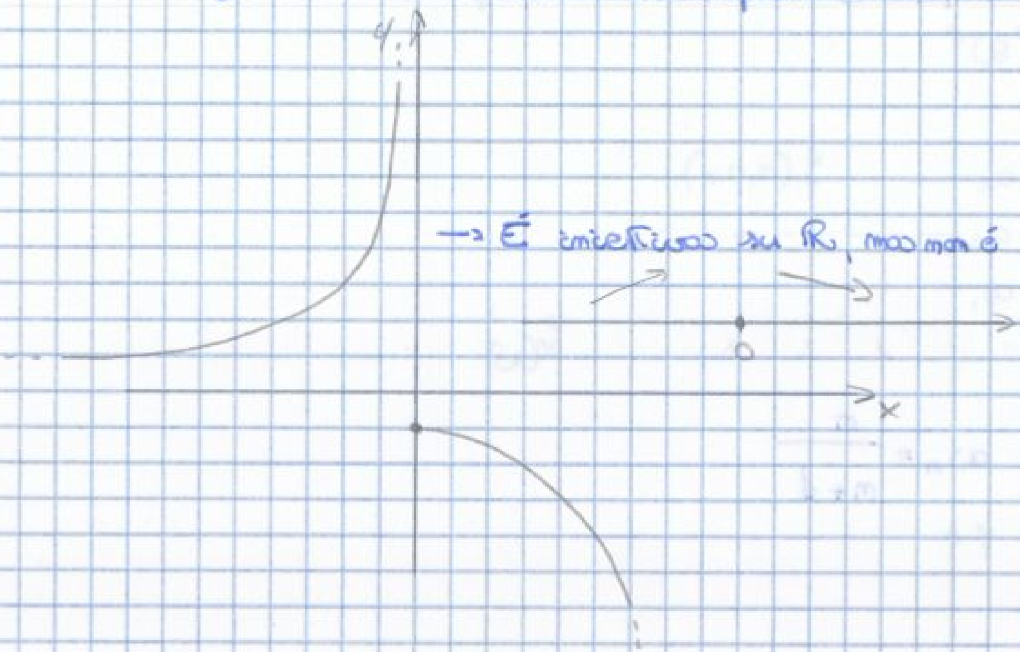
debolmente crescente
($y = K$ é da considerarsi crescente)
$\Rightarrow f(x) < f(x_2)$: strett. crescente.

Se una funzione é sempre crescente o decrescente si dice MONOTONA.



Intervalli di monotonia.

Poi basta trovare un controesempio:



SUCCESSIONI

Def.: Si chiama successione ogni funzione (reale) definita da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$:

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

[Esiste solo su numeri interi]

→ Termine generale: a_n (sostituisce $f(x)$)

Termini particolari: $a_1, a_2 \ldots$ (sostituisce $f(1) \ldots$)

↳ $a_n = \dfrac{1}{n}$, $a_1 = 1$, $a_2 = \dfrac{1}{2} \ldots$

. Dominio di f: é un insieme del tipo $\{n \in \mathbb{N} \,/\, n \geq n_0\}$

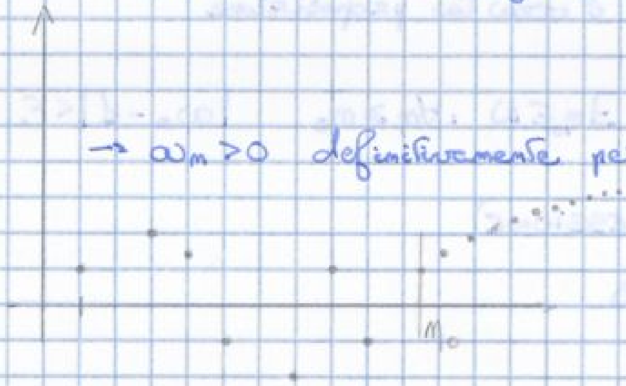
tutti gli n maggiori o uguali di un dato n_0.

Es.: $a_n = \dfrac{n^3}{(n-1)(n-2)(n-3)}$

Dom.: $n \in \mathbb{N}$

$n \neq 1 \wedge n \neq 2 \wedge n \neq 3$ $\Rightarrow n \geq 4$ da 4 in poi tutti i numeri vanno bene!

Def.: Sia a_n una successione,
si dice che una proprietà $P(n)$ vale definitivamente se $P(n)$ è vera per ogni n abbastanza grande.
[. $P(n)$ vale da un certo n_0 in poi
. $P(n)$ vale definitivamente $\Leftrightarrow \exists n_0 \,/\, P(n)$ è vera $\forall n \geq n_0$
. $P(n)$ è vera definitivamente se è vera $\forall n$ eccetto che in un numero finito di casi]



Es.: Data $a_n = \frac{n}{n+1}$
La distanza di a_n da 1 è definitivamente minore di $\frac{1}{100}$
$\rightarrow |a_n - 1|$: distanza di a_n da 1
$|a_n - 1| < \frac{1}{100}$? Per quali valori di n è verificata la relazione?

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \frac{1}{100} \rightarrow \left|\frac{\cancel{n} - \cancel{n} - 1}{n+1}\right| < \frac{1}{100}$$

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{100}$$

$\Rightarrow n > 99$ per $n > 99$ la proprietà è sempre verificata
$\hookrightarrow$ per $n > 99$ $|a_n - 1| < \frac{1}{100}$ è definitivamente vera.
$\hookrightarrow$ Caso generale particolare.

$\frac{3n}{5n^2} < \varepsilon \rightarrow n > \frac{3}{5\varepsilon}$

da $\frac{3}{5\varepsilon}$ in poi è sempre verificato!

$\Rightarrow \frac{3n}{2+5n^2} < \varepsilon$ definitivamente per $n > \frac{3}{5\varepsilon}$

- Data a_n, $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
  e $M \in \mathbb{R}$
  Se $\forall M \in \mathbb{R}$ $a_n > M$ definitivamente
  [cioè: $\forall M \in \mathbb{R}$ $\exists n_0 : \forall n \geq n_0 \rightarrow a_n > M$]
  $\Rightarrow$ si dice che a_n tende a ∞ al tendere a ∞ di n.

$$\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$$

Es.: Dimostrare che è vero:

$$\lim_{n \to \infty} n^2 = +\infty$$

$a_n > M$ vale definitivamente?

$n^2 > M \rightarrow n > \underbrace{+\sqrt{M}}_{n_0} \Rightarrow$

$\forall M \in \mathbb{R}$ $\exists n_0 : \forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n > M$

$a_n > M$ è vero definitivamente.

- Data a_n, $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
  e $M \in \mathbb{R}$
  Se $\forall M \in \mathbb{R}$ $a_n < M$ definitivamente
  [cioè: $\forall M \in \mathbb{R}$ $\exists n_0 : \forall n \geq n_0 \rightarrow a_n < M$]
  $\Rightarrow$ si dice che per $n \rightarrow \infty$, $a_n \rightarrow -\infty$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = -\infty$$

$I = (10, +\infty)$: cadono infiniti termini di a_n!

$J = (-2, 1)$: cadono infiniti termini di a_n (tutti gli 0)!

$\Rightarrow$ a_n NON HA LIMITE!

(2) Se esistono due successioni "contenute" in a_n che hanno limiti diversi

$\Rightarrow$ a_n non ha limite!!

Es.: $a_n = (-1)^n$

$a_0 = 1, a_1 = -1, a_2 = 1, a_3 = -1 \dots$

$\rightarrow$ n pari : $a_0 = 1, a_2 = 1, a_4 = 1, a_6 = 1 \dots$

$\rightarrow$ n dispari : $a_1 = -1, a_3 = -1, a_5 = -1 \dots$

per n pari $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

per n disp. $\lim_{n\to\infty} a_n = -1$ $\Rightarrow$ a_n NON HA LIMITE!

$\Rightarrow$ PROPRIETÀ DI a_n CHE IMPLICANO L'ESISTENZA DEL LIMITE

Def. 1 : Si dice che una successione a_n è CRESCENTE se

$$a_n \le a_{n+1} \quad \forall n$$

[decrescente: $a_n \ge a_{n+1}$ $\forall n$]

$\rightarrow$ Se a_n è sempre cresc. o decr. è MONOTONA

Def. 2 : si dice che a_n è limitata se

$$\sup |a_n| < \infty$$

[cioè $\exists M$ tale che $|a_n| < M$ $\forall M$]

$\Rightarrow$ Teor. : Sia a_n una successione monotona

$\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} a_n$ ESISTE!

