NUMERO: 855

DATA: 12/03/2014

APPUNTI

STUDENTE: Massa

MATERIA: Meccanica Razionale + temi d'esame
Prof. Delitala

- Indice:

1) Modellistica e Fisica MATEMATICA

2) CINEMATICA (Analisi dei punti del sistema eq. traiettoria, accelerazione in un sistema di riferimento CINEMATICO)
  - CINEMATICA DEL PUNTO
  - CINEMATICA del corpo rigido
  - CINEMATICA RELATIVA

3) Vincoli (considerare le limitazioni imposte a priori sul moto)

4) GEOMETRIA delle MASSE

5) FORZE LAVORO POTENZIALE] DINAMICA (si collegano moto alle cause)

6) LEGGI DELLA MECCANICA]

7) STATICA (EQUILIBRIO DEI CORPI) → principio dei lavori virtuali → dove il sistema tende a stare in equilibrio.

8) - DINAMICA del PUNTO MATERIALE
  - DINAMICA dei SISTEMI (COMPORTAMENTO di SISTEMI di PUNTI)
  - DINAMICA del CORPO RIGIDO

9) MECCANICA LAGRANGIANA (FORMALISMO ASTRATTO IN CONDIZIONI PARTICOLARI)

10) LINEARIZZAZIONE, STABILITÀ ALL'EQUILIBRIO

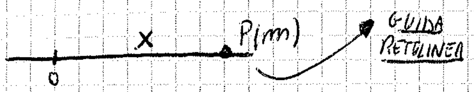
06/03/2013

ESERCITAZIONE 1

Equazioni differenziali → ordinarie lineari del 2° ordine a coefficienti costanti

TIPO: $a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f(t)$ → derivate rispetto al tempo (punti)

- VARIABILE INDIPENDENTE (rispetto a cui si fanno le derivate) è il tempo → (MOVIMENTO DI UN OGGETTO RISPETTO AL TEMPO)
- $x = x(t)$ VARIABILE DIPENDENTE per esempio posizione di un punto materiale $P(m)$ mobile su asse x.



Modelli matematici di moto sono equazioni differenziali del secondo ordine

→ ES NEWTON $\vec{F} = m\vec{a}$

$F = ma$ → UNIDIMENSIONALI

ALLORA $F(x, \dot{x}, t) = m\ddot{x}$

→ In natura non sono lineari → lineari arriviamo all'integrale generale.

→ coefficienti costanti → a, b, c → $\boxed{f(t)}$ → funzione del tempo → FORZANTE del SISTEMA

→ PRENDIAMO L'OMOGENEA ASSOCIATA ponendola uguale a zero

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$$ → spazio lineare bidimensionale

EQ. CARATTERISTICA ALGEBRICA

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \qquad \lambda_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

- $b^2 - 4ac > 0$ λ_{12} → REALI DISTINTI ≠ TRA LORO

$$\begin{cases} \circ\ x_1(t) = e^{\lambda_1 t} \\ \circ\ x_2(t) = e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$ DUE SOLUZIONI PARTICOLARI

INTEGRALE GENERALE

$$\left[\tilde{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2^{\lambda_2 t}\right]$$ VARIANO

- $b^2 - 4ac = 0$ → REALI POSITIVI $\lambda_1 = \lambda_2$ → REALE $= \lambda$

$$\left[x_1(t) = e^{\lambda t} \quad x_2(t) = te^{\lambda t}\right]$$

$$\left[\tilde{x}(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}\right]$$

- $b^2 - 4ac < 0$ → COMPLESSE CONIUGATE $\lambda_{12} = \overset{\alpha}{\boxed{-\frac{b}{2a}}} \pm \overset{\beta}{\boxed{\frac{i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}}}$ → IMPORTANTE

$$\left[\tilde{x}(t) = e^{\alpha t}\left(c_1 \operatorname{sen}\beta t + c_2 \cos\beta t\right)\right]$$

→ per risolvere $a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f(t)$ bisogna trovare un integrale particolare dell'eq. completa

SOLUZIONE PARTICOLARE → $x_p(t)$ → INTEGRALE PARTICOLARE dell'eq. completa

↓

dipende dalla natura delle soluzioni dell'omogenea associata

$$x(t) = x_p(t) + \tilde{x}(t)$$

↳ integrale generale.

Partiamo da $x_a = A\cos(\omega t + \varphi)$ → sviluppiamo coseno della somma

$$= A\cos\omega t\cos\varphi - A\sin\omega t\sin\varphi$$

$$= \underbrace{\boxed{-A\sin\varphi}}_{c_1}\sin\omega t + \underbrace{\boxed{A\cos\varphi}}_{c_2}\cos\omega t$$

POSIZIONI di PARTENZA

$c_1 = -A\sin\varphi$
$c_2 = A\cos\varphi$

$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ $\quad tg\,\varphi = -\frac{c_1}{c_2}$

due costanti arbitrarie

$x(t) = c_1 \sin\omega T + c_2\cos\omega T$
↓
$x(t) = A\cos(\omega T + \varphi)$
↓
descrive il punto iniziale

$\vartheta(t) = \omega(t) + \vartheta_0$ → CONDIZIONE UNIFORME

periodo di un moto armonico

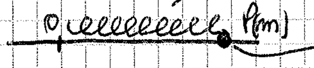
$\vartheta(t) - \vartheta_0 = 2\pi = \omega T$ partito da ϑ_0 ho fatto un GIRO COMPLETO

↳ tempo di un giro completo

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ PERIODO DELL'OSCILLAZIONE

inverso $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ FREQUENZA

SISTEMA MASSA-MOLLA



→ FORZA ELASTICA

→ soggetto ad una molla

lunghezza a riposo nulla

$F = -KX$ FORZA ELASTICA

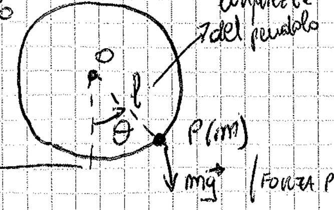
$K>0$ COSTANTE di ELASTICITÀ

→ ha un grado di libertà
unica forza applicata a P(m)

$\vec{F} = m\vec{a}$

$-Kx = m\ddot{x}$ $\quad [m\ddot{x} + Kx = 0]$ esempio di moto ARMONICO SENZA ATTRITI (oscilla in quei punti)

Pendolo



si può semplificare

$\cancel{m}\ddot{\vartheta} + \frac{g}{l}\sin\vartheta = 0$ Eq esatta

$\ddot{\vartheta} + \frac{g}{l}\vartheta = 0$ Eq approssimata purché ϑ sia piccolo.

Posizioni di equilibrio STABILE per un sistema → in una posizione con velocità nulla rimane lì → SISTEMA IN EQUILIBRIO STABILE

se do una pochina velocità → oscilla con oscillazioni con eq. $\left[\ddot{\vartheta} + \frac{g}{l}\vartheta = 0\right]$

→ sostituiamo

$$-c m \Omega^2 \cos \Omega t + c K \cos \Omega t = A \cos \Omega t$$

$$c = \frac{A}{K - m \Omega^2}$$ → ampiezza della sol. particolare da aggiungere alla eq. completa

↓ AMPIEZZA FORZANTE diretta pulsazione forzante che ho imposto

AMPIEZZA MASSA MOLLA ↓ due pulsazioni sono prossime

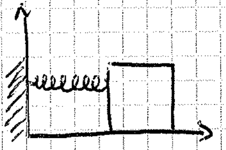
↓

pulsazione $\frac{K}{m}$ della associata

07/03/2013 LEZIONE

MODELLISTICA E FISICA MATEMATICA

Cos'è un modello?



-CAPIAMO

Assunzioni e semplificazioni → Sistema puntiforme

- Il sistema si comporta come un punto MASSA identificato dalla variabile x
- Azione della molla si esplica con una forza del tipo $-KX$ (LEGGE DI HOOK)
- Si trascurano attriti, frizioni e viscosità dell'aria

Si usa la LEGGE DI NEWTON $\boxed{F = m \cdot a}$ $\left[m = \frac{d^2x}{dt^2} = -Kx \right]$

che è un modello descritto da una equazione di evoluzione che è equazione differenziale ordinaria (O.D.E) (ordinary differential equations) del secondo ordine.

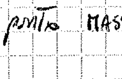
Es Modello di dinamica di popolazione isolata (assumiamo che ci siano dinamiche di base → NATALITÀ MORTALITÀ)

Assumiamo di tenere in conto 2 fattori soltanto (RIDUZIONE DELLA COMPLESSITÀ → complicarsi la vita)

- TASSO DI NATALITÀ N
- TASSO DI MORTALITÀ M

Vogliamo definire una equazione di evoluzione del numero di individui. $p = p(t)$

$$\frac{dp}{dt} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{RATE} \\ \text{di proliferazione e mortalità}}}{N_p} - M_p$$



$$\left[\frac{dp}{dt} = (N - M) p \right]$$ (risolvibile per variabili separabili) →

LEGGE DI MALTHUS si può risolvere per variabili separabili e la soluzione è una $p(t)$ che $\left[p(t) = k e^{(N-M)t} \right]$ → CRESCITA ESPONENZIALE

CLASSIFICAZIONE dei MODELLI

- U è variabile di STATO di cui voglio descrivere l'evoluzione
- x, t eventuali variabili indipendenti

- un modello si dice <u>dinamico</u> se la variabile di stato dipende dal tempo viceversa si dice
- un modello è <u>continuo</u> se la variabile di stato U dipende da x altrimenti è detto <u>finito</u>

VARIABILI DI STATO	TIPOLOGIA	EQ. DI EVOLUZIONE
$U = U_e$	FINITO STATICO	→ eq. di tipo algebrico
$u = u(t)$	FINITO DINAMICO	→ O.D.E. → <u>MECCANICA RAZIONALE</u>
$u = u(x)$	CONTINUA STATICO	→ eq. alle derivate parziali PDE
$u = u(t, x)$	CONTINUO DINAMICO	

MODELLI ALLE DERIVATE ORDINARIE

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{u})$$

modello alle ODE scritto in forma vettoriale

nostra variabile di STATO

TEMPO variabile indipendente

CAMPO VETTORIALE

con varia la variabile di stato → in generale è NON LINEARE

Se $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_N)$

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dt} = f_1(t, u_1, u_2, \ldots u_N) \\ \\ \dfrac{du_N}{dt} = f_N(t, u_1, u_2, \ldots u_N) \end{cases}$$

sistema di N eq alle derivate ordinarie del primo ordine

Un altra classe interessante di modelli è quella descritta da una equazione scalare di ordine elevato

$$\frac{d^N u}{dt^N} = f\left(t, u, \frac{du}{dt}, \ldots, \frac{d^{N-1} u}{dt^{N-1}}\right)$$

↑ eq. di ordine N (massimo grado delle derivate della variabile di STATO)

scritta in forma normale posso scrivere la derivata di ordine massimo.

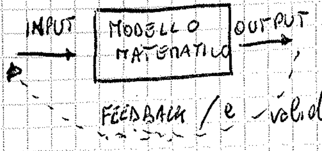
che possono essere anche descritte come un sistema di N equazioni del primo ordine nelle N incognite che io effettuo con un cambio di variabile

$$u_1 = u, \quad u_2 = \frac{du}{dt}, \quad \ldots \quad u_N = \frac{d^{N-1} u}{dt^{N-1}}$$

FORMULAZIONE DEL PROBLEMA MATEMATICO con assegnazione di condizioni iniziali ai limiti per l'applicazione del modello al caso specifico

PROBLEMA al valore iniziale (IVP)

$$\begin{cases} \frac{d\vec{u}}{dt} = f(t,\vec{u}) \\ \vec{u}(t_0) = \vec{u}_0 \end{cases} \rightarrow$$ N condizioni iniziali (Una per ogni variabile di stato)



/ e validazione con dato sperimentale

PROBLEMA al valore iniziale e ai limiti

in cui si assegnano un numero $p < N$ di condizioni iniziali

$$u_i(t_0) = u_0 \qquad i = 1 \dots p$$

e $N - p$ CONDIZIONI AI LIMITI (TEMPO FINALE OSSERVAZIONE) ..

$$u(T) = u_{i_1} \qquad u = p+1, \dots, N$$

- IL PROBLEMA MATEMATICO che è definito associando al modello (eq. di evoluzione) le condizioni iniziali e ai limiti si dice **BEN FORMULATO** se il numero di condizioni (iniziali e ai limiti) è corretto
- IL PROBLEMA è detto **BEN POSTO** se la soluzione esiste ed unica e dipende con continuità dal dato iniziale

TEO ESISTENZA se $\vec{f}(t,\vec{u})$ è continuo in un rettangolo

$$R = \{ (t,\vec{u}) : \| \vec{u} - u_0 \| \leq K \quad |t - t_0| \leq T \}$$

esiste almeno una soluzione del problema al valore iniziale che è di classe C^1 (continua con derivate continue (SOLUZIONE))

per $|t - t_0| < \hat{T}$ con $\hat{T} = \min\{T \frac{K}{M}\}$ con $K = \max_{(t,u) \in R} \| f(t,\vec{u}) \|$

TEO UNICITÀ se in più la funzione soddisfa la condizione di LIPSCHITZ allora la soluzione unica

$$\| \vec{f}(t,\vec{u}) - \vec{f}(t,\vec{v}) \| = \overset{\nearrow \text{ costante di LIPSCHITZ}}{L} \| \vec{u} - \vec{v} \|$$

in pratica si può dimostrare che è legata alla regolarità del campo $\vec{f}$ e in particolare alla continuità e differenziabilità di f

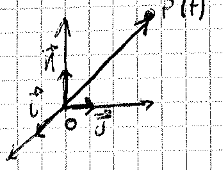
11/03/2013 LEZIONE

CINEMATICA del PUNTO

- **PROBLEMA CINEMATICO**: descrizione in termini matematici del movimento di un generico punto P del sistema

- presuppone la definizione di un sistema di riferimento (SR)
- definire le posizioni occupate dal punto
  - **LEGGE ORARIA** (relazione tra la coordinate del punto e il tempo)
  - **TRAIETTORIA** (luogo geometrico dei punti occupati dal punto materiale nel suo moto) → percorso che si esegue
  - **VELOCITA' e ACCELERAZIONE del PUNTO**

Sistema di riferimenti → 3 versori orto normali $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$



→ DIPENDENZA DAL TEMPO

OP = OP(t) DETTO VETTORE POSIZIONE

$$\left[OP(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{J} + z(t)\vec{k}\right]$$

L'INSIEME DEI PUNTI OCCUPATI DA P È LA TRAIETTORIA O ORBITA DEL PUNTO

- **LA VELOCITA' DI P:**

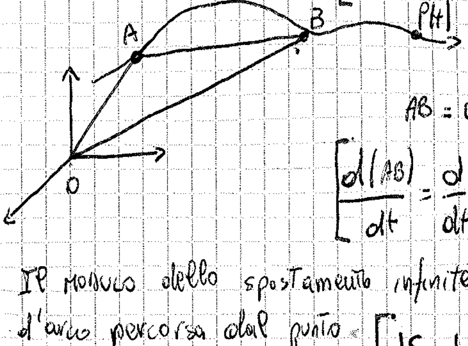
$$\left[V_P(t) \cdot \dot{P}(t) = \frac{dP}{dt} = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}\right]$$

- **ACCELERAZIONE DI P;**

$$\left[a_P(t) \circ \ddot{P}(t) = \frac{d^2P}{dt^2} = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{J} + \ddot{z}(t)\vec{k}\right]$$

Possiamo definire lo **SPOSTAMENTO INFINITESIMO** così:

$$\left[dP = v\,dt = (\ddot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k})\,dt\right]$$



AB = OB - OA

$$\left[\frac{d(AB)}{dt} = \frac{d}{dt}(OB - OA) = \frac{dOB}{dt} - \frac{dOA}{dt} = \vec{V}_B - \vec{V}_A\right]$$

Il modulo dello spostamento infinitesimo (B vicino ad A) si identifica con la lunghezza d'arco percorsa dal punto

$$\left[dS = |dP| = |v(t)|dt = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\right]$$

QUINDI →

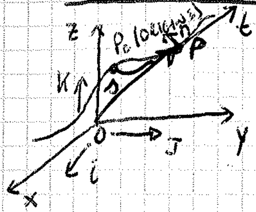
CINEMATICA del CORPO RIGIDO

Per alcuni corpi si può effettuare l'ipotesi di rigidità in cui assumiamo che la distanza tra coppie di punti nel corpo rigido si mantenga inalterata nel tempo.
Come sfruttiamo queste ipotesi per calcolare velocità e accelerazioni del corpo senza doverle calcolare esplicitamente (CINEMATICA DEL PUNTO)

Un corpo rigido si identifica con UN SISTEMA di RIFERIMENTO SOLIDALE
→ i punti del corpo rigido mantengono inalterate le coordinate in questo S.R
→ il moto del corpo è completamente determinato quando si conosce il movimento della terna solidale rispetto a quella fissa. (salta il sistema solidale la rigidità)

ESERCITAZIONE 2 13/03/2013

CINEMATICA del PUNTO → vogliamo descrivere il movimento del punto nello spazio



$\vec{OP} = \vec{OP}(t)$ LEGGE DEL MOTO
↳ secondo t conosco come si muove P

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$ componenti del punto

[VELOCITÀ $\vec{v} = \frac{\boxed{d\vec{P}}}{dt}$ → vettore OP
VETTORE TANGENTE ALLA CURVA]

[ACCELERAZIONE $\vec{a} = \frac{d\vec{P}}{dt^2}$]

componenti

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{K}$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

P_0 ORIGINE ASCISSE CURVILINEE → introduco UN ASCISSA CURVILINEA

TRAIETTORIA $\vec{OP} = \vec{OP}(s)$ → non ci dice come si muove

LEGGE ORARIA → $s = s(t)$

} insieme ci dà una legge del moto.

FORMULE INTRINSECHE velocità e accelerazione

[$\vec{v} = \dot{s}\boxed{\vec{t}}$] → VERSORE t TANGENTE ALLA CURVA

VELOCITÀ

$\vec{t} = \frac{d\vec{P}}{ds}$

$\frac{d\vec{t}}{ds} = c\vec{n}$

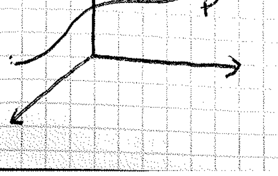
[$\vec{a} = \ddot{s}\vec{t} + \dot{s}^2 c\boxed{\vec{n}}$] accelerazione

$\vec{n}$ normale principale

c ↓ CURVATURA il suo opposto è il RAGGIO DI CURVATURA

dovrebbe essere $\dot{s}\vec{t}$ ma

TERNA DI VERSORI



$\vec{n}$ → definisce il piano osculatore
$\vec{t}$
$\vec{b}$ → [$\frac{d\vec{b}}{ds} = \boxed{\gamma}\vec{n}$]
} terna INTRINSECA

↳ TORSIONE → il non essere piana della curva.

