NUMERO: 853

DATA: 12/03/2014

# A P P U N T I

STUDENTE: Mancino

MATERIA: Elettrotecnica + Eserc

Prof. Canavero

02-10-2013

Elettrotecnica = applicazione di fenomeni elettrici

## • CARICA ELETTRICA

Le cariche elettriche si indicano con $q$ e sono di due tipi: ⊕ e ⊖.

$$q \begin{cases} + & \text{positive} \\ - & \text{negative} \end{cases}$$

es. carica associata all'elettrone (negativa)

$[q]$ = coulomb C

## • INTERAZIONE TRA CARICHE

Date due cariche poste nelle vicinanze, esse interagiscono

$q_1 \leftrightarrow q_2$ se dello stesso tipo

$q_1 \rightarrow \ \leftarrow q_2$ se di tipo opposto

La loro interazione può essere sia di tipo attrattivo che di tipo repulsivo ma per legge che la regola è analoga a quella di interazione gravitazionale:

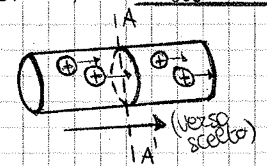
$$F = k\frac{qq'}{d^2}$$

Le cariche elettriche sono difficili da misurare => non c'è uno strumento in grado di misurarle. Neanche l'interazione è facile da misurare. Bisogna cercare delle grandezze più facili da misurare e maneggiare ad esse analoghe.

## CARICHE

Gli elementi metallici possiedono cariche libere di muoversi

Prendo un cilindro metallico ed al suo interno faccio scorrere cariche ⊕.



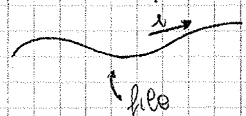

Ne analizzo una sezione: conto le cariche che passano $\Delta q$ in un certo intervallo di tempo $\Delta t$ attraverso AA'.

Decido io, indicandolo con una freccia, il verso per contare lo scorrimento delle cariche $q$

A seconda del tempo $\Delta t$, cambia il risultato: per un risultato più efficace faccio il rapporto => misuro $\frac{\Delta q}{\Delta t}$, CORRENTE $\boxed{i \triangleq \frac{\Delta q}{\Delta t}}$ $[i] = \frac{C}{S}\ \frac{\text{coulomb}}{\text{secondo}} = A$ ampère

Attraverso questa misurazione si può costruire uno strumento semplice da usare: ecco perché sono state abbandonate le cariche per una grandezza più versatile.

Dato un filo conduttore, posso misurare la quantità di cariche passanti in $\Delta t$ con un determinato verso: si indica con una freccia.




Se le cariche procedono al contrario rispetto al verso da me prestabilito, la corrente cambia segno:

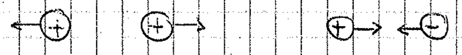
- $i > 0$ se le cariche + corrono lungo la freccia
- $i < 0$ se le cariche + corrono opposte alla freccia

$$\xrightarrow{i} \ \equiv \ \xleftarrow{-i}$$

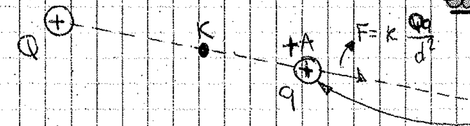
Questa misurazione dà un'informazione media, per essere meno approssimativi misuro il VALORE ISTANTANEO $(\Delta t \to 0)$

$$\boxed{i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} \triangleq \frac{dq}{dt}}$$

# INTERAZIONI



▶ Esperimento: prendo una carica ⊕ fissata in un punto (Q), poi un'altra carica q mobile. q inizia a muoversi di moto uniformemente accelerato: la carica q nella posizione A aveva una determinata energia potenziale $\mathcal{E}_A$, lasciata libera la esprime ($\mathcal{E}_A$) muovendosi spontaneamente per andare fino a B. Il moto è costituito dall'energia potenziale: in B, $\mathcal{E}_B < \mathcal{E}_A$ perché si è sviluppato movimento.




Se spingo la carica q verso Q, in K, imprimo il moto, perciò fornisco energia: $\mathcal{E}_K > \mathcal{E}_A$.

Quest'energia però è poco misurabile, devo valutare un nuovo concetto: non voglio l'energia assoluta in A ma solo la differenza di energia tra la posizione A e B:

$$\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_A - \mathcal{E}_B$$

Normalizzazione: rendo l'esperimento indipendente dalla carica q

$$\boxed{v_{AB} = \frac{\Delta\mathcal{E}}{q} = \frac{\mathcal{E}_A - \mathcal{E}_B}{q}}$$

differenza di en. potenziale per unità di carica ] = TENSIONE $v$ (voltage) → detta anche diff. di potenziale.

(l'ordine lo scelgo io e lo indico con un + nel punto primo della sottrazione o con la punta di una freccia)

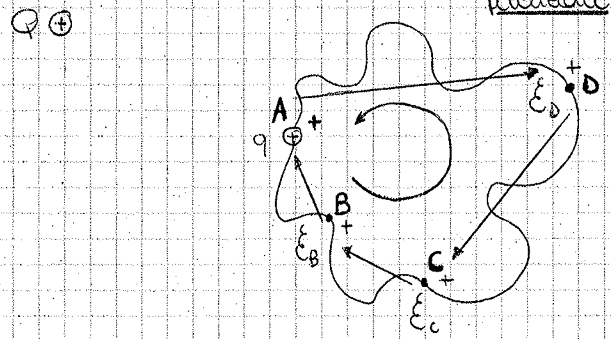
$\left[\begin{matrix} +\bullet A \\ v \\ \bullet B \end{matrix}\right] = \left[\begin{matrix} A\bullet \\ v \\ B\bullet \end{matrix}\right]$ NOTAZIONE

$[v] = \frac{J}{C} = V$ volt

- $v > 0$ se $\mathcal{E}_A > \mathcal{E}_B$
- $v < 0$ se $\mathcal{E}_B > \mathcal{E}_A$

definisco POTENZIALE l'energia per unità di carica: $\boxed{V = \frac{\mathcal{E}}{q}}$

▶ Generalizzazione dell'esperimento: prendo carica Q fissa, q posizionata nel punto A, creo un percorso per la carica q: voglio misurare l'energia potenziale in B e C e D (interrompendo temporaneamente il moto di q).




Il verso è detto POLARITÀ

- Cammino da A a B $\quad v_{AB} = \frac{\mathcal{E}_A - \mathcal{E}_B}{q}$
- Cammino da B a C $\quad v_{BC} = \frac{\mathcal{E}_B - \mathcal{E}_C}{q}$
- Cammino da C a D $\quad v_{CD} = \frac{\mathcal{E}_C - \mathcal{E}_D}{q}$
- Cammino da D ad A $\quad v_{DA} = \frac{\mathcal{E}_D - \mathcal{E}_A}{q}$

in A ho sempre la stessa en. potenziale perché dipende solo dalla posizione

I° forma

Sommo le energie: $\boxed{v_{AB} + v_{BC} + v_{CD} + v_{DA} = 0}$

$$= \frac{\mathcal{E}_A - \mathcal{E}_B}{q} + \frac{\mathcal{E}_B - \mathcal{E}_C}{q} + \frac{\mathcal{E}_C - \mathcal{E}_D}{q} + \frac{\mathcal{E}_D - \mathcal{E}_A}{q} = 0$$

LEGGE DELLE TENSIONI DI KIRCHHOFF LKT/KVL

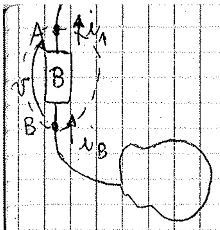
"La somma delle tensioni parziali lungo un percorso chiuso deve essere pari a zero."

LKT: $\boxed{\sum_q v_q = 0}$ • I° forma

- percorso chiuso
- faccio correre la carica e scelgo per tutti i calcoli punto di partenza - punto di arrivo: $v_q$ devono essere prese in accordo col senso di rotazione lungo il percorso chiuso ⇒ TENSIONI EQUIVERSE SUL PERCORSO!

Se cambio punto di partenza e arrivo devo invertire il segno delle tensioni:

$$v_{AB} + (-v_{BC}) + v_{CD} + v_{DA} = 0$$



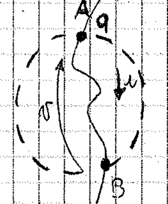
Bipolo collegato con altri elementi elettrici.
Voglio applicare la legge delle correnti: prendo una superficie chiusa che racchiude il bipolo B e applico la legge delle correnti.

KCL $\underbrace{i_A}_{\text{uscente}} = \underbrace{i_B}_{\text{entrante}}$ La corrente che esce da un terminale è uguale alla corrente che esce.

Ogni bipolo è attraversato da una sola corrente

Per il bipolo posso anche definire una tensione; ogni bipolo è rappresentato da una sola tensione.

① Sto allontanando la carica q da Q: moto spontaneo → + e + si respingono



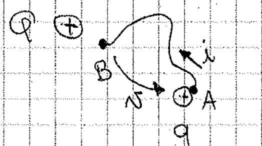
★ $v>0$
★ $i>0$
★ uso energia elettrica

$\Rightarrow p = v \cdot i > 0$

**BIPOLO UTILIZZATORE** (o carico) (potenza assorbita)

La tensione punta nel polo A in cui entra la corrente: si tratta della CONVENZIONE DEGLI UTILIZZATORI o convenzione coordinata di v ed i: fa sì che se la potenza p è >0 l'elemento preso in considerazione è veramente un bipolo utilizzatore.

② Esperimento: per spostare la carica q da A a B devo fornire energia esterna: $\mathcal{E}_B > \mathcal{E}_A$

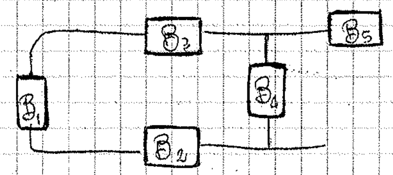


★ $v = \dfrac{\mathcal{E}_A - \mathcal{E}_B}{q} < 0$
★ $p = v \cdot i < 0$
★ fornisco energia elettrica

**BIPOLO GENERATORE** es. dinamo, batteria (potenza erogata)

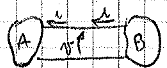
Ho sempre sfruttato la convenzione coordinata

## CONSERVAZIONE DELLA POTENZA (sistema isolato)



$$\boxed{\sum_k p_k = 0}$$

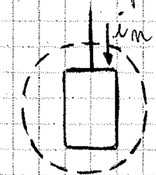
"La somma delle potenze su tutti gli elementi elettrici deve essere nulla"



$p_A + p_B = vi + (-vi) = 0$ ← cambio segno per essere in conv. utilizzatori.

Uso la convenzione degli utilizzatori: in un sistema elettrico, per la conservaz. della potenza, devono esserci sia generatori che utilizzatori affinché il bilancio dia un risultato nullo.

• Immagino di avere un monopolo: elemento con un singolo terminale



Applico la legge delle correnti al volume
KCL: $i_m = 0$
Qualsiasi elem. con un solo terminale ha $\begin{cases} i = 0 \\ p = v \cdot i = 0 \end{cases}$
⇨ nessun interesse dal punto di vista elettrico

# DEFINIZIONE DI BIPOLI

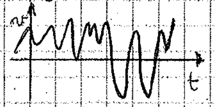
## 1) Generatore ideale di tensione INDIPENDENTE

Segno + parte integrante del bipolo: è conveniente mettere la tensione nello stesso senso, anche e è specificato

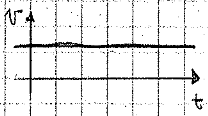
- EQUAZIONE DI FUNZIONAMENTO DELL'ELEMENTO (eq. caratteristica) $\boxed{v = e \quad , \forall i}$

La tensione sul bipolo è uguale a quella specificata dal costruttore (e)
Funziona indipendentemente dalla corrente ⇒ infatti il generatore è ideale
(unico caso in cui è irrilevante sfruttare la convenzione degli utilizzatori)

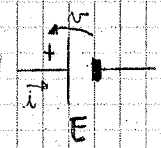
- $e \sim e(t)$



- $e = E =$ costante nel tempo

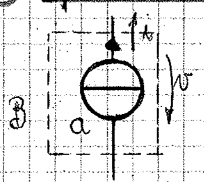


⟶ ad es. batteria



▶ Simbolo alternativo :

## 2) Generatore ideale di corrente INDIPENDENTE



la freccia indica il verso della corrente

- EQ. DI FUNZIONAMENTO : $\boxed{i = a \quad , \forall v}$
- $a = a(t)$

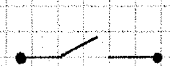
- $a = A$ costante

Trovare generatori di tensione è più facile che trovare generatori di corrente (es. carica batteria).

▶ Simbolo alternativo :

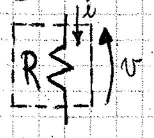
→ Il generatore di tensione genera la tensione e stabilita dal costruttore :
Caso particolare con $e = 0 \rightarrow v = e = 0 \rightarrow p = v \cdot i = 0$ CORTO CIRCUITO

→ Il generatore di corrente genera la corrente stabilita dal costruttore (a) :
caso particolare con $a = 0 \rightarrow i = a = 0 \rightarrow p = v \cdot i = 0$ CIRCUITO APERTO



09-10-13

## 3) Resistore Ideale



Inserisco le grandezze in base alla convenzione degli utilizzatori

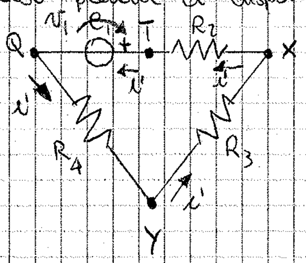
- EQ. DI FUNZIONAMENTO : $\boxed{v = R \cdot i}$ (LEGGE DI OHM)

R coefficiente di proporzionalità che è costante, perché il resistore è ideale.

I resistori si trovano facilmente nella realtà, ma in essi la resistenza R non è costante, ma dipende da vari fattori.
Posso scrivere $R = \frac{v}{i}$ $\quad [R] = \frac{V}{A} = \Omega =$ ohm

coeff. di proporzionalità : RESISTENZA ($\Omega$) oggetto fisico (bipolo) : RESISTORE

Nel nostro circuito corrente e tensione non rispettano la convenzione, ma siccome ho un generatore ideale di tensione non mi interessa (funziona con qualsiasi corrente).
Posso provare a disporre diversamente le grandezze




Dovrò avere $i' = -i$ perché ho cambiato il verso della corrente!

Per ogni bipolo, nota la corrente, posso trovare la tensione, scrivo le eq. di funzionamento ed infine applico la KVL: $v_1 = v_2 + v_3 + v_4$

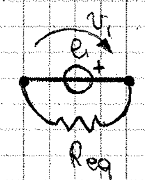
$$\left.\begin{array}{l} v_1 = e_1 \\ v_2 = R_2 \cdot i \\ v_3 = R_3 \cdot i \\ v_4 = R_4 \cdot i \end{array}\right\} \quad \underset{\text{noto}}{e_1} = \underset{\text{noto}}{R_2}\, i + \underset{\text{noto}}{R_3}\, i + \underset{\text{noto}}{R_4}\, i \quad \rightsquigarrow \quad i = \frac{e_1}{R_2+R_3+R_4}$$

RISULTATO!
espresso solo in termini di quantità note (= date dal costruttore)

Raccolgo: $v_1 = \underbrace{(R_3 + R_2 + R_4)}_{\text{coeff di proporzionalità}}\, i$

posso interpretarla come l'equazione di un resistore!

Posso interpretarlo come un unico resistore:




## REGOLA DEI RESISTORI IN SERIE:

▶ ipotesi (condizione di applicabilità): circuito in serie

Sostituisco resistori in serie con uno equivalente:

$$\boxed{R_{eq} = \sum_k R_k}$$

Nel circuito precedente posso scrivere (sostituendo la $i$ trovata nelle eq. di funzionamento)

$v_2 = R_2 \frac{e_1}{R_2+R_3+R_4}$ risultato valido! $= e_1 \frac{R_2}{R_2+R_3+R_4}$

$v_3 = R_3 \frac{e_1}{R_2+R_3+R_4}$ risultato valido $= e_1 \frac{R_3}{R_2+R_3+R_4}$

Anche in questo caso posso ricavare una regola, generalizzando:

REGOLA (DELLE TENSIONI PARZIALI) **REGOLA DEL PARTITORE DI TENSIONI**

▶ Condizione di applicabilità: circuito in serie con un generatore di tensione ($e$)

$$\boxed{v_k = e \frac{R_k}{R_{eq}}}$$

TENSIONE PARZIALE su resistore $R_k$

Dà una rotazione (sulla maglia) opposta rispetto al generatore di tensione!

In circuiti di questo tipo la tensione si ripartisce tra i resistori in misura proporzionale al valore di resistenza.

## REGOLA DEL PARALLELO

▶ Ipotesi: circuito parallelo

Posso trovare conduttanza equivalente $\boxed{G_{eq} = \sum_k G_k = \sum_k 1/R_k}$

Calcolo $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \rightsquigarrow R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}}$ ⇒ è più comodo lavorare sulle conduttanze!

▶ Caso particolare: solo 2 resistori in //

$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_2+R_1}{R_1R_2} \rightsquigarrow \boxed{R_{eq} = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}}$

Posso scrivere: $v_{AB} = \frac{a_1}{G_{eq}}$, da qui posso ricavare le singole correnti.

- $i_1 = G_1 \cdot v_{AB} = G_1 \cdot \frac{a_1}{G_{eq}} = a_1 \frac{G_1}{G_{eq}}$
- $i_2 = G_2 \cdot v_{AB} = G_2 \cdot \frac{a_1}{G_{eq}} = a_1 \frac{G_2}{G_{eq}}$

Generalizzando

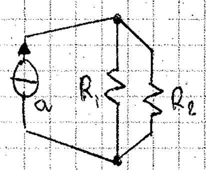
## REGOLA DEL PARTITORE DI CORRENTE

▶ Ipotesi: circuito // con 1 generatore di corrente (a)

$\boxed{i_k = a \cdot \frac{G_k}{G_{eq}}}$ Regola valida per una corrente di verso opposto rispetto al generatore di corrente.

CORRENTE PARZIALE

▶ Caso particolare: solo 2 resistori




$i_1 = a \frac{1/R_1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}} = a \frac{1/R_1}{\frac{R_2+R_1}{R_1R_2}} = a \frac{1}{\cancel{R_1}} \cdot \frac{\cancel{R_1}R_2}{R_1+R_2} =$

$i_2 = a \frac{1/R_2}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}} = a \frac{1}{\cancel{R_2}} \cdot \frac{R_1\cancel{R_2}}{R_1+R_2}$

11-10-13

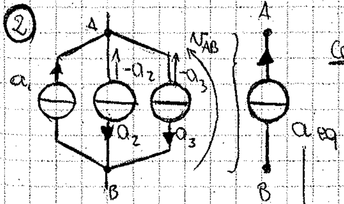
## Equivalenza

① 


$\hookrightarrow e_1 - e_2 + e_3$

COLLEGAMENTO SERIE

scelgo il verso equiverso rispetto al generatore equivalente: $v_1 = e_1$, $v_2 = -e_2$, $v_3 = e_3$

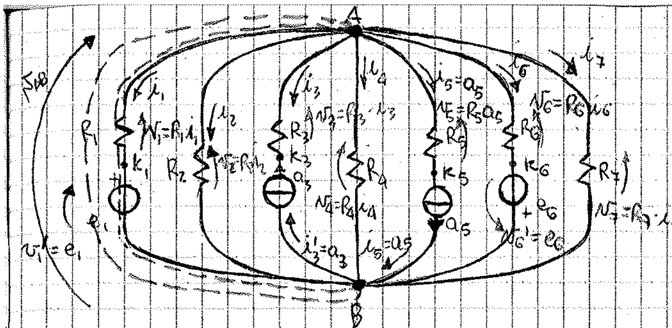
② 


$\hookrightarrow a_1 - a_2 - a_3$

COLLEGAMENTO PARALLELO //

$i_1 = a_1 \quad i_2 = a_2 \quad i_3 = a_3$

Devo assicurarmi che tutte le correnti vadano verso il punto A → cambio segno ad $i_2 = -a_2$ e $i_3 = -a_3$




Guardo $k_1$: ho un collegamento in serie esattamente come $k_3$, $k_5$, $k_6$, ma ho anche collegamenti in //.
Disegno le cose note sul circuito.