Se a_n è MONOTONA E LIMITATA

$\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$ (il limite esiste ed è finito!)

$\Rightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists n_0 : \forall n \geq n_0, |a_n - l| < \varepsilon$

cioé $\lim_{n \to \infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ ma $l = \sup_n a_n$

$\hookrightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = \sup_n a_n$ c.v.d.

- NUMERO DI NEPERO

Dato

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

si dimostra che:
- é crescente
- é limitato

$\Rightarrow$ Esiste il limite finito $\lim_{n \to \infty} a_n$

Tale limite é per definizione il numero di Nepero

e [2,7...]

numero irrazionale definito come

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

ALGEBRA DEI LIMITI

Date a_n e b_n successioni con limiti finiti $\Rightarrow$

1) $\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n + \lim_{n \to \infty} b_n$

2) $\lim_{n \to \infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n \to \infty} a_n \cdot \lim_{n \to \infty} b_n$

3) $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \to \infty} a_n}{\lim_{n \to \infty} b_n}$ con $\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$ e $\lim_{n \to \infty} b_n \neq 0$

↳ L'intorno di x_0 con raggio r è per definizione un intervallo aperto e simmetrico rispetto a x_0, di ampiezza $2r$.

$I_r(x_0)$, $I_s(x_0)$

→ $I_r(x_0) \cap I_s(x_0)$ e $I_r(x_0) \cup I_s(x_0)$

Sono ancora intorni di x_0 !!

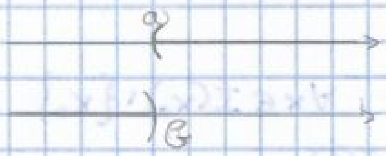
• Sia $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$

⇒ si chiama intorno di $+\infty$

$I = (a, +\infty)$

⇒ si chiama intorno di $-\infty$

$I = (b, -\infty)$



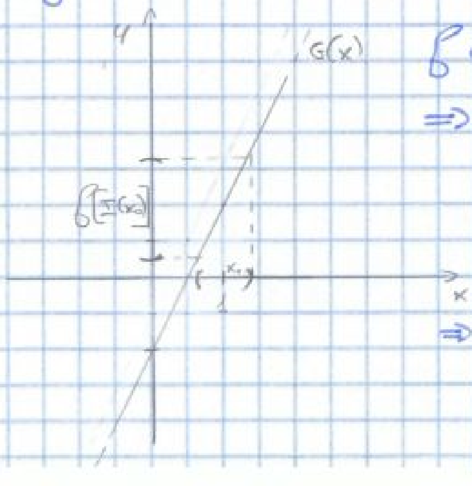
↳ L'intorno di infinito è per def. un intervallo aperto e illimitato.

PROPRIETÁ LOCALI DELLE FUNZIONI

Una proprietà locale è vera ~~se è vera~~ in un intorno

→ $\exists\, I_r(x_0)$ dove $P(x)$ è vera

Es.: $f(x) = 2x - 1$



f è positiva in un intorno di 1:

$\Rightarrow \exists\, I(1) : \forall x \in I(1) \rightarrow f(x) > 0$

VERO!

f è positiva in un intorno di $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \exists\, I(\frac{1}{2}) : \forall x \in I(\frac{1}{2}) \rightarrow f(x) > 0$

FALSA!! Sarebbe vera in un intorno dx di $\frac{1}{2}$.

Es:

- $\lim_{x \to 1} (2x+4) = 6$

Dimostro che è vero usando la def. di limite:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - 6| < \varepsilon$

↳ Dato ε devo trovare un δ! L'incognita è δ.

Fisso $\varepsilon > 0$

$|2x+4-6| < \varepsilon$

$|2x-2| < \varepsilon$

$2|x-1| < \varepsilon$

$\Rightarrow |x-1| < \frac{\varepsilon}{2} \rightarrow$ x dista da 1 meno di $\frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$ è un intorno di 1 con raggio $\frac{\varepsilon}{2}$

⇓

$\Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{2}$, δ dipende da ε !!

Il limite è verificato perché ho ottenuto un intorno di 1 !!

- $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$

$|x^2| < \varepsilon$ con $x^2 \geq 0$ e $\varepsilon > 0$ per hp

$x^2 < \varepsilon$

$|x| < \sqrt{\varepsilon} \Rightarrow x \in I_{\sqrt{\varepsilon}}(0) \rightarrow \delta = \sqrt{\varepsilon}$

$\Rightarrow$ Limite verificato.

FUNZIONE CONTINUA

Def.: Se capita che $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$\Rightarrow$ Si dice che $f(x)$ è continua in x_0.

[Condizioni: 1) $x \in dom(f)$

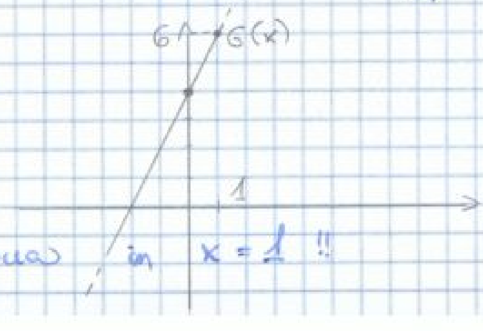
2) $\lim_{x \to x_0} f(x)$ deve esistere e deve essere uguale al valore della funz. in x_0.]

Es.: $f(x) = 2x+4$

$\lim_{x \to 1} 2x+4 = 6$

$f(1) = 6$

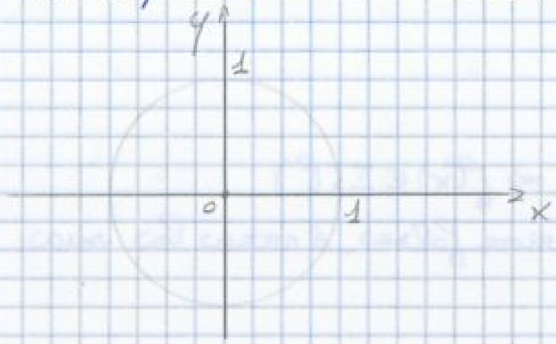
$\Rightarrow f(x)$ è continua in $x = 1$!!



FUNZIONI IPERBOLICHE

Se considero il cerchio goniometrico:

$x^2 + y^2 = 1$ $\qquad$ x é l'arco $\widehat{AB}$

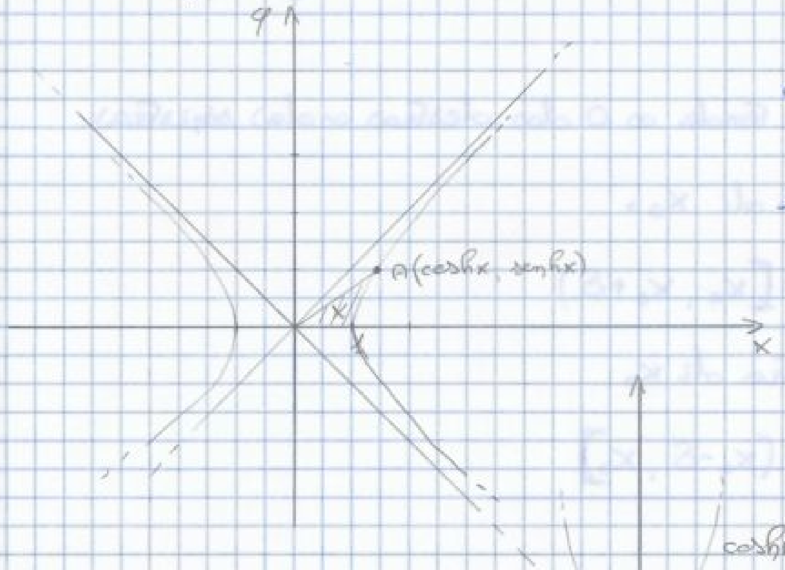


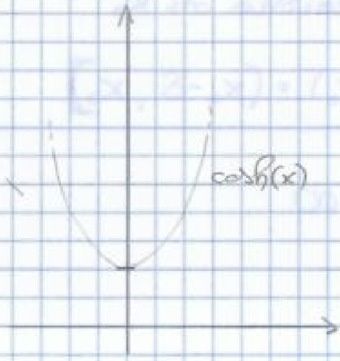
Posso anche considerare un'iperbole:

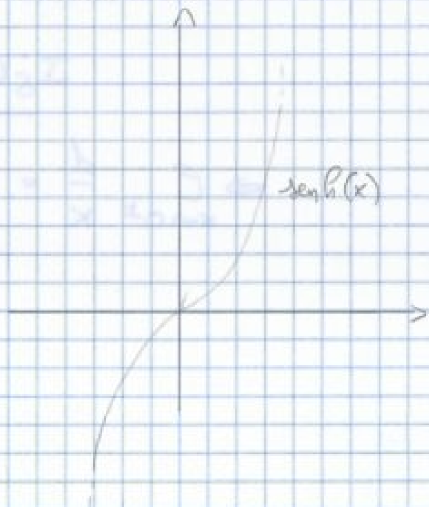
$x^2 - y^2 = 1$ $\qquad$ dove x é il valore dell'area

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



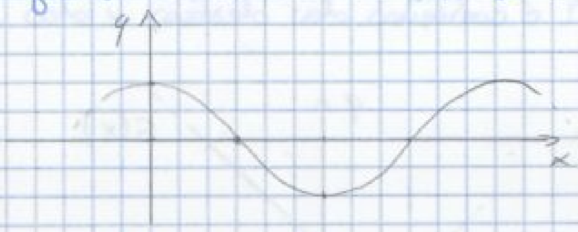




FUNZIONI SENZA LIMITE

$\lim_{x \to \infty} \cos x$ NON ESISTE!!