ACCELERAZIONE

DERIVATA COMPOSTA

$$\vec{a} = \begin{cases} \ddot{x} = -R\cos\vartheta\,\dot{\vartheta}^2 - R\sin\ddot{\vartheta} \\ \ddot{y} = -R\sin\vartheta\,\dot{\vartheta}^2 + R\cos\vartheta\,\ddot{\vartheta} \\ z = h\ddot{\vartheta} \end{cases}$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} = -R\dot{\vartheta}^2\vec{\lambda} + R\ddot{\vartheta}\vec{\mu} + h\ddot{\vartheta}\vec{k}$$

Sostituisco $\dot{s}$ e $\ddot{s}$ ascisse curvilinee

$$\vec{a} = -R\frac{\dot{s}^2}{R^2+h^2}\vec{\lambda} + \ddot{s}\underbrace{\boxed{\frac{R\vec{\mu}+h\vec{k}}{\sqrt{R^2+h^2}}}}_{\text{VERSORE TANGENTE } \vec{t}} = \dot{s}^2\left(-\frac{R}{R^2+h^2}\right)\vec{\lambda} + \ddot{s}\vec{t}$$

avevamo detto che l'acc. intrinseca era $\vec{a} = \ddot{s}\vec{t} + \dot{s}^2 c\vec{n}$ sappiamo quindi

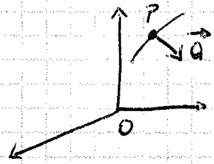
che NORMALE $\left[\vec{n} = -\vec{\lambda}\right]$ → coincide con la curvatura locale ↓ è una **GEODETICA**

CURVATURA $\left[c = \frac{R}{R^2+h^2}\right]$

se $h=0$ diventa una circonferenza (moto circolare uniforme)

Moti uniformemente Vari

$\vec{a} = \vec{a}_0$ (costante) punto mobile nello spazio con accelerazione $\vec{a}$ (costante)



$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$$

$\vec{v} = \vec{a}_0 t + \vec{v}_0$ ↓ costante di integrazione $\qquad \dot{y} = -gt + \dot{y}_0$

POSIZIONE INIZIALE

$$\vec{OP} = \frac{1}{2}\vec{a}_0 t^2 + v_0 t + \vec{OP_0} \qquad y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \dot{y}_0 t \quad \forall t$$

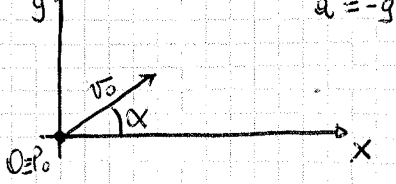
$O \equiv P_0 \qquad \vec{OP} = \frac{1}{2}\vec{a}_0 \vec{t}^2 + v_0 t$ → LEGGE DI MOTO

- Moto piano $(O, \vec{a}_0, \vec{v}_0)$ se sono paralleli tra loro allora sarà RETTILINEO

⇓

Meccanica Terrestre ➡ $\vec{a}_0 = \vec{g}$ ACCELERAZIONE DI GRAVITÀ

prendiamo un riferimento piano



$\vec{a} = -g\vec{j}$ verticale orientata verso il basso, asse verso l'alto

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

escludiamo il moto rettilineo secondo la verticale

$$\begin{cases} x = v_0\cos\alpha\, t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin\alpha\, t \end{cases}$$

LEGGE DI MOTO PROIETTATA SUI DUE ASSI

→ continua

possiamo trovare la quota dopo aver trovato tv

$$y(t_v) = -\frac{1}{8} g t_1^2 + \frac{1}{2} g t_1 \cdot \frac{1}{2} t_1 = \boxed{\frac{1}{8} g t_1^2}$$

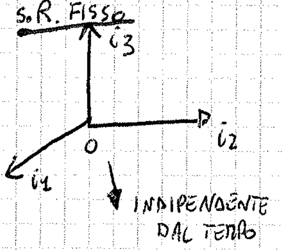
14/03/2013 LEZIONE

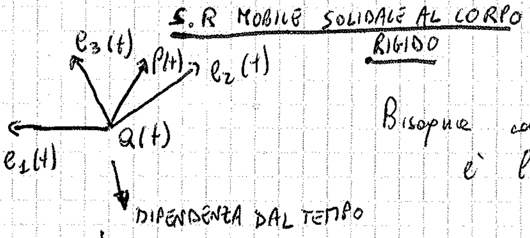
CINEMATICA DEL CORPO RIGIDO

Si sfrutta l'ipotesi di rigidità per calcolare posizione, velocità e accelerazioni del corpo rigido CR senza dover calcolare la cinematica di ogni singolo suo punto.

- SISTEMA DI RIFERIMENTO SOLIDALE → i punti del corpo rigido mantengono inalterate le coordinate di questo sistema di riferimento.

(N.B) La scelta non è biunivoca infatti esistono infiniti sistemi di riferimento solidali.
Il moto del corpo è completamente determinato quando si conosce il movimento della TERNA SOLIDALE rispetto a quello fisso.





Bisogna conoscere l'origine Q(t) e l'orientamento della terna

↓

La configurazione del corpo rigido è NOTA conoscendo la posizione Q(t) e l'orientamento della terna ortonormale solidale $\{e_K(t)\}$

$$\left[QP(t) = \underbrace{y_1}_{} e_1(t) + \underbrace{y_2}_{} e_2(t) + \underbrace{y_3}_{} e_3(t) \right] \quad (1)$$

QUANTITÀ COSTANTI

$$\left[e_K(t) \text{ combinazione lineare dei vettori fissi} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{hK}(t)\, i_h \right] (2)$$ → Versori della terna mobile come combinazione lineare dei versori della terna fisse

↑ 9 COSENI DIRETTORI

↳ Ma queste quantità non sono totalmente arbitrarie infatti il fatto che il sistema di riferimento mobile sia una terna ortonormale e destrorsa introduce 6 condizioni di ortogonalità che fanno sì che sono 3 (coseni direttori) sia quantità indipendenti → $\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 \wedge e_3$

↓

allora otteniamo che $\left[\bar{e}_h(t) = R(t) \vec{i}_h \right]$

↳ MATRICE DI UNA TRASFORMAZIONE È ORTONORMALE SE
$(R^T R = RR^T) = \overset{\text{MATRICE IDENTITÀ}}{I}$ $\det R = 1$

$$\boxed{\text{UN CORPO RIGIDO LIBERO ha 6 GRADI DI LIBERTÀ}}$$

Fino ad adesso abbiamo ragionato sulle coordinate nei S.R rigidi e mobili. Cosa possiamo dire sulle velocità e accelerazioni?

→ Le velocità nel corpo rigido non sono distribuite arbitrariamente ma sono legate dalla LEGGE DI DISTRIBUZIONE DELLE VELOCITÀ DI UN CORPO RIGIDO che mi dice

$$\boxed{V_P(t) = V_Q(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{VELOCITÀ ANGOLARE}}}{\omega(t)} \wedge \overline{QP}} \quad \forall PQ$$

Analogamente si dimostra una relazione che lega accelerazioni di coppie di punti qualsiasi del corpo rigido

- PASSI per ottenere la <u>FORMULA FONDAMENTALE DELLE VELOCITÀ del CORPO RIGIDO</u>

Si può mostrare che valgono le formule di POISSON

$$\boxed{\dot{e}_h = \left(\frac{1}{2} \sum_k e_k \wedge \dot{e}_k \right) \wedge e_h}$$

e che indipendentemente dal sistema di riferimento solidale scelto è definito un vettore

$$\boxed{\overline{\omega} = \frac{1}{2} \sum_k e_k \wedge \dot{e}_k}$$ detto VELOCITÀ ANGOLARE

e

$$\boxed{\dot{e}_h = \omega \wedge e_h}$$ e in generale si può mostrare che un qualunque vettore W solidale al corpo rigido.

$$\boxed{\dot{\overline{W}} = \overline{\omega} \wedge \overline{W}} \quad (4)$$

Dalle formule di POISSON si può ricavare la legge di DISTRIBUZIONE DELLE VELOCITÀ DI UN CORPO RIGIDO per cui una CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE affinché un sistema sia rigido è che

$$\boxed{V_P(t) = V_Q(t) = \omega \wedge QP} \quad \forall Q,P \text{ coppie di punti}$$

dove Q e P generici punti ma solidali al corpo rigido.

↓ questa relazione ci permette di ricavare la velocità di un punto in funzione di quella di un altro punto conoscendo la velocità angolare

DIM

NECESSITÀ

Scegliamo in (4) $W = QP = OP - OQ$ → $\dot{W} = \dot{OP} = \frac{dOP}{dt} = \frac{dOP}{dt} - \frac{dOQ}{dt} = \boxed{V_P - V_Q}$

d'altra parte $\dot{W} = \omega \wedge W$ $\quad \dot{QP} = V_P - V_Q = \omega \wedge QP$

$$\boxed{V_P = V_Q + \omega \wedge QP}$$

applichiamo $\overset{(5D)}{=} \overbrace{(\dot e_2 \cdot e_2)} e_1 - (\dot e_2 \cdot e_1) e_2 + \overbrace{(e_3 \cdot \dot e_3)} e_1 - (e_1 \cdot \dot e_3) e_3$

$$\overset{(5C)}{=} \left[-(\dot e_2 \cdot e_1) e_2 - (e_1 \cdot \dot e_3) e_3 \right] \quad (6)$$

derivata di e_1 è ortogonale a e_1

Come ci aspettavamo ha componenti nelle direzioni $e_2 \cdot e_3$ ⇒ sta nel piano $e_2 e_3$ che è perpendicolare a e_1 coerentemente alla (5C)

$$\dot e_1 = \frac{2\dot e_1}{2} = \frac{1}{2}(\dot e_1 + \dot e_1) \overset{\text{usando la } (6)}{=} \left[\frac{1}{2}\left[\dot e_1 - (\dot e_2 \cdot e_1) e_2 - (e_1 \cdot \dot e_3) e_3\right]\right] (7)$$

Lavoriamo su questi tre termini:

- $\dot e_1 = 1 \cdot \dot e_1 \overset{(5B)}{=} \underbrace{(e_1 \cdot e_1)}_{1} \cdot e_1$

$$\overset{(5D)}{=} (e_1 \wedge \dot e_1) \wedge e_1 + \underset{=0}{\cancel{(e_1 \cdot \dot e_1)}} e_1 \overset{5D}{=} (e_1 \wedge \dot e_1) \wedge e_1$$

- $-(\dot e_2 \cdot e_1) e_2 \overset{5D}{=} (e_2 \wedge \dot e_2) \wedge e_1 - \underset{=0}{\cancel{(e_2 \cdot e_1)}} \dot e_1 \overset{5B}{=} (e_2 \wedge \dot e_2) \wedge e_1$
- $-(e_1 \cdot \dot e_3) e_3 \overset{\text{commutatività prodotto scalare}}{=} -(\dot e_3 \cdot e_1) e_3 = (e_3 \wedge \dot e_3) \wedge e_1 - \underset{=0}{\cancel{(e_3 \cdot e_1)}} \dot e_3 = (e_3 \wedge \dot e_3) e_1$

Sostituendo i 3 termini in (7) ritroviamo la formula di POISSON

Altra via per la dimostrazione della formula FONDAMENTALE

Abbiamo visto per le coordinate

$$P(t) = Q(t) + R(t)\,\tilde p$$

$R = R(t)$ MATRICE DI ROTAZIONE — $\tilde p$ COSTANTE

$\left[QP = R\tilde p\right]$ $\quad RR^{-1} = RR^T = I$ ovvero $R^T = R^{-1}$

DERIVANDOLA

$$V_P(t) = V_Q(t) + \dot R\,\tilde p \qquad \tilde p = R^{-1} QP = R^T QP$$

$$= V_Q(t) + \underbrace{\dot R}\, R^T QP$$

Si può mostrare che $\left[W = \dot R R^T\right]$ è una MATRICE ANTISIMMETRICA (a) ovvero $\left[W = -W^T\right]$

$$= V_Q(t) + W\,QP$$

si può mostrare che ogni matrice antisimmetrica è associato un vettore aggiunto ω tale che $WQP = \omega \wedge QP$ (b) quindi

$$\left[V_P(t) = V_Q(t) + \omega \wedge QP\right]$$ → ottenendo la FORMULA FONDAMENTALE

18/03/2013 LEZIONE

Moti Rigidi

Legge delle Velocità $V_P(t) - V_Q(t) + \overset{\text{VELOCITÀ ANGOLARE}}{\boxed{\omega}} \wedge QP \quad \forall P,Q \in$ corpo rigido

Legge di distribuzione delle accelerazioni

$$a_P(t) - a_Q(t) + \dot{\omega} \wedge QP + \omega \wedge (\omega \wedge QP) \quad \forall P,Q$$

→ se ad un dato istante $t = t^*$ $\omega(t^*) = 0$

$$V_P(t^*) = V_Q(t^*)$$ ATTO DI MOTO TRASLATORIO

in cui tutti i punti hanno la stessa velocità

Ma in generale diverse accelerazioni. (infatti non è detto che $\dot{\omega} = 0$).

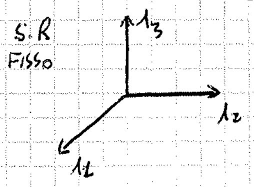
- Se per $t = t^*$ V_Q è nulla $V_P = \omega \wedge QP$ ATTO DI MOTO ROTATORIO attorno ad un asse passante per Q e parallelo alla retta $\omega(t^*)$ detto ASSE ISTANTANEO DI ROTAZIONE

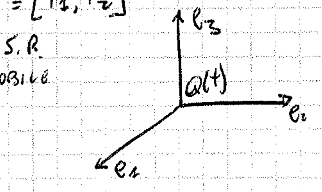
Più precisamente parliamo di caratterizzazione dei moti rigidi → diversi moti possibili in un intervallo di tempo $t = [t_1, T_2]$

- MOTO TRASLATORIO

Se ogni retta solidale al corpo rigido mantiene orientamento invariabile che avviene se e solo se

$$\omega(t) = 0 \quad \forall t = [t_1, t_2]$$





Dim è TRASLATORIO $\Leftrightarrow \omega(t) = 0$

$\overset{\text{TRASL}}{\Rightarrow}$ $\omega(t) = 0$

$$\dot{e}_K = 0 \Rightarrow \omega = \frac{1}{2} \sum_K e_K \wedge \overset{=0}{\dot{e}_K} = 0$$

Viceversa

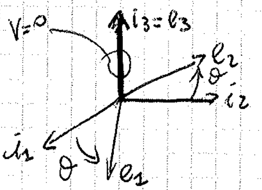
$\Leftarrow$ se $\omega = 0 \Rightarrow \dot{e}_K = \omega \wedge e_K = 0$ ⌋

Quindi la matrice di rotazione che trasforma la terna fissa in solidale è la matrice Identità $R = I$ ed $e_K = i_K$ $\forall t \in [t_1, t_2]$ $\forall K = 1,2,3$

↓

MOTO ROTATORIO

in cui esiste una retta detta asse di rotazione parallela alla direzione privilegiata indicata da ω tale che i suoi punti hanno velocità nulle.

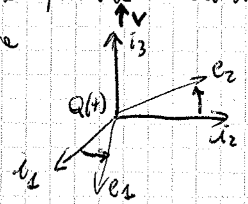


→ Basta un solo parametro ϑ(t) per descrivere il moto rotatorio

$$V_P = \underset{=0}{\cancel{V_Q}} + \dot{\vartheta}_{i_2} \wedge QP$$ se Q appartiene all'asse di rotazione

MOTO ELICOIDALE

Esiste una retta parallela alla direzione privilegiata i cui punti hanno velocità parallele alla stessa retta

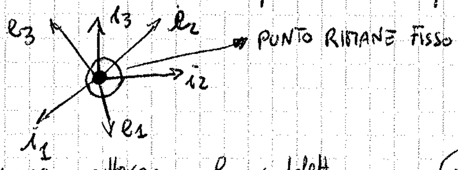


→ Mi bastano due parametri infatti le coordinate X_Q, Y_Q sono costanti e devo conoscere

$$\{z_Q, \vartheta\}$$ conservando i versi assi

MOTO POLARE

Uno dei punti solidali con il corpo rigido rimane fisso



La rotazione avviene attorno al cosiddetto asse istantaneo di rotazione

perché ha direzione variabile nel tempo.

Ho bisogno di 3 parametri (ad esempio i 3 angoli di EULERO per definire il moto POLARE infatti l'origine Q del SR mobile è nota perché supponiamo sia il punto fisso del moto POLARE).

MOTO PIANO

In cui si suppone che il moto del corpo RIGIDO si svolge su un piano detto piano direttore (Π)

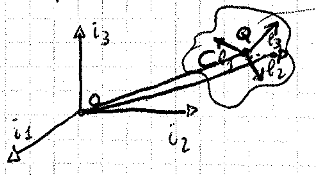
$$\underset{\in \Pi}{V_P} = \underset{\in \Pi}{V_Q} + \underset{\in \Pi}{\boxed{\omega \wedge QP}} \longrightarrow \in \Pi \Rightarrow \omega \perp \Pi \rightarrow$$ VELOCITÀ ANGOLARE È perpendicolare al piano del moto

appartengono al piano del moto

20/03/2013 ESERCITAZIONE 3

CINEMATICA DEI CORPI RIGIDI

$|\vec{QP}| = cost \quad \forall Q, P$ → si trascurano nei fenomeni di moto ciò che non lo rende fisico.



SOLIDALE AL CORPO RIGIDO

modulo costante per tutto il moto e le componenti di Q e P costanti per tutto il moto.

Vettore $\vec{OP} = \vec{OQ} + \vec{QP}$

derivata velocità assoluta nel punto P

$$\vec{v}_P = \vec{v}_Q + \frac{d\vec{QP}}{dt} \rightarrow \frac{dQP}{dt} = \vec{v}_P - \vec{v}_Q$$

FORMULA FONDAMENTALE DI CINEMATICA RIGIDA

$$\forall P, Q \quad \left[\vec{v}_P = \vec{v}_Q + \boxed{\omega} \wedge \vec{QP}\right]$$

↳ VETTORE UNIVERSALE

↳ $\vec{\omega}(t)$ VELOCITA' ANGOLARE

$$\vec{\omega}(t) = \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{3} \dot{\vec{e}}_h \wedge \vec{e}_h$$

↓ versori della terna solidale

↓ variare di questi versori varrano ω

↓ se sono costanti $\omega = 0$ (terna solidale costante

$\boxed{\vec{\omega}(t) = \vec{0}}$ se il moto è traslatorio

(pedale bicicletta fisso quando andiamo avanti -> moto trasl.