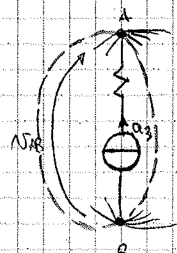
- Scrivo l'eq. in $k_3$: $i_3' + i_3 = 0 \Rightarrow i_3 = -i_3' = -a_3$
- Prendo un percorso chiuso da A a B: A → $R_1$ → $e_1$ → B → A: posso applicare KVL sul percorso.

Anche tra i punti A e B esiste una differenza di energia potenziale: posso definire una tensione $v_{AB}$.

KVL: $v_{AB} = v_1 + v_1' = R_1 i_1 + e_1$ eq. intermedia (non ho risultato valido)

Procedo analogamente per tutti i bracci:

- KVL su percorso chiuso ($R_2$): $v_{AB} = v_2 = R_2 i_2$ — il senso di rotazione è riferito al singolo percorso chiuso che ho stabilito.
- Percorso chiuso sul braccio n° 3




Problema: non conosco la tensione sul generatore di corrente
⇓
non riesco a scrivere l'equazione

- Percorso chiuso sul braccio n° 4

KVL: $v_{AB} = v_4 = R_4 \cdot i_4$

- Analizzo il braccio n° 5 ⇒ è come il n° 3 ⇝ lo salto
- KVL sul percorso del braccio n° 6: $v_6 = v_6' + v_{AB}$ ⇝ $v_{AB} + e_6 = R_6 \cdot i_6$ (eq. intermedia)
- KVL sul percorso chiuso del braccio n° 7: $v_{AB} = v_7 = R_7 \cdot i_7$
- Ora applico il KCL in A: $\overset{a_3}{i_3'} = i_1 + i_2 + i_4 + \overset{a_5}{i_5'} + i_6 + i_7$

entranti — uscenti

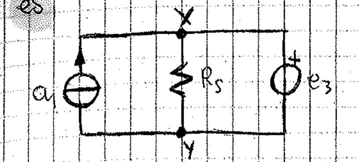
$$a_3 - a_5 = i_1 + i_2 + i_4 + i_6 + i_7 \quad \leftarrow i_7 = \frac{v_{AB}}{R_7}$$

$$i_1 = \frac{v_{AB} - e_1}{R_1} \quad i_2 = \frac{v_{AB}}{R_2} \quad i_4 = \frac{v_{AB}}{R_4} \quad i_6 = \frac{v_{AB} + e_6}{R_6}$$

Risolvo: $$a_3 - a_5 = \frac{v_{AB} - e_1}{R_1} + \frac{v_{AB}}{R_2} + \frac{v_{AB}}{R_4} + \frac{v_{AB} + e_6}{R_6} + \frac{v_{AB}}{R_7}$$ Solo $v_{AB}$ come incognita!

$$a_3 - a_5 = \frac{v_{AB}}{R_1} - \frac{e_1}{R_1} + \frac{v_{AB}}{R_2} + \frac{v_{AB}}{R_4} + \frac{v_{AB}}{R_6} + \frac{e_6}{R_6} + \frac{v_{AB}}{R_7}$$

es

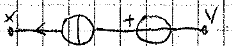



Il generatore non ha nessuna resistenza! $\frac{e_3}{0}$ => non ha senso!

$R_3 = 0$

Ottengo una forma indeterminata ($\lim_{R_3 \to 0} v_{xy} = e_3$)

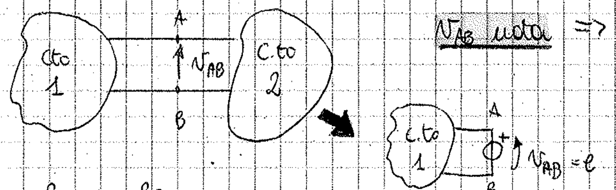
Se non c'è la resistenza, la tensione $e_3$ eguaglia $v_{xy}$

Un ramo così  , perché il generatore di corrente

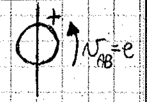
**REGOLA**: se ho un generatore di corrente in serie con qualcos'altro, vince il generatore di corrente!

**PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE**

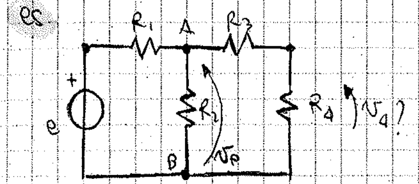
Immagino di avere un circuito generico:



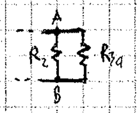

$v_{AB}$ nota => posso sostituirla con un generatore di tensione a cui attribuisco $e = v_{AB}$

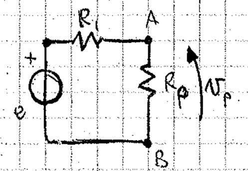



es




- $R_3, R_4$ sono in serie: $R_{34} = R_3 + R_4$
- $R_2, R_{34}$ sono in //: $R_p = \frac{R_2 \cdot R_{34}}{R_2 + R_{34}}$

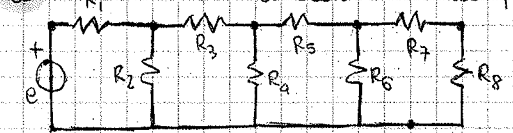


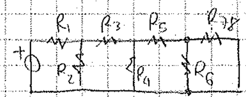

- partitore di tensione: $v_p = e \frac{R_p}{R_1 + R_p}$
- partitore di tensione: $v_4 = v_p \frac{R_4}{R_3 + R_4}$ → torno al circuito precedente!

$v_p$ ≡ gen (ho usato il principio di sostituz)

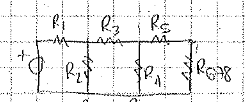
es Rete a scala ⇝ uso principio di sostituzione



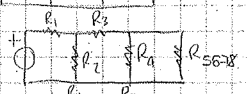

- $R_7, R_8$ in serie: $R_{78} = R_7 + R_8$



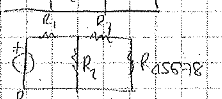
- $R_6, R_{78}$ in parallelo: $R_{678} = \frac{R_6 \cdot R_{78}}{R_6 + R_{78}}$



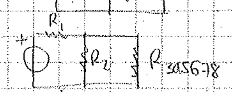
- $R_5, R_{678}$ in serie: $R_{5678} = R_5 + R_{678}$



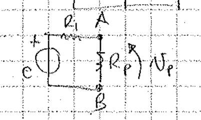
- $R_4, R_{5678}$ in //: $R_{45678} = \frac{R_4 \cdot R_{5678}}{R_4 + R_{5678}}$



- $R_3, R_{45678}$ in serie: $R_{345678} = R_3 + R_{45678}$



- $R_2, R_{345678}$ in //: $R_p = \frac{R_2 \cdot R_{345678}}{R_2 + R_{345678}}$




⇝ $v_p = e \cdot \frac{R_p}{R_1 + R_p} = v_2$

Da qui applico principio di sostituzione $v_{45678} = v_p \frac{R_{45678}}{R_{45678} + R_3}$

$$\begin{cases} i_1 = v_b(G_b+G_c) + v_a(-G_c) \\ i_2 = v_b(-G_c) + v_a(G_a+G_c) \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_b+G_c & -G_c \\ -G_c & G_a+G_c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cancel{v_b}\ v_{13} \\ \cancel{v_a}\ v_{23} \end{bmatrix}$$

in forma matriciale

Da notare $\begin{cases} v_b \equiv v_{13} \\ v_a \equiv v_{23} \end{cases}$ coincidenza di variabili che intervengono nel triangolo e nella stella!

Per passare da un'eq all'altra nei due sistemi matriciali basta invertire:

da $\Delta \Rightarrow \begin{bmatrix} v_{13} \\ v_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_b+G_c & -G_c \\ -G_c & G_a+G_c \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$

Ho due sistemi $Ax=B$ nella stessa forma => le due matrici dei coefficienti possono essere confrontate.

I due sistemi sono equivalenti se $\begin{bmatrix} R_1+R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2+R_3 \end{bmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{bmatrix} G_b+G_c & -G_c \\ -G_c & G_a+G_c \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det[\ ]} \cdot \begin{bmatrix} G_a+G_c & G_c \\ G_c & G_b+G_c \end{bmatrix} =$

$$= \frac{1}{(G_b+G_c)(G_a+G_c)-G_c^2} \cdot \begin{bmatrix} G_a+G_c & G_c \\ G_c & G_b+G_c \end{bmatrix}$$

Confronto i singoli termini delle matrici per verificare l'uguaglianza:

1.1) $R_1+R_3 = \dfrac{G_a+G_c}{G_aG_b+G_bG_c+G_aG_c+\cancel{G_c^2}-\cancel{G_c^2}}$

1.2) $\boxed{R_3 = \dfrac{G_c}{G_aG_b+G_bG_c+G_aG_c}}$ ←

Regole per ricavare le resistenze della stella a partire dal triangolo: al numeratore ho la conduttanza del ramo opposto rispetto al nodo con lo stesso numero della resistenza.

2.1) $R_3 = \dfrac{G_c}{G_aG_b+G_bG_c+G_aG_c}$

2.2) $R_2+R_3 = \dfrac{G_b+G_c}{G_aG_b+G_bG_c+G_aG_c}$

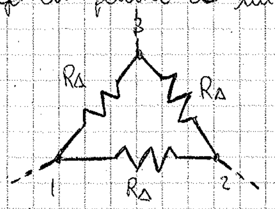
Sostituisco $R_3$ in 1.1 e 2.2:

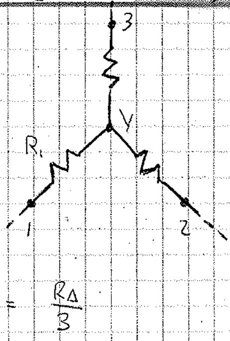
1.1) $\boxed{R_1 = \dfrac{G_a+\cancel{G_c}-\cancel{G_c}}{G_aG_b+G_bG_c+G_aG_c}}$ ←

2.2) $\boxed{R_2 = \dfrac{G_b+\cancel{G_c}-\cancel{G_c}}{G_aG_b+G_bG_c+G_aG_c}}$ ←

**Caso particolare**

Suppongo di partire da un triangolo con le 3 resistenze uguali per ricavare la stella equivalente:




⇓

Ottengo una stella con 3 resistenze uguali:

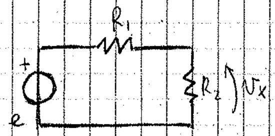
$\boxed{R_Y = \dfrac{R_\Delta}{3}}$ e $\boxed{R_\Delta = 3R_Y}$

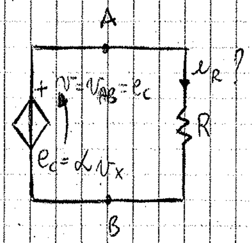
$$R_1 = \frac{\frac{1}{R_\Delta}}{\frac{1}{R_\Delta}\cdot\frac{1}{R_\Delta}+\frac{1}{R_\Delta}\cdot\frac{1}{R_\Delta}+\frac{1}{R_\Delta}\cdot\frac{1}{R_\Delta}} = \frac{\frac{1}{R_\Delta}}{3\frac{1}{R_\Delta\cdot R_\Delta}} = \frac{R_\Delta}{3}$$

$$R_2 = \frac{\frac{1}{R_\Delta}}{3\frac{1}{R_\Delta\cdot R_\Delta}} = \frac{R_\Delta}{3}$$

$$R_3 = \frac{R_\Delta}{3}$$

Circuito




Applico il partitore di tensione alla prima parte:

$v_x = e\,\frac{R_2}{R_1+R_2}$ ⇒ ricavo $e_c = \alpha e\,\frac{R_2}{R_1+R_2}$

posso ricavare $i_R = \frac{v}{R} = \frac{\alpha e}{R}\cdot\frac{R_2}{R_1+R_2}$

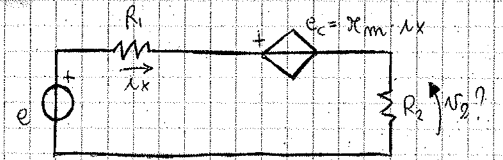
Ho fatto 3 passi: METODO DI RISOLUZIONE DI CIRCUITI CON GENERATORI PILOTATI

① ho trovato la quantità pilotante — soluzione (giudicando come se fosse indipendente)

② Generatore pilotato diventa indipendente

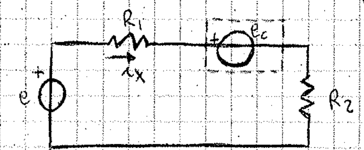
③ ho trovato l'incognita

es

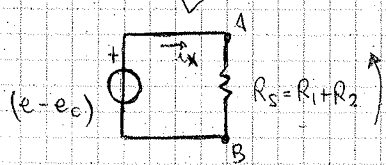



Per risolverlo provo ad applicare la regola!

- Mi occupo della quantità pilotante $\boxed{i_x}$. Faccio finta che $e_c$ sia un generatore indipendente:




disegno un circuito completamente serie: posso sommare generatori e resistori indipendentemente dalla loro posizione




$i_x(R_1+R_2) = v_{AB} = (e - e_c)$ ⇒ $i_x = \frac{e-e_c}{R_1+R_2}$

$e_c$ non è una quantità nota: ho $e_c = r_m \cdot i_x$ ⇒ basta sostituire!

$i_x = \frac{e - r_m \cdot i_x}{R_1+R_2}$

$i_x(R_1+R_2) = e - r_m \cdot i_x$ ⇝ $i_x(R_1+R_2+r_m) = e$ ⇒ $i_x = \frac{e}{R_1+R_2+r_m}$ quantità nota!

- $e_c = r_m \cdot \frac{e}{R_1+R_2+r_m}$
- $v_2 = R_2 \cdot i_x = R_2 \cdot \frac{e}{R_1+R_2+r_m}$ ✓ risultato.

Posso pensare di applicare Millman:

$$v_- = \frac{\frac{e}{R_i} + \frac{Av_d}{R_2}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_i}+\frac{1}{R_2}} = \frac{e \cdot G_i + Av_d \cdot G_2}{G_1 + G_i + G_2}$$

Analizzo percorso chiuso $G \xrightarrow{est} \ominus \xrightarrow{R_i} \oplus \xrightarrow{e} G$ : KVL $v_- + v_d = e$ , $v_d = e - v_-$ , $v_- = e - v_d$

2) Sostituisco in Millman (scritto con le conduttanze):

$$v_d = e - \frac{e \cdot G_i + Av_d \cdot G_2}{G_1 + G_i + G_2} \Rightarrow v_d(G_1+G_i+G_2) = e(G_1+G_i+G_2) - (eG_i + Av_d G_2)$$

$$v_d(G_1+G_2+G_i+AG_2) = e(G_1+G_i+G_2-G_i) \rightarrow \boxed{v_d = \frac{e(G_1+G_2)}{G_1+G_i+G_2(1+A)}}$$

3) Trovare l'incognita $v_u$: è la tens del gen pilotato:

$$v_u = Av_d = A\frac{e(G_1+G_2)}{G_1+G_2(1+A)+G_i} \approx A\frac{e(G_1+G_2)}{G_2 \cdot A} = e \cdot \frac{(G_1+G_2)}{G_2} = e\left(\frac{G_1}{G_2}+1\right) = \boxed{e\left(\overbrace{\frac{R_2}{R_1}+1}^{>1}\right)}$$

- Considerazioni: $G_i \to 0$ (perché $R_i$ è molto grande)
  $(A+1) \sim A$ (perché A è molto grande)
  $G_1$ è trascurabile rispetto ad A al denominatore

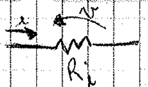
  } posso fare un'approssimazione del risultato finale!

▶ Il circuito funziona in modo da presentare in uscita una tensione ($v_u$) proporzionale al generatore (e) con un coefficiente variabile a seconda delle resistenze scelte, ovvero con AMPLIFICAZIONE $\boxed{\left(\frac{R_2}{R_1}+1\right)}$ regolabile! Posso creare un'amplificazione se inserito in un circuito!

## APPROSSIMAZIONI UTILI

↘ Posso procedere in modo diverso: provo a risolvere a partire dalle approssimazioni

Approx (a) $R_i$ molto grande ($R_i \to \infty$)



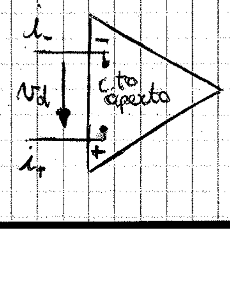
$v = R_i i$

ottengo una tensione infinita → non ho senso perché è una diff. di en. pot ⇒ $v$ non può essere $\infty$ ⇒ la corrente $i$ deve andare a zero ($i \to 0$) ⇒ CIRCUITO APERTO

(b) A molto grande ($A \to \infty$)

allora il gen pilotato ◇ $Av_d$ genera tens. infinita, ma non ha senso fisico, perciò devo avere $v_d \to 0$ ⇒ CORTO CIRCUITO (VIRTUALE)

Nello stesso tempo ho un circuito aperto che si comporta come un corto circuito (anche senza filo che collega): CORTO CIRCUITO VIRTUALE




$\left.\begin{array}{|c|}\hline i_- = 0 \\ i_+ = 0 \\ \hline\end{array}\right\}$ circuito aperto

$\boxed{v_d = 0}$ corto circuito virtuale

Due generatori: combinaz. lineare per la tensione, uno invertente, l'altro no.

Caso particolare

$$\frac{R_P}{R_1} = k = \frac{R_0}{R_2}$$

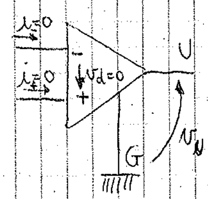
risolvo $v_U = e_1 \cdot \frac{R_P}{R_1(1+R_P/R_1)}(1+k) - e_2 \cdot k = \boxed{k(e_1-e_2)}$ uscita $\propto$ alla differenza dei gen.