La funzione oscilla tra $+1$ e -1, non si stabilizza mai.



Dim.: $\lim_{x \to \infty} \cos x \neq 1$

Se, per assurdo:

$\lim_{x \to \infty} \cos x = 1 \rightarrow$ per def. di lim.

$\forall I(1)\ \exists I(\infty) : \forall x \in I(\infty) \Rightarrow f(x) \in I(1)$

È FALSA, sarà vera la sua negazione

$\exists I(1) : \forall I(\infty)\ \exists x \in I(\infty) \Rightarrow f(x) \notin I(1)$

Infatti non è possibile che $\cos x$ mandi tutti i punti di $(M, +\infty)$ in un intorno di 1, $I(1)$ abbastanza **piccolo**.

Mi basta trovare un intorno di 1 che verifica la proposizione negata:

$I(1) = I_{\frac{1}{2}}(1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

Prendo un qualunque intorno di ∞, $I(\infty) = (M, +\infty)$

$k \in \mathbb{N} : k > M$?

$(2k+1)\pi > M \rightarrow (2k+1)\pi \in (M, +\infty)$

$\Rightarrow \cos(2k+1)\pi = -1 \notin \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

Ho trovato un intorno di 1 per cui è verificata la negazione della def. di limite

$\Downarrow$

$\lim_{x \to \infty} \cos x \neq 1$ c.v.d.

Es.: Disc. eliminabile

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \text{ , con } l \in \mathbb{R}$$

Se definisco:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0 \\ l & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$\bar{f}$ é continua in x_0 (ho eliminato la discontinuità).

Dim.: $\bar{f}$ é continua.

$\lim_{x \to x_0} \bar{f}(x) = \lim_{x \to x_0} f(x)$ perché nella def. di lim. escludo sempre il punto x_0

Questo limite é uguale a l per hp.:

$$\lim_{x \to x_0} \bar{f}(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Ma $\bar{f}(x)$ é definita come:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{per } x \neq x_0 \\ l & \text{per } x = x_0 \end{cases}$$

$\rightarrow \bar{f}(x_0) = l$

$\Rightarrow \bar{f}(x)$ é continua in x_0 c.v.d.

Il passaggio da f a $\bar{f}$ si chiama ESTENSIONE di CONTINUITÁ.

PROPRIETÁ DEI LIMITI

Tutte le funzioni ($f, g, h...$) sono per hp sempre definite almeno in un intorno di c, $I(c) \setminus \{c\}$

con $c = \begin{cases} \pm\infty \\ x_0^\pm \\ x_0 \end{cases}$

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

Suppongo che $\lim_{x \to c} f(x) = l$ esiste e $l > 0$ oppure $l = +\infty$

$\Rightarrow \exists I(c) : \forall x \in I(c) \setminus \{c\} \Rightarrow f(x) > 0$

Proprietà locale della funzione, esiste un intorno di c dove la funzione ha lo stesso segno del limite.

Dim: nel caso $l \in \mathbb{R}^+$

Per def. di limite:

$\forall I(l)\ \exists I(c) : \forall x \in I(c) \setminus \{c\} \Rightarrow f(x) \in I(l)$

Fisso $I_{l/2}(l)$ intorno di l con raggio $l/2$

$I(l) = \left(\frac{l}{2}, \frac{3}{2}l\right)$

$\to \exists I(c) : \forall x \in I(c) \setminus \{c\} \Rightarrow f(x) \in \left(\frac{l}{2}, \frac{3l}{2}\right)$

ma per hp é $l > 0$

Se $f(x) \in \left(\frac{l}{2}, \frac{3}{2}l\right) \to f(x) > \frac{l}{2}$

$\frac{l}{2} > 0$

$\Rightarrow f(x) > \frac{l}{2} > 0 \to f(x) > 0$

$\Longrightarrow \exists I(c) : \forall x \in I(c) \setminus \{c\} \Rightarrow f(x) > 0\ [l > 0]$

c.v.d.: ho trovato un intorno di l dove la funzione assume lo stesso segno del limite.

Corollario 2: Sia f continua in x_0 e $f(x) \neq 0$

$\Rightarrow$ Esiste un intorno di x_0, $I(x_0)$ dove $f(x)$ ha il segno di $f(x_0)$

Dim.: f é continua in x_0 per hp

$\rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Se $f(x_0) > 0$ per il Teor. di Permanenza del segno:

$\exists\, I(x_0) : \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$

$\Rightarrow f(x) > 0$ [cioé la funz. ha lo stesso segno del limite]

TEOREMA DEL CONFRONTO

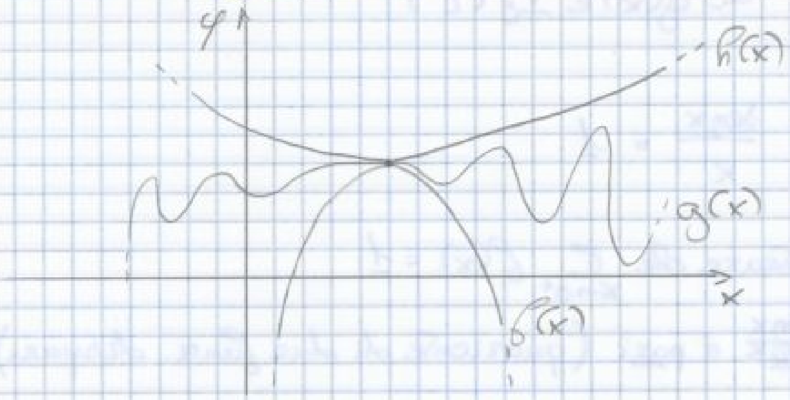
Date f, g e h definite perlomeno su $\tilde{I}(c) \setminus \{c\}$

suppongo che $\forall x \in \tilde{I}(c) \setminus \{c\}$ sia verificata la relazione:

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

suppongo che $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x) = l$ [esiste il limite e vale l]

$$\Rightarrow \lim_{x \to c} g(x) = l$$



Dim.: Si deve dimostrare che:

$\forall I_\varepsilon(l)\ \exists I_\delta(c) : \forall x \in I_\delta(c) \setminus \{c\}$

$\Rightarrow g(x) \in I_\varepsilon(l)$

$\hookrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta : \forall x \in (c-\delta, c+\delta)$ $\rightarrow \lim_{x \to c} g(x) = l$

$\Rightarrow l - \varepsilon \leq g(x) < l + \varepsilon$

- $\lim_{x \to c} f(x) = l$ per hp

Per ε dato sopra:

$\exists\, I'(c) : \forall x \in I'(c) \setminus \{c\} \Rightarrow l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$

$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$

Ho "costretto" la funzione $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ tra le funz. $\cos x$ e 1

→ Per teorema del confronto:

$\lim_{x \to 0^+} \cos x = 1 \qquad \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ c.v.d.