Accelerazioni (in generale)

$$\left[\vec{a}_P = \vec{a}_Q + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{QP} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{QP}\right)\right]$$

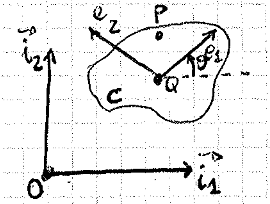
doppio prodotto vettoriale

$$\left[\vec{a}_P = \vec{a}_Q + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{QP} + (\vec{\omega} \cdot \vec{QP})\vec{\omega} - \omega^2 \vec{QP}\right]$$

→ $\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{QP})$ = non è associativo

$(\vec{\omega} \cdot \vec{QP})\,\vec{\omega} - \omega^2 QP$ (c'è nell' appendice sul testo)

Moti rigidi Piani



→ si definiscono piani per tutto il moto le velocità di tutti i punti si mantengono in ogni istante parallele al piano considerato.

→ sezione parallela a queste giaciture fisse e lavorare su quelle.

$[\omega(t) = \dot{\vartheta}]$

ϑ angolo tra una direzione fissa $\vec{i}_1$ e solidale $\vec{e}_1$

→ es la porta → piano è quello perpendicolare ad essa. (PAVIMENTO)

CASO PIANO

$$\begin{cases} \vec{v}_P = \vec{v}_Q + \dot{\vartheta}\vec{i}_3 \wedge QP \\ \vec{a}_P = \vec{a}_Q + \ddot{\vartheta}\vec{k} \wedge \vec{QP} - \dot{\vartheta}^2 \vec{QP} \end{cases} \quad \vec{i}_3 = \vec{k}$$

velocità e accelerazione in un moto rigido piano

$\vec{\omega} \perp \vec{QP}$

in moto rigido piano perpendicolare al piano del moto

$\vec{\omega}(t) = \omega(t)\, i_3$

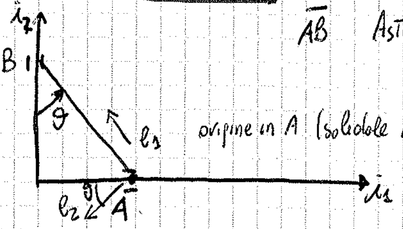
ϑ = angolo tra direzione fissa e direzione solidale.

se asse i_3 lungo le lancette se entrano verso in fuori.

Es 3 ASTA CON DUE GUIDE

$\overline{AB}$ Asta l

si muove su y



origine in A (solidale in A)

$y_B = l\cos\vartheta$

$x_A = l \operatorname{sen}\vartheta \, i_1$ POSIZIONI

$\dot x_A = l\cos\vartheta \, \dot\vartheta \, i_1$ VELOCITÀ

$\ddot x_A = \left(-l \operatorname{sen}\vartheta \, \dot\vartheta^2 + l\cos\vartheta\,\ddot\vartheta\right) i_1$ ACCELERAZIONI

Troviamo posiz., acc, vel usando le formule

COMPONENTI e_2

vettore $\boxed{\vec e_2 = -\cos\vartheta \, i_1 - \sin\vartheta \, \vec i_2}$

$$\vec v_B = \vec v_A + \dot\vartheta i_3 \wedge \overline{AB} = l\cos\vartheta\,\dot\vartheta\, i_1 + l\dot\vartheta \underbrace{\vec e_2}_{(e_1 l)}$$

Quindi sostituendo le componenti

$$= l\cos\vartheta\,\dot\vartheta\, i_1 - l\cos\vartheta\,\dot\vartheta\,\vec i_1 - l\dot\vartheta\sin\vartheta\,\vec i_2 = \boxed{-l\sin\vartheta\,\vec i_2}$$

$$\Downarrow$$

$y_B = l\cos\vartheta$ $\dot y_B = -l\sin\vartheta\,\dot\vartheta$

$$\vec a_B = \left(-l\sin\vartheta\,\dot\vartheta^2 + l\cos\vartheta\,\ddot\vartheta\right)\vec i_1 + \ddot\vartheta\, i_3 \wedge AB - \dot\vartheta^2\vec{AB} =$$

$$= \left(-l\sin\vartheta\,\dot\vartheta^2 + l\cos\vartheta\,\ddot\vartheta\right)\vec i_1 + l\ddot\vartheta\,\vec e_2 - l\dot\vartheta^2 e_1$$

COMPONENTI e_1

$\boxed{\vec e_1 = -\sin\vartheta\, i_1 + \cos\vartheta\,\vec i_2}$

sostituisco e_1

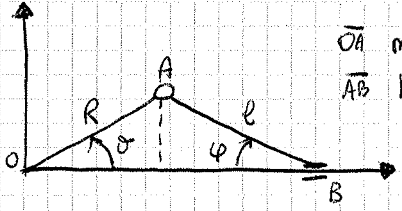
$$= \left(-l\cancel{\sin\vartheta}\,\dot\vartheta^2 + l\cancel{\cos\vartheta}\,\ddot\vartheta\right)\vec i_1 - l\ddot\vartheta\cancel{\cos\vartheta}\,\vec i_1 - l\ddot\vartheta\sin\vartheta\,\vec i_2 + l\cancel{\dot\vartheta^2\sin\vartheta}\,\vec i_1 - l\dot\vartheta^2\cos\vartheta\,\vec i_2 =$$

$$= \boxed{-\left(l\ddot\vartheta\sin\vartheta + l\dot\vartheta^2\cos\vartheta\right)\vec i_2}$$

$\ddot y_B = -l\cos\vartheta\,\dot\vartheta^2 - l\sin\ddot\vartheta$ (ANALITICA)

Es 4 DUE ASTE (CINEMATISMO NOTEVOLE MANOVELLISMO) (BIELLA - MANOVELLA)

$R < l$ (di solito molto minore).



$\overline{OA}$ manovella $\overline{OA} = R$ → è un albero motore appl. pratiche

$\overline{AB}$ biella $\overline{AB} = l$

B piede di biella (B va avanti e indietro quando A si muove)

↓

ANDIRIVIENI

A bottone di manovella

Supponiamo il moto della manovella

($\dot\vartheta$ è costante di solito ma non lo supponiamo)

$\dot\vartheta i_3$ → velocità angolare della manovella

$\dot\varphi i_3$ → velocità angolare della biella

↓

se i_3 verso di noi

→ guardando il triangolo $R\sin\vartheta = l\sin\varphi \Rightarrow \varphi = \arcsin\left(\frac{R}{l}\sin\vartheta\right)$

$$\dot\varphi = \frac{\frac{R}{l}\cos\vartheta\,\dot\vartheta}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{l^2}\sin^2\vartheta}} = \frac{R\cos\vartheta\,\dot\vartheta}{\sqrt{l^2 - R^2\sin^2\vartheta}}$$

qualche caso in cui $\dot\vartheta$ è $= 0$

$\vec v_B = \vec v_A - \dot\varphi i_3 \wedge AB$ se $\dot\varphi = 0$ $v_B = v_A$ tutti i punti della biella

STESSA VELOCITÀ

$\dot\varphi$ e ϑ è $\frac{\pi}{2} = 0$

ATTO DI MOTO DI TIPO TRASLATORIO a $\frac{\pi}{2}$ e $-\frac{\pi}{2}$

$\vec x_B = R\cos\vartheta + l\cos\varphi$

$\dot x_B = -R\sin\vartheta\,\dot\vartheta - l\sin\varphi\,\dot\varphi = -R\sin\vartheta(\dot\vartheta + \dot\varphi)$

$$I = v(P)\cdot\omega = v(Q)\,\omega + \boxed{(\underbrace{\omega \wedge QP}_{\perp\,\omega})\cdot\omega}_{=0} = V(Q) \searrow \text{è invariante}$$

$\Downarrow$

la componente lungo ω della velocità è uguale per tutti i punti

- Se in particolare $\omega = 0 \Rightarrow I = 0$ e $V(P) = V(Q) \Rightarrow$ <u>ATTO DI MOTO RIGIDO TRASLATORIO</u>

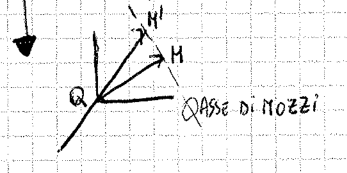
- Se considero un generico ATTO DI MOTO ROTOTRASLATORIO in cui $\omega \neq 0$ si può definire l'<u>asse di Mozzi</u>

$$\left[QM = \frac{\omega \wedge \dot{V}(Q)}{\omega^2} + \lambda\omega \right] \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

che è <u>parallelo</u> alla velocità ω e si può dimostrare che che i suoi punti hanno velocità

$$V(M) = \frac{I\,\omega}{\omega^2} \quad \begin{matrix} \to \text{SCALARE} \\ \to \text{VETTORIALE} \end{matrix}$$

e tali punti hanno velocità di modulo minimo (velocità minore sull'asse).



$$MM' = M' - M = (M' - Q) - (M - Q) = QM' - QM \overset{\to \text{DEFINIZIONE ASSE DI MOZZI}}{=}$$

$$= \cancel{\frac{\omega \wedge V(Q)}{\omega^2}} + \lambda'\omega - \left(\cancel{\frac{\omega \wedge V(Q)}{\omega^2}} + \lambda\omega \right)$$

$$= \left[(\lambda' - \lambda)\,\omega - \hat{\lambda}\omega \right] \Rightarrow \underline{\text{ASSE DI MOZZI}} \text{ è parallelo } /\!/ \text{ al } \omega$$

- Se considero il caso $\omega \neq 0$ e $I = 0$ $\Rightarrow$ ATTO DI MOTO RIGIDO ROTATORIO infatti l'asse di Mozzi ha velocità NULLA $\left(v(M) = \frac{I\omega}{\omega^2} = 0 \right)$ $\uparrow_{I=0}$ e quindi è definito l'asse istantaneo di rotazione con i punti a velocità nulla.

<u>CASO PIANO</u> L'invariante scalare cinematico è nullo infatti:

$$V_P = V_Q + \omega \wedge QP$$

$\nearrow \in \Pi$ $\quad \uparrow \in \Pi$ $\quad \uparrow \in \Pi$ → appartengono a Π piano dove si svolge il moto.

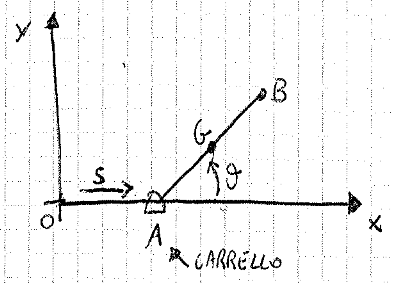
$\Downarrow$

$\omega \wedge QP \in \Pi \rightarrow \omega \perp \Pi$

→ la velocità angolare è normale al piano del moto e dunque $I = \underset{/\!/\Pi}{V} \cdot \underset{\perp \Pi}{\omega} = 0$

- Segue che un sistema di moto rigido piano ha atto di moto o:
  - TRASLATORIO ($\omega = 0$)
  - ROTATORIO ($\omega \neq 0$ e $I = 0$) →

Es) ASTA CON ESTREMO VINCOLATO SU UNA GUIDA FISSA



ASTA AB : l

G PUNTO MEDIO ASTA

Nel caso libero l'asta AB è un corpo rigido nel piano che necessita di 3 parametri indipendenti (2 coordinate x,y dell'origine del S.R solidale e l'angolo di rotazione di rotazione tra il S.R FISSO / MOBILE.

Ora con il vincolo la posizione di un qualunque punto dell'asta è nota una volta noti i 2 parametri $s(t)$, $\theta(t)$

$$OG(s,\theta) = \left(s + \frac{l}{2}\cos\theta\right)\vec{i} + \frac{l}{2}\sin\theta\,\vec{j}$$

Da cui posso calcolare la velocità di G ricordando che $s = s(t)$ $\theta = \theta(t)$

$$V_G = \frac{dG}{dt} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{derivazione} \\ \text{funz. composte}}}{=} \frac{dG}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{dG}{d\theta}\frac{ds}{dt} = \frac{dG}{ds}\dot{s} + \frac{dG}{d\theta}\dot{\theta} = \left(\dot{s} - \frac{l}{2}\sin\dot{\theta}\right)\vec{i} + \frac{l}{2}\cos\theta\dot{\theta}\vec{j}$$

$s\,\theta$ sono parametri indipendenti ed essenziali chiamando $q_1 = s$ $q_2 = \theta$ si ha che la velocità di un generico punto P è

$$V_P = \frac{dP}{\partial q_1}\dot{q}_1 - \frac{dP}{\partial q_2}\dot{q}_2 = \sum_{k=1}^{2}\frac{dP}{dq_k}q_k.$$

- Quando ho dei vincoli parlo di <u>ATTO DI MOTO</u> compatibile con i vincoli nell'istante di tempo considerato (Fotografia del sistema) è detto VIRTUALE.

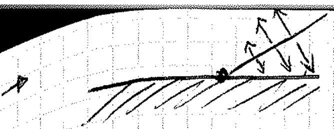
Analogamente si definiscono <u>VELOCITÀ VIRTUALI</u> quelle compatibili con vincoli ad un determinato istante (che non necessariamente corrispondono alle velocità effettive)

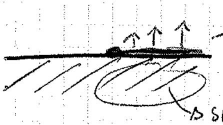
Equivalentemente si possono definire spostamenti virtuali che non necessariamente corrispondono con gli spostamenti effettivi dove dalla relazione della velocità

$$V_P = \sum_k \frac{dP}{dq_k}\dot{q}_k$$

<u>Spostamento virtuale</u>

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{VIRTUALE}}}{\delta} P = \frac{\partial P}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial P}{\partial q_2}\delta q_2 = \sum_k \frac{\partial P}{\partial q_k}\delta \overset{\circ\,?}{q_k} \qquad \left(v = \frac{ds}{dt} \qquad \underset{\substack{\downarrow \\ \text{SPOSTAMENTO EFFETTIVO}}}{ds} = v\,dt\right)$$

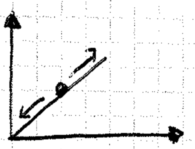




Ma nelle configurazioni di frontiera (VINCOLO UNILATERO).

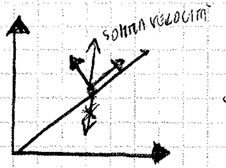
Se invece tutti gli spostamenti virtuali sono <u>reversibili</u> → il vincolo è detto **BILATERO**

N.B Tale definizione può essere fatta considerando spostamenti virtuali e non effettivi infatti se pensiamo ad esempio alla guida rotante.



Spost virtuali (CONGELATO) sono legati alle velocità virtuale tangenti alla guida

↓ REVERSIBILITÀ



Spost. effettivo (con il vincolo mobile) avranno una componente di velocità ⊥ alla guida e concorde con la ROTAZIONE → IRREVERSIBILITÀ (prima ha REVERSIBILITÀ)

CLASSIFICAZIONE

VINCOLI
- BILATERALE → EQUAZIONE (rappresentabile con eq) $x^2+y^2=R^2$ guida CIRCOLARE
- UNILATERALE → DISEQUAZIONE (MARACAS → palline dentro $x^2+y^2+z^2<R^2$; $y\geq 0$ sopra il piano)

VINCOLI
- FISSI
- MOBILI (dipendenza dal tempo esplicita)

VINCOLI
- POSIZIONALI → (non coinvolgono le velocità e limita le posizioni)
- NON POSIZIONALI → (limita le velocità e non le posizioni)

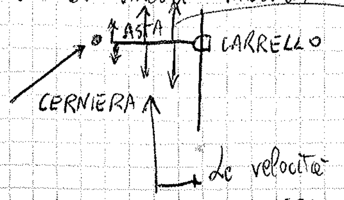
VINCOLI
- SEMPLICI
- DOPPI / TRIPLI...

Quante equazioni per descrivere il vincolo. → il vincolo mi toglie parametri liberi.

↓

quanti gradi di libertà vengono tolti al sistema.

N.B In linea gli spostamenti virtuali sono diversi da quelli effettivi (non solo nel caso di vincoli mobili).



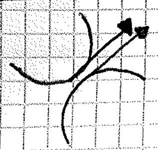
infatti il sistema **NON SI PUÒ MUOVERE**

Le velocità virtuali sono perpendicolari ⊥ all'asta e sono compatibili con i vincoli → non hanno nulla a che vedere con le velocità effettive

- In generale si parla di vincolo di MOBILITÀ → limita gli atti di moto del sistema (come ci spostiamo da una configurazione all'altra) ma con la posizione.

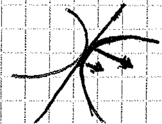
In generale tali VINCOLI non si possono esprimere in forma **OLONOMA**
In alcuni casi tali vincoli sono riconducibili a vincoli di posizione esprimibili in forma **OLONOMA**

VINCOLO DI PURO ROTOLAMENTO (NO STRISCIAMENTO)



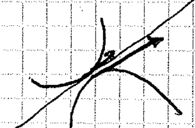
→ le velocità devono avere le stesse velocità → PURO ROTOLAMENTO SE LE VELOCITÀ NEL PUNTO DI CONTATTO SONO COINCIDENTI

Se le velocità hanno una componente perpendicolare al piano tangente comune che è diversa



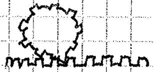
→ HO IL DISTACCO

Se invece ho componenti delle velocità nelle direzioni tangenti che sono

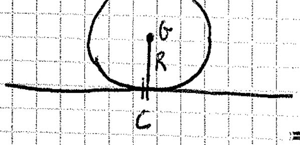


→ HO SPOSTAMENTO

↳ Noi lavoreremo con dischi che rotolano senza STRISCIARE che possono modellare ad esempio RUOTE DENTATE



⇒



Impediamo che la velocità nel punto di contatto siano zero.
E visto che la guida C (es il tavolo) è fermo $V_c = 0$
⇒ ovvero istantaneamente atto di moto ROTATORIO intorno a C detto "CENTRO ISTANTANEO DI ROTAZIONE" (e che ovviamente cambia da istante a istante)
↳ applicando la LEGGE DI DISTRIBUZIONE DELLE VELOCITÀ DEL CORPO RIGIDO

$$\left[V_G = V_C + \omega \wedge CG\right]$$

Si mostra (vedi esercitazione) che tale vincolo impone una restrizione sulle velocità ($V_c = 0$) che equivale a una relazione del tipo:

$$\left[\dot{x} = R\,\dot{\theta}\right]$$

x = coordinata di G (centro del disco)

Tramite integrazione tale relazione è equivalente a: $\left[x = R\theta + \text{cost}\right]$

che quindi è equivalente ad un vincolo OLONOMO (di posizione) che riduce di un unità le coordinate libere

Derivo la velocità RELATIVA → in termini di componenti $\vec{v}_P^{(r)} = \dot{y} e_1 + \dot{y}_2 \vec{e_2} + \dot{y}_3 \vec{e_3}$

$$\vec{a}_P^{(a)} = \ddot{y}_1 \vec{e_1} + \ddot{y}_2 \vec{e_2} + \ddot{y}_3 \vec{e_3} + \vec{\omega} \wedge (\dot{y}_1 \vec{e_1} + \dot{y}_2 \vec{e_2} + \dot{y}_3 \vec{e_3}) + \overset{\text{DERIVANDO LA VELOCITÀ DI TRASCINAMENTO}}{\underline{\vec{a}_Q + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{QP}}} + \vec{\omega} \wedge (\dot{y}_1 \vec{e_1} + \dot{y}_2 \vec{e_2} + \dot{y}_3 \vec{e_3})$$

$$+ \underline{\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{QP})} =$$

↳ ACCELERAZIONE DI TRASCINAMENTO (SCIOGLIENDOLA)

$$\left[\vec{a}_P^{(a)} = \vec{a}_P^{(r)} + 2 \vec{\omega} \wedge \vec{v}^{(r)} + \vec{a}^{(t)} \right]$$ dove il termine $\left[\vec{a}_P^{(t)} = 2 \vec{\omega} \wedge \vec{v}^{(r)} \right]$ è L'ACCELERAZIONE DI CORIOLIS.