**AMPLIFICATORE DIFFERENZIALE**

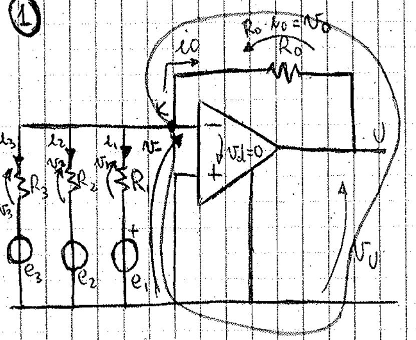
Se voglio controllare due segnali è molto utile

23-10-2013

Applicazioni




①




$v_+=0$, quindi $v_-=0$

→ Prendiamo un braccio alla volta passando per resistenza, generatore e $v_-$

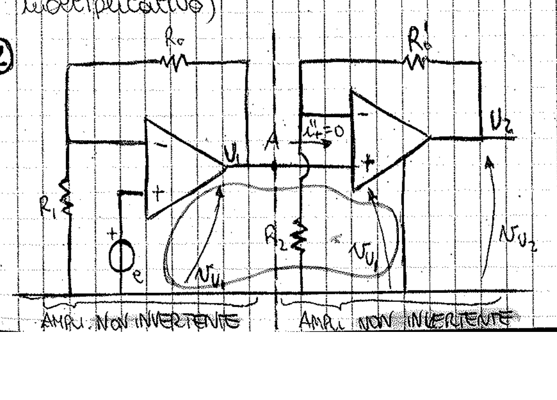
- KVL($R_1$): $e_1+v_1 = v_- = 0 \Rightarrow e_1 + R_1 i_1 = 0 \Rightarrow i_1 = -\frac{e_1}{R_1}$
- KVL($R_2$): $e_2+v_2 = v_- = 0 \Rightarrow e_2+R_2 i_2 = 0 \Rightarrow i_2 = -\frac{e_2}{R_2}$
- KVL($R_3$): $i_3 = -\frac{e_3}{R_3}$

- nodo K (corto circuito): KCL $i_0 + i_1+i_2+i_3+\cancel{i_-}^{0} = 0 \Rightarrow i_0 = \frac{e_1}{R_1}+\frac{e_2}{R_2}+\frac{e_3}{R_3}$ risultato valido
- Percorso esterno: KVL (per trovare $v_U$): $\cancel{v_-}^{0} = R_0 i_0 + v_U \Rightarrow v_U = -R_0 i_0 = -R_0\left(\frac{e_1}{R_1}+\frac{e_2}{R_2}+\frac{e_3}{R_3}\right)$

risultato valido: $\boxed{v_U = -\left(e_1\frac{R_0}{R_1} + e_2\frac{R_0}{R_2} + e_3\frac{R_0}{R_3}\right)}$

La tensione in uscita è uguale ad una somma pesata dei generatori (attraverso i coeff $R_0/R_n$): **CIRCUITO SOMMATORE**, consente di fare la somma di generatori diversi (avere ad esempio la media di vari sensori di temperatura, oppure per dare un peso maggiore o minore ad un determinato sensore variando il coefficiente moltiplicativo)

②




→ $v_{U_1} = e\left(\frac{R_0}{R_1}+1\right)$ dalla regola dell'ampli non invertente

- ora al nodo A è collegato un altro amplificat. operazionale: la corrente in entrata $i''_+ = 0$.

Per il secondo operazionale $v_+ = v_{U_1}$ (applico KVL

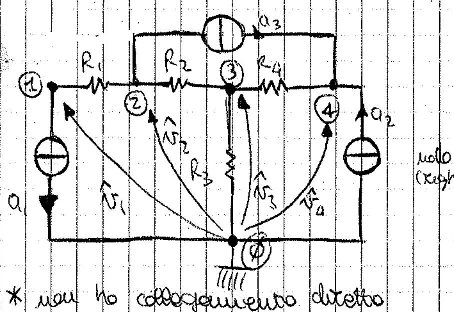
Posso scrivere il sistema sfruttando la notazione matriciale: coeff "SEMPRE" SIMMETRICA

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_A}+\frac{1}{R_B} & -\frac{1}{R_B} \\ -\frac{1}{R_B} & \frac{1}{R_C}+\frac{1}{R_B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ -a_2 \end{bmatrix}$$

matrice coefficienti $(N-1)\times(N-1)$ — vettore incognite — vettore termini noti

Il metodo automatico nodale consente, guardando il circuito, di riempire matrice dei coeff e vettore dei termini noti.

es.

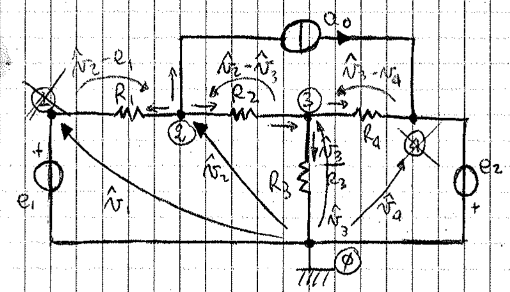


$N=5$ nodi $\Rightarrow$ sistema di 4 eq

$$\begin{array}{l} \\ \text{nodo (righe)} \end{array} \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 0^{*} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_4} \end{bmatrix}}^{\text{tensioni (colonne)}} \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \\ \hat{v}_3 \\ \hat{v}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_3 \\ 0 \\ +a_3+a_2 \end{bmatrix}$$

* non ho collegamento diretto tra nodo 1 e nodo 3 ⇒ resistenza infinita ⇒ conduttanza 0.

es.



Provo a enumerare i nodi come prima e scrivo le tensioni nodali:

- $\hat{v}_1 = e_1$ non è più un'incognita!
- $\hat{v}_4 = -e_2$ non è più un'incognita!

Circuito con N nodi e K generatori indipendenti di tensione (collegati fra un nodo ed il riferimento ⓪): ottengo $(N-K-1)$ incognite! riducono la dimensione della matrice. Provo a scriverla: considero solo i nodi ② e ③ perché sugli altri non ho inc.

- KCL nodo ②: $\underbrace{\frac{\hat{v}_2-e_1}{R_1}}_{\text{usc.}} + \frac{\hat{v}_2-\hat{v}_3}{R_2} + a_0 = 0$

- KCL nodo ③: $\underbrace{\frac{\hat{v}_3}{R_3} + \frac{\hat{v}_3+e_2}{R_4}}_{\text{usc}} = \underbrace{\frac{\hat{v}_2-\hat{v}_3}{R_2}}_{\text{entr}}$

$$\begin{cases} 2)\ \hat{v}_2\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)+\hat{v}_3\left(-\frac{1}{R_2}\right)=\frac{e_1}{R_1}-a_0 \\ 3)\ \hat{v}_2\left(-\frac{1}{R_2}\right)+\hat{v}_3\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_2}\right)=-\frac{e_2}{R_4} \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{v}_2 \\ \hat{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e_1}{R_1}-a_0 \\ -\frac{e_2}{R_4} \end{bmatrix}$$

$(N-1-k)\times(N-1-k)$
$2\times 2$

Per la matrice la regola automatica non cambia (per i nodi sopravvissuti)

Nei termini noti compaiono i generatori di tensione divisi per la R in serie del nodo declassato

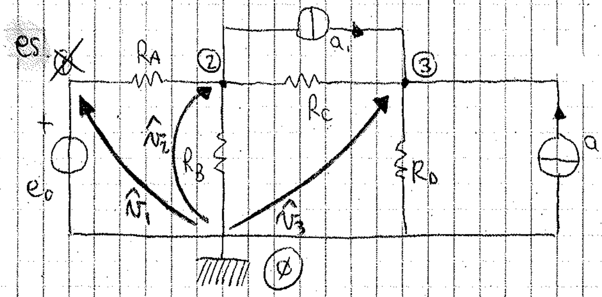
Ma è detto che i gen. di tensione siano collegati al nodo di riferimento!

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_4} \\ -\frac{1}{R_1}-\frac{\beta}{R_4} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2}-\frac{\beta}{R_4} \\ -\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \\ \hat{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

I gen pilotati fanno sì che la matrice dei coefficienti non sia più simmetrica.

25-10-2013

es. ~~A~~




$N = 4$ , $K = 1$ (gen indip di tensione collegato al riferimento)

⇝ $(N-1)$ incognite (tens. nodali rispetto al rif: $\hat{v}$)

• $\hat{v}_1 = e_0 \Rightarrow (N-1-K)$ incognite

matrice coeff A
$(N-1-K)\times(N-1-K)$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_A}+\frac{1}{R_B}+\frac{1}{R_C} & -\frac{1}{R_C} \\ -\frac{1}{R_C} & \frac{1}{R_C}+\frac{1}{R_D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_2 \\ \hat{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\frac{e_0}{R_A}-a_1 \\ +a_0+a_1 \end{bmatrix}$$

Soluzione (Regola di Cramer)

$$\hat{v}_2 = \frac{\det\begin{bmatrix} \frac{e_0}{R_A}-a_1 & -\frac{1}{R_C} \\ a_0+a_1 & \frac{1}{R_C}+\frac{1}{R_D}\end{bmatrix}}{\det(A)} = \frac{(e_0G_A-a_1)(G_C+G_D)+G_C(a_0+a_1)}{(G_A+G_B+G_C)(G_C+G_D)-(G_C)^2} = \frac{e_0G_A(G_C+G_D)+a_0G_C+a_1(\cancel{G_C}-\cancel{G_C})-a_1G_D}{\underbrace{(G_A+G_B)G_C+\cancel{G_C^2}+G_D(G_A+G_B+G_C)-\cancel{G_C^2}}_{G_x}}$$

$$\hat{v}_3 = \frac{\det\begin{bmatrix} \frac{1}{R_A}+\frac{1}{R_B}+\frac{1}{R_C} & \frac{e_0}{R_A}-a_1 \\ -\frac{1}{R_C} & a_0+a_1\end{bmatrix}}{\det(A)} = \frac{(G_A+G_B+G_C)(a_0+a_1)+G_C(e_0G_A-a_1)}{G_x} = \frac{a_0(G_A+G_B+G_C)+a_1(G_A+G_B)+a_1G_C+e_0G_AG_C-a_1G_C}{G_x}$$

• $\hat{v}_2 = e_0\,\frac{G_A(G_C+G_D)}{G_x} + a_0\,\frac{G_C}{G_x} + a_1\left(-\frac{G_D}{G_x}\right)$

• $\hat{v}_3 = e_0\,\underbrace{\frac{G_AG_C}{G_x}}_{K_0} + a_0\,\underbrace{\frac{G_A+G_B+G_C}{G_x}}_{H_0} + a_1\,\underbrace{\frac{G_A+G_B}{G_x}}_{H_1}$

REGOLA DI LINEARITÀ DEI CIRCUITI

Ogni variabile elettrica (tens, corr) $\div y$ può essere scritta come una somma di contributi dei gen indip con coeff che dipendono solo dai parametri del circuito $(R, \alpha, \beta, r_m, g_m)$

$y = e_0 \cdot K_0 + e_1 \cdot k_1 + \dots + a_0 H_0 + a_1 H_1 + \dots$

In un circuito le variabili elettriche sono una combinazione lineare dei generatori

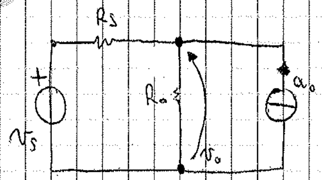
$\boxed{y = \sum_k e_k \cdot K_k + \sum_m a_m \cdot H_m}$ , per qualunque circuito

gen indip di tensione . gen indip di corrente    con $H, K \to (R, \alpha, \beta \dots)$

Ho trovato tre metodi risolutivi:

1. Metodo dei nodi (tensioni nodali): usato prettamente dai calcolatori
2. Metodo automatico delle maglie (da noi non trattato)
3. Metodo della sovrapposizione degli effetti: dorme al risultato, ma obbliga a risolvere un elevato numero di circuiti ($N$ circuiti, con $N$ = n° di gen indip presenti)

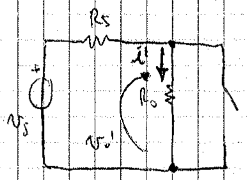
es.



Ⓐ Applico la sovrapposizione degli effetti:

$$v_o = \underbrace{v_s \cdot K}_{v_o'} + \underbrace{a_o H}_{v_o''} = v_s \frac{R_o}{R_o+R_s} + a_o \frac{R_o R_s}{R_o+R_s}$$

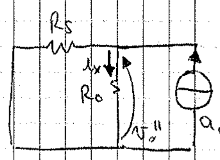
• Soluzione del 1° circuito: $v_o' \Rightarrow a_o = 0$



$$v_o' = v_s \underbrace{\frac{R_o}{R_s+R_o}}_{K}$$ (applicando il partitore di tensione)

inoltre $i' = \frac{v_o'}{R_o} = \frac{v_s}{R_o+R_s}$

• Soluzione del 2° circuito: $v_o'' \Rightarrow v_s = 0$



Partitore di corrente:

$i_x = a_o \frac{R_s}{R_s+R_o} \rightsquigarrow v_o'' = i_x \cdot R_o = a_o \underbrace{\frac{R_o R_s}{R_s+R_o}}_{H}$

• Ora voglio calcolare $p_o'$ (potenza assorbita da $R_o$ nel primo circuito):

$$p_o' = v_o' \cdot i' = v_o' \cdot \frac{v_o'}{R_o} = \frac{(v_o')^2}{R_o} = v_s^2 \frac{R_o^2}{(R_o+R_s)^2} \cdot \frac{1}{R_o} = v_s^2 \cdot \frac{R_o}{R_s+R_o}$$

• Ora voglio calcolare $p_o''$ (potenza assorbita da $R_o$ nel 2° circuito).

$$p_o'' = v_o'' i_x = a_o \frac{R_o R_s}{R_o+R_s} \cdot a_o \frac{R_s}{R_s+R_o} = a_o^2 \frac{R_o R_s^2}{(R_s+R_o)^2} = \frac{a_o^2}{R_o} H^2$$

$p_o = p_o' + p_o''$

Ⓑ Alternativa: Soluzione con Millman

$$v_o = \frac{\frac{v_s}{R_s} + a_o}{\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_o}} = \frac{\frac{v_s + R_s a_o}{R_s}}{\frac{R_o+R_s}{R_s R_o}} = R_o \frac{v_s + R_s a_o}{R_o+R_s} = v_s \frac{R_o}{R_o+R_s} + a_o \frac{R_o R_s}{R_s+R_o}$$

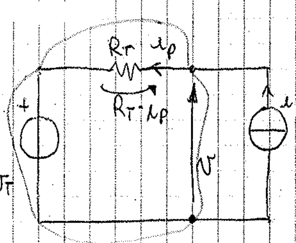
risultati uguali ma la soluzione è più veloce!

• provo a calcolare la potenza derivata dalla soluzione con Millman:

$$p_o = v_o \cdot i_o = v_o \cdot \frac{v_o}{R_o} = \frac{1}{R_o}\left(v_s \underbrace{\left(\frac{R_o}{R_s+R_o}\right)}_{K} + a_o \underbrace{\left(\frac{R_s R_o}{R_s+R_o}\right)}_{H}\right)^2 = \frac{1}{R_o}\left(v_s^2 K^2 + a_o^2 H^2 + 2 v_s a_o K H\right)$$

Confrontando $p_o$, $p_o'$ e $p_o''$ noto che queste espressioni non saranno mai uguali
Il risultato della sovrapposizione degli effetti è sbagliato perché la potenza non è una combinazione lineare dei generatori (è prodotto $v \cdot i$) $\Rightarrow$ non posso sfruttare combinazioni lineari per ottenere un risultato che non è combinazione lineare.

30-10-13




KVL: $v = v_T + R_T \cdot i_p$

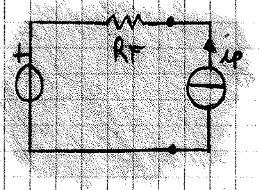
Risolvo Thevenin $v = v_{a_1} + \underbrace{(-Q)}_{R_T}(-i_p)$

le due eq esprimono la stessa tensione

THEVENIN

ip: circuito scomponibile in 2 parti (SOTTOCIRCUITI) connessi solo da due conduttori

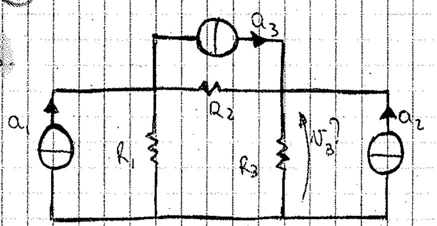
ogni sottocircuito è equivalente a:

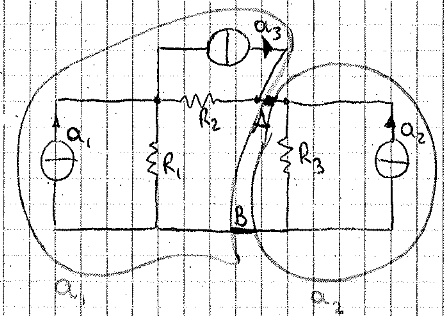



$v_T$: TENS. A VUOTO del sottocircuito (contributo di tutti i gen. del sottocircuito)

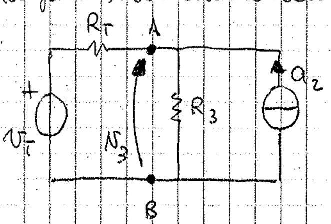
$R_T$: Resistenza del sottocircuito a gen. spenti

es.

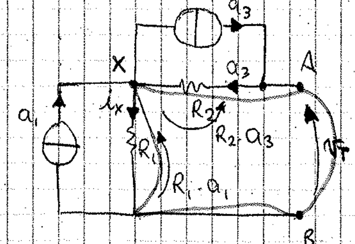



• Se riesco a comprimere $a_1$ con un generatore di tensione e una resistenza allora ottengo il risultato velocemente: devo prima calcolare $v_T$ e $R_T$ da sostituire nel circuito equivalente.




→ Isolo il sottocircuito $a_1$ per calcolare $v_T$:

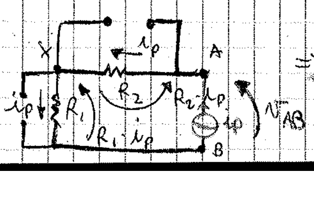



la corrente $a_3$ passa anche in $R_2$ perché i morsetti A e B sono aperti (no corrente)

• KCL in X: $a_1 + a_{3(R_2)} = a_{3(gen)} + i_x \Rightarrow i_x = a_1$

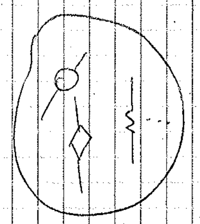
• KVL: $v_T = R_1 \, a_1 + R_2 \, a_3$ → TENSIONE di Thevenin

→ Disegno il sottocircuito $a_1$ con gen. spenti:

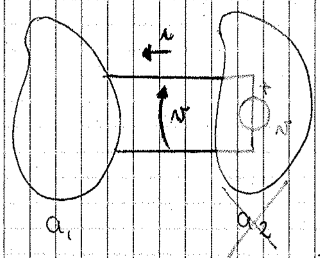



$\Rightarrow R_T = R_1 + R_2$ KVL: $v_{AB} = R_1 \, i_p + R_2 \cdot i_p = \underbrace{(R_1 + R_2)}_{R_T} i_p$

# TEOREMA DI NORTON




=>



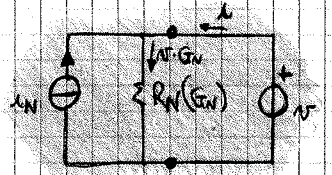

CORRENTE DI CORTO CIRCUITO

- Sostituzione: uso la tensione come sostituzione → devo calcolare la corrente

$$\boxed{i = i_{a_1} + W \cdot v}$$

$i_{a_1}$: contributo dovuto ai generatori interni con corto circuito all'uscita;

$W \cdot v$: contributo del circuito a generatori spenti: $W$ ha dimensione Siemens $S$, è una conduttanza

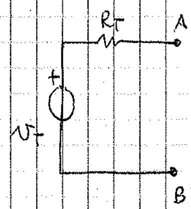



KCL: $i_N + i = v \cdot G_N$ (entrano / esce) $\Rightarrow$ $i = \underbrace{vG_N}_{v\cdot W} - \underbrace{i_N}_{i_{a_1}}$

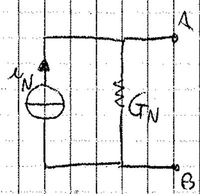
CIRCUITO EQUIVALENTE AD a

(gen di corrente con conduttanza in parallelo)

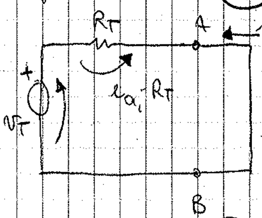
$(a_1)$ equivalente Thevenin →




applico equivalente Norton →

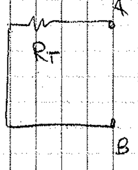



- Voglio calcolare $i_N$ con cortocircuito al posto di $a_2$:




$v_T + R_T\, i_{a_1} = 0 \Rightarrow \boxed{i_{a_1} = -\frac{v_T}{R_T}}$

- Voglio calcolare $G_N$: contributo del sottocircuito a gen. spenti



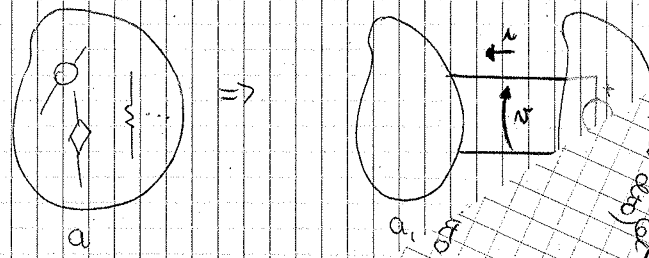

$$\boxed{G_N = \frac{1}{R_T}}$$

Posso scrivere $\boxed{R_T = \frac{v_T}{i_N}}$

$v_T$: tensione a vuoto di Thevenin

$i_N$: corrente di corto circuito di Norton

## TEOREMA DI NORTON




$$+\frac{r_m}{3R}\Big) = e\left(\frac{1}{3}+\frac{r_m}{3R}\right)$$

$$v_T = v_{xy} - \frac{r_m e}{R} + v_{xy}\cdot\frac{r_m}{R}$$

generatore PILOTATO

equivalente (+ qualsiasi altro bipolo) Thevenin?