Corollario (T. del confronto)

Date: f limitata in $I(c)$

g tale che $\lim_{x \to c} g(x) = 0$

$\Rightarrow \lim_{x \to c} f(x) \cdot g(x) = 0$

"La funzione g ammazza f" cit.: prof. Enrico Serra

Dim.: $\lim_{x \to c} f(x) \cdot g(x) = 0 \iff \lim_{x \to c} |f(x) g(x)| = 0$ [é equivalente!!]

f é limitata per hp:

→ $\exists M : |f(x)| \leq M$ in $I(c)$

[il grafico sta tra M e $-M$]

. $|f(x) \cdot g(x)| \geq 0$ per def. di modulo

$|f(x)| \leq M$ → moltiplico per $|g(x)|$

. $|f(x)| \cdot |g(x)| \leq M |g(x)|$

→ $|f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)|$ per propr. del modulo

$\Rightarrow 0 \leq |f(x)| |g(x)| \leq M |g(x)|$

$\lim_{x \to c} 0 = 0 \qquad \lim_{x \to c} M |g(x)| = 0$ per hp.

$\Rightarrow$ Per il teorema del confronto:

$\lim_{x \to c} |f(x) \cdot g(x)| = 0$ c.v.d.

FUNZIONI CONTINUE

Proprietà: Somme, prodotti e quozienti di funzioni continue sono funzioni continue (dove sono definite).
[Per algebra dei limiti]

Dim.: Date f e g continue in x_0

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$ per algebra dei lim

$$\lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0)+g(x_0)$$ per hp f e g sono continue.

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = f(x_0)+g(x_0)$$

def. di funzione continua. c.v.d.

LIMITI NOTEVOLI

- $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Dim.:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}$$

PROPRIETÀ GLOBALI DELLE FUNZIONI CONTINUE

Data $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua

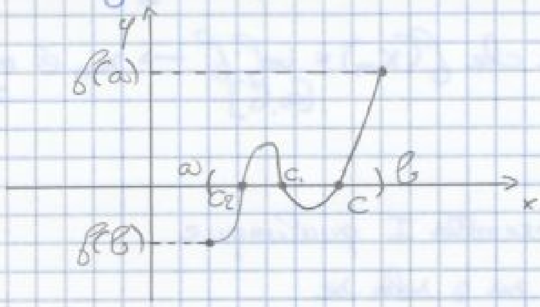
<u>Def.</u>: Si dice che $c\in\mathbb{R}$ è uno <u>zero</u> di f se e solo se
$$f(c)=0$$

→ Trovare gli zeri di una funzione significa risolvere l'equazione $f(x)=0$

TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, continua.
Se $f(a)\cdot f(b)<0$ [cioè $f(a)$ e $f(b)$ hanno segni opposti]

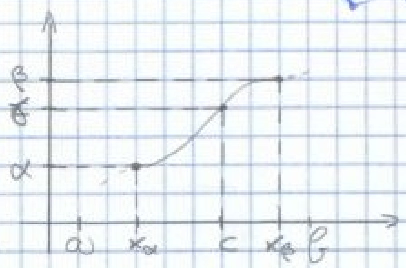
$\Rightarrow$ f ha almeno uno zero in (a,b)



- Se f è strettamente monotona in $[a,b]$
  $\Rightarrow$ lo zero è unico!!

- <u>Corollario</u>: (TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI)
  Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua
  Se f assume due valori α e β $(\alpha<\beta)$
  $\Rightarrow$ f assume tutti i valori tra α e β

<u>Dim.</u>: Per hp esistono due punti, x_α e x_β in $[a,b]$
tali che $f(x_\alpha)=\alpha$ e $f(x_\beta)=\beta$ con $x_\alpha<x_\beta$
Voglio dim. che:
$\forall\gamma\in(\alpha,\beta)$ $\exists c\in[a,b]: f(c)=\gamma$



Definisco $g:[x_\alpha,x_\beta]\to\mathbb{R}$
$g(x)=f(x)-\gamma$
g è continua →
$g(x_\alpha)=f(x_\alpha)-\gamma=\alpha-\gamma<0$ (perché $\gamma\in(\alpha,\beta)$)
$g(x_\beta)=f(x_\beta)-\gamma=\beta-\gamma>0$ "
$\Rightarrow$ Per il T. di es. degli zeri $g(x)$ ha uno zero in $[x_\alpha,x_\beta]$ $\Rightarrow$

CONFRONTO LOCALE DI FUNZIONI

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4+2x+1}{5x^4+x^2-2} = \frac{3}{5}$$

↳ Qualunque polinomio di grado minore di 4 non conta nulla, non cambia il valore del limite.

SIMBOLI DI LANDAU

Date f e g definite in $I(c) \setminus \{c\}$

considero $\frac{f(x)}{g(x)}$ con $g(x) \neq 0$ in $I(c) \setminus \{c\}$

nei casi in cui $\begin{cases} f \to 0 \\ g \to 0 \end{cases}$ o $\begin{cases} f \to \infty \\ g \to \infty \end{cases}$

Def. 1: Si dice che f é EQUIVALENTE a g per $x \to c$

se: $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Rightarrow f \sim g$ per $x \to c$

[f é equivalente a g per $x \to c$]

Cioé quando $x \to c$ f e g hanno lo stesso ordine di grandezza (il loro rapporto é vicino a 1 quanto si vuole).

N.B.: Se $f \sim g$ non é vero che $f - g = 0$

ES.:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+\sqrt{x}} = 1 \to f \sim g$$

ma per $x \to +\infty$ $f - g \to -\infty$

Def. 2: Si dice che f é o-PICCOLO di g per $x \to c$

se: $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Rightarrow f = o(g)$ per $x \to c$

[f é o-piccolo di g per $x \to c$]

Cioé f é trascurabile rispetto a g (f é molto più piccola di g in $I(c)$).

ES.:

$$\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} x \sim x \text{ per } x \to 0$$

$$\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x} = 0 \Rightarrow 1-\cos x = o(x) \text{ per } x \to 0$$

ALGEBRA DEGLI O-PICCOLI

- $x \to 0$

1. $o(x^m) \pm o(x^m) = o(x^m)$

$f = o(x^m)$
$g = o(x^m)$ $\rightarrow$ $f \pm g = o(x^m)$

<u>Dim.:</u> $\lim_{x\to 0} \frac{f \pm g}{x^m} = 0$

$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^m} \pm \lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^m} = 0$

?? ↳ perché

2. $o(x^m) \pm o(x^n) = o(x^{\min(m,n)})$

$f(x) = o(x^5)$
$g \;\; = o(x^2)$ $\rightarrow$ $f \pm g = o(x^2)$

<u>Dim.:</u>

$f(x) = o(x^m)$
$g(x) = o(x^n)$ con $m > n$

$\Rightarrow$ Voglio dim. che $f \pm g = o(x^{\min(m,n)}) \rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f \pm g}{x^n} = 0$

$\cancel{\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^m} \pm \lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^m} = 0}$

$\cancel{\lim_{x\to 0} \frac{f \pm g}{x^m + x^n} = 0}$

$\lim_{x\to 0} \frac{f}{x^n} \pm \lim_{x\to 0} \frac{g}{x^n} = 0$

↳ Se $f = o(x^m)$ a maggior ragione sarà $f = o(x^n)$ $(m > n)$

3. $x^m \cdot \underline{o(x^n)} = o(x^{m+n})$

↳ è una funzione f che divisa per x^n è trascurabile $\left(\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0\right)$

<u>Dim.:</u>

$x^m \cdot f(x) = o(x^{m+n})$

$\lim_{x\to 0} \frac{x^m \cdot f(x)}{x^{m+n}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^m} \cdot f(x)}{\cancel{x^m} \cdot x^n} = 0$

↳ $f(x)$ è un $o(x^n)$ per def.

Proprietà: Date f e g che tendono contemporaneamente a 0 o a ∞ per $x \to c$

① $\Rightarrow \lim_{x\to c} \frac{f(x)+o(f)}{g(x)+o(g)} = \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$

Dim.: $\lim_{x\to c} \frac{f(x)\left(1+\frac{o(f)}{f}\right)}{g(x)\left(1+\frac{o(f)}{f}\right)} = \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$

$\hookrightarrow \frac{o(f)}{f}$ per $x \to c$ é zero perché $o(f)$ é per def. una funzione che divisa per f (per $x\to c$) fa zero!! $o(f)$ é trascurabile rispetto a f.

② $\Rightarrow \lim_{x\to c} (f+o(f))\cdot(g+o(g)) = \lim_{x\to c} f\cdot g$

Dim.: Uguale a sopra.