Osservazioni: quando $\vec{a}_P^{(a)} = \vec{a}_P^{(r)}$ cioè quando i due sistemi vettoriali indistinguibili

ovvero $\begin{cases} \vec{\omega} = \vec{0} \\ \vec{a}_Q = 0 \end{cases}$ $\quad \vec{a}_P^{(t)} = \vec{a}_Q + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{OP} (\vec{\omega} \cdot \vec{QP}) \vec{\omega} - \omega^2 \vec{QP}$

non basta che il SR. mobile si muova di moto traslatorio → in ogni istante tutti i punti hanno la stessa velocità (punti Q e P) $\left[\vec{v}_Q = \vec{cost} \right]$ ma anche un vettore costante nel tempo.

→ quindi sistemi vettoriali indistinguibili → Moto traslatorio e uniforme

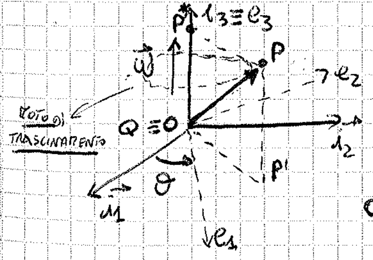
→ questa condizione vale anche per le velocità? **NO!** le velocità differiscono per un vettore costante.

↓

è il vettore velocità di trascinamento

$\vec{v}_P^{(t)} =$ costante (istante per istante)

Moti Rotatori Uniformi (esempio notevole → ruota che gira intorno ad un sistema inerziale).



i_3 Fisso → ROTAZIONE $i_3 \equiv e_3$ (ASSE ROTAZIONE È Z)

$\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{i_3}$

$OP = OP' + OP^*$

P → mobile rispetto a quei due riferimenti

P' → proiezione di P su xy comune entrambi riferimenti.

P* → proiezione di P su asse di rotazione (z).

$v_P^{(t)}$ → velocità di P che avrebbe con il sistema fisso e solidale con la terna mobile

$$\vec{v}_P^{(a)} = \vec{v}_P^{(t)} + \cancel{\vec{v}_Q} + \dot{\theta} \vec{i_3} \wedge \vec{OP} \Rightarrow \vec{v}_P^{(t)} + \underbrace{\dot{\theta} \vec{i_3} \wedge \vec{OP'}}_{\text{moto circolare uniforme}}$$

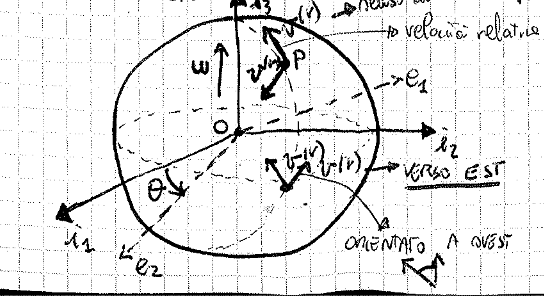
↳ = 0 (ORIGINE)

↑ modulo delle velocità angolare.

$$\vec{a}^{(a)} = \vec{a}_P^{(r)} + 2 \dot{\theta} \vec{i_3} \wedge \vec{v}_P^{(r)} - \dot{\theta}^2 \vec{P^*P}$$ solo CENTRIPETA

$$\text{con } \vec{a}_P^{(t)} = \cancel{\vec{a}_Q} + \dot{\omega} \cancel{\wedge \vec{QP}} + (\vec{\omega} \cdot \vec{OP}) \vec{\omega} - \omega^2 \vec{OP} = \cancel{\dot{\theta}^2 (\vec{i_3} \cdot \vec{OP^*}) \vec{i_3}} - \dot{\theta}^2 (\vec{OP'} + \cancel{OP^*}) = \ddot{\theta} \vec{OP'}$$

↳ = 0 ↳ = 0



tangente superficie della terra

.. da ω a $v^{(r)}$ → sarà una terna a destra

quindi in senso antiorario $2 \vec{\omega} \wedge \vec{v}^{(r)} = \vec{a}^{(c)}$ orientato a ovest

essendo v orientato verso il centro della terra l'$\vec{a}^{(c)}$ è orientato a ovest

Con questi angoli : 3 moti ROTATORI (MOTI COMPOSTI)

$$\boxed{\vec{\omega} = \dot{\varphi}\,\vec{e_3} + \dot{\vartheta}\,\vec{n} + \dot{\varphi}\,\vec{i_3}}$$

→ scelgo una terna e_3 fissa

scelgo poi una terna ruotata attorno ad $\vec{n}$ con e_3 e il corrispondente ⓝ'

04/04/2013 LEZIONE DINAMICA

[PRINCIPI DELLA DINAMICA]

Ci occupiamo (dopo la parte di descrizione della cinematica) di individuare le cause che producono il moto

- [PRINCIPI DI NEWTON] → si postula l'esistenza di un sistema di riferimento (SR) INERZIALE rispetto a cui il moto di un corpo soddisfa le leggi di NEWTON seguenti:
  - La legge di inerzia (o I° principio della meccanica) ogni corpo non sollecitato da alcuna forza permane nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme.

    oppure come preciseremo in seguito sollecitato da un SISTEMA DI FORZE con risultante NULLA.
  - II principio della meccanica (o legge di AZIONE) la forza è uguale alla massa per l'accelerazione $F = m\,a$, forza esercitata sul corpo

$$\underset{\uparrow}{F} = \frac{d}{dt}\underset{\uparrow}{(mv)} = m \cdot a \rightarrow$$

PROPORZIONALITÀ TRA FORZA E ACCELERAZIONE.

FORZA ESERCITATA SUL CORPO

VARIAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

  - Legge di azione e reazione → ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria.

↳ (N.B) ⇒ Stiamo parlando di accelerazioni assolute rispetto a S.R fissi → ricordando la CINEMATICA relativa possiamo considerare S.R in moto traslatorio rettilineo e uniforme. rispetto al sistema di riferimento fisso detti: sistemi di riferimento inerziali o galileiani.

↓

un S.R. solidale con la terra (che a rigore non è inerziale) può essere considerato tale visto che la differenza tra le accelerazioni assolute e quelle relative al sistema di riferimento terrestre sono trascurabili per la maggior parte delle applicazioni tecniche.

- DETERMINISMO MECCANICO

$$\rightarrow a = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

proiettando $F = m \cdot a$ sugli assi coordinati → si ottengono 3 equazioni scalari nelle 3 incognite. $\{x(t), y(t), z(t)\}$. Associando le condizioni iniziali

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \\ y(t) = y_0 \\ z(t_0) = z_0 \end{cases} \rightarrow \text{POSIZIONE INIZIALE} \qquad \begin{cases} \dot{x}(t_0) = v_{x_0} \\ \dot{y}(t_0) = v_{y_0} \\ \dot{z}(t_0) = v_{z_0} \end{cases} \rightarrow \text{VELOCITÀ INIZIALE}$$

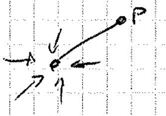
per FORZE SUFFICIENTEMENTE REGOLARI il modello meccanico ammette soluzione unica (PROBLEMA di CAUCHY BEN POSTO).
Non c'è niente di PROBABILISTICO o STOCASTICO, è giusto quello che viene.

il lavoro della molla

$$\left[L = \int_{x_1}^{x_2} F \cdot dx = -\int Kx\, dx = -\frac{K}{2}\left(x_2^2 - x_1^2\right) \right.$$

e in effetti il lavoro nel caso di forze conservative è indipendente dalle traiettorie seguite ma dipende solo dai punti estremi. $\left.\right]$

- FORZE CENTRALI dirette verso un punto fisso e dipendenti dalla distanza $r = OP$



$$\left[F = F(r)\vec{u} \quad \vec{u} = \frac{OP}{|OP|} \right]$$

$$\left[U = \int F(r)\, dr \right]$$

Lo ad esempio caso celebre di FORZE CENTRALI è la forza gravitazionale

$$\left[F = -\gamma \frac{m_P m_o}{\boxed{r^2}} \right]$$

r^2 → FORZA inversamente proporzionale al quadrato della distanza

γ: costante di gravitazione universale

in particolare la FORZA PESO di un punto sulla TERRA si ha scegliendo $r = R$ (RAGGIO TERRA) e m_o è la massa della terra

$$\vec{F} = m\vec{g} \quad \text{con } g = \frac{\gamma m_o}{R^2} = 9.8 \frac{m}{s}$$

$$F = -mg\vec{j}$$

POTENZIALE della FORZA PESO

$$\left[U = -\int mg\, dr = -mg r = -mg z + \text{cost} \right]$$

$\boxed{z = r - R}$ quota sulla TERRA in un S.R con asse z orientato nel verso della verticale ascendente

in generale chiameremo FORZA ATTIVA quella per cui è nota a priori (attraverso una legge fenomenologica) la dipendenza dell'atto di moto (di posizione e velocità del punto di applicazione) ed eventualmente la loro dipendenza esplicita dal tempo.

FORZE VINCOLARI

Se nel caso del corpo libero si ha $F = m \cdot a$ ora nel considerare i vincoli dobbiamo tenere conto che l'accelerazione deve soddisfare le restrizioni imposte dal vincolo

Si postula che il vincolo esplichi la sua azione sul punto in una maniera rappresentabile come una forza.

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F} + \vec{\phi}$$

$\vec{\phi}$: FORZA DELLE REAZIONI VINCOLARI → così il vettore accelerazione soddisfa le restrizioni imposte dal vincolo

In generale per un sistema di punti soggetto ad un sistema di FORZE

$$m_i a_i = \sum_{j \neq i} F_{ij}^{(i)}(P_i, P_j, v_i, v_j) + \sum F_{i,h}^{(e)}(P_i, v_i, t) + \sum \phi_{i,h}$$

$m_i a_i$: i-esimo punto

$F_{ij}^{(i)}$: FORZE INTERNE ESERCITATE TRA COPPIE DI PUNTI INTERNI AL SISTEMA

$F_{i,h}^{(e)}$: FORZE ESTERNE

$\phi_{i,h}$: REAZIONI VINCOLARI

MOMENTO RISULTANTE $\boxed{\vec{M}_0 = \sum_{i=1}^{n} \vec{OP_i} \wedge \vec{v_i}}$

R ed M_0 sono detti VETTORI CARATTERISTICI del sistema di vettori applicato.

Se cambio polo?

Nel caso di un vettore CAMBIO POLO $O \to Q$

$$M_Q = QP \wedge v = (QO + OP) \wedge v = QO \wedge v + \underbrace{OP \wedge v}_{M_0} = QO \wedge v + M_0$$

SOLO PER SCELTE PARTICOLARI di Q (se $QO // v$ ovvero applichiamo il vettore lungo un polo qualsiasi della retta di applicazione) i momenti $M_0 = M_Q$ ovvero COINCIDONO

Nel caso di SISTEMI DI VETTORI

$$M_Q = \sum_i QP_i \wedge v_i = \sum_i QO \wedge v_i + \sum_i OP_i \wedge v_i$$

$$= QO \wedge \underbrace{\sum_i v_i}_{R} + \underbrace{\sum_i OP_i \wedge v_i}_{M_0}$$

$= QO \wedge R + M_0$ ovvero la differenza tra momenti risultanti calcolati rispetto a poli diversi dipende solo attraverso la risultante!

→ il MOMENTO RISULTANTE di un qualsiasi sistema a risultante NULLA (es. coppie) è indipendente dal polo.

↳ IL SISTEMA di VETTORI si dice EQUILIBRATO se ha vettori CARATTERISTICI (RISULTANTE E MOMENTO RISULTANTE) NULLI.

N.B. SE IL SISTEMA È EQUILIBRATO rimane tale per scelte DIVERSE del POLO rispetto a cui si calcola il momento

$$(R = 0 \quad M_0 = 0 \quad \to M_Q = QO \wedge \underset{0}{R} + \underset{0}{M_0} = 0)$$

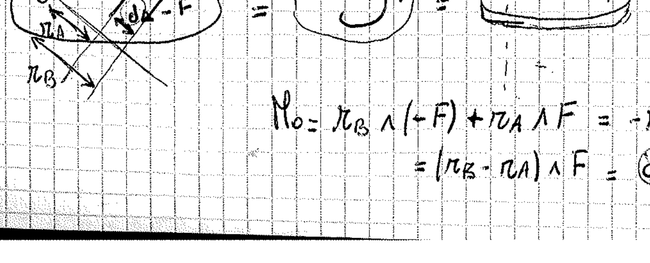
↳ ad esempio il SISTEMA DELLE FORZE INTERNE È EQUILIBRATO

- COPPIA → un sistema di 2 vettori applicati il cui RISULTANTE È NULLO

$$\{(P_+, \vec{v}), (P_-, -\vec{v})\}$$

→ il momento risultante (essendo un sistema a risultante nulla) è indipendente dal polo

↓ in pratica si considerano FORZE UGUALI E OPPOSTE non allineate → la risultante è zero e il loro effetto è quello di tendere a far ruotare il corpo



M è un vettore LIBERO infatti dipende dalle INTENSITÀ e DISTANZE DELLE FORZE APPLICATE ma non DAL POLO O rispetto a cui si calcola

$$M_0 = r_B \wedge (-F) + r_A \wedge F = -r_B \wedge (F) + r_A \wedge (F) =$$

$$= (r_B - r_A) \wedge F = \textcircled{d} \wedge F$$

↳ DISTANZA TRA LE FORZE

Noi lavoreremo con quantità discrete utilizzando la quantità di moto:

ovvero $$m\,OG = \sum_i m_i\,OP_i$$

MASSA TOTALE

DERIVIAMO rispetto al tempo e ricordando che $OG = G - O$

$$\rightarrow m\frac{dOG}{dt} = \sum_i m_i \frac{dOP_i}{dt}$$ (supponendo la massa costante nel tempo)

$$m(v_G - \cancel{v_O}) = \sum_i m_i (v_i - \cancel{v_O})$$

$$m v_G = \sum_i m_i v_i = Q \implies \boxed{Q = m v_G}$$

VELOCITÀ DEL BARICENTRO

ovvero la quantità di moto per un qualsiasi sistema materiale è data dal prodotto tra la massa totale e la velocità del baricentro

↳ DERIVANDO rispetto al tempo $$\left[\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}(m v_G) = m\frac{dv_G}{dt} = m\,a_G\right]$$

accelerazione del baricentro.

d'altra parte $$\left[\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\sum m_i v_i = \sum m_i \frac{dv_i}{dt} = \sum m_i a_i\right]$$

quindi ricordando la (2) abbiamo

$$\left[R^{ext} = R^a + R^v = \frac{dQ}{dt} = m\,a_G\right]$$

• **I^a EQUAZIONE CARDINALE DEL SISTEMA**

che esprime che la derivata della quantità di moto di un qualsiasi sistema è uguale in ogni istante alla risultante delle forze esterne (ATTIVE e VINCOLARI)

Definendo un legame CAUSA/EFFETTO PER IL MOTO TRASLATORIO o equivalentemente (TEOREMA del MOTO DEL BARICENTRO) il BARICENTRO del sistema si muove come se in esso fosse concentrata la massa e in esso fossero applicate tutte le forze esterne (ATTIVE E VINCOLARI)

- La quantità di moto di un sistema non soggetto a forze esterne (ovvero isolato) è costante nel tempo → il BARICENTRO di un sistema isolato si muove di moto rettilineo uniforme e in particolare è in quiete.
- N.b Le forze interne non compaiono esplicitamente nell'equazione cardinale tuttavia giocano un ruolo fondamentale in alcuni casi (es CASO PARACADUTE, es MASSA-MOLLA (LIBRO)).
  Il punto è che la I^a equazione cardinale non permette in generale la determinazione del moto del baricentro. solo in casi particolari (SISTEMI G-determinati), il moto del baricentro è determinato.
- STRADA VERSO la II^a EQ. CARDINALE (tiene conto di effetti ROTATORI)
  Per avere un'idea consideriamo dapprima il caso di particella singola (e dopo a sistemi di particelle).

$$\left[K_A = AP \wedge Q\right]$$ MOMENTO delle QUANTITÀ DI MOTO

Q: $m v$

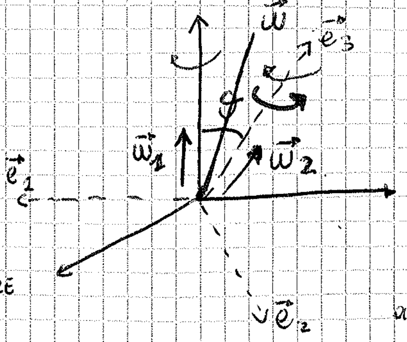
AP: VETTORE posizione di P (punto generico) rispetto al polo arbitrario A.

Continua. ⇒

MOTI DI PRECESSIONE

Moti polari con angolo $\theta = \theta_0 = cost$

$$\vec{\omega} = \dot{\psi}\,\vec{i}_3 + \dot{\varphi}\,\vec{e}_3$$



ϑ = costante

$\vec{i}_3$ asse di precessione

$\vec{e}_3$ asse di figura

↓

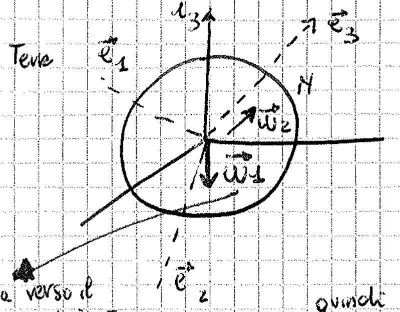
forma un cono intorno all'asse $\vec{i}_3$ e nel cui ϑ è costante (RUOTANDO)

Se $\begin{cases} \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = cost \\ \dot{\psi} = \dot{\psi}_0 = cost \end{cases}$ PRECESSIONE REGOLARE

→ $\vec{\omega}$ è la risultante delle velocità angolare (del parallelogrammo tra ω_1 e ω_2)

PRECESSIONE TERRESTRE

O nel centro della Terra



rivolta verso il basso perché è ORARIA.