→ Voglio calcolare $v = v_T + R_T \cdot i$

tra A B con che tensione: ottengo

AB (dopo aver calcolato il parallelo $\frac{R}{2}$)

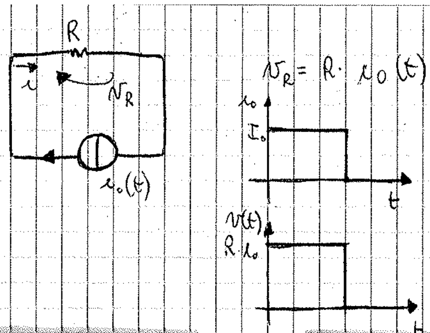
$$\Rightarrow i_x = \frac{-v_{AB}}{R+r_m}$$

$$v_{AB} = \frac{(R+}{\frac{3}{R}} \quad \frac{R}{3} i_p$$

$$v_{AB}\left(1-\frac{2}{3}\frac{r_m}{r_m+R}\right) = \frac{R}{3} i_p$$

$$v_{AB} = \frac{R}{3}\frac{i_p}{\left(1-\frac{2}{3}\frac{r_m}{R+r_m}\right)}$$

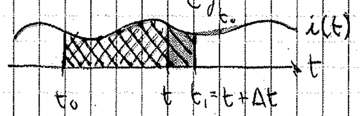
→ Da $v_{AB}$ ottengo $R_T = \frac{v_{AB}}{i_p} = \frac{R}{3\left(1-\frac{2}{3}\frac{r_m}{R+r_m}\right)}$




Se uso come elemento un elemento lineare i due grafici, tensione e corrente, si assomigliano!

**Dimostrazione della continuità della tensione nel condensatore.** (l'altra è una VARIABILE COMPLEMENTARE)

$$v(t) = v(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t')\,dt' \qquad (1)$$




$$v(t+\Delta t) = v(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t+\Delta t} i(t')\,dt' \qquad (2)$$

Sottraggo $(2)-(1) \rightarrow$ $v(t+\Delta t) - v(t) = \cancel{v(t_0)} + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t+\Delta t} i(t')\,dt' - \cancel{v(t_0)} - \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t')\,dt' =$

$= \int_{t}^{t+\Delta t} i(t')\,dt' \cdot \frac{1}{C}$ (ho cambiato gli estremi di integrazione → vedi area sottesa da $i(t)$).

- Per $\Delta t \to 0$, $t_1 \to t$ e l'area descritta da quell'integrale tende a zero

$\lim_{\Delta t \to 0} \left\{ v(t+\Delta t) - v(t) = \frac{1}{C}\int_{t}^{t+\Delta t} i(t')\,dt' \xrightarrow{} 0 \right\}$ ⇒ ho dimostrato che la tensione $v$, $\forall t$, è una funzione CONTINUA (non fa salti), mentre la corrente non è continua.

**POTENZA ASSORBITA SUL CONDENSATORE**

(assorbita per la convenzione degli utilizzatori)

$$\boxed{p = v \cdot i = v \cdot C \cdot \underbrace{\frac{dv}{dt}}_{>0}}$$

non ho nessuna garanzia sul segno di $v \cdot \frac{dv}{dt}$ a seconda della pendenza di $v$...

La potenza assorbita potrebbe essere sia positiva che negativa, ma quando è negativa nella convenzione degli utilizzatori significa che si tratta di potenza erogata.

So che $p = \frac{d\mathcal{E}}{dt}$ → energia

- Voglio calcolare l'energia

$$\int_{\mathcal{E}(t_0)}^{\mathcal{E}(t)} d\mathcal{E} = \int_{t_0}^{t} p\,dt' \rightarrow \mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(t_0) = \int_{t_0}^{t} vC\frac{dv}{dt'}\,dt' = C\int_{v(t_0)}^{v(t)} v\,dv = C\left[\frac{v^2}{2}\right]_{v(t_0)}^{v(t)} \circledast$$

Scelgo $t_0$ = momento di costruzione del condensatore → senza energia né tensione $\begin{cases} \mathcal{E}(t_0) = 0 \\ v(t_0) = 0 \end{cases}$

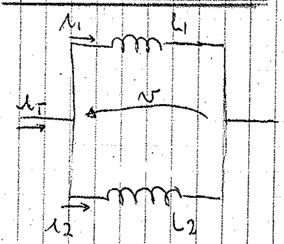
$$\boxed{\mathcal{E}(t) = C\,\frac{v^2(t) - 0}{2} = \frac{C\,v^2(t)}{2} \geq 0}$$

Energia presente ~~sul~~ IMMAGAZZINATA sul condensatore: non può erogare più energia di quanta ne contenga, perché l'energia interna deve essere positiva: in ogni caso il condens. può sia assorbire che erogare potenza, a patto che l'energia contenuta sia sempre ≥ 0.

Dipende solo dalla tensione $v$.

$\circledast$ nel caso di tens. periodica, l'energia assorbita nel periodo è sempre zero!

• INDUTTORI IN PARALLELO



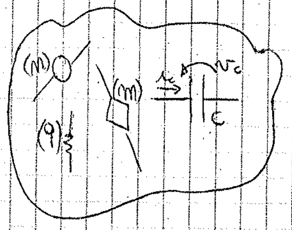

• $i_T = i_1 + i_2 \rightsquigarrow i(t_0) = 0$

$$i_T = \frac{1}{L_1}\int_{t_0}^{t} v(t')\,dt' + \frac{1}{L_2}\int_{t_0}^{t} v(t')\,dt' = \left(\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}\right)\int_{t_0}^{t} v(t')\,dt'$$

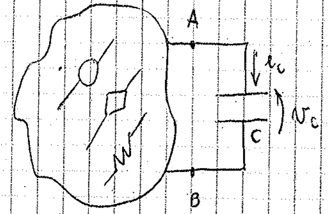
È ancora eq. di funz. di un induttore equivalente in cui passa la corrente $i_T$, sottoposto alla tensione $v$: $\boxed{\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}}$

## CIRCUITI CON UN SOLO ELEMENTO DIFFERENZIALE | CIRCUITI DEL PRIMO ORDINE

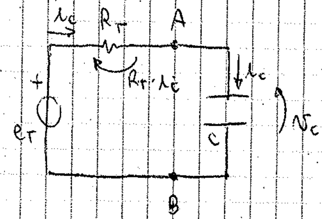
ⓐ elemento differenziale: CONDENSATORE




1 solo condensatore nel circuito ⟹




→ Applico l'equivalente di Thevenin al circuito




• KVL: $e_T = R_T \cdot i_c + v_c$

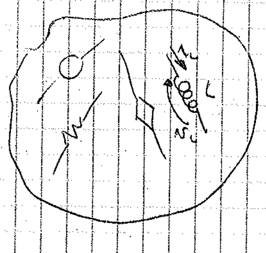
→ per il condens. $i_c = C\frac{dv_c}{dt}$ → sostituisco

$e_T = R_T C \frac{dv_c}{dt} + v_c$ → divido tutto per $R_T C$

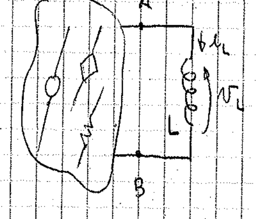
$$\boxed{\frac{dv_c}{dt} + \frac{1}{R_T C}\cdot v_c = \frac{e_T}{R_T C}}$$

l'unica variabile è $v_c$: è un'equazione differenziale del primo ordine a coefficienti costanti non omogenea.

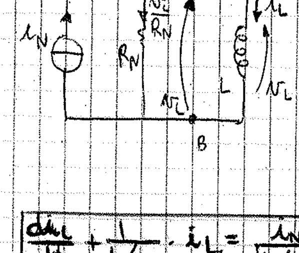
ⓑ elemento differenziale: INDUTTORE




⟹

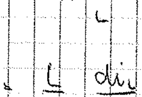



→ Applico il Teorema di NORTON




• KCL(A): $i_N = \frac{v_L}{R_N} + i_L$

→



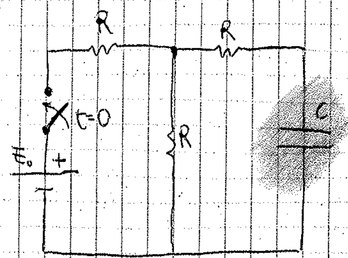

$v_L = L\frac{di_L}{dt}$ → sostituisco

$i_N = \frac{L}{R_N}\frac{di_L}{dt} + i_L$ → divido tutto per $\frac{L}{R_N}$

$$\boxed{\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{L/R_N}\cdot i_L = \frac{i_N}{L/R_N}}$$

$i_L$ è l'unica incognita: è un'eq. differenziale del primo ordine a coeff. costanti non omogenea.

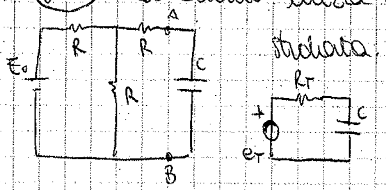
es




- **Interruttore ideale**: si spegne ed accende in tempo infinitesimo. La freccia indica l'operazione.

Nel nostro caso prima di zero a sinistra ho corrente zero:

- per $t<0$ il circuito è INERTE (spento)
- per $t \geq 0$ la corrente inizia a scorrere nel circuito ed esso è regolato dall'eq. differenziale studiata, posso studiarne un equivalente Thevenin ai morsetti A-B.



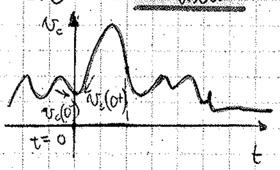

Posso scrivere dunque $v_c(t) = \left[ v_c(0) - v_c(\infty) \right] e^{-\frac{t}{\tau}} + v_c(\infty)$

c. iniz. — c. finale/di regime

Devo ricavare le tre quantità:

1. Trovo $v_c(0)$, condizione iniziale.

Devo ricavarla dai dati del problema con un ragionamento: sfrutto la proprietà di $v_c$ che è continua.

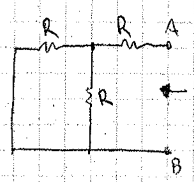



per $t \to 0$ il valore di $v_c$ non varia arrivando da sx o dx, ovvero rispettivamente $v_c(0^-)$ e $v_c(0^+) \Rightarrow \boxed{v_c(0^-) = v_c(0^+)}$.

- Prima di 0 l'interruttore è aperto ⇒ la condizione iniziale è $v_c(0^-) = 0$, perché il circuito è inerte, perciò anche per $t \geq 0$ ho $v_c(0^+) = 0 = v_c(0)$

2. Trovo $\tau$ costante di tempo.

$\boxed{\tau = C \cdot R_T}$ con $R_T$ = Req di Thevenin del resto del circuito che si collega al condensatore per un tempo $t \geq 0$, dopo la chiusura dell'interruttore. Calcolo $R_T$:



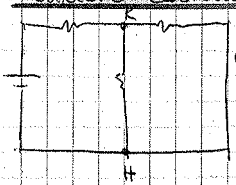

$\leftarrow R_T = \frac{3}{2} R \Rightarrow \tau = \frac{3}{2} CR$

3. Trovo condizione di regime $v_c(\infty)$

Per tempi grandissimi $(t \to \infty)$, x (ovvero $v_c$) non dipende dal tempo, CONDIZIONE STAZIONARIA del circuito = le variabili non dipendono dal tempo

(3) Trovo la condizione di regime $i_L(\infty)$

Il circuito è acceso, ma è a regime ⇒ non ho dipendenza dal tempo ⇒ variabili elettriche costanti




$v = L \frac{di}{dt}^{\,0} \Rightarrow \boxed{v = 0} \Rightarrow$ **CORTO CIRCUITO**

devo ottenere $i_L(\infty)$

- Calcolo con Millman $\quad v_{KH} = \dfrac{\frac{E_0}{R}}{\frac{3}{R}} = \dfrac{E_0}{3} \Rightarrow i_L = \dfrac{v_{KH}}{R} = \dfrac{E_0}{3R}$

→ Sostituisco: $\quad i_L(t) = \left[0 - \frac{E_0}{3R}\right] e^{-\frac{3Rt}{2L}} + \frac{E_0}{3R} = \frac{E_0}{3R}\left(1 - e^{-\frac{3Rt}{2L}}\right)$

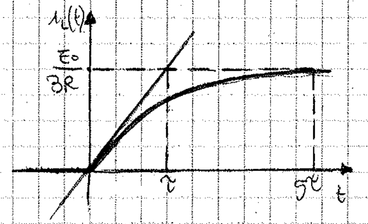
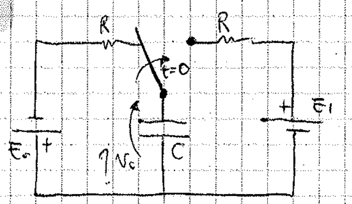


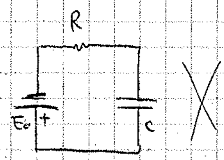

Grafico quotato

es

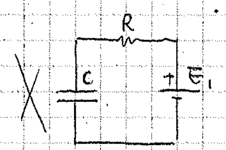



$E_0, E_1 > 0$

per $t < 0$



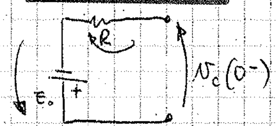

per $t \geq 0$




- per $t<0$

▶ Ipotizzo che prima del tempo $t=0$ il circuito sia stato del primo tipo per tantissimo tempo: $-\infty < t < 0 \Rightarrow$ CONDIZIONI STAZIONARIE: tutte le variabili elettriche sono costanti ⇒

$i = C \frac{dv}{dt}^{\,0} = 0 \Rightarrow$ condensatore = circuito aperto $(t = 0^-)$




$v_R = 0 \Rightarrow v_c(0^-) = -E_0$

- per $t>0$

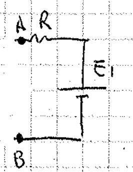
$v_c = \left[v_c(0) - v_c(\infty)\right] e^{-\frac{t}{\tau}} + v_c(\infty) \quad$ per $t > 0$

(1) Trovo la c.i. $v_c(0)$

Sfrutto che $v_c$ è continua ⇒ $v_c(0^-) = v_c(0^+) = -E_0 = v_c(0)$

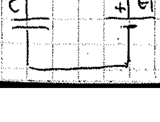
(2) Trovo $\tau$

$\tau = C R_T \quad$ con circuito per $t>0$

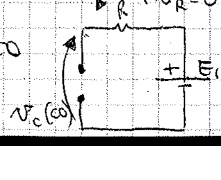



$\Rightarrow R_T = R \Rightarrow \tau = CR$

(3) Trovo la condizione a regime $v_c(\infty)$




Tutto è costante: $i = C \frac{dv_c}{dt} = 0 \Rightarrow$ circuito aperto

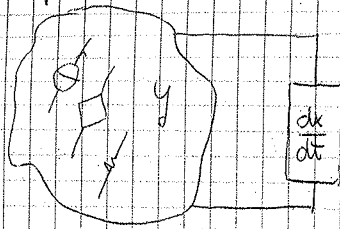


10-11-13

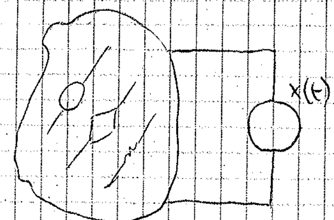
# TRANSITORI

(Hp) un solo el. differenziale
Gen indip costanti

(y) variabile elettrica generica (non una variabile di stato)
in generale non sono continue




se x è nota ⟶ per il teorema di sostituzione




• Posso scrivere y con la sovrapposizione degli effetti:

$$y = \underbrace{\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2 + \dots}_{\text{effetto dei gen interni: } U_0 \text{ (quantità costanti)}} + \beta \cdot x(t) \Rightarrow \boxed{y = U_0 + \beta(x(t))} \rightarrow x = \frac{y - U_0}{\beta}$$

• Analizzo la derivata rispetto al tempo $\frac{d}{dt}$

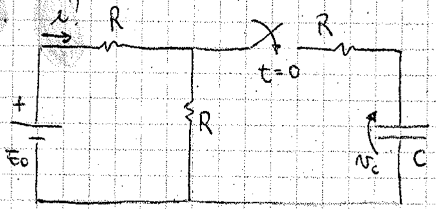
$$\frac{dy}{dt} = \cancel{\frac{dU_0}{dt}}^{\,0} + \beta\frac{dx}{dt} = \beta\left(\frac{S}{\tau} - \frac{x}{\tau}\right) = \frac{\beta S}{\tau} - \cancel{\beta}\frac{y - U_0}{\cancel{\beta}\tau}$$ eq. differenziale per la y

$$\boxed{\frac{dy}{dt} + \frac{y}{\tau} = \frac{\beta S + U_0}{\tau}}\ \Sigma$$ eq diff 1° ordine a coeff costanti non omogenea (termine noto cost)

• Soluzione: $\boxed{y(t) = [y(0) - y(\infty)]\, e^{-\frac{t}{\tau}} + y(\infty)}$ per $t \geq 0$

condiz iniziale → la y non è più continua ⇒ $y(0^+)$ è la quantità da trovare

es.




$$i(t) = [\overset{?}{i}(0^+) - \overset{?}{i}(\infty)]\, e^{-\frac{t}{\overset{?}{\tau}}} + i(\infty) \quad \text{per } t \geq 0$$

① Trovo la condizione iniziale $i(0^+)$

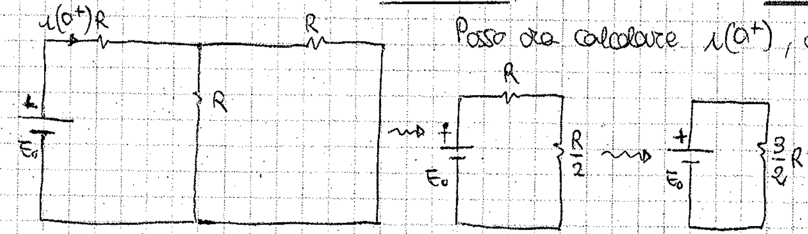
Inizio a trovare la c.i. di $v_c(0)$

a _ Trovo $v_c(0)$

per $t = 0^-$ circuito a destra inerte ⇒ $v_c(0^-) = 0 = v_c(0)$ per la continuità

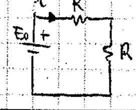
b _ Costruisco il circuito al tempo $0^+$ circuito che vale solo per un istante

Posso calcolare $i(0^+)$, quantità che mi serve.