Esempi

- $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{\operatorname{sen}^2 3x}$

$\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$

$\cos 2x = 1 - 2x^2 + o(x^2) \Rightarrow 1-\cos 2x = 2x^2 + o(x^2)$

$\operatorname{sen} t = t + o(t)$

$\operatorname{sen}(3x) = 3x + o(x)$

$\operatorname{sen}^2(3x) = (3x+o(x))^2 = 9x^2 + o(x)^2 + 6x\,o(x^2)$

$= 9x^2 + o(x^2) + o(x^2)$

$\operatorname{sen}^2(3x) = 9x^2 + o(x^2)$

$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{\operatorname{sen}^2(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2+o(x^2)}{9x^2+o(x^2)} = \frac{2}{9}$

REGOLE DI SOSTITUZIONE NEI LIMITI

. Dal limite notevole:

$$\lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$$

$\to e^t - 1 \sim t$ per $t \to 0$

$\Leftrightarrow e^t = 1 + t + o(t)$

. Sostituisco: $t = f(x)$ purché $f(x) \to 0$ per $x \to c$ (c qualsiasi)

$$e^{f(x)} = 1 + f(x) + o(f) \quad \text{per } x \to c$$

Es.: $e^{\operatorname{sen} x} = 1 + \operatorname{sen} x + o(\operatorname{sen} x)$

se $x \to 0$, $\operatorname{sen} x \to 0$

$\operatorname{sen} x = 1 + x + o(x) = x + o(x)$ perché $\lim_{x \to 0} \frac{o(x)}{1} = 0$

$\hookrightarrow e^{\operatorname{sen} x} = 1 + x + o(x) + o(\operatorname{sen} x)$

$o(\operatorname{sen} x) = o(x + o(x)) = o(x)$

$\Rightarrow e^{\operatorname{sen} x} = 1 + x + o(x)$

Nota:

$o(x) = o(x + o(x))$

$o(x + o(x)) = o(x(1 + o(1)))$

$= x \cdot \underbrace{o(1 + o(1))}$

$\hookrightarrow$ é f che diviso per $1 + o(1) \to 0$.

$\frac{f}{1 + o(1)} \to 0$, gli o-piccoli si trascurano

$\Rightarrow \frac{f}{1} \to 0 \Rightarrow f = o(1)$

$x \cdot o(1) = o(x)$

Es.: $e^{\cos x} = 1 + \cos x + o(\cos x)$

$\hookrightarrow$ **NO!!** perché $\cos x \not\to 0$ per $x \to 0$!!

Es.: $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

$1-\cos x = f(x)$

$f(x) \sim \frac{1}{2}x^2$

$\varphi(x) = x$

$\alpha = 2$ per $x \to 0$: $f(x)$ ha ordine di infinitesimo 2 rispetto a $\frac{1}{2}x^2$

- $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{\varphi(x)^\alpha} = l$ con $\alpha > 0 \wedge l \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\rightarrow f(x) \sim l\,\varphi(x)^\alpha$ per $x \to c$

$f(x) = \underbrace{l\,\varphi(x)^\alpha}_{} + o(\varphi(x)^\alpha)$

↳ PARTE PRINCIPALE DI f rispetto a φ

Es.:

- La parte principale di $\operatorname{sen} x$ per $x \to 0$ è x:

$\operatorname{sen} x = x + o(x)$

$\alpha = 1$ (ordine di infinitesimo

- La parte principale di $1-\cos x$ per $x \to 0$ è $\frac{1}{2}x^2$

$1-\cos x = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

$\alpha = 2$ (ordine di infinitesimo).

- Calcolare la p.p. di $f(x) = \frac{e^x - 1 - x^2}{1+x^2}$

rispetto a $\varphi(x) = x$ per $x \to 0$

1. $\Rightarrow f(x) = \frac{e^x - 1 - x^2}{1+x^2}$

$e^x = 1 + x + o(x)$ per $x \to 0$

$f(x) = \frac{\cancel{1} + x + o(x) - \cancel{1} - x^2}{1+x^2} = \frac{x + o(x)}{1+x^2}$ perché $-x^2 = o(x)$

$f(x) = \frac{x + o(x)}{1+x^2}$

Dalla def.: $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{\varphi(x)^\alpha} = l \rightarrow f(x) = \underbrace{l\,\varphi(x)^\alpha}_{} + o(\varphi(x)^\alpha)$

↳ p.p. di $f(x)$ rispetto a $\varphi(x)$

Derivata di una funzione

Premesse

Data $f(x)=\frac{e^x-1}{x}$, dai limiti notevoli so che:

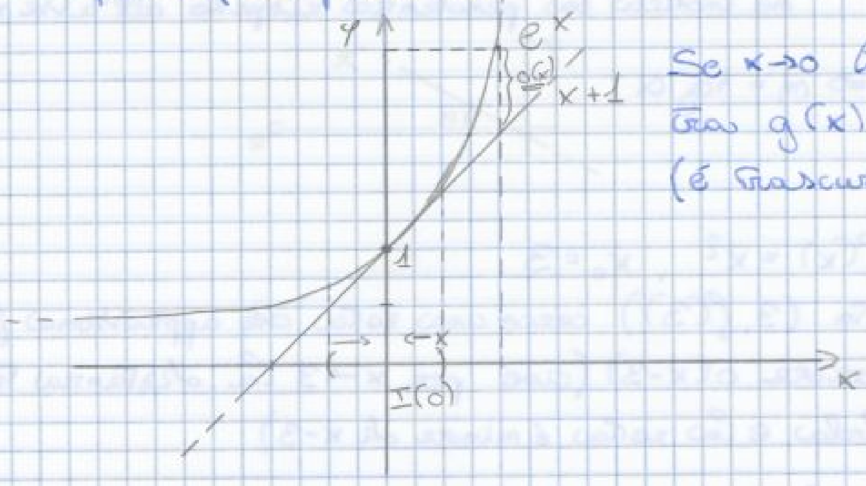
$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$\to e^x-1 \sim x$ per $x\to0$

$e^x-1=x+o(x) \to \underbrace{e^x = 1+x}_{\text{funz. uguali a meno di un errore}} + \underbrace{o(x)}_{\text{errore}}$

Cioè ho due funzioni (e^x e $1+x$) che per $x\to0$ sono uguali a meno di un errore trascurabile ($o(x)$)

⇒ La funzione $g(x)=e^x$ è uguale a meno di un errore trascurabile a $h(x)=1+x$ in un intorno di 0 abbastanza piccolo (cioè per $x\to0$)



Se $x\to0$ la differenza tra $g(x)$ e $h(x)$ tende a 0 (è trascurabile)

⇒ Ho approssimato una funzione con una retta.

$\rightarrow x^2 - 9 - m(x-3) = o(x-3)$ divido per $o(x-3)$

$$\frac{x^2-9}{x-3} - m = o(x-3)\cdot\frac{1}{\cancel{x-3}}$$

$$\frac{x^2-9}{x-3} - m = o(1)$$

Vuol dire che la funzione $\frac{x^2-9}{x-3} - m$ tende a 0, sempre per $x \to 0$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} - m = 0$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = m$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{(x+3)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}} = m$$

$$\lim_{x\to 3} (x+3) = m$$

$$\lim_{x\to 3} (x+3) = 6 \Rightarrow \underline{m = 6}$$

$\Rightarrow m \in \mathbb{R}$ esiste, quindi esiste la retta $r(x)$ che in $I(3)$ é uguale a $f(x)$ a meno di un errore $o(x-3)$

$\Rightarrow$ per $x \to 3$

$$f(x) = r(x) + o(x-3)$$

$$x^2 = 9 + 6(x-3) + o(x-3)$$

SCRITTURA EQUIVALENTE

pongo $h = x - x_0$

se $x \to x_0$, $h \to 0$

$\Rightarrow f(x_0 + h) = f(x_0) + m\,h + o(h)$ per $h \to 0$

pongo $m = f'(x_0)$

$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\,h + o(h)$ per $h \to 0$

$\Rightarrow$ equazione retta tangente al grafico di $f(x)$ in $(x_0, f(x_0))$:

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Se f é continua in x_0:

$\to f(x) = f(x_0) + o(1) \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Sono def. equivalenti

Se f é derivabile in x_0:

$\to f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$

TEOREMA: La derivabilità in un punto implica la continuità.

Se $f(x)$ é derivabile in x_0

$\to \exists m \in \mathbb{R} : f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + o(x - x_0)$

con $m = f'(x)$

$\Rightarrow f$ é continua in x_0

Dim.: Per hp f é derivabile

$\to f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x)(x - x_0) + o(x - x_0)}$

↳ Tutto questo pezzo é un o-piccolo di 1!!

[Se $x \to x_0$: $\lim_{x \to x_0} f'(x)(x - x_0) + o(x - x_0)$

$\lim_{x \to x_0} f'(x)(x - x_0) + o(x - x_0) = 0$

$\to$ per def. é tutto o-piccolo di 1]

$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + o(1)$

↳ É la def. di funzione continua!! c.v.d.