$\vec{i}_3$ perpendicolare al piano dell'eclittica

$\vec{e}_3$ asse di ROTAZIONE TERRESTRE

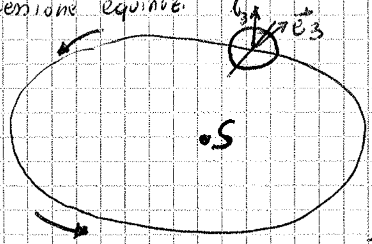
$\vec{i}_3$ ed $\vec{e}_3$ formano un angolo pari a 23° $\widehat{\vec{i}_3\vec{e}_3} = 23° = \vartheta$

quindi $\vec{\omega}_2$ è la ROTAZIONE DIURNA. (24 ore)

$\vec{\omega}_2 = \dot{\varphi}\,\vec{e}_3$

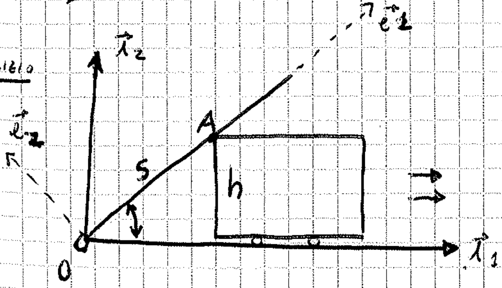
invece $\vec{\omega}_1 = \dot{\psi}\,\vec{i}_3$ ROTAZIONE ORARIA di 26000 ANNI

precessione equinozi



RAGGI SOLARI: perpendicolari agl'assi $\vec{i}_3$ ed $\vec{e}_3$, ogni anno la condizione di perpendicolarità viene raggiunta prima perché $\vec{e}_3$ dopo un anno si inclina un po' (ANTICIPO EQUINOZI)

Esercizio



Sistema meccanico costituito da un rettangolo che trasla sull'asse delle x.

Il punto A vertice del rettangolo

A vertice

$S = \overline{OA}$

$x_A = x$ $\quad \vec{v}_A = \dot{x}\,\vec{i}_1$ $\quad$ O è fisso

$\vec{a}_A = \ddot{x}\,\vec{i}_1$ $\quad \vec{i}_3 = \vec{e}_3$ SISTEMA FISSO

$\vec{v}_A^{(r)} = \dot{s}\,\vec{e}_1$ velocità relativa punto A

$\vec{v}_A^{(t)} = s\,\dot{\vartheta}\,\vec{e}_2$ velocità di trascinamento punto A

$\left[\dot{x}\vec{i} = \dot{s}\vec{e}_1 + s\dot{\vartheta}\vec{e}_2\right]$

punto dell'asta su A l'asta gira solo intorno ad O → VELOCITÀ DI TRASCINAMENTO

quando $\dot{x}$ aumenta ϑ diminuisce se il carrello va verso destra l'asta cade e diminuisce l'angolo

$\vec{a}^{(r)} = \ddot{s}\,\vec{e}_1$

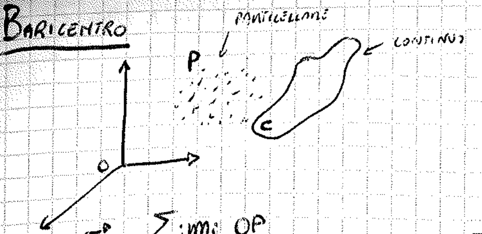
$\vec{a}^{(t)} = s\,\ddot{\vartheta}\,\vec{e}_2 - \boxed{s\dot{\vartheta}^2\vec{e}_1} = \underbrace{\vec{a}_O}_{=0} + \dot{\vec{\omega}} \wedge OA - \omega^2\,\overrightarrow{OA}$ ↗ accelerazione RADIALE

↳ costante essendo OA costante

$\vec{a}^{(c)} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}^{(r)} = 2\dot{s}\dot{\vartheta}\boxed{\vec{i}_3 \wedge \vec{e}_1} =$ ↗ $\vec{e}_2$

CORIOLIS $\left[\ddot{x}\vec{i} = (\ddot{s} - s\dot{\vartheta}^2)\vec{e}_1 + (s\ddot{\vartheta} + 2\dot{s}\dot{\vartheta})\vec{e}_2\right]$

BARICENTRO



PARTICELLARE $\overrightarrow{OG} = \dfrac{\sum_i m_i \, OP}{\sum_i m_i}$ CONTINUO $\overrightarrow{OG} = \dfrac{\int_C \overrightarrow{OP} \rho \, d\tau}{\int_C \rho \, d\tau}$

Non dipende dalle scelta di O

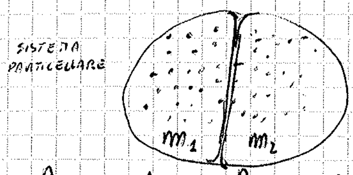
$$m\overrightarrow{O'G'} = \sum_i m_i \overrightarrow{O'P_i}$$

$$\boxed{\overrightarrow{O'P_i} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP_i}}$$

$$m\overrightarrow{O'G'} = \sum_i m_i \overrightarrow{OP_i} = \sum_i m_i \overrightarrow{O'O} + \sum \overrightarrow{OP_i} = m\overrightarrow{O'O} + m\overrightarrow{OG} = \boxed{m\overrightarrow{O'G}}$$

$G \equiv G'$ quindi stesso baricentro.

PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA di G



$$\vec{K} \quad \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OP_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OP_i} + \sum_{i=1}^{n} \vec{m}_i \overrightarrow{OP_i} = \boxed{m_1 \overrightarrow{OG_1} + m_2 \overrightarrow{OG_2} = m\overrightarrow{OG}}$$

$O \in \Pi$

$$m\overrightarrow{OG} = \sum_i m_i \overrightarrow{OP}$$

$$\overrightarrow{OG} \cdot \vec{n} = \delta_G$$
$$\overrightarrow{OP_i} \cdot \vec{n} = \delta_i$$

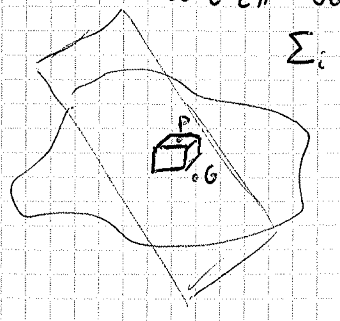
$\Rightarrow$ distanze con segno

$$m\,\delta_G = \sum_i m_i \delta_i$$

Se $G \in \Pi$ $\quad \delta_G = \overrightarrow{OG} \cdot \Pi = 0$

$$\sum_i m_i \delta_i = 0$$

le somme delle masse per le distanze dal piano è uguale a destra a sinistra passante per il baricentro
BARICENTRO = centro di masse.



$$(3)\quad \left[\sum AP_i \wedge m_i a_i = M_A^{EXT} = M_A^{ATT} + M_A^{VINC}\right]$$

MOMENTO RISULTANTE DELLE FORZE ESTERNE RISPETTO AD A

Analogamente a quanto fatto per passare da (1) a (2) cioè (I^a eq. CARDINALE) cerchiamo di caratterizzare queste quantità con grandezze dinamiche proprie dei sistemi materiale considerato

- Definiamo il MOMENTO DELLE QUANTITÀ DI MOTO per sistemi di punti materiali calcolato rispetto al polo arbitrario A

$$\left[\vec{K}_A = \sum_i AP_i \wedge m_i v_i\right]$$

Calcoliamo la derivata temporale di K_A

$$\frac{dK_A}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i AP_i \wedge m_i v_i\right) = \sum_i \underbrace{\frac{dAP_i}{dt}}_{\downarrow} \wedge m_i v_i + \sum_i AP_i \wedge m_i \frac{dv_i}{dt}$$

$$\frac{d(P_i - A)}{dt} \quad v_i - v_A$$

$$= \sum_i \underbrace{v_i \wedge m_i v_i}_{\hookrightarrow = 0} - v_A \wedge \underbrace{\sum_i m_i v_i}_{\hookrightarrow = Q} + \underbrace{\sum_i AP_i \wedge m_i a_i}$$

↳ dalla (3) è uguale M_A^{EX} MOMENTO FORZE ESTERNE CALCOLATE RISPETTO AD A.

$$= - v_A \wedge Q + M_A^{EXT}$$

$$\boxed{M_A^{EXT} \left(= M_A^{AT} + M_A^{VINC}\right) = \frac{dK_A}{dt} \quad v_A \wedge Q}$$

II^a EQUAZIONE CARDINALE DELLA DINAMICA

è valida per qualsiasi sistema materiale e qualsiasi scelta del POLO A.

- Disponendo dell'ARBITRARIETÀ di A possiamo fare coincidere il polo A con il baricentro G oppure esiste con un punto **O** fisso che si mantiene fisso durante il moto.

  - se $A \equiv G$ $\quad v_A = v_G \Rightarrow v_A \wedge Q = v_G \wedge m v_G = 0$
  - se $A \equiv O$ (fisso) $\quad v_A = 0 \Rightarrow v_A \wedge Q = 0$

  ↳ in entrambi i casi si annulla $v_A \wedge Q$

la II eq. cardinale si riduce alla $\boxed{\underset{(M_A^{AT} + M_A^{VINC})}{M_A^{EXT}} = \frac{dK_A}{dt}}$ II^a eq. CARDINALE scelto il POLO A fisso o coincidente con il baricentro G $A \equiv G$

fornisce una relazione di causa/effetto per il moto ROTATORIO

OSS Tale equazione per scelte opportune di A coincide con l'espressione ottenuta per la particella singola (a fine della scorsa lezione). (Analogamente a quanto accade per la I^a eq. CARDINALE) ho che : $$\left[AP_i \wedge (\omega \wedge AP_i) = \sum_k x_{i_k} \cdot e_k \wedge \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ x_{i_1} & x_{i_2} & x_{i_3} \end{vmatrix} \right]$$

k va da 1 a 3

calcolo $$= \sum_k x_{i_k} e_k \wedge \left[(\omega_2 x_{i_3} - \omega_3 x_{i_2}) e_1 + (\omega_3 x_{i_1} - \omega_1 x_{i_2}) e_2 + (\omega_1 x_{i_3} - \omega_2 x_{i_2}) e_3 \right]$$

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ x_{i_1} & x_{i_2} & x_{i_3} \end{vmatrix} \rightarrow = \left[\omega_1 (x_{i_2}^2 - x_{i_3}^2) - \omega_2 x_{i_1} x_{i_2} - \omega_3 x_{1i} x_{i_3} \right] e_1 + \left[-\omega_1 x_{i_2} x_{i_1} + \omega_2 (x_{i_1}^2 + x_{i_3}^2) - \omega_3 x_i x_3 \right] \vec{e}_2$$
$$+ \left[-\omega_1 x_{i_3} x_{i_1} - \vec{\omega}_2 x_{i_3} x_{i_2} + \omega_3 (x_{i_1}^2 + x_{i_2}^2) \right] e_3 =$$

moltiplicando per mi e $\sum_i$:

$$\sum_i m_i AP_i \wedge (\omega \wedge AP_i) = (I_{11} \omega_1 + I_{12} \omega_2 + I_{13}) e_1 + (I_{21} \omega_1 + I_{22} \omega_2 + I_{23} \omega_3) e_2 +$$
$$+ (I_{31} \omega_1 + I_{32} \omega_2 + I_{33} \omega_3) e_3 =$$ noi

dove I_{11}, I_{22}, I_{33} sono i cosiddetti momenti di inerzia del corpo rigido rispetto agli assi X_1, X_2, X_3

$$\left[\begin{aligned} I_{11} &= \sum_i m_i (x_{i_2}^2 + x_{3i}^2) \\ I_{22} &= \sum_i m_i (x_{1i}^2 + x_{3i}^2) \\ I_{33} &= \sum_i m_i (x_{1i}^2 + x_{2i}^2) \end{aligned} \right]$$

e I_{kl} sono detti PRODOTTI DI INERZIA

$$I_{kl} = -\sum_k m_k x_{kh} x_{lh} \qquad k, l = 1, 2, 3 \quad k \neq l$$

Tuttavia questo ci permette, dunque, di dire che sostituendo abbiamo ottenuto l'espressione di $\underset{(b)}{\sum_{i=1}^{n} m_i AP_i \wedge (\vec{\omega} \wedge AP_i)}$ e possiamo riscrivere KA come:

$\rightarrow$ dunque $$\left[K_A \overset{(a)+(b)}{=} m AG \wedge V_A + \underbrace{I_A \omega}_{\rightarrow \sum_{k,l=1}^{3} \vec{I}_{kl} \vec{\omega}_l \vec{e}_k} \right]$$

ed $$\boxed{I_A = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix}}$$

MATRICE di inerzia che caratterizza le proprietà geometriche della distribuzione delle masse del sist. materiale rispetto ad A. $\dot{\omega}$ è, invece, l'accelerazione angolare del corpo rigido

MOMENTO DI INERZIA

- Se io calcolo il momento di un punto rispetto ad un asse
  $[I_a = m r^2]$ dove r è la distanza punto - asse
- Sistema di punti $\left[I_a = \sum_i m_i r_i^2 \right] \rightarrow$ sistema continuo $I_A = \int_B \overset{\text{DENSITÀ MASSA}}{\rho} r^2 \, d\tau \rightarrow dx\,dy\,dz$

Se l'asse fisso è principale d'inerzia:

$$\left[K_A = J_3 \omega_3 \vec{e}_3 \right]$$ → ovvero il momento delle quantità di moto o momento angolare è parallelo al vettore velocità angolare.

Es: Sistema rigido piano con versore $\vec{e}_3 \equiv \vec{k}$ normale al piano del moto

Dalla cinematica rigida ricordiamo che $\omega = \dot{\vartheta} k = \dot{\vartheta} e_3$

$$\rightarrow \left[K_A = J_3 \dot{\vartheta} \vec{e}_3 \right]$$

Oss: Nella derivazione della II^a eq. cardinale avevamo fatto l'ipotesi che il polo A fosse solidale al corpo rigido cosa (?) se ne vogliamo calcolare il momento angolare delle quantità di moto rispetto ad un punto $B \neq A$ non solidale al corpo rigido (es. il punto di contatto del disco)? ↓

utilizziamo la formula di TRASPOSIZIONE DEI MOMENTI ANGOLARI

$$K_B \underset{\uparrow \text{def}}{=} \sum_h BP_h \wedge m_h v_h \underset{\uparrow}{=} \underbrace{\sum_h AP_h \wedge m_h v_h}_{K_A} + \underbrace{BA \wedge \sum_h m_h v_h}_{Q}$$

$BP_A = P_h - B = P_h - A = A - B$

con A solidale

$$\boxed{K_B = K_A + BA \wedge Q}$$

↑ TIENE CONTO DELLA TRASPOSIZIONE DEL MOMENTO.

Oss Il momento angolare rispetto al baricentro del sistema è uguale al momento angolare nel suo moto relativo rispetto al baricentro.

$$\left[K_G = K_G^r \right]$$ Introduciamo sistema di riferimento con origine in G (solidale).

$V^{ASSOLUTA} = V^{RELATIVA} + V^{TRASCINAMENTO}$

$= V^R + V_G$ sistema riferimento solidale nel BARICENTRO

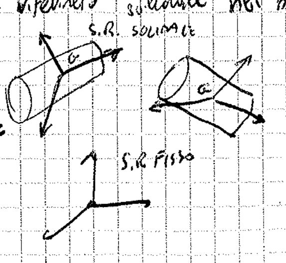
$$K_G \underset{\uparrow \text{def}}{=} \sum_h GP_h \wedge m_h v_h =$$

$$= \sum_h GP_h \wedge m_h (v_G + v_h^r) =$$

$$= \underbrace{\sum_h GP_h \wedge m_h v_h}_{} + \sum_h GP_h + m_h v_h^r = K_G^r$$

↓ dalla def. di BARICENTRO

$$= \sum_h m_h GP_h \wedge v_G = m(G - G) = 0$$



→ il momento delle quantità di moto può essere calcolato (rispetto al baricentro) usando la quantità di moto della i-esima particella assoluta o indipendentemente quella relativa al baricentro → in pratica questa formula è utile se sono note le velocità relative. (rispetto al BARICENTRO)

ESERCITAZIONE 7 17/04/2013

BARICENTRI (o centri di massa)

Sistema particellare

$$\vec{OG} = \frac{\sum_i m_i \vec{OP_i}}{\sum_i m_i}$$

Sistema continuo

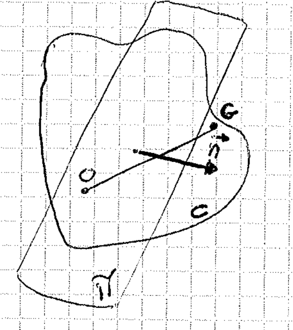
$$\vec{OG} = \frac{\int_c \vec{OP} \rho \, d\tau}{\int_c \rho \, d\tau}$$

ρ densità di massa

$\rho = cost \Rightarrow$ corpo omogeneo

$d\tau \rightarrow dx\,dy\,dz$ caso tridimensionale
$d\tau \rightarrow dx\,dy$ caso piano
$d\tau \rightarrow ds$ (elemento dato) (es un asta)

Dato riferimento $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ $\quad x_G = \frac{\int_c x \rho \, d\tau}{m_{TOT}}$



$O \in \pi$
$\vec{n} \perp \pi$

$$m \underbrace{\vec{OG} \cdot \vec{n}}_{\text{DISTANZA del punto G dal piano}} = \int_c \vec{OP} \cdot \vec{n} \, \rho \, d\pi.$$

$$m \, \delta_G = \int \delta(P) \, \rho \, d\pi$$

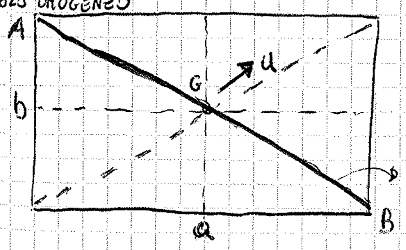
δ_G: DISTANZA CON SEGNO.
$\delta(P)$: DISTANZA CON SEGNO DAL PIANO π

Se $G \in \pi \Rightarrow$ prodotto scalare è 0 quindi: $\left[0 = \int_c \delta(P) \, \rho \, d\pi \right]$

[equilibrio di masse che il piano forma con il baricentro
→ distribuzione masse uguale da una parte all'altra
prodott. di massa x distanze uguale da una parte all'altra]

- Se il sistema è piano $\Rightarrow G \in$ piano
- Se π è un piano di simmetria materiale $\Rightarrow G \in \pi$
- Se π è un piano diametrale coniugato alla direzione $\vec{u} \Rightarrow G \in \pi$
(massa fare la parallele di $\vec{u}$ si trova una massa uguale a $\vec{u}$).