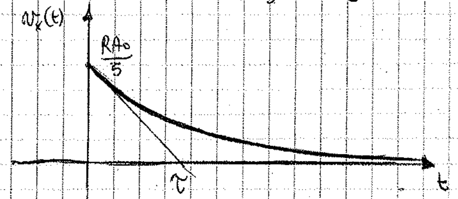



$$i(0^+) = \frac{E_0}{R + \frac{R}{2}} = \frac{2E_0}{3R}$$

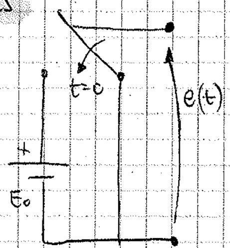
• Per $t < 0$ $i_c = \frac{E_0}{2R}$ dal circuito ad interruttore aperto:

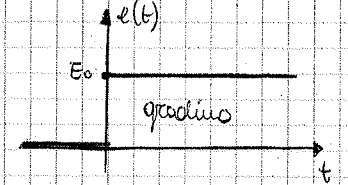


→ Sostituisco: $v_x(t) = \left[\frac{RA_0}{5} - 0\right] e^{-\frac{6Rt}{5L}} + 0$ per $t \geq 0$



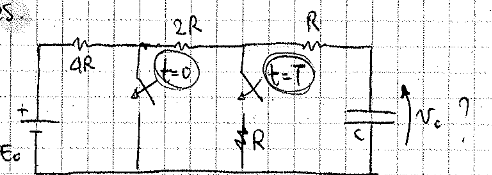

es




una funzione di questo tipo può funzionare: posso immaginare di sostituire un generatore con funzione a scalino all'apertura/chiusura di un interruttore.

es.



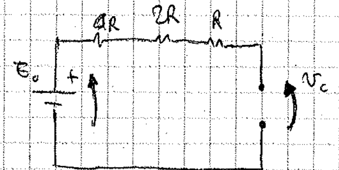

Più interruttori che commutano in istanti diversi

Inizio ad analizzare la soluzione a cavallo della prima commutazione (ignoro la seconda)

PARTE A Studio la soluzione a cavallo della prima commutazione $(t=0)$

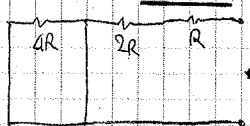
$$v_c^A(t) = \left[v_c^A(0) - v_c^A(\infty)\right] e^{-\frac{t}{\tau^A}} + v_c^A(\infty) \quad \text{per } t \geq 0$$

① Trovo $v_c^A(0^-)$ circuito in condiz. stazionarie ⇒ tutto costante ⇒ $i_c = 0$




$v_c = E_0$

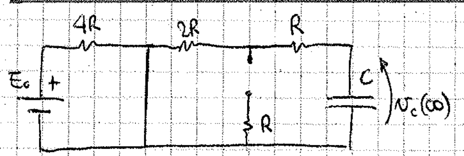
② Trovo $\tau^A = CR_T$




← $R_T = 3R$ $\tau = 3CR$

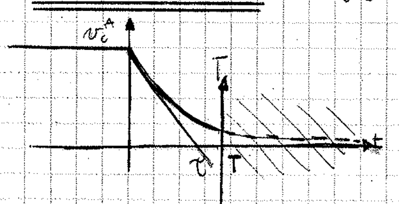
③ Trovo $v_c^A(\infty)$

Anche se il secondo interruttore ha già commutato, io lo ignoro




Circuito inerte a dx a causa del corto circuito: $v_c(\infty) = 0$

Soluzione Parte A: $v_c^A(t) = [E_0 - 0] e^{-\frac{t}{3CR}} + 0 = E_0\, e^{-\frac{t}{3CR}}$ per ~~$t \geq 0$~~ $0 \leq t \leq T$



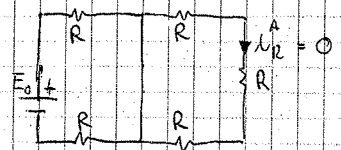
**PARTE A** soluzione a cavallo della prima commutazione $(t=0)$

$$i_R^A(t) = \left[i_R^A(0) - i_R^A(\infty)\right] e^{-\frac{t}{\tau}} + i_R^A(\infty) \quad \text{per } t \geq 0$$

① Condiz. iniziale $i_R^A(0^+)$

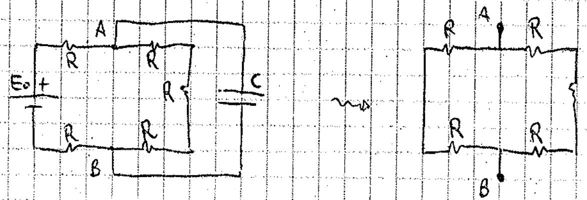
a_ trovo $v_c(0^-)$ : in $0^-$ il circuito è inerte $\Rightarrow v_C^A(0^-) = 0 = v_C^A(0^+)$ per continuità

b_ circuito a $0^+$ ; il condensatore è un corto circuito



② Calcolo $\tau^A = CR_T$

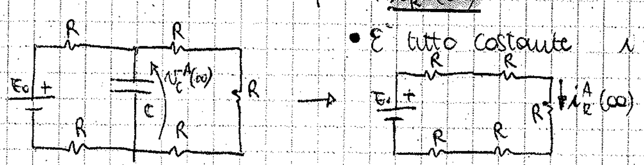
circuito per $t>0$



$R_T = \frac{6}{5}R$

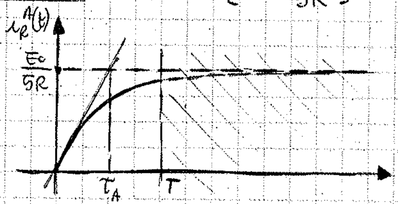
③ Calcolo condizione a regime $i_R^A(\infty)$

• È tutto costante $\quad i = C\frac{dv}{dt} = 0$



$$i_R^A(\infty) = \frac{E_0}{5R}$$

Soluz. A: $\quad i_R^A(t) = \left[0 - \frac{E_0}{5R}\right] e^{-\frac{5t}{6CR}} + \frac{E_0}{5R} = \frac{E_0}{5R}\left(1 - e^{-\frac{5t}{6CR}}\right) \quad$ per ~~$t>0$~~ $0 \leq t \leq T$



**PARTE B** soluzione dopo la seconda commutazione.

$t' = (t-T)$ la commutazione avviene a $t'=0$

$$i_R^B(t') = \left[i_R^B(0) - i_R^B(\infty)\right] e^{-\frac{t'}{\tau}} + i_R^B(\infty)$$

① Calcolo $i_R^B(0^+)$ c.i.

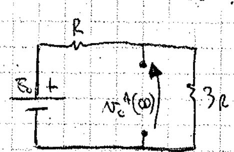
a_ Calcolo prima $v_c^B(0^+) = v_c^B(0^-) \equiv v_c^A(T)$

→ devo calcolare $v_c^A(t) = \left[\cancel{v_c^A(0)} - v_c^A(\infty)\right] e^{-\frac{t}{\tau^A}} + v_c^A(\infty) = \frac{3E_0}{5}\left(1 - e^{-\frac{5t}{6CR}}\right)$

0 perché il circuito inerte!

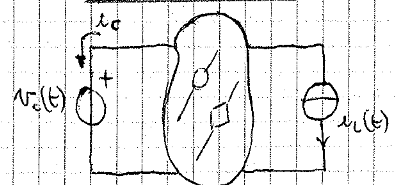
$\tau = \frac{6CR}{5}$ già calcolato

• per $v_c^A(\infty)$



$$v_c^A(\infty) = E_0 \cdot \frac{3R}{2R+3R} = \frac{3E_0}{5} \quad \text{(per partitore di tensione)}$$

Ora posso scrivere $\quad v_c^A(T) = \frac{3E_0}{5}\left(1 - e^{-\frac{5T}{6CR}}\right) = W$ costante con gen di corrente




- Per la sovrapposizione degli effetti: $i_c(t) = \alpha_c v_c + \alpha_L i_L + \underbrace{\beta_1 E_1 + \beta_2 E_2 + \dots + \eta_1 A_1 + \eta_2 A_2 + \dots}_{\text{contributo dei gen. interni } I_s}$

$v_L(t) = k_c v_c + K_L i_L + \underbrace{h_1 E_1 + h_2 E_2 + \dots + \ell_1 A_1 + \ell_2 A_2 + \dots}_{\text{contributi dei gen. interni } E_s}$

- So che per un condensatore posso scrivere: $i_c = C \frac{dv_c}{dt}$, sostituisco:

$C \frac{dv_c}{dt} = \alpha_c v_c + \alpha_L i_L + I_s$ ; divido per C : $\boxed{\frac{dv_c}{dt} = \frac{\alpha_c v_c}{C} + \frac{\alpha_L i_L}{C} + \frac{I_s}{C}}$

- Per un induttore $v_L = L \frac{di_L}{dt}$, sostituendo:

$L \frac{di_L}{dt} = k_c v_c + K_L i_L + E_s$ ; divido per L: $\boxed{\frac{di_L}{dt} = \frac{k_c v_c}{L} + \frac{K_L i_L}{L} + \frac{E_s}{L}}$

SISTEMA DI STATO DEL CIRCUITO
Sistema di 2 eq diff di primo ordine a coeff costanti nelle incognite: incognite $v_c$ e $i_L$ variabili di stato

- Definisco il vettore $\hat{x} = \begin{bmatrix} v_c \\ i_L \end{bmatrix}$ delle incognite e il vettore $\hat{u} = \begin{bmatrix} I_s/C \\ E_s/L \end{bmatrix}$ dei termini noti;

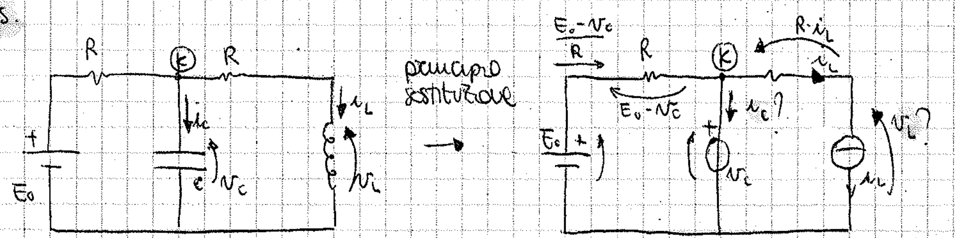
posso scrivere il sistema in forma matriciale:

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\alpha_c}{C} & \frac{\alpha_L}{C} \\ \frac{k_c}{L} & \frac{k_L}{L} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}} \text{ matrice dei coefficienti}} \cdot \hat{x} + \hat{u}$$

In generale un circuito con due elem. differenziali ha una eq. del tipo

$$\boxed{\frac{d}{dt}\underline{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \underline{x} + \underline{V_0}}$$

es.

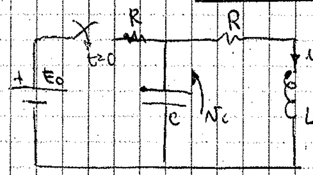



- KCL in (K) $\underset{\text{entra}}{\frac{E_0 - v_c}{R}} = \underset{\text{esce}}{i_c + i_L}$ $\rightsquigarrow$ $i_c = -\frac{v_c}{R} - i_L + \frac{E_0}{R}$ $\rightsquigarrow$ $C\frac{dv_c}{dt} = -\frac{v_c}{R} - i_L + \frac{E_0}{R}$

- KVL a dx: $v_c = R i_L + v_L$ $\rightsquigarrow$ $v_L = v_c - R i_L + 0$ $\rightsquigarrow$ $L \frac{di_L}{dt} = v_c - R i_L$

$v_c(t) = k_1 e^{p_1 t} + k_2 e^{p_2 t} + k_q$ ← soluz. a regime

- ci servono le **condizioni iniziali**: analizzo il circuito iniziale.



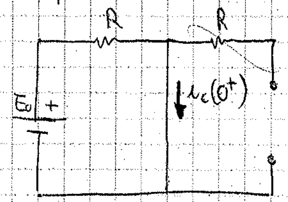

ⓐ $v_c(0^+) = v_c(0^-) = 0 \Rightarrow v_c(0) = 0$

per $t<0$ la parte a dx è inerte

ⓑ Ora voglio trovare $\left.\frac{dv_c}{dt}\right|_{0^+} = \left.\frac{i_c}{C}\right|_{0^+}$ — $i_c$ non è più una variabile continua ecco perché devo specificare $0^+$

- per $t<0$ dal circuito: $\begin{cases} v_c(0^-) = 0 \\ i_L(0^-) = 0 \end{cases}$

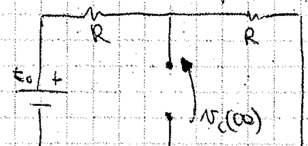
- disegno il circuito in $t = 0^+$: condensatore = corto circuito, induttore = c.to aperto




$i_c(0^+) = \frac{E_0}{R}$

→ ora posso scrivere $\left.\frac{i_c}{C}\right|_{0^+} = \frac{E_0}{CR}$

- **Soluzione a regime**: tutto costante ($k_q$)




$v_c(\infty) = \frac{E_0}{2} = k_q$ (partitore di tensione)

▸ Impongo $t=0$ nella soluzione: $v_c(0) = k_1 \cdot e^0 + k_2 \cdot e^0 + k_q$

Calcolo $\frac{dv_c}{dt}$ della soluzione: $\frac{dv_c}{dt} = k_1 p_1 e^{p_1 t} + k_2 p_2 e^{p_2 t} + 0$

Impongo $t=0$ nella derivata: $\left.\frac{dv_c}{dt}\right|_0 = k_1 p_1 \cdot e^0 + k_2 p_2 e^0$

**Equazioni per determinare i coeff $k_1$ e $k_2$:**

$$\begin{cases} \left(k_1 + k_2 + \frac{E_0}{2} = 0\right) \cdot p_1 \\ k_1 p_1 + k_2 p_2 - \frac{E_0}{CR} = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} k_1 p_1 + k_2 p_1 + \frac{E_0 p_1}{2} = 0 \\ k_1 p_1 + k_2 p_2 - \frac{E_0}{CR} = 0 \end{cases}$$

sottraggo membro a membro le due eq.

$\rightsquigarrow p_1 k_2 - k_2 p_2 + \frac{E_0}{2} p_1 + \frac{E_0}{CR} \rightsquigarrow k_2 = \frac{-E_0\left(\frac{p_1}{2} + \frac{1}{CR}\right)}{p_1 - p_2} \rightsquigarrow k_1 = -k_2 - \frac{E_0}{2} = \frac{E_0\left(\frac{p_1}{2} + \frac{1}{CR}\right)}{p_1 - p_2} - \frac{E_0}{2}$

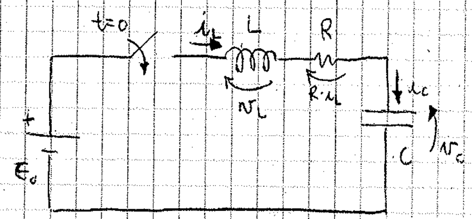
Ⓐ Soluzione completa $v_c(t)$ per $E_0 = 5V$, $R = 4\Omega$, $C = 1F$, $L = 1H$

$p_1 = -3{,}71$   $p_2 = -0{,}54$   $k_2 = -2{,}53$   $k_1 = 0{,}03$

$v_c(t) = 0{,}03 \cdot e^{-3{,}71t} - 2{,}53\, e^{-0{,}54t} + 2{,}5$ per $t>0$

27-11-13

es.




① Ricavo il sistema delle eq. di stato

Analizzo le variabili complementari $v_L$ e $i_c$

$$\begin{cases} i_c = i_L \\ v_L + v_c + R i_L = E_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C \dfrac{dv_c}{dt} = i_L \\ L \dfrac{di_L}{dt} = E_0 - v_c - R i_L \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dv_c}{dt} = \dfrac{1}{C} i_L \\ \dfrac{di_L}{dt} = -\dfrac{1}{L} \cdot v_c - \dfrac{R}{L} i_L + \dfrac{E_0}{L} \end{cases}$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} v_c \\ i_L \end{bmatrix} \qquad \frac{d}{dt}\underline{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \underline{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ E_0/L \end{bmatrix}}_{\underline{V_0}}$$

② Costruisco l'eq. differenziale del secondo ordine

$$\frac{d^2 v_c}{dt^2} - T \frac{dv_c}{dt} + \Delta v_c = Q_0 \Rightarrow \frac{d^2 v_c}{dt^2} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{2\alpha} \frac{dv_c}{dt} + \underbrace{\frac{1}{CL}}_{\omega_0^2} v_c = Q_0$$

③ Soluz. dell'eq differenziale

$$\boxed{v_c(t) = k_1 e^{p_1 t} + k_2 e^{p_2 t} + W}$$

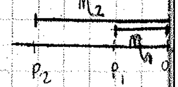
④ $p^2 + \frac{R}{L} p + \frac{1}{CL} p^0 = 0$ eq. caratteristica da risolvere, soluz reali distinte SOVRASMORZATO

$$p_{1,2} = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{R^2/L^2 - \frac{4}{CL}}}{2} = \begin{cases} p_1 = \left(-\frac{R}{2L} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{CL}}\right) < 0 \\ p_2 = \left(-\frac{R}{2L} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{CL}}\right) < 0 \end{cases}$$

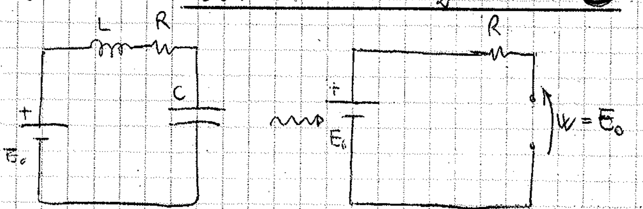
supponendo che $\left(\frac{R}{L}\right)^2 > \frac{4}{LC} \Rightarrow \boxed{\alpha^2 > \omega_0^2}$

e $p_2 < p_1$

Riscrivo le soluzioni $-\alpha \pm \frac{1}{2}\sqrt{4\alpha^2 - 4\omega_0^2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ → $p_1 = -(\eta_1)$, con $\eta_1 > 0$ → $p_2 = -\eta_2$, con $\eta_2 > 0$




• Soluzione $\underline{v_c(t) = k_1 e^{-\eta_1 t} + k_2 e^{-\eta_2 t}} + W$ → termine a regime ⇒ tutto è costante




Il condensatore diventa un circuito aperto

▶ Condizioni iniziali: per ricavare $k_1$ e $k_2$

• per $t = 0^-$ : circuito inerte ⇒ $i_L(0^-) = 0$ e $v_c(0^-) = 0$ ⇒ $\underline{v_c(0^+) = 0}$

$$\left.\frac{dv_c}{dt}\right|_{0^+}$$

$\Rightarrow$ le condizioni iniziali non variano: le impongo:

$$\begin{cases} v_c(0^+) = k_1' + k_2' + E_0 \\ \left.\dfrac{dv_c}{dt}\right|_{0^+} = (-\alpha + j\beta)k_1' e^{(-\alpha+j\beta)t} + (-\alpha - j\beta)k_2' e^{(-\alpha-j\beta)t} + 0 \Rightarrow k_1'(-\alpha+j\beta) + k_2'(-\alpha-j\beta) = 0 \end{cases}$$