Es.: $f(x) = \log x$

$f'(x) = \dfrac{1}{x}$

Infatti:

$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + o(h)$ per $h \to 0$

$\log(x+h) = \log x + f'(x) \cdot h + o(h)$

$\log(x+h) - \log x = f'(x) \cdot h + o(h)$

$\log \dfrac{x+h}{x} = f'(x)h + o(h)$

$\log\left(1 + \dfrac{h}{x}\right) = f'(x)h + o(h)$

con $\log\left(1 + \dfrac{h}{x}\right) = \dfrac{h}{x} + o(h)$

$\dfrac{h}{x} + o(h) = f'(x)h + o(h)$

$f'(x) = \dfrac{1}{x} + o(1)$ per $h \to 0$

Proprietà: Date f e g derivabili e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(1) $\Rightarrow D[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$

Dim.: $\alpha f(x+h) + \beta f(x+h) =$

$= \alpha f(x) + \alpha f'(x) \cdot h + o(h) + \beta g(x) + \beta g'(x+h) + o(h)$

$= [\alpha f(x) + \beta g(x)] + (\alpha f'(x) + \beta g'(x))\, h + o(h)$

c.v.d.

↳ LINEARITÀ DELLA DERIVATA

NOTA: funzione derivabile e retta tangente

$\rightarrow$ f é derivabile in x_0 se in quel punto é bene approssimabile da una retta

$\Rightarrow f(x) - r(x) = o(x - x_0)$

Dire che la differenza tra f e r tende a zero é troppo generico, vale per tutte le rette per x_0.

Dire che $f(x) - r(x) = o(x - x_0)$ é più forte, vale solo per la retta tangente [la dist. tra la funz. e la retta é infinitamente più piccola della distanza di x da x_0]

SINTESI: REGOLE DI DERIVAZIONE (poste f e g derivabili)

1. $(\alpha f(x) \pm \beta g(x))' = \alpha f'(x) \pm \beta g'(x)$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
2. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
3. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) g(x) - g'(x) f(x)}{g(x)^2}$
4. $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Es.: $f(g(x)) = (\underbrace{\log x}_{g})^{\overbrace{2}^{f}}$

$f'(g(x)) = 2 \log x \cdot \frac{1}{2}$

Derivate di funzioni elementari

1. Potenze

$f(x) = x^\alpha \quad , \alpha \in \mathbb{R}$

$$(x+h)^\alpha = x^\alpha\left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha =$$

x fisso e $h \to 0$

$$= x^\alpha\left(1+\alpha\cdot\frac{h}{x}+o(h)\right)$$

$$= x^\alpha\cdot\left(1+\frac{\alpha}{x}\cdot h+o(h)\right)$$

$$(x+h)^\alpha = x^\alpha + \underbrace{\alpha\cdot x^{\alpha-1}}_{\text{per def è la derivata di } f(x)}\cdot h + o(h)$$

$$\Rightarrow f(x) = x^\alpha \qquad \alpha\in\mathbb{R}$$
$$f'(x) = \alpha\cdot x^{\alpha-1}$$

2. $f(x) = \operatorname{sen} x$

$$\operatorname{sen}(x+h) = \operatorname{sen}x\cos h + \operatorname{sen}h\cos x$$

$$= \operatorname{sen}x\Big(1\underbrace{-\frac{1}{2}h^2+o(h)}_{o(h)}\Big)+\cos x\left(h+o(h)\right)$$

$$= \operatorname{sen}x + h\underbrace{\cos x}_{f'(x)} + o(h)$$

$$\Rightarrow f(x) = \operatorname{sen}x$$
$$f'(x) = \cos x$$

$$\Rightarrow f(x) = \cos x$$
$$f'(x) = -\operatorname{sen}x$$

$$\Rightarrow f(x) = \operatorname{tg}x$$
$$f'(x) = 1+\operatorname{tg}^2x = \frac{1}{\cos^2x}$$

Proprietà: f è derivabile in x_0 se e solo se esistono $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ e sono uguali.

Es.:
$f(x) = |x|$ non è derivabile in 0

→ Infatti: $\lim_{x\to 0^+} \frac{x-0}{x-0} = 1$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{-x-0}{x-0} = -1$

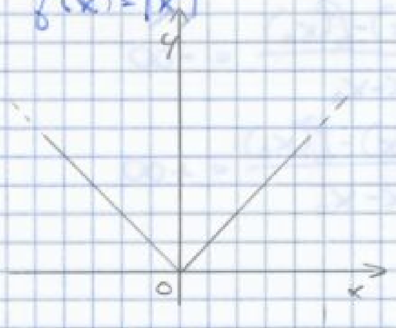
PUNTI DI NON DERIVABILITÀ

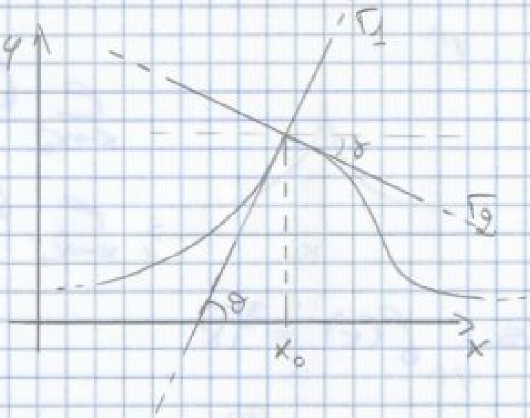
1. $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ esistono ma sono diversi

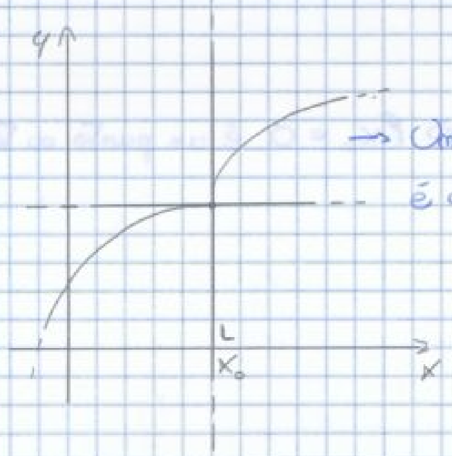
$f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0) \Rightarrow f(x)$ non è derivabile in x_0

⇒ PUNTO ANGOLOSO

Es.:
$f(x) = |x|$







→ Una derivata è infinita, è comunque un punto angoloso.

Proprietà: Data f definita in $I(x_0)$

Se: 1. f é continua in x_0

2. f é derivabile perlomeno fuori da x_0

↳ Se $\lim_{x \to x_0} f'(x_0)$ esiste ed é finito

$\Rightarrow$ f é derivabile anche in x_0

[Derivo dove posso e faccio il limite della derivata]

Es.: $f(x) = \dfrac{|x|}{x(1+|x|)}$

↳ É derivabile in $x_0 = 0$?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x} & \text{se } x > 0 \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(x+1)^2} & \text{se } x > 0 \\ \dfrac{-1}{(x-1)^2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

→ Ho derivato dove potevo, faccio il lim della der. per $x \to$ per vedere se $f(x)$ é deriv. in $x_0 = 0$

$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -1$

$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = -1$

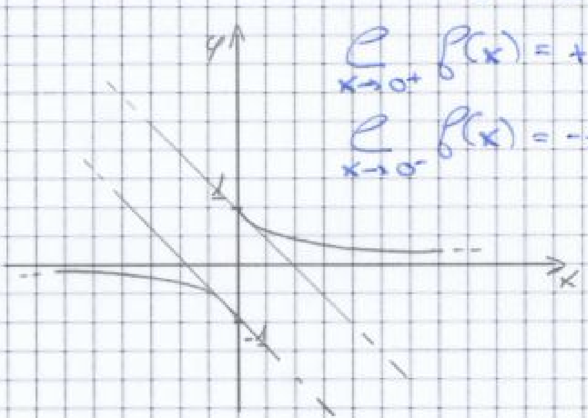
→ I limiti dx e sx coincidono → potrei concludere che $f(x)$ é derivabile in $x_0 = 0$

$\Downarrow$

Falso!!

$f(x)$ non é derivabile in $x_0 = 0$!!