RETTANGOLO OMOGENEO



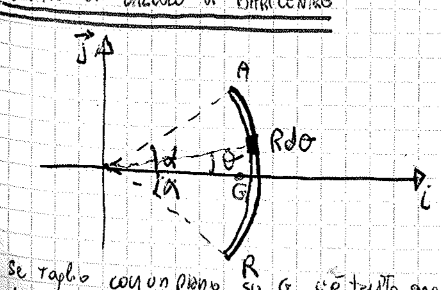
-|- RETTE DI SIMMETRIA

-×- RETTE DIAMETRALI COLLEGATA A $\vec{u}$.

Queste proprietà valgono anche nel caso di una retta

→ c'è un altra $\vec{u}$ opposta

ESEMPIO DI CALCOLO DI BARICENTRO



Se taglio con un piano su G c'è tutta massa tanto a destra quanto a sinistra.

l'asse di x di simmetria materiale, quindi:

$y_G = 0 \quad \rho = cost$

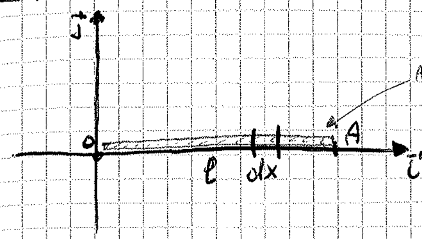
$d\tau = R \, d\theta$

$$x_G = \frac{\int R \cos\theta \, \rho \, d\tau}{\int \rho \, d\tau} = \frac{\rho R^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\theta \, d\theta}{\rho R \int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta}$$

$$= \frac{\rho R^2 [\sin\theta]_{-\alpha}^{\alpha}}{2 \rho R \alpha} = \frac{2 \rho R^2 \sin\alpha}{2 \rho R \alpha} = \frac{R \sin\alpha}{\alpha}$$

[Esempi applicazione Huyghens - Steiner] → IMP.

①



$d\tilde{\tau} = dx$

ASTA ⇒ l → lunghezza

MOMENTO DI INERZIA RISPETTO ASSE y.

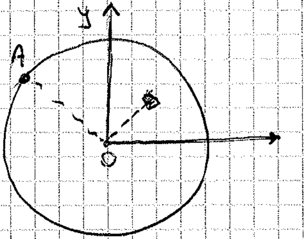
$$I_y = I_z = I_O = \int_0^l x^2 \rho dx = = \frac{l^3}{3}\rho$$

(rispetto ad una retta perpendicolare al piano)

massa totale dell'asta $m = \rho l$ se è così allora $= \frac{m l^2}{3}$

$$I_G = I_O - m\frac{l^2}{4} = \boxed{\frac{m l^2}{12}}$$

②



Disco Omogeneo

coordinate polari $(dr, d\theta)$

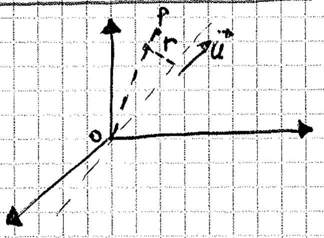
$$d\tilde{\tau} = r dr d\theta$$

$$I_O = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^3 \rho dr = \rho \cancel{2}\pi \frac{R^4}{\cancel{4}^2} = \frac{mR^2}{2}$$

$$m = \rho\pi R^2$$

$$I_A = I_O + mR^2 = \frac{3}{2} m R^2$$

- Momenti d'inerzia per assi concorrenti in O.



$$\vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{u} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$$

$$r = |\vec{OP} \wedge \vec{u}|$$

esprime la distanza perchè è l'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto

$$I_u = \int_C |\vec{OP} \wedge \vec{u}|^2 \rho d\tau \Rightarrow$$

$$[\vec{OP} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

$$= (y\gamma - z\beta)\vec{i} - (x\gamma - z\alpha)\vec{j} + + (x\beta - y\alpha)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \int_C [(y\gamma - z\beta)^2 + (x\gamma - z\alpha)^2 + (x\beta - y\alpha)^2]\rho d\tau$$

$$= \alpha^2\int (y^2+z^2)\rho d\tau + \beta^2\int_C (x^2+z^2)^2\rho d\tau + \gamma^2\int_C (x^2+y^2)\rho d\tau +$$

$$- 2\alpha\beta\int_C xy\rho d\tau - 2\alpha\gamma\int_C xz\rho d\tau - 2\beta\gamma\int_C yz\rho d\tau$$

I DOPPI PRODOTTI SONO INTEGRALI D'INERZIA.

$$= I_x\alpha^2 + I_y\beta^2 + I_z\gamma^2 + 2I_{xy}\alpha\beta + 2I_{xz}\alpha\gamma + 2I_{yz}\beta\gamma$$

$$I_{xy} = -2\int_C xy\rho d\tau \ldots$$

$$= I_O\vec{u}\cdot\vec{u} \Rightarrow I_O\vec{u} = \begin{pmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_y & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

moltiplicando per $\vec{u}$ ritrovo quello fatto sopra.

OSS **RUOLO FONDAMENTALE**

Un sistema equilibrato (con vettori caratteristici nulli) può essere trascurato e sostituito con il nullo. (ES COLLUZIONE dalle finestre)

→ la dinamica del corpo rigido non è influenzata in alcun modo dalle forze interne. Le eq. cardinali hanno tutte le informazioni (necessarie) per determinare la dinamica del corpo rigido, ovvero sono necessarie e sufficienti alla determinazione della dinamica del corpo rigido

- Per un sistema generico non rigido sono necessarie ma non sufficienti. e si devono completare con altre equazioni (es. EQUAZIONI COSTITUTIVE che dipendono dalle FORZE INTERNE)

CASO PARTICOLARE

- Corpo rigido nello spazio → ho 6 GRADI DI LIBERTÀ → 6 coordinate libere o lagrangiane

le 2 equazioni cardinali con 2 equazioni vettoriali $\vec{q}=(q_1, q_2, q_3, ..., q_6)$

ovvero 3+3 = 6 equazioni scalari

$$\text{I}^a \text{ EQ. CARD} \left[R^{ATT} + R^{VINC} = m\, a_G(q, \dot{q}, \ddot{q}) \right]$$

$$\text{II}^a \text{ EQ. CARD} \left[M^{ATT} + M^{VIN} = \frac{dK_A}{dt} = \sum_k I_{A_k} \dot{\omega}(q, \dot{q}, \ddot{q}) + \omega(q, \dot{q}) \quad K_A(q, \dot{q}) \right]$$

$A \equiv G$ OPPURE $A \equiv O$

$\uparrow = I_A \omega(q, \dot{q})$

- Corpo rigido nel piano → ho 3 GRADI DI LIBERTÀ

$$\begin{cases} R_x^{ATT} + R_x^{VINC} = m\, \ddot{x}_G(q, \dot{q}, \ddot{q}) \\ R_y^{ATT} + R_y^{VINC} = m\, \ddot{y}_G(q, \dot{q}, \ddot{q}) \end{cases} \rightarrow \text{I}^a \text{ eq. cardinale} \rightarrow 2 \text{ eq. scalari}$$

La II^a eq. cardinale si riduce ad un equazione scalare nel piano infatti $\vec{\omega} = \dot{\theta} k$ con $\vec{k}$ normale al piano del moto $\rightarrow K_A = I_A \dot{\theta} \vec{k}$

$\omega \wedge K_A = \dot{\theta} \quad i_3 \dot{\theta} k = 0$

$$\left\{ M_{A_z}^{ATT} + M_{A_z}^{VINC} = I_{Az}\, \dot{\omega}(q, \dot{q}, \ddot{q}) \right. \rightarrow \text{II}^a \text{ eq. cardinale si riduce ad una eq. scalare}$$

3 eq. scalari per 3 coordinate libere (incognite) e equivalentemente 3 gradi di libertà

In generale il numero di equazioni scalari è uguale al numero complessivo di incognite del problema dinamico. quindi supponendo di avere n coordinate lagrangiane $q_i(t)$

e $V = \underbrace{6-n}_{3-n}$ incognite che rappresentano i vincoli

NOTA **DINAMICA RELATIVA**

Quanto ottenuto fino ad ora è valido in un sistema di riferimento inerziale, ma in altri casi si deve studiare il moto del sistema rispetto ad un sistema di riferimento non inerziale

Ricordandosi il **TEOREMA di CORIOLIS**

$$\boxed{\underset{\text{ASSOLUTA}}{a^{(a)}} = \underset{\text{RELATIVA}}{a^{(r)}} + \underset{\text{CORIOLIS}}{a^{(c)}} + \underset{\text{TRASCINAMENTO}}{a^{(t)}}}$$

$$F_h + \phi_h = m_h a_h = m_h a_h^{(r)} + m_h a_h^{(c)} + m_h a_h^{(t)}$$

$$F_h + \phi_h - \left[m_h a_h^{(c)} - m_h a_h^{(t)} \right] = m_h a_h^{(r)}$$

SI POSSONO EFFETTUARE I MEDESIMI CONTI DI PRIMA IN AGGIUNTA ALLE FORZE ATTIVE E VINCOLARI DI 2 FORZE APPARENTI CHE SONO LA:

FORZA D'INERZIA di CORIOLIS $\left[F_h^{(c)} = - m_h a_h^{(c)} = -2 m_h \omega^{(t)} \wedge v_h^{(r)} \right]$ VELOCITÀ ANGOLARE SISTEMA NON INERZIALE

FORZA D'INERZIA di TRASCINAMENTO $\left[F_h^{(t)} = - m_h a_h^{(t)} = - m_h a - m_h \left(\dot{\omega}^{(t)} \wedge QP_h + \omega^{(t)} \wedge \left(\omega^{(t)} \wedge QP_h \right) \right) \right]$

accelerazione DELL'ORIGINE DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO NON INERZIALE

- In particolare se il S.R non inerziale **TRASLA** con $a(t) \neq 0$

$\rightarrow \omega^{(t)} = 0 \rightarrow F_h^c = 0$ e $F_h^{(t)} = - m_h a(t)$

↳ pertanto le **risultante delle forze di inerzia di trascinamento**:

$$\boxed{R^{(t)} = \sum_h - m_h a(t) = - m\, a(t)}$$

e il loro **momento**

$$\boxed{M_A^{(t)} = - \sum_h AP_h \wedge m_h a(t) = - \underbrace{\sum_h m_h AP_h}_{\text{baricentro}} \wedge a(t) = \boxed{- m\, AG \wedge a(t)}}$$

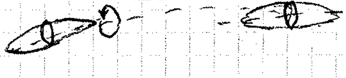
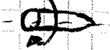
si annulla se $A \equiv G \rightarrow$ in tal caso le forze APPARENTI si riducono al solo vettore $- m\, a(t)$ applicato nel baricentro del sistema (I eq

- Se invece il sistema di riferimento non inerziale ruota con velocità angolare costante ω_0 ruota attorno ad un asse fisso passante per a (origine del sist. rf non inerziale).

$$a_a = 0 \quad \omega^{(t)} = \omega_0 = cost \quad \dot{\omega}^{(t)} = 0$$ → posizione di P_h sull'asse fisso

$$a_h^{(t)} = - \omega^{(t)} \wedge \left(\omega^{(t)} \wedge QP_h \right) = - \omega_0^2 \left(P_h' P_h \right)$$

→ LA FORZA D'INERZIA $F_h^{(t)} = - m_h a_h^{(t)} = m_h \omega_0^2 \left(P_h' P_h \right)$ È IN TAL CASO LA FORZA CENTRIFUGA

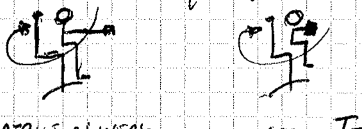
→ Palla da rugby  PROIETTILI  asse rimane lo stesso

BICICLETTA, TROTTOLA ecc....

- Caso Asse Fisso $\left[K_A = I_A \omega = I_3 \dot{\vartheta} e_3\right]$

Lo se K_A si conserva $\Rightarrow I_3 \dot{\vartheta} e_3 =$ costante

es sedia con peso in mano



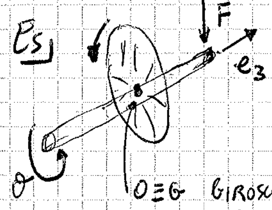
MATRICE DI INERZIA
$\sum m r^2$
(GIRIANO PIÙ LENTAMENTE)

con I_3 diminuisce
⇓
visto che $I_3 \dot{\vartheta} = \text{cost}$ (GIRIANO PIÙ VELOCE)

[PRECESSIONE GIROSCOPICA]

Un giroscopio in rotazione (es. TROTTOLA) sollecitato con una forza risponde e cioè il suo asse si muove non nel piano della forza ma in un piano ortogonale (in una direzione ad esso ortogonale).

Es)



e_3 → asse principale di inerzia.

O ≡ G GIROSCOPIO VINCOLATO NEL BARICENTRO

$\omega = \dot{\vartheta} e_3$
(trascurando le altre velocità di rotazione)

II^a eq. cardinale $\left[M_G^{EXT} = \frac{d}{dt} K_G\right]$ dove il momento angolare $\boxed{K_G = I_G \omega = I_3 \dot{\vartheta} e_3}$

Supponiamo di applicare una forza perpendicolare (⊥) all'asse giroscopico.

$$\left[M_G^{EXT} = \underbrace{PG \wedge F}_{\swarrow} = \frac{d}{dt}\left(I_3 \dot{\vartheta} e_3\right) \overset{\swarrow I_3 \text{ è costante}}{=} I_3 \ddot{\vartheta} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{DIREZIONE ASSE} \\ \text{GIROSCOPICO}}}{e_3} + I_3 \dot{\vartheta} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{È PERPENDICOLARE ALL'ASSE} \\ \text{GIROSCOPICO INFATTI } \frac{dn}{dt} \perp n}}{\frac{de_3}{dt}}\right].$$

PG ha direzione dell'asse di rotazione quindi PG ∧ F è perpendicolare all'asse giroscopico (di rotazione veloce)

Quindi in componenti:

$$\left[\begin{array}{ll} \text{lungo asse giroscopico} \rightarrow & \left\{ I_3 \ddot{\vartheta} = 0 \rightarrow \ddot{\vartheta} = 0 \Rightarrow \dot{\vartheta} = \text{cost} \rightarrow \text{velocità angolare di rotazione} \right. \\ \perp \text{ asse giroscopico} \rightarrow & \left\{ PG \wedge F = I_3 \dot{\vartheta} \frac{de_3}{dt} \rightarrow \text{che è lo spostamento dell'asse giroscopico (variazione di } e_3 \text{ nel tempo)} \right. \end{array}\right]$$

⇙

dalla seconda relazione a parità di momento della forza lo spostamento dell'asse è tanto inferiore quanto maggiore è la velocità di rotazione ↳ [TENACIA DELL'ASSE GIROSCOPICO] ovvero con buona approssimazione il giroscopio tiene invariata la direzione dell'asse giroscopico.

Dall' altra parte la statica, ovvero la ricerca di configurazioni di equilibrio è un caso particolare della dinamica → quindi devono valere le equazioni cardinali ridotte al caso statico.

I^a EQUAZIONE CARDINALE DELLA STATICA $R^{EXT} = \cancel{\frac{dQ}{dt} + m a_G} = 0 \Rightarrow \boxed{R^{EXT} = 0}$

↓ RISULTANTE FORZE ESTERNE ATTIVE E VINCOLARI

II^a EQUAZIONE CARDINALE DELLA STATICA $\boxed{M_A^{EXT} = 0}$

↑ MOMENTO DELLE FORZE RISPETTO AD UN POLO ARBITRARIO A.

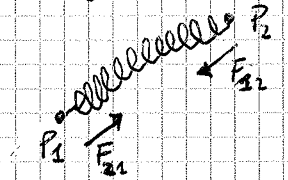
↓

- Le due equazioni cardinali della statica sono equivalenti alla richiesta che il sistema delle forze esterne sia equilibrato.

Di conseguenza visto che il sistema delle forze esterne è equilibrato per il principio di azione - reazione, allora le equazioni cardinali della statica sono equivalenti alla richiesta che il sistema di tutte le forze sia equilibrato.

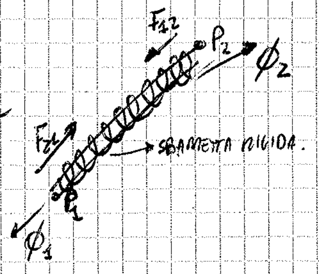
- Per un sistema generico tali equazioni non sono sufficienti per l'equilibrio.

ES)



→ $F_{21} = -F_{12}$ → il sistema di forze è equilibrato (RISULTANTE E MOMENTO RISULTANTE NULLO) ma la molla non è in equilibrio. (infatti non ci garantisce che in ogni suo punto vi siano forze nulle).

Se invece irrigidisco il sistema



→ Le reazioni vincolari ϕ_1 (opposte a F_{21}) e ϕ_2 (opposte a F_{12}) garantiscono l'equilibrio del sistema.

↳ in effetti le equazioni cardinali diventano anche sufficienti se il corpo è rigido.

↓ CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE per l' equilibrio di un corpo rigido è che l'insieme delle forze interne sia equilibrato ovvero valgano le equazioni cardinali della statica.

Ci chiediamo se vi sono VINCOLARI PARTICOLARI (gli IDEALI) per cui possiamo semplificare la trattazione ottenendo equazioni pure (in cui non compaiono le incognite vincolari) a tal fine focalizziamoci su reazioni vincolari e vincoli, e quali modelli fenomenologici possono essere costruiti per la descrizione di vincoli REALI.

⇒

Le soluzioni di equilibrio sono tutte quelle che soddisfano contemporaneamente

$$\begin{cases} f(P)=0 \\ \psi(x,y,z)\leq 0 \end{cases} \quad \text{con } \psi = |F_t| - f_s|F_n|$$

che usualmente sono infiniti

VINCOLO LISCIO supponiamo che il coefficiente di attrito statico sia nullo

$$\boxed{|\phi_t| \leq \underset{\hookrightarrow =0}{f_s} |\phi_n| = 0}$$

→ la componente tangenziale della reazione vincolare è nulla ovvero la reazione vincolare è normale alla superficie.

In questo caso: ↳ $\phi = \lambda \nabla f$

il problema dell'equilibrio si ottiene ottenendo

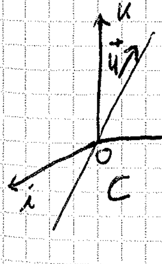
$$\left[\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ F_t(x,y,z)=0 \end{cases}\right] \rightarrow$$

si ha equilibrio se la forza ha una componente tangenziale nulla ovvero è normale alla superficie

Notiamo che la presenza di vincoli lisci elimina le difficoltà introdotte dalle disuguaglianze nel caso con attrito → RIDUCENDO a relazioni che sono uguaglianze più semplici da trattare.