• Risolvo il sistema:

$$\begin{cases} 0 = k_1' + k_2' + E_0 & (1) \\ 0 = k_1'(-\alpha+j\beta) + k_2'(-\alpha-j\beta) & (2) \end{cases}$$

moltiplico (1) per $-(-\alpha+j\beta)$ e sommo

$$0 = k_2'(\cancel{\alpha} - j\beta - \cancel{\alpha} - j\beta) - E_0(-\alpha+j\beta) \rightarrow k_2' = \frac{E_0(-\alpha+j\beta)}{-2j\beta}$$

$$k_1' = -\frac{k_2(-\alpha-j\beta)}{(-\alpha+j\beta)} = -\frac{E_0(-\alpha+j\beta)}{-2j\beta}\frac{(-\alpha-j\beta)}{(-\alpha+j\beta)} \Rightarrow k_1' = \frac{-E_0(\alpha+j\beta)}{2j\beta}$$

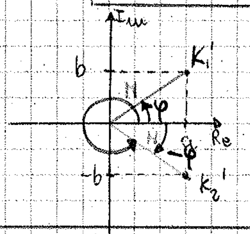
II • soluzione $v_c(t) = -\dfrac{E_0(+\alpha+j\beta)}{2j\beta} e^{(-\alpha+j\beta)t} + \dfrac{E_0(-\alpha+j\beta)}{-2j\beta} e^{(-\alpha-j\beta)t} + E_0$

$$k_1' = \frac{-E_0 j(\alpha+j\beta)}{-2\beta} = \frac{jE_0\alpha}{2\beta} - \frac{E_0\beta}{2\beta} \qquad k_2' = \frac{E_0 j(-\alpha+j\beta)}{2\beta} = -\frac{jE_0\alpha}{2\beta} - \frac{E_0}{2}$$

moltiplicando per $j$ sopra e sotto

$\Rightarrow$ ho dimostrato che anche $k_1'$ e $k_2'$ sono complessi coniugati: $k_1' = (k_2')^*$

| | | |
|---|---|---|
| In forma cartesiana | $k_1' = a + jb$ | |
| In forma polare | $k_1' = Me^{j\varphi}$ | |
| In forma cartesiana | $k_2' = a - jb$ | |
| In forma polare | $k_2' = Me^{-j\varphi}$ | |



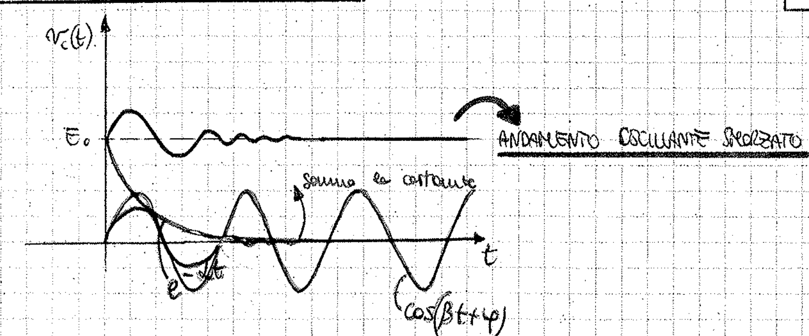

$\varphi$ è detto FASE

$\rightarrow$ Riscrivo $v_c(t) = Me^{j\varphi}e^{(-\alpha+j\beta)t} + Me^{-j\varphi}e^{(-\alpha-j\beta)t} + E_0 =$

$$= Me^{j\varphi}\cdot e^{-\alpha t}\cdot e^{j\beta t} + Me^{-j\varphi}\cdot e^{-\alpha t}e^{-j\beta t} + E_0 = 2Me^{-\alpha t}\left[\frac{e^{j(\varphi+\beta t)} + e^{-j(\varphi+\beta t)}}{2}\right] + E_0$$

uso la formula di eulero $\boxed{\dfrac{e^{jx}+e^{-jx}}{2} = \cos x}$ e $\boxed{\dfrac{e^{jx}-e^{-jx}}{2} = \sin x}$

$$\boxed{v_c(t) = 2Me^{-\alpha t}\cos(\beta t + \varphi) + E_0} \quad \text{per } (t>0)$$

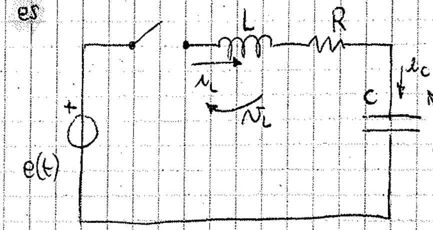



C CASO PARTICOLARE 1 $\boxed{\alpha = 0}$ OSCILLANTE NON SMORZATO

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= +j\beta \\ p_2 &= -j\beta \end{aligned}\right\} \quad \boxed{v_c(t) = 2M\cos(\beta t + \varphi) + E_0}$$

# ANALISI IN REGIME SINUSOIDALE

es

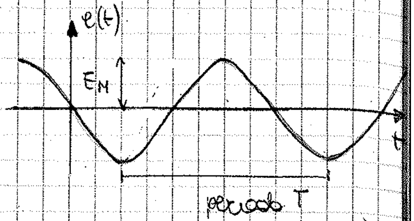



**GENERATORE SINUSOIDALE**

$$e(t) = E_M \left(\cos\left((\omega t + \theta)\right)\right)$$

ampiezza

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$




- eq differenziale: $\boxed{\frac{d^2 v_c}{dt^2} + \frac{R}{L}\cdot\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{CL} = u}$  $u$ dipende dal generatore $u = U_M \cos(\omega t + \psi)$

→ Soluzione $\boxed{v_c(t) = \underbrace{k_1 e^{p_1 t} + k_2 e^{p_2 t}}_{\text{soluz. dell'eq omogenea } v_{c,0}} + \underbrace{w_p}_{\text{SOLUZIONE PERMANENTE } v_{c,p}}}$

dipende dal generatore (è oscillante)

Potrei dire: $w_p = W_M \cos(\omega t + \varphi)$, ma se potizzo la soluzione devo verificarne la veridicità, andando a derivare ma esiste una soluzione più veloce.

▶ Uso la relazione di Eulero:

$$e(t) = E_M \cdot \frac{e^{j(\omega t + \theta)} + e^{-j(\omega t + \theta)}}{2}$$

- Anche l'ipotesi di soluz permanente è $w_p = W_M \cdot \frac{e^{j(\omega t + \varphi)} + e^{-j(\omega t + \varphi)}}{2}$

So che $w_p$ deve rispettare (soddisfare) l'eq differenziale

$$\frac{d^2 w_p}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dw_p}{dt} + \frac{w_p}{CL} = u$$

$$w_p = W_M \left( \frac{e^{j\omega t} e^{j\varphi} + e^{-j\omega t} \cdot e^{-j\varphi}}{2} \right)$$

$$\frac{dw_p}{dt} = W_M \left( \frac{e^{j\varphi}}{2} e^{j\omega t} \cdot j\omega + \frac{e^{-j\varphi}}{2} \cdot e^{-j\omega t}(-j\omega) \right) = \frac{j\omega W_M}{2}\left(e^{j\varphi} e^{j\omega t} - e^{-j\varphi} e^{-j\omega t}\right)$$

$$\frac{d^2 w_p}{dt^2} = \frac{j\omega W_M}{2}\left(j\omega e^{j\varphi} e^{j\omega t} + j\omega e^{-j\varphi} e^{-j\omega t}\right) = \frac{(j\omega)^2 W_M}{2}\left(e^{j\varphi} e^{j\omega t} + e^{-j\varphi} e^{-j\omega t}\right)$$

→ Scrivo l'eq differenziale sostituendo i termini ottenuti

$$(j\omega)^2 \frac{W_M}{2}\left(e^{j\varphi} e^{j\omega t} + e^{-j\varphi} e^{-j\omega t}\right) + \frac{R}{L} j\omega \frac{W_M}{2}\left(e^{j\varphi} e^{j\omega t} - e^{-j\varphi} e^{-j\omega t}\right) + \frac{W_M}{2LC}\left(e^{j\varphi} e^{j\omega t} + e^{-j\varphi} e^{-j\omega t}\right) =$$

$$= U_M \frac{1}{2}\left(e^{j\psi} e^{j\omega t} + e^{-j\psi} e^{-j\omega t}\right)$$

$$W_M e^{j\omega t} e^{j\varphi}\left[(j\omega)^2 + \frac{j\omega R}{L} + \frac{1}{LC}\right] + W_M e^{-j\omega t} e^{-j\varphi}\left[(j\omega)^2 - \frac{j\omega R}{L} + \frac{1}{LC}\right] = U_M e^{j\psi} e^{j\omega t} + U_M e^{-j\psi} e^{-j\omega t}$$

⇒ funzioni del tempo: le costanti da una parte all'altra devono coincidere!

$$\left\{W_M e^{j\varphi}\left[(j\omega)^2 + \frac{j\omega R}{L} + \frac{1}{LC}\right] - U_M e^{j\psi}\right\} e^{j\omega t} + \left\{W_M e^{-j\varphi}\left[(j\omega)^2 - \frac{j\omega R}{L} + \frac{1}{LC}\right] - U_M e^{-j\psi}\right\} e^{-j\omega t} = 0$$

I coefficienti moltiplicativi devono andare a zero: combinazione lineare $a f(t) + b f(t) = 0$

$\Rightarrow a = 0 \wedge b = 0$

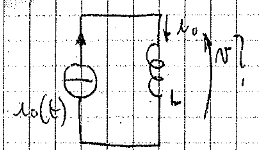
* quantità nota  ** quantità non nota

- dall'eq. di funzionamento del resistore: $i_R = \frac{e}{R} = \frac{E_M}{R}\cos(\omega t+\theta) \rightarrow \hat{I}_R = \frac{E_M}{R} e^{j\theta}$

Confronto il risultato con l'ipotesi di soluzione $I_R = W e^{j\alpha} = I_R = \frac{E_M}{R} e^{j\theta} = \frac{\hat{E}}{R}$

La legge di Ohm (eq. di funz. del resistore) vale anche tra fasori!

es. **INDUTTORE**



- $i_o(t) = I_M \cos(\omega t+\beta)$

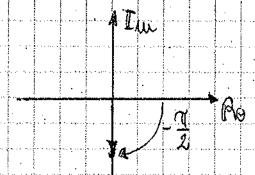
$v = L\frac{di_o}{dt} = -LI_M\omega \sin(\omega t+\beta)$

$\hat{I}_o = I_M e^{j\beta}$

- So sicuramente che $v$ sarà sinusoidale in condizioni permanenti: $v(t) = V_M\cos(\omega t+\delta)$
$\rightarrow \hat{V} = V_M e^{j\delta}$

- $v = -LI_M\omega\sin(\omega t+\beta) \rightarrow$ associo fasore $\rightarrow v = -LI_M\omega\cos(\omega t+\beta-\frac{\pi}{2})$
$\rightarrow \hat{V} = -\omega L I_M \cdot e^{j(\beta-\pi/2)} = -\omega L I_M e^{j\beta} e^{-j\pi/2} = j\omega L \underbrace{I_M e^{j\beta}}_{\hat{I}_o} \Rightarrow \hat{V} = j\omega L\hat{I}_o$

$e^{-j\pi/2}$ ottengo $= -j \cdot 1$

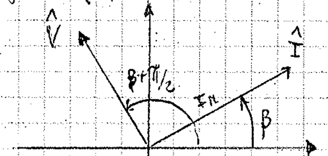


Esprimo in cartesiano $F_R = 0 \quad F_I = 1$

La legge differenziale dell'induttore, con i fasori, diventa una legge algebrica con i numeri complessi

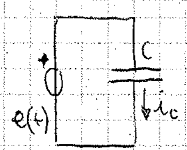
Analizzo $\hat{V} = (j\omega L)(\hat{I}_o)$ nel piano complesso (è un prodotto di numeri complessi)

$V = j\omega L\,(I_M e^{j\beta}) = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot I_M e^{j\beta} = \omega L I_M e^{j(\beta+\pi/2)}$



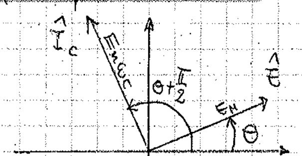
Il fasore della **tensione** è **IN ANTICIPO** di $\frac{\pi}{2}$ rispetto al fasore della **corrente**

es. **CONDENSATORE**



- $e(t) = E_M\cos(\omega t+\theta) \rightarrow \hat{E} = E_M e^{j\theta}$
- $i = C\frac{dv}{dt} = -CE_M\omega\sin(\omega t+\theta) = -CE_M\omega\cos(\omega t+\theta-\frac{\pi}{2})$
$\hookrightarrow \hat{I}_c = -CE_M\omega\, e^{j(\theta-\pi/2)} = -CE_M\omega\, e^{j\theta}\underbrace{e^{-j\frac{\pi}{2}}}_{-j\cdot 1} = j\omega C\underbrace{E_M e^{j\theta}}_{\hat{E}} = j\omega C\hat{E}$

L'eq. di funzionamento del condensatore è un'eq. algebrica con i numeri complessi.

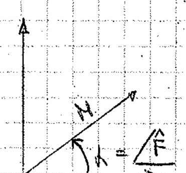


$\hat{I}_c = \omega C e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot E_M e^{j\theta} = E_M\omega C e^{j(\theta+\pi/2)}$

La **corrente** è in **anticipo** di $\frac{\pi}{2}$ rispetto alla tensione

NOTAZIONE: $\hat{F} = M e^{j\alpha}$

MODULO $|\hat{F}|$ — FASE $\angle\hat{F}$



② Risolvo il nuovo circuito

KVL $\hat{E} = R\hat{I} + j\omega L\hat{I} = (R + j\omega L)\hat{I} \Rightarrow \hat{I} = \dfrac{\hat{E}}{R + j\omega L}$

frequenza della rete di distribuzione dell'energia elettrica è 50 Hz ⇒ corrisponde $\omega = 100\pi \cong 314$ rad/s

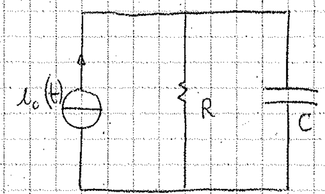
$\boxed{f = \frac{1}{T} \to T = \frac{1}{f}}$ $f = 50$ Hz ⇒ 50 oscillazioni in un secondo ⇒ $T = 20$ ms

→ nell'esempio R e L sono in serie

il fasore ha le stesse dimensioni della quantità di partenza, quindi anche $j\omega L$ ha dimensione $\Omega$, anche se si tratta di una quantità immaginaria, perciò posso sommarla a R → $\boxed{Z = (R + j\omega L)}$ ha dimensione $\Omega$ ma è un numero complesso, si chiama **IMPEDENZA** Z generalizzazione della resistenza quando si lavora con i numeri complessi (Z è un coeff di proporzionalità complesso ma non un fasore)

$Z \in \mathbb{C}$
- forma cartesiana $\boxed{Z = R + jX}$ — resistenza — **REATTANZA**
- forma polare $\boxed{Z = |Z|\, e^{j\angle Z} = |Z|\, e^{j\varphi}}$

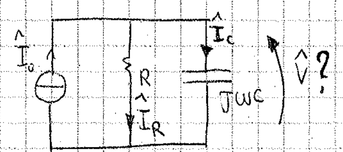
es **AMMETTENZA**



$i_0(t) = I_M \cos(\omega t + \beta)$

$\hookrightarrow \hat{I}_0 = I_M e^{j\beta}$

① Trasformo il circuito con i fasori



$\hat{I}_R = \dfrac{\hat{V}}{R}$ $\hat{I}_C = j\omega C\hat{V}$

② Risolvo KCL: $\underbrace{\hat{I}_0}_{entr} = \underbrace{\hat{I}_R + \hat{I}_C}_{usc}$ $\hat{I}_0 = \dfrac{\hat{V}}{R} + j\omega C\hat{V} = \left(\dfrac{1}{R} + j\omega C\right)\hat{V} \to \hat{V} = \dfrac{\hat{I}_0}{\frac{1}{R} + j\omega C}$

→ Circuito in //: il coeff. complesso ottenuto dal parallelo nella formula si indica con

$\boxed{Y = \left(\frac{1}{R} + j\omega C\right)}$ **AMMETTENZA** [S] siemens

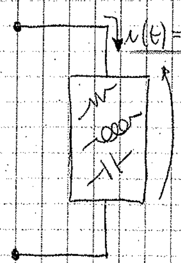
$Y \in \mathbb{C}$
- forma cartesiana $\boxed{Y = G + jB}$ — conduttanza — **SUSCETTANZA**
- forma polare $\boxed{Y = |Y|\, e^{j\angle}}$

Esplicito il primo passaggio:

$$\hat{V}_x = \frac{-\frac{E_M e^{j\alpha}}{R+j\omega L} + I_M e^{j\beta}}{\frac{1}{j\left(-\frac{1}{\omega C}\right)} + \frac{1}{R+j\omega L}}$$

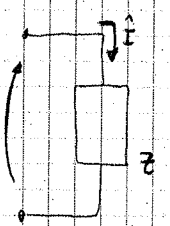
FATTORE DI POTENZA cos(∠V − ∠I) ... (ωt + M))

## POTENZA NEI CIRCUITI CON GENERATORI SINUSOIDALI



$i(t) = I_M \cos(\omega t + \alpha) \rightarrow \hat{I} = I_M e^{j\alpha} = |\hat{I}| e^{j\angle\hat{I}}$

$v(t) = V_M \cos(\omega t + \beta) \rightarrow \hat{V} = V_M e^{j\beta} = |\hat{V}| e^{j\angle V} \rightsquigarrow$



$\hat{V} = Z\hat{I}$

$$Z = \frac{\hat{V}}{\hat{I}} = \frac{|\hat{V}| e^{j\angle V}}{|\hat{I}| e^{j\angle I}} = \boxed{\underbrace{\frac{|\hat{V}|}{|\hat{I}|}}_{|Z|} e^{j\overbrace{(\angle V - \angle I)}^{\angle Z = \varphi}}}$$

(*) uso prostaferesi: $\boxed{\cos A \cos B = \frac{1}{2}\left[\cos(A+B) + \cos(A-B)\right]}$

## POTENZA ISTANTANEA

→ potenza $p = v \cdot i$ (definizione per le quantità fisiche) potenza istantanea

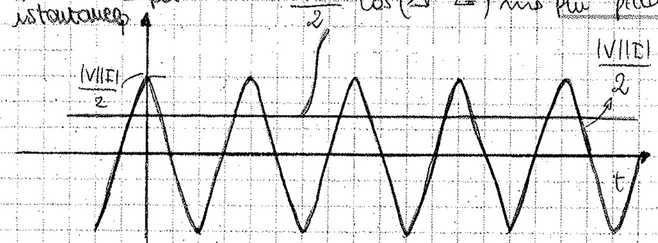
- $p = v\,i = |\hat{V}| \cos(\omega t + \angle V) \cdot |\hat{I}| \cos(\omega t + \angle I) = |V||I| \cos(\omega t + \angle V)\cos(\omega t + \angle I) \overset{(*)}{=}$

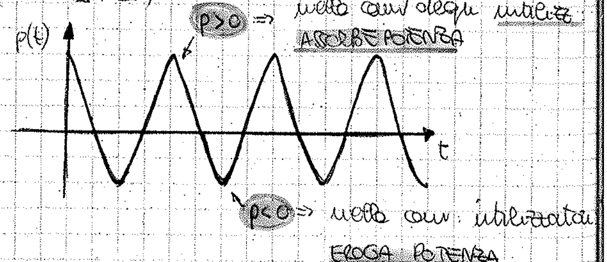
$= |V||I| \frac{1}{2}\left\{\cos(\omega t + \angle V + \omega t + \angle I) + \cos(\omega t + \angle V - \omega t - \angle I)\right\} = \frac{|V||I|}{2}\cos(2\omega t + \angle V + \angle I) +$

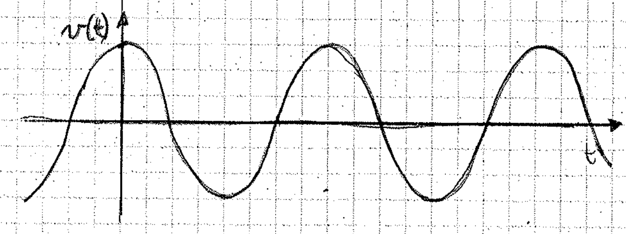
$+ \underbrace{\frac{|V||I|}{2}}_{\text{valor medio della pot istantanea}} \underbrace{\cos(\angle V - \angle I)}_{\text{FATTORE DI POTENZA}}$

la potenza ha puls. $2\omega$ → oscilla con freq. doppia rispetto al generatore.