↳ Infatti $f(x)$ non é continua in $x_0 = 0$



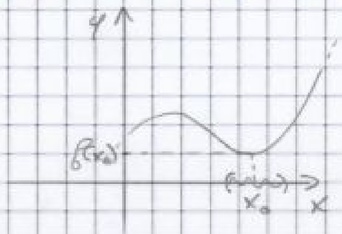
$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +1$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$

$\Rightarrow$ $f(x)$ ha un salto in $x_0 = 0$.

TEOREMA DI FERMAT

- Punti di max (o min.) locale



$\exists I(x_0) : f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in I(x_0)$ (min. locale)

- Def.: Si dice che un punto x_0 é interno ad un insieme $A \subset \mathbb{R}$ se esiste un intorno di x_0, $I(x_0)$, tutto contenuto in A

$\Rightarrow$ Se ~~per~~ prendo $A = [a, b]$ i punti interni ad A sono (a, b).

Teorema (di Fermat):

Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

sia x_0 un minimo o un massimo locale di f

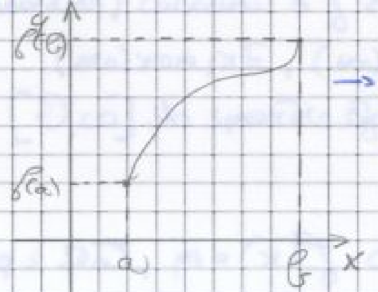
Se: 1. x_0 é INTERNO al dominio di f

2. f é derivabile in x_0

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = 0}$$

[I punti dove $f'(x) = 0$ sono detti punti critici]

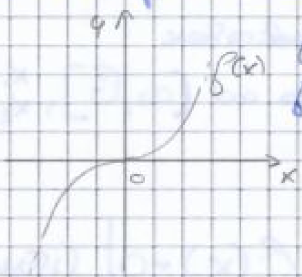
- I punti di max e min. vengono anche detti estremi:



$\to$ a é un minimo locale stretto

ma $f'(a) \neq 0 \Rightarrow$ a non é critico

- Ci sono punti critici che non sono estremi:



$f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2, \quad f'(0) = 0$

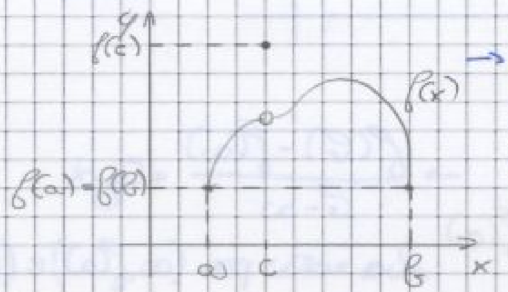
$\hookrightarrow x_0 = 0$ é un punto critico ma non é un estremo (non é né max né min)

$\Rightarrow$ si chiama PUNTO STAZIONARIO

Nota: VERIFICARE SEMPRE LE IPOTESI !!

- Se f non è continua anche in un solo punto
  $\rightarrow$ il T. di Rolle è FALSO!!
- Se f non è derivabile anche in un solo punto
  $\rightarrow$ il T. di Rolle è FALSO!!

Es.:



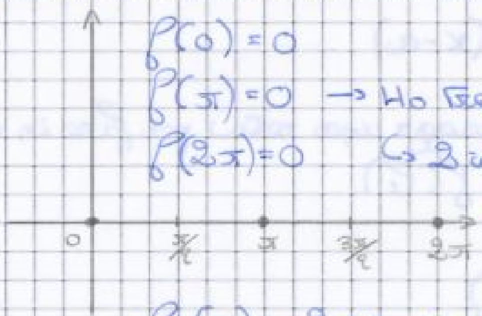
$\rightarrow$ f non è continua su $[a,b]$ e non è derivabile su (a,b)

$\Rightarrow$ Anche se c'è un $x_0 \in (a,b) : f'(x_0)=0$ non vale Rolle perché non essendo continua non posso applicare Weierstrass (che mi assicura l'esistenza dei max e min.

Es.:

Data $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$, $f:[0,2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$

Quante volte si annulla la derivata?



$f(0)=0$

$f(\pi)=0$ $\rightarrow$ Ho tre punti in cui f assume lo stesso valore

$f(2\pi)=0$ $\hookrightarrow$ 2 intervalli dove applico Rolle:

$\Rightarrow$ su $[0,2\pi]$ $f'(x)$ si annulla almeno 2 volte.

$f'(x) = 2x \operatorname{sen} x + x \cos x$

$f'(0) = 0 \Rightarrow$ La derivata si annulla anche in 0 !!

$\Rightarrow$ Su $[0,2\pi]$ $f'(x)$ si annulla almeno 3 volte.

[$f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$

La scrivo nella forma $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)x + o(x)$ per $x \rightarrow x_0$

$\rightarrow f(x) = x^2(x+o(x))$ per $x \rightarrow 0$

$= x^3 + o(x^3)$ con $x^3 = o(x)$

$= o(x) + o(x^3)$ per algebra degli o-piccoli

$= o(x)$

$\rightarrow f(x) = o(x)$ per $x \rightarrow 0$

Se nella forma $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)x + o(x)$ per $x \rightarrow x_0$ manca il termine in x di grado 1 vuol dire che in x_0 la derivata prima si annulla].

CONSEGUENZE DEL T. DI LAGRANGE

1) CARATTERIZZAZIONE DELLE FUNZIONI COSTANTI

- Data $f:[a,b] \to \mathbb{R}$
  se $f'(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow f$ è costante su $[a,b]$

Voglio dimostrare che se la derivata nulla in un intervallo implica la funz. costante su quell'intervallo.

- f costante $\Rightarrow f'(x) = 0$ lo sapevo già:
  $f(x) = \alpha \quad \forall x$, con $\alpha \in \mathbb{R}$
  $$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha - \alpha}{x - x_0} = 0$$
- $f'(x) = 0 \ \forall x \Rightarrow f$ costante ?

Dim.: se $f'(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$ per hp

Prendo $x \in (a,b]$ e considero l'intervallo $[a,x]$

$\to f$ è derivabile in (a,x) (perché è der. su $[a,b]$)

$\to f$ è continua in $[a,x]$ (perché è derivabile)

. Per il T. di Lagrange:

$$\exists c \in (a,x) : f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

ma $f'(c) = 0$ per hp

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0 \to f(x) = f(a)$$

Essendo x arbitrario in $(a,b]$

$\Rightarrow f(x) = f(a) \quad \forall x \in [a,b]$

$\hookrightarrow f$ è costante

c.v.d.

$\Rightarrow f'_+(x) = f'_-(x) \geq 0$

$\Rightarrow$. $\forall x \in I \quad f'(x) \geq 0$
[f crescente $\Rightarrow f'(x) \geq 0$] | c.v.d.

Dim. 1.: $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ crescente $\forall x \in I$

a. Prendo $x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$

b. Considero $[x_1, x_2]$, f é derivabile in $[x_1, x_2] \subset I$ per hp
e f é continua in $[x_1, x_2] \subset I$ per hp

$\Rightarrow$ Posso applicare T. di Lagrange:

$$\exists c \in (x_1, x_2) : \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

$\hookrightarrow f'(c) \geq 0$ per hp
$x_2 - x_1 > 0$ per costruzione $\Rightarrow$ deve essere $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$

$\Rightarrow$. $\forall x_1, x_2 \in I$
$f(x_2) \geq f(x_1)$
[$f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ crescente] | c.v.d.

$$\boxed{\Rightarrow f'(x) \geq 0 \;\; \forall x \in I \iff f \text{ crescente su } I}$$

Dim. 2.: $f'(x) > 0 \;\; \forall x \in I \Rightarrow f(x)$ strettamente crescente su I

. a

. b

$\Rightarrow$ T. di Lagrange

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

$\hookrightarrow f'(c) > 0$ per hp
$x_2 - x_1 > 0$ per costruzione $\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0$

$\Rightarrow$. $\forall x_1, x_2 \in I$
$f(x_2) > f(x_1)$
[$f'(x) > 0 \Rightarrow f$ strettamente crescente] | c.v.d.