↳ ci sono classi di vincoli dove la trattazione si semplifica

24/04/2013 **ESERCITAZIONE 8**



MOMENTI D'INERZIA PER ASSI CONCORRENTI IN O:

$$I_u = I_O\vec{u} \cdot \vec{u}$$

$$\vec{u} = \alpha i + \beta j + \gamma k$$

$\vec{u}$ generico versore per l'asse passante per O.

α, β, γ = coseni direttori di questa retta

[MATRICE] (TENSORE) D'INERZIA RELATIVA AL PUNTO O

$$I_O = \begin{vmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_y & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_z \end{vmatrix}$$

sulla diagonale momenti d'inerzia di x, y, z e dalle altre parti prodotti d'inerzia

[PRODOTTI D'INERZIA]

$$\left[I_{xy} = -\int_C xy\rho \, d\tilde{\iota}\right] \rightarrow \text{SISTEMA CONTINUO}$$

$$\left[I_{xy} = -\sum_i m_i x_i y_i\right] \rightarrow \text{SISTEMA PARTICELLARE}$$

$$I_O\vec{u} = \begin{pmatrix} & & \\ & I_O & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$* \left[I_u = I_x\alpha^2 + I_y\beta^2 + I_z\gamma^2 + 2I_{xy}\alpha\beta + 2I_{xz}\alpha\gamma + 2I_{yz}\beta\gamma\right]$$

→ **QUADRICA D'INERZIA** $I_y y^2 + I_z z^2 = 1$

$I_y = I_z = \frac{m\ell^2}{3}$ $\Rightarrow \left[y^2 + z^2 = \frac{3}{m\ell^2} \right]$ CILINDRO A CAVALLO DELL'ASSE X. (di asse $\vec{i}$). (UNICO CASO ANOMALO)

MOMENTO DELLE QUANTITÀ DI MOTO RISPETTO A Q.

$$\vec{K}_Q = \Sigma_i \, \vec{QP_i} \wedge m_i \vec{v_i} = \int_C \vec{QP} \wedge \vec{v} \rho \, d\tau$$

Sistema Rigido

$\vec{K}_Q = I_Q \vec{\omega}$ ← VELOCITÀ ANGOLARE se $Q \equiv G$ oppure $\vec{v}_Q = \vec{0}$ (punto fisso)

Corpo Rigido Piano $I_Q = \begin{pmatrix} I_x & I_{xy} & 0 \\ I_{xy} & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}$ asse z PRINCIPALE D'INERZIA

↓

la normale al piano è un asse principale d'inerzia

$\vec{\omega} = \omega \vec{k}$ ← normale al PIANO

$K_Q = I_z \omega \vec{k}$ se $Q \equiv G$ $\vec{v}_Q = 0$

Equazioni Cardinali Dinamica

$$\vec{F}^{(e,a)} + \vec{\phi}^{(e,v)} = m\vec{a}_G$$

N.B. Le forze interne non compaiono per il principio di azione - reazione.

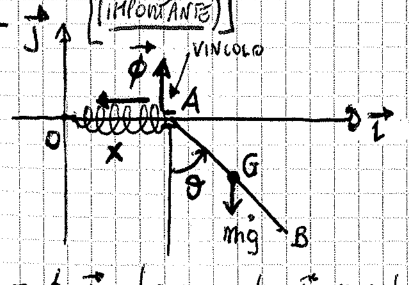
$$Q) \quad \vec{M}_Q^{(e,a)} + \vec{M}_Q^{(e,v)} = \vec{K}_G \quad \text{se } Q \equiv G \quad \vec{v}_Q = \vec{0}$$

Caso Statico

$$\vec{F}^{(e,a)} + \vec{\phi}^{(e,v)} = \vec{0}$$

$$\forall Q \quad \vec{M}_Q^{(e,a)} + M_Q^{(e,a)} = \vec{0}$$

Esercizio [(IMPORTANTE)]



$\bar{AB}$ asta omogenea (m, ℓ)

A si muove sull'asse delle x (VINCOLATO)

$y_A = 0$ Vincolo FISSO BILATERALE, POSIZIONALE E LISCIO (cioè privo d'attrito)

↓ (OLONOMO) ↓ espresso da una equazione

(UNILATERALE → non sottrae coordinate libere / non riduce le coordinate libere modifica il campo)

$\vec{\phi}_A = \phi_A \vec{J}$ (componente $\vec{i}$ essendo liscio è nulla)

→ N=2 ($x_A = x$, θ → coordinate libere)

→(se avessi scelto x_A e x_B a parità x_A corrispondono 2 possibilità non è una scelta ben fatta)

$\phi_A = (x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta})$ → dipende da posizione e velocità $(\dot{x}, \dot{\theta})$ ⟹

EQ. CARDINALE (esercizio)

$$\phi_{cx} = KR = m\ddot{x}_A = 0$$

$$\phi_{cy} = mg - Ky = m\ddot{y}$$

$$A\circlearrowleft \quad H - \phi_{cy}R = \frac{mR^2}{2}\frac{\ddot{y}}{R}$$

29/04/2013 LEZIONE

Oss Per un sistema rigido è sempre possibile sostituire al sistema di forze agenti con un sistema equivalente (con gli stessi vettori caratteristici ris, moment. ris) senza modificare le configurazioni all'equilibrio.
In GENERALE per un sistema generico o per un sistema di più corpi rigidi (Es. Sistema articolato) questo non può essere fatto perché le equazioni cardinali non sono più sufficienti.

Oss • EQUILIBRIO RELATIVO studio delle configurazioni di equilibrio rispetto ad un sistema di riferimento non inerziale
Si effettua lo stesso ragionamento svolto nel caso delle equazioni cardinali rispetto ad un sistema di riferimento non inerziale.

$$F_h + \phi_h + \underset{\text{TRASCINAMENTO}}{F_h^T} + \underset{\text{CORIOLIS}}{F_h^C} = m_h \underset{\text{RELATIVA}}{a_h^R}$$

→ andare a studiare l'equilibrio nel sistema di riferimento non inerziale equivale ad avere

$$\forall t \geq t_0 \qquad v_h^R = 0 \qquad a_h^R = 0$$

Ad esempio nel caso di un sistema di riferimento che trasla con $a(t) \neq 0$ avevamo che

$\omega^t = 0$ (trasla e non ruota)

$F_h^T = -m_h a(t)$ → infatti per definizione di equilibrio $a_h^R = 0$

$$\rightarrow \left[R^A + R^V - \underbrace{m\,a(t)}_{\text{UNICA AGGIUNTA DOVUTA TRASLAZIONE DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE}} = 0\right]$$

→ componente di coriolis è nulla infatti $v_h^R = 0$

ES) VINCOLO DI PURO ROTOLAMENTO
↓
DISCO CHE ROTOLA SENZA STRISCIARE

$\delta L^V = \phi \, \delta C$ (VELOCITÀ PUNTO DI CONTATTO NULLA) VIRTUALE

↳ $\delta C = 0$ ALTRIMENTI SCIVOLEREBBE

Questi esempi ci suggeriscono di introdurre la classe dei vincoli ideali o perfetti tali che il lavoro virtuale delle reazioni vincolari è NON NEGATIVO a partire da qualunque configurazione.

$$\boxed{\delta L^V \geq 0} \quad \forall \delta P$$

in particolare per ogni spostamento virtuale reversibile il lavoro virtuale è uguale

$$\boxed{\delta L^V = 0} \quad \forall \delta P \text{ REVERSIBILE}$$

ovvero per

- VINCOLO IDEALE BILATERALE $\delta L^V = 0$
  ↳ ogni spostamento virtuale è reversibile
- VINCOLI IDEALI UNILATERALI $\delta L^V \geq 0$

In pratica tra i vincoli ideali e bilaterali (che saranno quelli che tratteremo maggiormente) abbiamo:

- vincoli privi di attrito sia fissi che mobili
- vincoli di rigidità
- vincolo o rotolamento senza strisciamento
- vincoli interni in sistemi costituiti da più parti rigide.

Tra i vincoli ideali unilaterali abbiamo: - quelli privi di attrito e unilaterali (ES SUPERFICI)

Per sistemi soggetti a vincoli ideali vale il principio dei lavori virtuali che afferma la condizione necessaria e sufficiente affinché una configurazione C sia di equilibrio per un sistema sottoposto a vincoli ideali è che: $\delta L^A = 0 \quad \forall \delta P, C$

ovvero il lavoro virtuale delle FORZE ATTIVE È NON POSITIVO per ogni spostamento virtuale a partire dalla configurazione C di equilibrio.

In particolare $\delta L^A = 0 \quad \forall \delta P$ REVERSIBILE A PARTIRE DA C.

Infatti: se partiamo dall'equazione fondamentale della dinamica $F_i + \phi_i = m_i a_i$

moltiplichiamo per δP_i e sommiamo $\underbrace{\sum_i F_i \, \delta P_i}_{\delta L^A} + \underbrace{\sum_i \phi_i \, \delta P_i}_{\delta L^V} = \sum m_i a_i \cdot \delta P_i$

δL^A LAVORO VIRTUALE DELLE FORZE ATTIVE

δL^V LAVORO VIRTUALE FORZE VINCOLARI

↳ $= 0$ perché considero il caso statico.

viene
$$\left[\begin{array}{l} \delta L^A + \delta L^V = 0 \\ \delta L^A = -\delta L^V \end{array}\right] \Rightarrow$$

dall'altra parte per definizione di vincolo ideale $\delta L^V \geq 0 \xrightarrow{\text{QUINDI}} \boxed{\delta L^A \leq 0}$ PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

Questa è una relazione pura di equilibrio ovvero una condizione (EQUAZIONE O DISEQUAZIONE) che caratterizza l'equilibrio esprimibile in termini delle sole forze ATTIVE. (in cui non compaiono le reazioni vincolari che come abbiamo visto sono delle incognite).

OSS Le configurazioni di equilibrio possono essere ricavate per **due strade**:

- eq. cardinale in cui compaiono le reazioni vincolari che può essere interessante dal punto di vista applicativo in ingegneristica per valutare le forze a cui sono sottoposte delle strutture in caso statico ma che può essere oneroso in alcuni casi infatti le ϕ sono incognite
- vincoli ideali si può usare il PLV (principio lavori virtuali) caratterizzando l'equilibrio in funzione delle sole forze attive.

MECCANICA RAZIONALE (LIBRO 2). 02/05/2013

Continuazione STATICA:

PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

→ $\delta L^A = 0$ per VINCOLI IDEALI E BILATERALI

($\delta L^A < 0$) per VINCOLI IDEALI E UNILATERALI

Nel caso di sistemi olonomi soggetti a forze conservative si tradurrà nella stazionarietà (principio) del potenziale (lo useremo per calcolare i problemi).

- LAVORO DI UN SISTEMA DI FORZE

F_i applicate a punti P_i $\quad i = 1 \dots n$

$$\delta L = \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot dP$$

↑ SPOSTAMENTO INFINITESIMO

- LAVORO FORZE AGENTI SU UN CORPO RIGIDO (usare legge delle velocità)

$$\underset{\downarrow}{V_P} = \underset{\downarrow}{V_Q} + \omega \wedge QP$$

$$\frac{dP}{dt} \quad \frac{dQ}{dt}$$

→ moltiplico per dt → $dP_i = dQ + \underbrace{\omega dt}_{\text{ROTAZIONE INFINITESIMA} = \varepsilon} \wedge QP$ (vettore di rotazione infinitesima)

Quindi

$$dL = \sum_{i=1}^{n} F_i \left(dQ + \varepsilon \wedge QP_i\right) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} F_i \cdot dQ}_{R \text{ VETTORE RISULTANTE}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \left(\varepsilon \wedge QP_i\right)}_{\text{PERMUTAZIONE FATTORI PRODOTTO MISTO}}$$

$$\Big(\underbrace{\sum_i QP_i \wedge F_i}_{\text{MOMENTO RISULTANTE RISPETTO A } Q}\Big) \cdot \varepsilon$$

$$dL = R \cdot dQ + M_Q \cdot \varepsilon$$

→ il LAVORO DI UN SISTEMA DI FORZE agente su un corpo rigido dipende esclusivamente dai vettori caratteristici del sistema stesso.

- LAVORO DELLE FORZE AGENTI SU UN SISTEMA OLONOMO

[UN SISTEMA OLONOMO E' UN SISTEMA DI n PUNTI SOTTOPOSTO A VINCOLI OLONOMI.]

↓

PER CUI IL PUNTO i-ESIMO P_i SI ESPRIME IN FUNZIONE DELLE COORDINATE GENERALIZZATE (LAGRANGIANE)

$[q_1, q_2, \dots, q_N]$ E DEL TEMPO

dove L'INSIEME (q_1, q_N) È DETTO SPAZIO DELLE CONFIGURAZIONI

E N SONO I GRADI DI LIBERTÀ DEL SISTEMA CHE COINCIDE CON IL NUMERO DI COORDINATE LIBERE (COORD. LAGRANGIANE)

Quindi ho $P_i = 1 \dots ⓝ$ punti

e Ⓝ coordinate libere $q_1 \dots q_N$

$$\delta L = \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \delta P_i$$

↑ SPOSTAMENTO VIRTUALE

LAVORO VIRTUALE

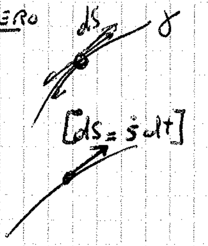
$$P_i = P_i(q_1, q_2 \dots q_N, t) \quad i = 1 \dots n$$

Ma $\delta P_i = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \delta q_h$

LA POSIZIONE P_i E' ESPRIMIBILE ATTRAVERSO LE N COORDINATE LAGRANGIANE

↓

Ricordiamo che se il vincolo è fisso allora uno degli infiniti spostamenti virtuali del sistema coincide con lo spostamento effettivo dP, che è quello per cui δS è scelto tale che $[\delta S = \dot{s}\, dt]$ → OVVERO



(tra tutti gli spostamenti VIRTUALI (ARBITRARI) delle palline TANGENTI alla curva scelgo quello che soddisfa la legge ORARIA

$$\dot{s} = \frac{dS}{dt}$$

ottenendo lo spostamento effettivo

↓

IN GENERALE

- Se tutti i vincoli sono fissi l'insieme dei lavori virtuali che è definito da una scelta arbitraria di incrementi (δq_i) delle coordinate lagrangiane contiene il lavoro effettivo che si ottiene scegliendo come incremento di δq_i quelli tali che soddisfano le leggi del moto

$$\delta q_i = \dot{q}_i\, dt$$

ovvero che soddisfano le leggi orarie

- Se invece anche solo uno dei vincoli è mobile allora nessuno spostamento virtuale coinciderà con uno effettivo e quindi nessun elemento dell'insieme dei lavori virtuali coincide con il lavoro effettivo.

Oss Se il vincolo è liscio la forza, per definizione, di attrito (COMPONENTE TANGENZIALE DELLA FORZA) è NULLA

→ FORZA ⊥ ALLA CURVA

→ la REAZIONE VINCOLARE è ORTOGONALE ALLA CURVA E QUINDI è ANCHE ORTOGONALE ALLO SPOSTAMENTO VIRTUALE CHE UN "MODO" "CONTORTO" PER DIRE ORTOGONALE ALLE DIREZIONI DI MOVIMENTO LASCIATE LIBERE DAL VINCOLO (CHE SONO TANGENTI ALLA CURVA.)

Quindi:

IN GENERALE $\left[\delta L = \sum_i F_i \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ORTOGONALI}}}{\cdot} \delta P_i = 0\right]$ OVVERO IL LAVORO VIRTUALE DELLE FORZE ATTIVE PER UN SISTEMA DI PUNTI SOTTOPOSTO A VINCOLI LISCI BILATERALI è NULLO (CHE è IL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI).

(es. BOTTIGLIA CON STUZZICADENTE E 2 FORCHETTE)

- <u>EFFETTUANDO DELLE IPOTESI SULLE FORZE AGENTI SUL SISTEMA</u> → <u>SUPPONIAMO che le FORZE SIANO</u> <u>CONSERVATIVE</u>

$$[F = \nabla U]$$

$$\Rightarrow dL = dU \quad \text{ed EQUIVALENTEMENTE} \quad \delta L = \delta U$$

POTENZIALE dipende dalle coord lagrangiane $U = U(q_1, q_2, \dots q_N)$ $\qquad \delta U = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial q_i}\delta q_i$

RICORDANDO CHE

$$\rightarrow \delta L = \sum_{i=1}^{N} Q_i\, \delta q_i = \delta U = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial q_i}\delta q_i$$

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad i = 1, \dots, N$$

(infatti: δq_i sono arbitrari → posso sceglierli in maniera che siano tutti nulli eccetto uno corrispondente a $\hat{i}$ $\begin{cases} \delta q_i = 0 \\ \delta q_{\hat{i}} \neq 0 \end{cases}$ $\forall i \neq \hat{i}$

In particolare se consideriamo sistemi olonomi soggetti solo alla **FORZA PESO** come forze attive,

Il potenziale si può scrivere: $\boxed{U = -mg\, z(G)}$

MASSA TOTALE DEL SISTEMA — QUOTA DEL BARICENTRO

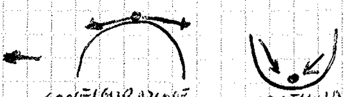
Il P.L.V $\delta L = \delta U = -mg\, \delta z(G) < 0$ → riverifica la validità del TEOREMA DI TORRICELLI che afferma che le posizioni di equilibrio sono tali che il rapporto del baricentro risulta stazionaria (MASSIMA O MINIMA)

Quale **STABILITÀ** delle configurazioni di equilibrio (es. PALLINA IN CIMA ALLA MONTAGNA)

(es. PALLINA NEL BURRONE)

⇓

La **stabilità** si può studiare o in **DINAMICA** (es. la pallina finisce nell'equilibrio dinamicamente) o in senso **STATICO O ENERGETICO** (come vedremo).



CONFIGURAZIONE INSTABILE
PER PICCOLE PERTURBAZIONI DALLA CONFIGURAZIONE DI EQUILIBRIO MI ALLONTANO DA ESSO (CONF. EQ.)

CONFIGURAZIONE STABILE
PERCHÈ IL PUNTO TENDE A TORNARE NELLA CONFIGURAZIONE DI EQUILIBRIO SE PERTURBO DI POCO IL SISTEMA.

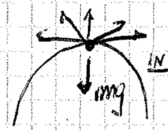
Il concetto è che lavoro positivo è sinonimo della capacità di una forza a far compiere uno spostamento. (ES GATTO-FINESTRA
• LAVORO POSITIVO → FORZA PESO HA DIREZIONE CONCORDE ALLO SPOSTAMENTO (DALLA FINESTRA AL PAVIMENTO)

• INVECE LAVORO NEGATIVO SE HANNO DIREZIONE OPPOSTA (GATTO LIEVITA)

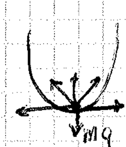
⟹ Quindi avrò equilibrio stabile se la forza attiva compie un lavoro negativo per spostare il corpo da quella posizione.