$\frac{|V||I|}{2}\cos(\angle V - \angle I) \rightsquigarrow$ più piccolo del massimo




Il bipolo assorbe potenza per certi intervalli e la eroga in altri, facendo l'integrale la parte di pot. assorbita è maggiore (o al massimo uguale) a quella della potenza erogata) → perché ci sono elem. dinamici

Queste variazioni dei fenomeni elettrici sono molto rapide, noi non le percepiamo nei dispositivi elettrici (la potenza di frigoriferi o qualsiasi motorino elettrico è variabile, fornisce e sottrae potenza, quando la sottrae tende a frenare il motorino e provoca vibrazioni, anche se il motorino continua a muoversi per inerzia meccanica).

ho solo la potenza di tipo $p_R$ ($\operatorname{sen}\varphi = \operatorname{sen} 0 = 0$)

BIPOLO → **SOLO RESISTORI** $\quad Z_R \in Re$

$\varphi = \angle V - \angle I = 0 \rightarrow \begin{cases} p_R & \text{POTENZA ATTIVA MEDIA} \\ p_Q = 0 & \\ \text{media} & \frac{|V||I|}{2} \end{cases}$

**SOLO INDUTTORI** $\quad Z_L \in Im$

$\varphi = \frac{\pi}{2} \rightarrow \begin{cases} p_R = 0 & \text{(nessuna oscillaz } p_R) \\ p_Q & \text{POTENZA REATTIVA} \\ \text{ampiezza max} & \frac{|V||I|}{2} \end{cases}$

**SOLO CONDENSATORI** $\quad Z_C \in Im$

$\varphi = -\frac{\pi}{2} \rightarrow \begin{cases} p_R = 0 & \\ p_Q & \text{POTENZA REATTIVA} \\ \text{ampiezza max:} & \frac{|V||I|}{2} \end{cases}$

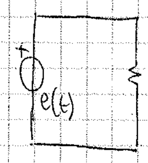
$\boxed{S = \frac{1}{2} V I^* = P + jQ}$ $\qquad$ $[P] = W$ $\qquad$ $\boxed{Q = |S| \operatorname{sen}\varphi}$

$[S] = VA$ voltampere

$[Q] = VAr$ voltampere reattivi

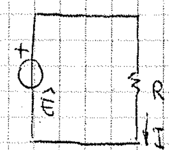
## FASORI CON VALORE EFFICACE

a) GEN. SINUSOIDALE




$e(t) = E_M \cos(\omega t + \alpha)$

$\hat{E} = E_M e^{j\alpha}$

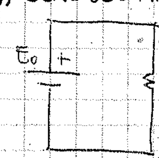



$I = \frac{\hat{E}}{R}$

potenza media $\quad P = \frac{|E||I|}{2} \cancel{\cos\varphi}^{1} = \frac{|E|^2}{2R}$

potenza reattiva: $Q = 0$

b) GEN. COSTANTE




$p = v i = \frac{E_0^2}{R}$ (con la stessa resistenza di prima)

$P = p$ devono essere uguali per avere lo stesso effetto (es. luminosità batteria)

$\frac{|E|^2}{2R} = \frac{E_0^2}{R} \rightarrow |E| = \sqrt{2}\, E_0$ $\quad$ ($|E| = E_M$) $\quad$ È un altro modo di definire il fasore: uso come modulo del fasore il valore di una batteria equivalente che mi dà lo stesso valore massimo.

Invece di definire il fasore $\hat{E}$ a partire dal valore max dell'oscillazione ($E_M$), posso anche definirlo a partire dal valore della batteria che dà lo stesso effetto: in tal caso $E_0 = \frac{E_M}{\sqrt{2}} = 0{,}707\, E_M$ **VALORE EFFICACE**

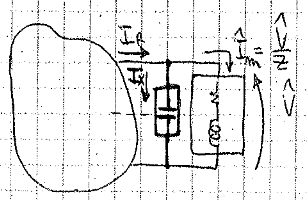
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 206

Da questi dati devo ricavare le grandezze elettriche.

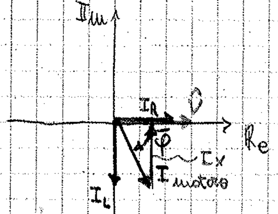
$$\begin{cases} P = \frac{1}{2}|V||I|\cos\varphi \\ Q = \frac{1}{2}|V||I|\operatorname{sen}\varphi \end{cases} \quad e \quad S = \underbrace{\frac{1}{2}R|I|^2}_{P} + j\underbrace{\frac{1}{2}X|I|^2}_{Q} \qquad \frac{P}{Q} = \frac{1}{tg\varphi} \quad \Big] \text{ definizioni}$$

$$\begin{cases} \bar{P} = \frac{1}{2}R|I|^2 \Rightarrow R = \frac{2\bar{P}}{4\bar{P}^2}(2\bar{V}_{eff}^2\,\overline{\cos^2\varphi}) = \frac{\bar{V}_{eff}^2\,\overline{\cos^2\varphi}}{\bar{P}} \\ \bar{P} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\bar{V}_{eff}|I|\overline{\cos\varphi} \Rightarrow |I| = \frac{2\bar{P}}{\sqrt{2}\,\bar{V}_{eff}\,\overline{\cos\varphi}} \\ Q = \bar{P}\,tg\bar{\varphi} = \frac{1}{2}X|I^2| \Rightarrow X = \frac{2\bar{P}\,tg\bar{\varphi}}{4\bar{P}^2}(2\bar{V}_{eff}^2\,\overline{\cos^2\varphi}) = \frac{tg\bar{\varphi}\,\bar{V}_{eff}^2\,\overline{\cos^2\varphi}}{\bar{P}} \end{cases}$$

Il costruttore dà dati facilmente misurabili, l'impedenza non è.
Se non viene data la fase del generatore per comodità la pongo $= 0$



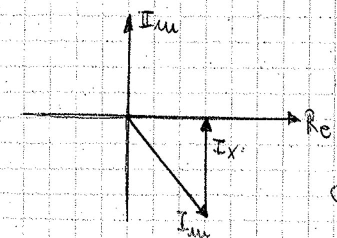
$\hat{V} = \bar{V}_{eff}\sqrt{2}$, $\varphi = 0$



$$\hat{I}_m = \frac{\sqrt{2}\,\bar{V}_{eff}}{|Z|\,e^{j\varphi}} \longrightarrow \hat{I}_m = \frac{\bar{V}_{eff}\sqrt{2}}{|Z|}e^{-j\bar{\varphi}} = \frac{\bar{V}_{eff}\sqrt{2}}{|Z|}\overline{\cos\varphi} - j\frac{\bar{V}_{eff}\sqrt{2}}{|Z|}\operatorname{sen}\bar{\varphi} \quad \text{(eulero)}$$

Il motore lavora a potenza fissa, cambia solo il $\cos\varphi$ → resistivo $\cos\varphi = 1$
→ anche induttivo $\cos\varphi < 1$

$I_m$ in modulo è grande o piccolo a seconda del valore di $\varphi$: per $\varphi' > \bar{\varphi}$ più piccolo $\cos\varphi'$ ⇒ più grande la corrente.
La minima corrente possibile è raggiunta con un motore di sole resistenze ($\overline{\cos\varphi} = 1$) ma un motore con induttanza ha corrente sempre più grande ⇒ più corrente passa, più i fili si riscaldano ⇒ energia sprecata da un motore legato ad una rete elettrica. L'enel fornisce al massimo la corrente necessaria per alimentare un motore formato da sole resistenze ⇒ la rete domestica rispetta questa clausola.
Posso pensare di sommare alla componente $I_m$ una componente $I_x$ che è puramente immaginaria ($-\pi/2$ rispetto alla tensione) ⇒ si tratta di un CONDENSATORE che richiede corrente $I_x$ che compensa parte della corrente $I_m$ cosicché la richiesta sia minore o uguale a $I_R$. Si tratta del CONDENSATORE DI RIFASAMENTO (riporta la corrente in fase con la tensione): posso capire il valore di questo condensatore.
↳ diminuisce $\varphi$ quindi diminuisce la corrente!

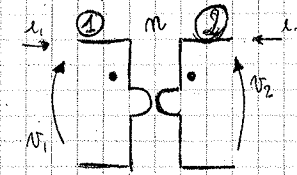


$$\begin{cases} |I_x| = |I_m|\operatorname{sen}\bar{\varphi} = \frac{2\bar{P}}{\sqrt{2}\,\bar{V}_{eff}\,\overline{\cos\varphi}}\operatorname{sen}\bar{\varphi} \rightarrow \text{proiezione di } I_m \text{ sull'asse } Im \\ \hat{V} = \bar{V}_{eff}\sqrt{2}\,e^{j0} = \underbrace{\frac{1}{j\omega C}}_{Z_C}\hat{I}_x \rightarrow \text{in modulo} \rightarrow \bar{V}_{eff}\sqrt{2} = \frac{1}{\omega C}|I_x| \end{cases}$$

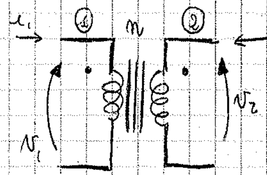
$$C = \frac{|I_x|}{\bar{\omega}\,\bar{V}_{eff}\sqrt{2}} = \frac{2\bar{P}}{\sqrt{2}\,\bar{V}_{eff}\,\overline{\cos\varphi}}\operatorname{sen}\bar{\varphi}\cdot\frac{1}{\bar{\omega}\,\bar{V}_{eff}\sqrt{2}} = \frac{tg\bar{\varphi}\,\bar{P}}{\bar{V}_{eff}^2\,\bar{\omega}}$$

Ottengo $N_1 i_1 + N_2 i_2 = 0$ **legge delle correnti**: $i_2 = -\frac{N_1}{N_2} i_1 \rightarrow \boxed{i_2 = -\frac{i_1}{n}}$

Ho ottenuto un **TRASFORMATORE IDEALE**: approssimazione di $\mu \rightarrow \infty$, perciò ideale, e trasforma una tensione in un'altra ed una corrente in un'altra.




oppure



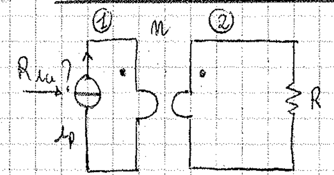

$$\boxed{\begin{cases} v_2 = n v_1 \\ i_2 = -\frac{i_1}{n} \end{cases}}$$ eq. FUNZIONAMENTO

**CONSIDERAZIONI SULLA POTENZA**

$p_1 = v_1 i_1$ — pot assorbita dal primario $\Leftarrow$ conv utilizz. $\Rightarrow$ $p_2 = v_2 i_2$ — pot assorbita dal secondario

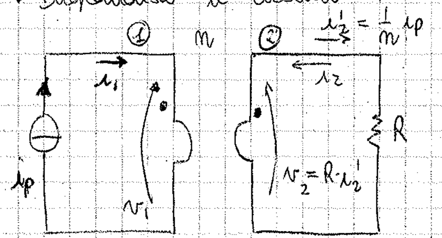
Riscrivo: $p_2 = n v_1 \left(-\frac{1}{n} i_1\right) = -v_1 i_1$ opposto della pot assorbita dal primario: la potenza assorbita dal primario è l'opposto di quella assorbita dal secondario $\Rightarrow$ il secondario genera la stessa potenza del primario $\Rightarrow$ si tratta di un trasformatore ideale: **ELEMENTO NEUTRO dal punto di vista energetico**

es. **TRASFORMAZIONE DI IMPEDENZA**




Devo usare un generatore di corrente $i_p$ di prova

→ Ingrandisce il circuito:




- $i_1 = i_p$
- $i_2 = -\frac{1}{n} i_1 = -\frac{1}{n} i_p$
  
  $i_2' = -i_2$
- $v_2 = R \cdot i_2' = \frac{R}{n} i_p$

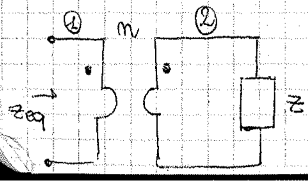
$v_1 = \frac{v_2}{n} = \frac{R}{n^2} i_p$

▶ $R_{in} = \frac{v_1}{i_p} \Rightarrow \frac{v_1}{i_p} = \boxed{\frac{R}{n^2} = R_{in}}$ a seconda del valore di n, $R_{in}$ può essere più piccolo o più grande di R

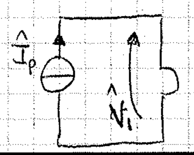
es

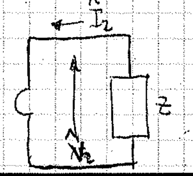
In regime sinusoidale → uso i fasori

$$\begin{cases} \hat{V}_2 = n \hat{V}_1 \\ \hat{I}_2 = -\frac{1}{n} \hat{I}_1 \end{cases}$$




→



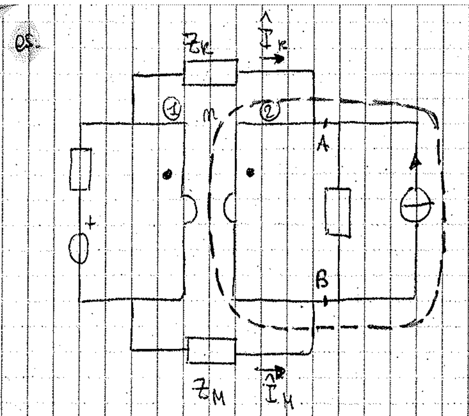




- $\hat{I}_2 = -\frac{1}{n} \hat{I}_p$
- $\hat{V}_2 = Z \cdot \frac{1}{n} I_p$

$\hat{V}_1 = \frac{\hat{V}_2}{n} = \frac{Z}{n^2} \hat{I}_p$

$$\boxed{Z_{eq} = \frac{\hat{V}_1}{\hat{I}_p} = \frac{Z}{n^2}}$$

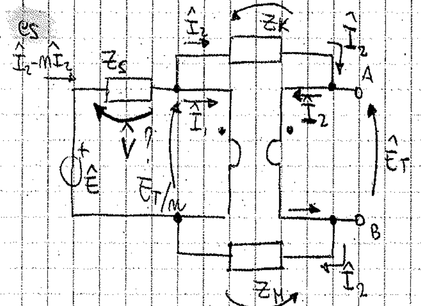
es.



(KCL) $I_K = -I_M$

non posso più trascurare gli elementi a ponte

es



• $\hat{I}_1 = -m\hat{I}_2$ , • $\hat{V}_2 = \hat{E}_T$ , • $\hat{V}_1 = \frac{\hat{V}_2}{m} = \frac{\hat{E}_T}{m}$

• KVL: $\hat{E} = Z_s(\hat{I}_2 - m\hat{I}_2) + \frac{\hat{E}_T}{m}$

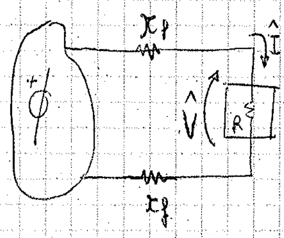
• KVL esterno: $\hat{E} = Z_s(\hat{I}_2 - m\hat{I}_2) + Z_k\hat{I}_2 + \hat{E}_T + Z_M\hat{I}_2$

Da questa eq posso ricavare $\hat{I}_2$

$$\hat{I}_2 = \frac{\hat{E} - \hat{E}_T}{Z_s - mZ_s + Z_k + Z_M}$$

$$\Rightarrow \hat{V} = \hat{E} - \frac{\hat{E}_T}{m} = (Z_s - mZ_s)\frac{\hat{E} - \hat{E}_T}{Z_s - mZ_s + Z_k + Z_M} = Z_s(\hat{I}_2 - m\hat{I}_2)$$

**APPLICAZIONE**



• Dati di targa: $f$, $\bar{P}$, $\bar{V}_{eff}$, $\cos\varphi = 1$ (per semplicità)

$$\left(\bar{P} = \frac{1}{2}|V||I|\cancel{\cos\varphi} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\bar{V}_{eff}\frac{|V|}{R} = \frac{1}{2R}(\sqrt{2}\,\bar{V}_{eff})^2\right)$$

$$\rightarrow \bar{P} = \frac{1}{2}|V||I|\cancel{\cos\varphi} = \frac{1}{2}|I|R|I| = \frac{R}{2}|I|^2 \Rightarrow \boxed{|I| = \sqrt{\frac{2\bar{P}}{R}}}$$

I fili che trasportano la corrente oppongono resistenza: $r_f$, perché sono molto lunghi; ognuno dei fili ha potenza dissipata: $P_{df} = 2\cdot\frac{1}{2}r_f|I|^2$ POTENZA COMPLESSIVA PERSA

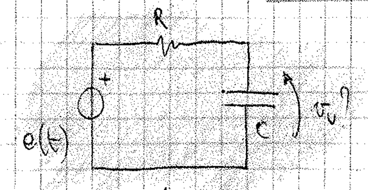
$$\boxed{P_{df} = r_f\frac{2\bar{P}}{R} = 2\underbrace{\frac{r_f}{R}}\bar{P}}$$

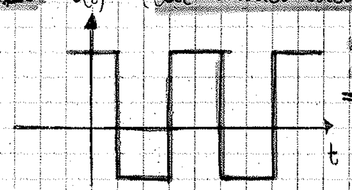
la pot dissipata è una certa percentuale di $\bar{P}$, perciò chi genera corrente deve garantire una potenza $P_{gen} = \bar{P} + P_{df}$

Suppongo $R \simeq$ decina di $\Omega$, $r_f \simeq \frac{1}{2} \div 1\ \Omega$ } $P_{df} = \frac{1}{10}\bar{P} \Rightarrow$ 10% in più di potenza da generare

→ energeticamente non è sostenibile: ecco perché non si collegano direttamente i fili alla rete elettrica ma si usano trasformatori

Caso particolare: **FILTRO PASSA-BASSO** (con condensatore)

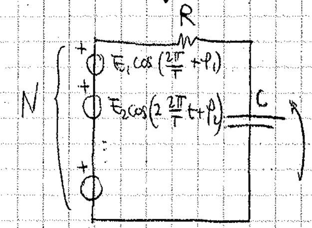



Serie di Fourier $\Rightarrow$ $e(t) = \sum_{k=1}^{\infty} E_k \cos\left(k\frac{2\pi}{T}t + \varphi_k\right) \approx$

$\approx \sum_{k=1}^{N} E_k \cos\left(k\frac{2\pi}{T}t + \varphi_k\right)$

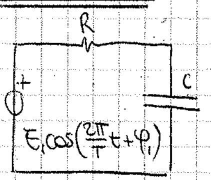
$\Downarrow$



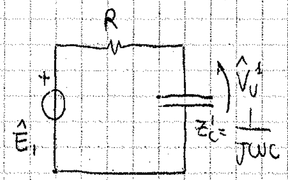

$v_U ? = v_u^{(1)}(t) + v_u^{(2)}(t) + \dots + v_u^{(N)}(t)$

Applico la sovrapposizione degli effetti:

① contributo




Regime fasoriale $\Rightarrow$




$\hat{E}_1 = E_1 e^{j\varphi_1}$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$

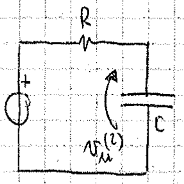
$\rightarrow$ Applico il partitore di tensione:

$\hat{V}_u^{(1)} = \hat{E}_1 \frac{Z_C^1}{R + Z_C^1} = V_M^{(1)} e^{j\alpha_1} \rightarrow$

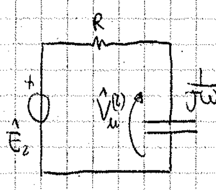
$\rightarrow v_u^{(1)}(t) = V_M^{(1)} \cos(\omega t + \alpha_1)$

② contributo

$E_2 \cos\left(2\frac{2\pi}{T}t + \varphi_2\right)$




Regime fasoriale $\Rightarrow$




$\hat{V}_u^{(2)} = \hat{E}_2 \frac{Z_C^2}{R + Z_C^2} = V_M^{(2)} e^{j\alpha_2} \rightarrow$

$\rightarrow v_u^{(2)}(t) = \hat{V}_M^{(2)} \cos\left(2\frac{2\pi}{T}t + \alpha_2\right)$

$\hat{E}_2 = E_2 e^{j\varphi_2}$ $\omega = \frac{4\pi}{T} = 2 \cdot \frac{2\pi}{T}$

La forma dei risultati nei due passi è uguale, anche se i valori sono diversi: mi basta risolvere il circuito una sola volta e lasciare $\omega$ non fissato.