Classe di f

. Data $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo,
Si dice che f é di classe C^k su I
se f é derivabile k volte e $f^{(k)}(x)$ é continua su I
$f \in C^k(I)$

Es. $C^\infty(I)$: der. infinite volte
$\operatorname{sen} x \in C^\infty(\mathbb{R})$
$C^0(I) = \{f \,/\, f \text{ é continua}\}$
↳ L'ultima der. é continua ma non c'é nemmeno la prima derivata ⇒ f é continua.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 0^\pm} f(x) = 0 \Rightarrow f$ é continua su $\mathbb{R}$
↳ $f \in C^0(\mathbb{R})$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$ devo dimostrare che é der. in 0

$\lim_{x \to 0^\pm} f'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

↳ f' é continua $\Leftrightarrow f' \in C^0(\mathbb{R})$
↳ $f \in C^1(\mathbb{R})$

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 0^\pm} f''(x)$ ✗ NON ESISTE!!
$f''(x)$ non é derivabile ~~in~~ in $x = 0 \Rightarrow f''(x)$ non é continua
$\Rightarrow f \notin C^2(\mathbb{R})$

Def.: Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione

$\Rightarrow$ si dice che f è CONVESSA su I

quando: $\forall a, b \in I$, $\forall x \in [a, b]$

$$\to f(x) \leq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

[la funzione sta sotto alla retta]

$\Rightarrow$ si dice CONCAVA su I

quando: $\forall a, b \in I$, $\forall x \in [a, b]$

$$\to f(x) \geq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

[la funzione sta sopra la retta]

- Se una funzione è convessa/concava $\Rightarrow$ è continua [perché è derivabile almeno due volte?] ?
- Se f è CONVESSA $\Leftrightarrow$ $-f$ è ~~conca~~ CONCAVA

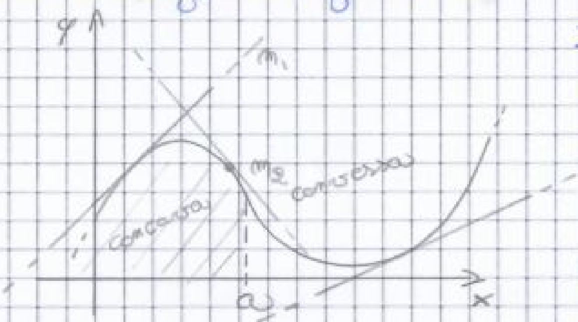
Es.: $f(x) = x^2$ CONVESSA

$-f(x) = -x^2$ CONCAVA

- Se f convessa e derivabile (esiste la tangente) $\to$ la pendenza della tangente aumenta al crescere di x
- f convessa e derivabile $\Rightarrow$ $f'(x)$ crescente

INTERVALLI DI CONVESSITÀ

- Per stabilire dove una funzione è concava o convessa studio il segno di $f''(x)$.



Infatti se f è concava le rette tangenti stanno tutte sopra al suo grafico e al crescere di x diminuisce la pendenza ($m_2 < m_1$)

$\Rightarrow$ Se f è concava/convessa $\Leftrightarrow$ $f'(x)$ è decrescente/crescente

Ma per studiare gli intervalli di monotonia studio il segno della derivata prima $(D(f'(x)) = f''(x))$

$\Rightarrow$ Per studiare la concavità studio il segno di $f''(x)$

TEOREMA DI DE L'HÔPITAL

- Date f e g definite in $I(c) \setminus \{c\}$

Ipotesi:

1. $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$

2. f e g devono essere derivabili in $I(c) \setminus \{c\}$
   e $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I(c) \setminus \{c\}$

3. Deve esistere, finito o no, il limite del rapporto delle **derivate** per $x \to c$

$$\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l, \text{ finito o no}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Il limite del rapporto di f e g per $x \to c$ esiste ed è uguale al limite del punto 3.

LIMITI FONDAMENTALI

- $\forall \alpha > 0$

1. $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ → e^x tende a $+\infty$ più in fretta di qualunque potenza

$\lim_{x\to -\infty} |x|^\alpha \cdot e^x = 0^+$

↳ FORZA DELL'ESPONENZIALE

2. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0$ → Il log cresce molto più lentamente di qualunque potenza, è trascurabile

$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log x = 0$

↳ DEBOLEZZA DEL LOG.

Approssimazione locale di funzioni

- Voglio sostituire f con una funzione più semplice
  Ma l'approssimazione è buona solo se considero la funzione in un intorno di un punto, cioè per $x \to x_0$.

- Fisso un punto x_0 e considero $I(x_0)$

1. $f(x) \in C^0(\mathbb{R})$ (f è continua) → Per $x \to x_0$ la approssimo con un polinomio di grado 0, $p_0(x)$ che è quindi una costante, uguale al valore di f in quel punto:
   $$p_0(x) = f(x_0)$$
   $$\to f(x) = p_0(x) + o(1)$$
   Ma essendo $p_0(x) = f(x_0)$ è la def. di funzione continua!!
   $f(x) = p_0(x)$ con un errore trascurabile.
   C'è solo un $p_0(x)$ che va bene (il limite è unico).

2. $f(x) \in C^1(\mathbb{R})$ → Per $x \to x_0$ la approssimo con un polinomio di grado 1, è una retta e ce n'è solo una che per $x \to x_0$ è equivalente a $f(x)$, è la retta tangente:
   $$\begin{cases} p_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\ f(x) = p_1(x) + o(x - x_0) \end{cases}$$
   ↳ def. di derivata prima.

3. $f(x) \in C^2(\mathbb{R})$ → Per $x \to x_0$ la approssimo con un polinomio di 2° grado:
   $$p_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + a(x - x_0)^2$$
   Cioè esiste a tale che
   $$f(x) = p_2(x) + o(x - x_0)^2 \quad ?$$
   Fino alla retta tangente sappiamo che l'approssimazione è lecita, dopo no.

↳ Problema generale:

$$\left.\begin{array}{l} f \in C^n(I) \text{ approssimabile da } p_n(x) \\ \Rightarrow f(x) = p_n(x) + o(x - x_0)^n \end{array}\right] \; ?$$

<u>Nota:</u> 1. $n! = n(n-1)(n-2)(n-3) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$
(n fattoriale)
↳ È definito solo per $x \in \mathbb{N}$ $[0! = 1]$

2. Simbolo di somma:
$$\sum_{k=i}^{n} a_k = a_i + a_{(i+1)} + a_{(i+2)} + \ldots + a_n$$
↳ k va da i a n
Es.: $\sum_{k=0}^{3} 2^k = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3$
$$\sum_{k=0}^{4} \frac{x^k}{k!} = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$
$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$$

<u>Def.:</u> Polinomio di Taylor
Si chiama polinomio di Taylor di ordine n centrato in x_0 il polinomio così definito:
$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$
[Sommatoria delle derivate di f di ordine k fratto k! per $(x-x_0)^k$]

. $T_0(x) = \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!}(x-x_0)^0 = f(x_0) \Rightarrow$ Def. di funz. continua

. $T_1(x) = \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{f^{(0)}(x)}{0!}(x-x_0)^0$
$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \Rightarrow$ Eq. retta tangente.

Es.: Mostrare che: $e^x - 1 - x > x^2/2$ per $x>0$, $I(0)$

Infatti: $f(x) = e^x - 1 - x$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-0)^{n+1} - 1 - x$$

$$= \cancel{1} + \cancel{x} + \frac{x^2}{2} + \frac{e^c}{3!}x^3 \cancel{-1} \cancel{-x}$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{e^c}{3!}x^3$$

Essendo $\frac{e^c}{3!}x^3 > 0 \quad \forall x>0$

$$\Rightarrow f(x) > \frac{x^2}{2}$$

Nota: L'ordine del polinomio di Taylor è dato dalla potenza di x nell'o-piccolo.

es.: $T_8(x) = p_4(x) + o(x^8)$, $x \to 0$

↳ È un polinomio di Taylor di ordine 8 anche se la x di grado 8 non compare!!

$$T_k(x) = p_h(x) + o((x-x_0)^k), \quad x \to x_0 \text{ e } h<k \ (h,k \in \mathbb{N})$$

Esempi:

- $f(x) = \operatorname{sen} x$

Sviluppo di McLaurin $(x \to 0)$, $f(0)=0$

$f'(x) = +\cos x$ $\qquad f'(0) = +1$

$f''(x) = -\operatorname{sen} x$ $\qquad f''(0) = 0$ → Tutte le derivate pari si annullano in 0!!

$f^{3}(x) = -\cos x$ $\qquad f'''(0) = -1$

$f^{4}(x) = +\operatorname{sen} x$ $\qquad f^{4}(0) = 0$ → Le derivate dispari sono alternativamente +1 e -1

... $\qquad$ ...

$$\operatorname{sen} x = \frac{f'(0)}{1!}\cdot x^1 + \frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\cdot x^3 + \frac{f^{4}(0)}{4!}\cdot x^4 + \ldots + o(x^n)$$

$$= 1\cdot x + 0 - \frac{1}{3!}x^3 + 0 + \ldots + o(x^n)$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$$