→ Quale lavoro considerare? EFFETTIVO O VIRTUALE?

VIRTUALE



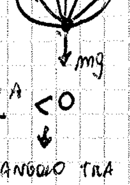
$\delta L^A \le 0$



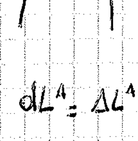
$\delta L^A \le 0$

COERENTE CON:
Il P.L.V
⇓
quindi non distinguo le 2 configurazioni di equilibrio considerando il lavoro virtuale

EFFETTIVO
no tangenti



$dL^A = \Delta L^A < 0$
↓
ANGOLO TRA SPOST. EFFETTIVO E FORZA PESO È OTTUSO



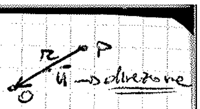
$dL^A = \Delta L^A \lesseqgtr 0$
↓
ANGOLO TRA SPOSTAMENTO EFFETTIVO E FORZA PESO È ACUTO/OTTUSO/90°

→ Una configurazione di equilibrio q^* è stabile se il lavoro effettivo delle forze attive per portare il sistema da q^* a $\bar{q}$ è strettamente negativo (come intuito parlando del gatto)

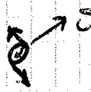
$$\Delta L^A_{q^* \to \bar{q}} < 0 \quad \text{con } \bar{q} \in I(q^*, \varepsilon) \setminus q^*$$

punto in un intorno di q^* di raggio ε piccolo.

- **FORZE CENTRALI** (es. GRAVITAZIONALE o COULOMBIANO) $\left[\begin{matrix} \bar{F} = F(r)\,\bar{u} \\ U = \int F(\rho)\,d\rho + cost \end{matrix}\right]$



- **COPPIA DI FORZE** (ad esempio generata da CERNIERA CON ATTRITO con risultante nulla ma movimento meccanico diverso da zero.



$$\left[dL = -M\,d\vartheta\right]$$

→ Potenziale lo ottengo integrando $\left[L = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} M\,d\vartheta = U\right]$

- **FORZE CENTRIFUGHE** (che compaiono nei problemi di dinamica relativa)

- **L'ENERGIA POTENZIALE** (FISICA I) è definita $V = -U$ → ad esempio il lavoro compiuto per deformare la molla costituisce la sua energia potenziale elastica che viene restituita quando la molla ritorna nella configurazione di equilibrio cioè che è riconvertibile in lavoro quando la molla torna nella configurazione indeformata

ENERGIA CINETICA → Sistema discreto di n punti materiali $\left[T = \frac{1}{2} \sum_{i=1} m_i v_i^2\right]$

QUANTITÀ SCALARE

Sistema continuo $\left[T = \int_{\beta} \rho\, v^2\, d\tau\right]$

CORPO

DENSITÀ DI MASSA

ELEMENTO DI VOLUME

1D $d\tau = dx$

2D $d\tau = dx\,dy$

3D $d\tau = dx\,dy\,dz$.

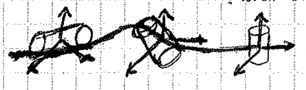
TEOREMA DI DECOMPOSIZIONE DELL'ENERGIA CINETICA (TEO DI KOENIG)

Afferma che: $\left[T = \frac{1}{2} m v_G^2 + T^{(G)}\right]$

ENERGIA CINETICA DEL BARICENTRO IN CUI È CONDENSATA TUTTA LA MASSA

ENERGIA CINETICA DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO, DEL MOTO RELATIVO AL BARICENTRO

↓ OVVERO UN SISTEMA DI RIFERIMENTO CON ASSI CON DIREZIONE COSTANTE E ORIGINE NEL BARICENTRO.



Infatti il teorema di GALILEO (CINEMATICA RELATIVA) afferma che la velocità assoluta è:

$$\left[v_i^A = v_i^T + v_i^R\right]$$

VEL. ASSOLUTA

VEL. TRASCINAMENTO

VEL. RELATIVA.

quindi l'energia cinetica diventa:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i (v_i^A)^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (v_i^T + v_i^R) \cdot (v_i^T + v_i^R) \overset{V^T = V_G}{=}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i m_i v_G^2 + \boxed{\frac{1}{2} \sum_i m_i \cancel{\left(v_G\, v_i^R + v_i^R \cdot v_G\right)}} + \frac{1}{2} \sum_i m_i (v_i^R)^2$$

$L = 0$

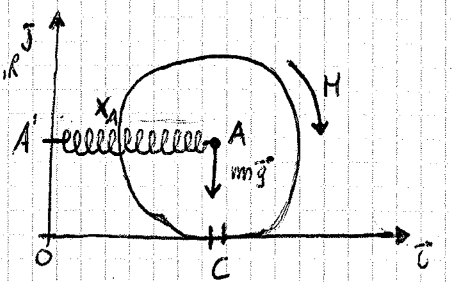
$$= \sum m_i \left(v_G - v_i^R\right) = \sum_i m_i v_i^R \cdot v_G = \left(v_i^R = v_i^A - v^T \overset{V_T = V_G}{=} v_i^A - v_G\right)$$

$$= \sum_i \boxed{m_i v_i^A}\, v_G - \sum_i m_i v_G \cdot v_G$$

Corpo rigido con vincoli ideali → in questo caso le eq sono sufficienti.

ESERCIZIO

DISCO m,R
↓
RUOTA SENZA STRISCIARE



Al centro del disco c'è una forza elastica

$\vec{F}^{el} = -k\vec{A'A}$, $\vec{H}$ coppia oraria

→ la K è orientata verso l'interno del foglio perché è oraria.

Eq. CARDINALI (VINCOLI IDEALI → puro rotolamento, spostamento virtuale è uguale a zero

→ determinazione incognite: x_A, ϕ_{cx}, ϕ_{cy}

REAZIONI VINCOLARI TANGENZIALE E PERPENDICOLARE

⇒ la molla ha lunghezza a riposo nulla
K è positiva (COSTANTE DI ELASTICITÀ)
↓
da un momento positivo (DISCO GIRA IN SENSO ANTIORARIO LA RUOTA)

$$-K\vec{A'A} + m\vec{g} + \vec{\phi}_c = \vec{0}$$

se possiamo scegliamo un polo che ci butta via le reazioni vincolari (ϕ così non mi da problemi) ottengo EQUAZIONI PURE

POLO C) $\vec{M} + \vec{CA} \wedge (-K\vec{A'A}) = \vec{0}$

$\cdot \vec{i}$) $-Kx + \phi_{cx} = 0$

$\cdot \vec{j}$) $-mg + \phi_{cy} = 0$

$$\vec{CA} \wedge (-K\vec{A'A}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & R & 0 \\ -Kx & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$\cdot \vec{K}$) $-M + KRx = 0$

$$\phi_{cx} = Kx^{(e)} = \frac{M}{R}$$

$$\phi_{cy} = mg$$

$$x^{(e)} = \frac{M}{KR}$$

→ cercare i massimi → potenziale sapendo che il gradiente è uguale alla forza

POTENZIALE TOTALE

$$\left[U(x) = -mgR - \frac{K}{2}x^2 + \frac{M}{R}x + c\right]$$

(definito per un arbitraria costante)

$$U(x) = -\frac{K}{2}x^2 + \frac{M}{R}x + cost$$

GRADIENTE di x derivando è la componente della forza → DERIVATA $-\frac{K}{2}x^2 = \boxed{-kx}$

MASSIMI $\frac{dU}{dx} = -Kx + \frac{M}{R}$

Potenziale coppia $\vec{M}$

$dU = dL$

Sistemi di vettori applicati

$$\left[dU = dL = \vec{R}\cdot d\Omega + \vec{M}_\Omega \cdot \vec{\omega}\,dt = \right.$$ ↓ corpo rigido.

LAVORO ELEMENTARE di un sistema di vettori applicati

1° pezzo = 0 quindi ⇒ $M \cdot \vec{\omega}\,dt$

Nel piano $= Md\theta$ se $\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{K}$

Determino ω del disco: $\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{K} = -\frac{\dot{x}}{R}\vec{K}$

vettore perpendicolare al piano

$$\vec{v}_A = \vec{v}_c + \vec{\omega} \wedge \vec{CA}$$

$\vec{v}_c = \vec{0}$ ↓ PURO ROTOLAMENTO SU GUIDA FISSA

$\vec{\omega} \wedge \vec{CA} = -R\omega\vec{i}$

$$\dot{x}\vec{i} = -R\omega\vec{i}$$

↳ ESPLICITIAMO AVENDO TROVATO ω

$$= \ominus M\vec{K} \cdot \left(-\frac{\dot{x}}{R}\right)\vec{K}\,dt$$

ORARIA $dU = \frac{M}{R}\dot{x}\,dt = \boxed{\frac{M}{R}dx}$

→ PUNTI DI STAZIONARIETÀ:
$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = F - kx & = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \vartheta} = -FR\sin\vartheta & = 0 \end{cases}$$

discutere se sono dei massimi (fare derivate seconde):

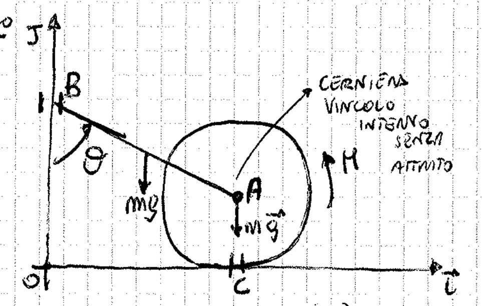
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -k \; ; \; \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \vartheta} = 0 \; ; \; \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} = -FR\cos\vartheta$$

$$H(x,\vartheta) = +KRF\cos\vartheta$$ per massimi hessiano sia positivo

$\rightarrow H(P_1) > 0 \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} < 0$ MAX STABILE ($\cos\vartheta = 1$ perché $\cos 0 = 1$)

$\rightarrow H(P_2) < 0$ Eq. INSTABILE ($\cos\vartheta = 1$ perché $\cos\pi = -1$).

Esercizio



DISCO rotola senza strisciare DISCO mR
sottoposto ad una coppia antioraria
ASTA ha la stessa massa m del disco ASTA m, l
$m^{ASTA} = m^{DISCO} = m$.
Peso da ROTAZIONE ANTIORARIA

Ha un grado di libertà $N = 1$ (ϑ) ⇒ $\vartheta = \vartheta(t)$ → unico per conoscere la posizione del sistema

- $\phi_B = \phi_B \vec{i}$ ↓ SOLO ORIZZONTALE perché LISCIO, si muove in $\vec{j}$ la reazione è perpendicolare
- ϕ_{cx}, ϕ_{cy}

non c'è pareggio tra equazioni ed incognite perché 6 incognite, 6 equazioni ↓ non di più

- $\vec{\phi}_A^{DISCO} = -\phi^{ASTA}$ VINCOLO INTERNO. (uguale ed opposto per principio azione e reazione)

Equazioni GLOBALI (non indipendenti dalle altre 6 equazioni) (lavoriamo sul sistema globale)

$$2m\vec{g} + \vec{\phi}_C + \phi_B = 0 \begin{cases} \cdot\vec{i}) \; \phi_{cx} + \phi_B = 0 \\ \cdot\vec{j}) \; -2mg + \phi_{cy} = 0 \end{cases}$$

$$C\circlearrowright \quad +mg\frac{l}{2}\sin\vartheta + M - \phi_B(R + l\cos\vartheta)$$
C ↓ buttiamo via altre incognite; $\frac{l}{2}$ ↗ BRACCIO

possiamo trovare le reazioni di equilibrio e le reazioni vincolari del sistema

$$A\circlearrowright(\text{asta}) \quad mg\frac{l}{2}\sin\vartheta - \phi_B l\cos\vartheta = 0$$
A ↓ momento rispetto ad A dell'ASTA; $\frac{l}{2}$ ↗ BRACCIO

Le Forze sono conservative con il potenziale trovare pos eq. e stabilità

Per ϕ_A, risultante per l'asta
$$\vec{\phi}_B + \vec{\phi}_A + m\vec{g} = \vec{0}$$ (determinato 6 eq. 6 incognite)

In effetti il medesimo risultato si può ottenere dal TEOREMA DI KOENIG (DECOMPOSIZIONE EN. CINETICA) che afferma:

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m v_G^2 + T^{(G)}}$$

↑ EN. CINETICA NEL MOTO DEL BARICENTRO (ORIGINE SISTEMA DI RIFERIMENTO NEL BARICENTRO)

↓

Nel moto rispetto al baricentro, il baricentro stesso G è un punto fisso ⇒ l'energia cinetica è quella ottenuta nel caso in cui $A \equiv G$ ed è fisso.

$$\boxed{T^{(G)} = \frac{1}{2} I_G \omega \cdot \omega}$$

↳ in pratica in un moto traslatorio in cui $\omega = 0$ l'energia cinetica è:

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2$$

(ANALOGIA ALLA DEFINIZIONE DATA PER PARTICELLA SINGOLA).

In un moto rotatorio rispetto al baricentro fisso o ad un punto fisso

$$T = \frac{1}{2} I_A \omega \cdot \omega = \boxed{\frac{1}{2} I_A \omega^2}$$

↓ si ha una "simmetria"

$m \longrightarrow I_A$

ALLA MASSA COINCIDE MATRICE DI MASSA

$v \longrightarrow \omega$

ALLA VELOCITÀ COINCIDE VELOCITÀ ANGOLARE

↓ "PARTE (COMPONENTE)" TRASLATORIA

↓ "COMPONENTE" ROTATORIA

ENERGIA CINETICA PER UN SISTEMA OLONOMO

Consideriamo N punti materiali e n coordinate LAGRANGIANE ovvero considero un sistema a n gradi di libertà soggetto a vincoli olonomi FISSI o MOBILI.

La velocità di ciascun punto:

$$v_h = \frac{dP_h}{dt} = \sum^{\overset{\text{GRADI DI LIBERTÀ}}{n}} \frac{\partial P_h}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial P_h}{\partial t} \qquad \dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$$

$$P_h = P_h(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

sostituendo nell'energia cinetica

$$T = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{\overset{\text{PARTICELLE}}{N}} m_h v_h^2 = \frac{1}{2} \sum_h m_h \left(\sum_i \frac{\partial P_h}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial P_h}{\partial t} \right) \cdot \left(\sum_j \frac{\partial P_h}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial P_h}{\partial t} \right) =$$

$$\left[q_1 = q_1(t) \quad \dots \quad q_n = q_n(t) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_h m_h \left[\sum_{ij} \frac{\partial P_h}{\partial q_i} \frac{\partial P_h}{\partial q_j} \ddot{q}_i \dot{q}_j + \left(\frac{\partial P_h}{\partial t} \right)^2 + 2 \sum_i \frac{\partial P_h}{\partial q_i} \frac{\partial P_h}{\partial t} \dot{q}_i \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\sum_{ij} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_i b_i \dot{q}_i + c \right] \quad \text{DOVE} \quad a_{ij} = \sum_{h=1}^{N} m_h \frac{\partial P_h}{\partial q_i} \frac{\partial P_h}{\partial q_j}$$

$$b_i = 2 \sum_{h=1}^{N} m_h \frac{\partial P_h}{\partial q_i} \frac{\partial P_h}{\partial t}$$

$$c = \sum_{h=1}^{N} m_h \left(\frac{\partial P_h}{\partial t} \right)^2$$

DOVE $a_{ij} = a_{ij}(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$ sono i coefficienti della cosiddetta MATRICE DI MASSA che è SIMMETRICA (dalla commutatività del prodotto scalare $\frac{\partial P_h}{\partial q_i} = \frac{\partial P_h}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial P_h}{\partial q_j} = \frac{\partial P_h}{\partial q_i}$) ed è definita positiva (per garantire la positività dell'EN. CINETICA) ⇒ quindi si può verificare che è diagonalizzabile ed invertibile.

→ inoltre dalla definizione di vincolo ideale e bilaterale $\delta L^V = 0 \Rightarrow \boxed{dL^V = 0}$ ovvero il lavoro effettivo è nullo poiché coincide con uno degli infiniti lavori virtuali delle reazioni del vincolo che per definizione stessa di vincolo ideale e bilaterale sono nulli per qualsiasi spostamento virtuale

→ quindi il teorema dell'energia cinetica in questo caso

$$dT = dL^A \cdot \underset{L=0}{dL^V} \rightarrow \boxed{dT = dL^A}$$

⇒ ovvero ci fornisce una equazione PURA del moto perché consideriamo solo le forze attive e non le reazioni vincolari.

Nell'ulteriore ipotesi di FORZE ATTIVE CONSERVATIVE con un potenziale $U(\bar{q})$

$$dL^A = dU$$

$$\Rightarrow dT = dL^A = dU \rightarrow \boxed{dT = dU}$$

integrando nel tempo si ha l'integrale primo dell'energia (cioè la conservazione dell'energia meccanica)

$$\boxed{dT = dU = 0} \qquad \boxed{T - U = \text{cost} = E}$$

↑ ENERGIA MECCANICA DEL SISTEMA.

come differenza tra ENERGIA CINETICA e POTENZIALE

⇓ è quindi naturale la definizione data in passato $V = -U$ della ENERGIA POTENZIALE

L'energia meccanica rimane costante nel tempo e quindi è uguale all'energia calcolata all'istante iniziale $\boxed{E = T_0 - V_0}$

- L'integrale dell'energia (conservazione dell'energia meccanica) è di interesse particolare nello studio del moto di sistemi conservativi con un (1) grado di libertà ovvero nel caso in cui ho un unica coordinata lagrangiana q.

$$T = T(q, \ddot{q}) = \frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2 \quad \text{con} \quad a(q) = \sum_h m_h \left(\frac{\partial P_h}{\partial q}\right)^2 > 0$$

$$E(q, \ddot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q) = T + V \rightarrow T = E - V$$

$$\overset{\downarrow}{\frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2} \xrightarrow[\text{rispetto } \dot{q}]{\text{risolvendo}} \ddot{q} = \pm \left[2 \frac{E - V}{a(q)} \right]^{1/2}$$

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt}$$

posso risolvere l'eq. delle derivate ordinarie separando le variabili

$$\int \pm \left[\frac{a(q)}{2(E-V)} \right]^{1/2} dq = \int dt \qquad t = \pm \int_{q_0}^{q} \left[\frac{a(q)}{2(E-V)} \right]^{1/2} dq = F(q, q_0, \dot{q}_0)$$

configurazione iniziale

GENERICA FUNZIONE F uguale al valore dell'integrale

→ ho quindi determinato il moto del sistema infatti invertendo la funzione F (nei suoi intervalli di monotonia) otteniamo, in linea di principio, il moto del sistema rappresentato $q(t; \underline{q_0; \dot{q}_0})$ STATO INIZIALE