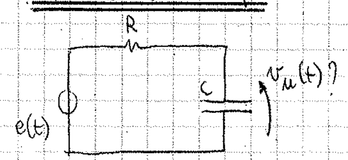
$$\boxed{\hat{V}_u^{(k)} = \hat{E}_k \frac{Z_C|_{\omega_k}}{R + Z_C|_{\omega_k}}} \qquad \boxed{H = \frac{\hat{V}_U^{(k)}}{\hat{E}_k} = \frac{Z_C}{R + Z_C}}$$

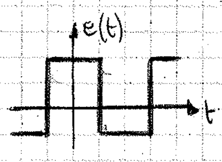
dipende solo dal circuito e non dal generatore: FUNZIONE DI TRASFERIMENTO H (coeff che trasferisce l'effetto del generatore sul risultato), $H \in \mathbb{C}$

$H(\omega) = \frac{\text{fasore della risposta}}{\text{fasore di ingresso}}$

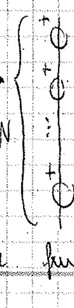
$\boxed{H = |H| e^{j\angle H}}$

▶ Riparto da capo



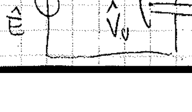




$\xRightarrow{F}$



$N \begin{cases} E_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_1\right) = e^{(1)} \\ E_2 \cos\left(2\frac{2\pi}{T}t + \varphi_2\right) = e^{(2)} \\ \vdots \\ E_N \cos\left(N\frac{2\pi}{T}t + \varphi_N\right) = e^{(N)} \end{cases}$

• Basta risolvere un circuito per trovare la funzione di trasferimento FdT



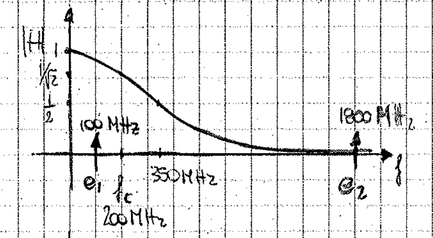

($\omega$ generico)

$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$ $H = \frac{\hat{V}_U}{\hat{E}}$ per partitore $\hat{V}_U = \hat{E} \cdot \frac{Z_C}{R + Z_C} = \hat{E} \cdot \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \hat{E} \cdot \frac{1}{j\omega CR + 1}$

* moltiplico e divido per $j\omega C$

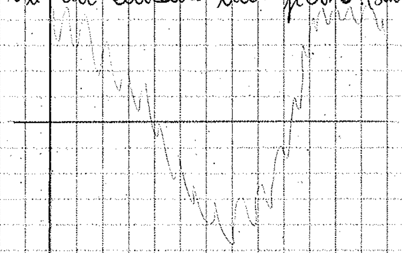
All'ingresso del ricevitore sono portati tutti i segnali, ma se ho bisogno di uno solo di essi devo avere un filtro.
Nel circuito dell'esempio posso calcolare che freq. ferma

$$f_c = \frac{1}{2\pi CR} = \frac{1}{2\pi \cdot 10 \cdot 10^{-12} \cdot 75} \cong \frac{1}{500 \cdot 10^{-11}} = \frac{1}{5}\cdot 10^{9} = 0,2\ GHz = 200\ MHz$$




fa passare quasi inalterata la freq radio di 100 MHz, mentre non fa passare quella di 1800 MHz.

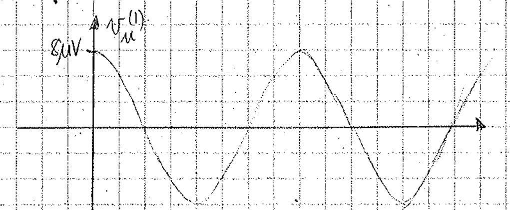
• $v_u$ all'entrata nel filtro (sull'antenna):

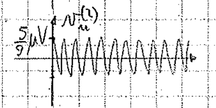


• $v_u$ all'uscita dal filtro:

$$v_u = \overbrace{H\big|_{f=100MHz} \cdot e_1}^{v_u^{(1)}} + \overbrace{H\big|_{f=1,8GHz} \cdot e_2}^{v_u^{(2)}}$$

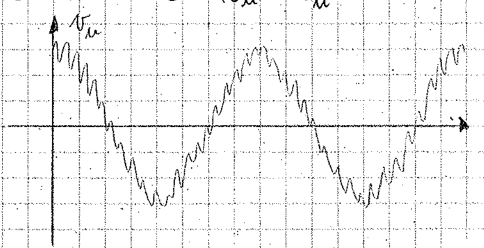
$$\frac{1}{\sqrt{1+(1/2)^2}} \cong \frac{2}{\sqrt{5}} \cong 0,8 \div 0,9 \qquad \frac{1}{\sqrt{1+9^2}} \cong \frac{1}{9}$$



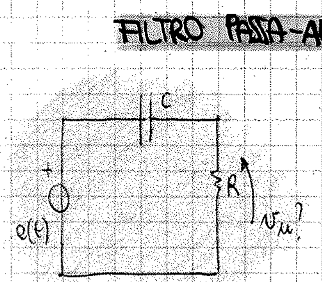

⇓

sul ricevitore $v_u^{(1)} + v_u^{(2)}$

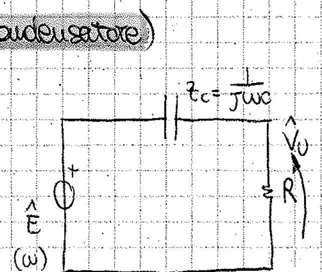



all'ingresso del ricevitore radio il filtro ha portato solo il segnale di cui avevo bisogno

## FILTRO PASSA-ALTO (con condensatore)




FdT →




• $H = \frac{\hat{V}_u}{\hat{E}}$ • $\hat{V}_u = \hat{E}\,\frac{R}{R+Z_c}$ (partitore di tens)

$$H = \frac{R}{R+\frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega CR}{j\omega CR+1} = H(j\omega) \Rightarrow H(f) = \frac{j2\pi f CR}{j2\pi f CR+1} = \frac{jf}{jf+\frac{1}{2\pi CR}} = \frac{jf}{jf+f_c} = \boxed{\frac{j\,f/f_c}{1+j\,f/f_c}} = H(f)$$

moltiplico tutto per $j\omega C$

$f_c = \frac{1}{2\pi CR}$

| $\lvert H \rvert$ | $\lvert H \rvert_{dB}$ |
|---|---|
| 1 | 0 dB |
| 10 | 20 dB |
| 1000 | 60 dB |
| 2 | 6 dB |
| $\sqrt{2}$ | 3 dB |
| $1/2$ | -6 dB |
| $1/\sqrt{2}$ | -3 dB |
| $1/10$ | -20 dB |
| $1/100$ | -40 dB |

Mentre il modulo è sempre positivo, in dB può assumere anche valori negativi

# 1° CASO: PASSA-BASSO

$$|H| = \frac{1}{\sqrt{1+(f/f_c)^2}} \rightarrow |H|_{dB} = 20\log_{10}\frac{1}{\sqrt{1+(f/f_c)^2}} = \cancel{20\log_{10}1} - 20\log_{10}\sqrt{1+(f/f_c)^2} =$$

$$= -20\cdot\frac{1}{2}\log_{10}\left(1+(f/f_c)^2\right) \Rightarrow \boxed{|H|_{dB} = -10\log_{10}\left[1+(f/f_c)^2\right]}$$

• $f \ll f_c$

$$\left(1+(f/f_c)^2\right) \sim 1 \Rightarrow |H|_{dB} \cong 0$$

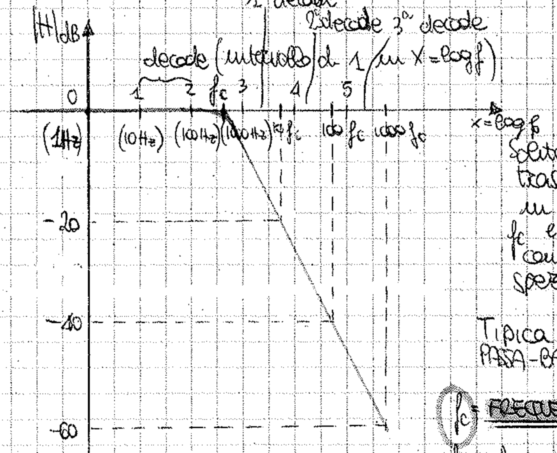
• per $f = f_c \Rightarrow |H|_{dB} = -3$

• $f \gg f_c$

$$\left(1+(f/f_c)^2\right) \sim \left(\frac{f}{f_c}\right)^2 \Rightarrow |H|_{dB} = -10\log_{10}\left(\frac{f}{f_c}\right)^2 = -20\log_{10}(f/f_c) =$$

$$= -20\underbrace{\log_{10}f}_{x} + \underbrace{20\log_{10}f_c}_{\text{è un numero}}$$

si ottiene l'eq di una retta con coeff angolare negativo




Pendenza di -20 dB per decade

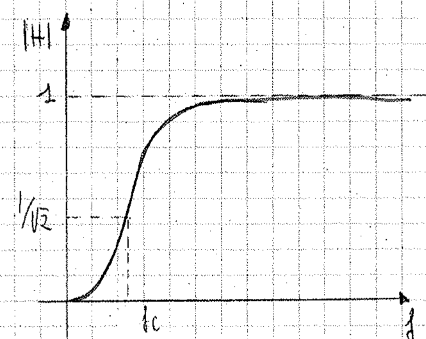
Solitamente si trascura il salto in prossimità di $f_c$ e si approssima con due linee spezzate

Tipica curva del PASSA-BASSO:

$f_c$ = FREQUENZA DI TAGLIO: dopo $f_c$ perde di 20 dB per decade

# 2° CASO: PASSA-ALTO

$$H = \frac{j\, f/f_c}{1+j\, f/f_c}$$

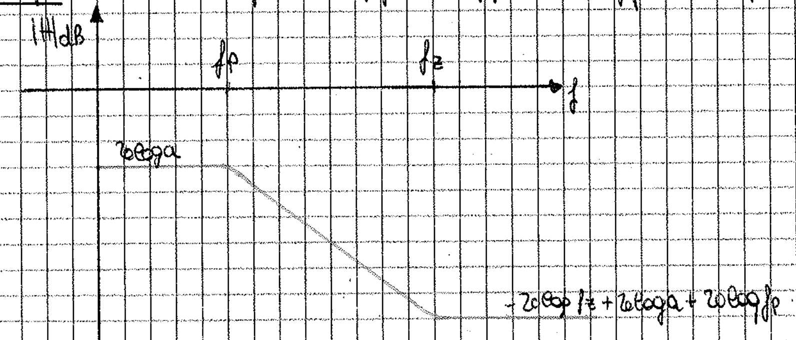



classica curva di un filtro passa-alto

(6) (1P) $f_z >> f_p$

• $f << f_p$ $|H|_{dB} = 20\log a$ • $f = f_p \to |H|_{dB} = 20\log a - 3$ • $f_p < f < f_z$ $|H|_{dB} = 20\log a +$
$-10\log\left(f/f_p\right)^2 = 20\log a - 20\log\left(f/f_p\right) = 20\log a - 20\underbrace{\log f}_{x} + 20\log f_p = -20x + cost$

• $f >> f_z$ $|H|_{dB} = 20\log a + \cancel{20\log f} - 20\log f_z - \cancel{20\log f} + 20\log f_p$

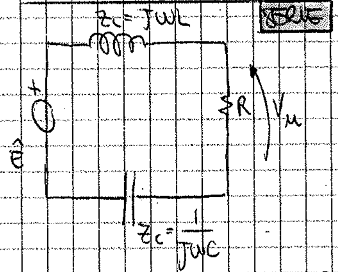



tipo **PASSA-BASSO**

# CASO 3

**FILTRO PASSA-BANDA** : presenta sia induttore che condensatore.

**SERIE**




$H = \frac{\hat V_u}{\hat E}$ Due elementi differenziali

▶ Calcolo impedenza della serie: $Z_s = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\cdot\frac{j}{j} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ differenza tra due numeri positivi.

$\omega_0^2 LC = 1 \to \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

Per avere parte immaginaria nulla deve essere $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ $(\Rightarrow Z_c = R)$ : ovvero $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}}$ : valore particolare di frequenza dipendente dagli elementi del circuito per cui l'impedenza è puramente reale **PULSAZIONE DI RISONANZA**. La corrispondente **FREQUENZA DI RISONANZA** è $\boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$. Riscrivo $Z_s$ mettendo in evidenza $\omega_0$:

• $Z_s = R\left(1 + j\left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega C R}\right)\right) = R\left[1 + j\left(\frac{\omega L}{R}\cdot\frac{C}{C} - \frac{1}{\omega C R}\cdot\frac{L}{L}\right)\right] = R\left[1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0^2 RC} - \frac{\omega_0^2 L}{\omega R}\right)\right] =$

$= R\left[1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0 RC\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\frac{L\omega_0}{R}\right)\right]$

• Confronto $\frac{1}{RC\omega_0}$ con $\frac{L\omega_0}{R}$ $\to$ $\frac{\sqrt{LC}}{RC}$ cfr $\frac{L}{R\sqrt{LC}}$ $\to$ $\frac{\sqrt{L}}{R\sqrt{C}}$ cfr $\boxed{\frac{\sqrt{L}}{R\sqrt{C}} = Q_s}$ corrispondono!

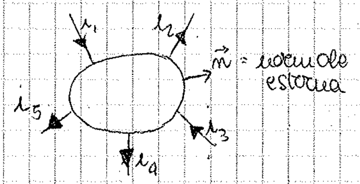
Ottengo $Z_s = R\left[1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0}Q_s - \frac{\omega_0}{\omega}Q_s\right)\right] = \boxed{R\left[1 + jQ_s\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right] = Z_s}$

▶ Per il partitore di tensione ottengo $\hat V_u = \hat E\frac{R}{Z_s}$

▶ Ottengo la funz. di trasferimento $\boxed{H = \frac{\hat V_u}{\hat E} = \frac{R}{Z_s} = \frac{1}{1 + jQ_s\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} = \frac{1}{1 + jQ_s\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)}}$

09-10-13

LEGGI DI KIRCHHOFF

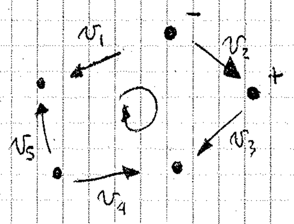



KCL:

$-i_1 + i_2 - i_3 + i_4 + i_5 = 0$

Caso limite: superficie che collassa in un nodo

$i_2 = i_1 + i_3 - i_4 - i_5$ (regola)

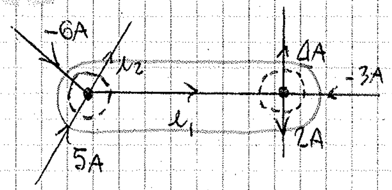



KVL: vale tra punti dove il potenziale è diverso

$-v_1 + v_2 + v_3 - v_4 + v_5 = 0$

posso ottenere $v_2 = v_1 + v_4 - v_3 - v_5$ (regola)

Es 1.1




$i_1, i_2$ ?

- KCL: $-i_1 + 2 + 4 - (-3) = 0 \rightsquigarrow i_1 = 9A$

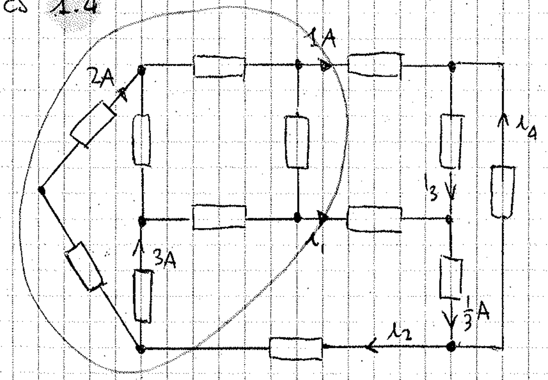
Applico la regola: $i_1 = \underbrace{2+4-(-3)}_{\text{uscenti - entranti}} = 9A$

- $i_2 + i_1 - (-6) - 5 = 0 \rightsquigarrow i_2 = -10A$

→ Posso determinare direttamente $i_2$ senza fare il calcolo su $i_1$? Sì, perché la kcl è applicabile ad una superficie qualsiasi! Sulla superficie arancio ho solo $i_2$ come incognita (l'unica inc. che la attraversa è $i_2$)

KCL: $i_2 - (-6) - 5 + 2 - (-3) + 4 = 0 \rightsquigarrow i_2 = -10A$

Es 1.4




1° modo: ricavare le grandezze ai nodi

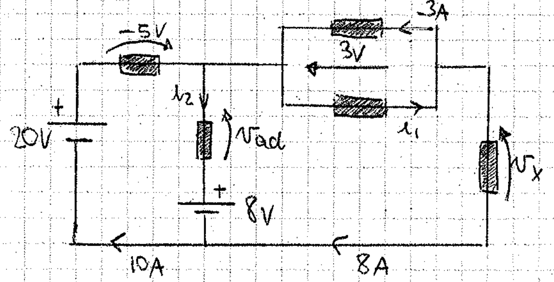
$i_2 = 3 + 2 = 5A$

$i_4 = \frac{1}{3} - i_2 = \frac{1}{3} - 5 = -\frac{14}{3}$

$i_3 = 1 + i_4 = -\frac{11}{3}$

$i_1 = -i_3 + \frac{1}{3} = 4A$

## Es 2.4




$i_1, i_2, v$ ;

$i_1 = -3 + 8 = 5A$

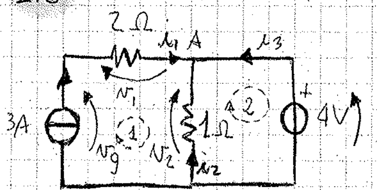
$i_2 = 10 - 8 = 2A$

Uso la maglia esterna e applico KVL:

- $v_x = 12V$
- $-v_{ad} + 20 - 5 - 8 = 0 \rightsquigarrow v_{ad} = 7V$

16-10-13

## 2.6




Potenza fornita ad ogni elemento $p^{ass}$ ? (convenzione utilizz.)

Inserisco le grandezze elettriche in modo arbitrario

- KVL: maglia 1: $v_g - v_1 - v_2 = 0$
  - maglia 2: $v_2 - 4 = 0$
- KCL: nodo A: $i_1 + i_2 + i_3 = 0$
- Relazioni costitutive: $v_1 = 2 i_1$ ; $v_2 = -1 \cdot i_2$

→ Sostituendo ottengo:

$-1 \cdot i_2 - 4 = 0 \rightarrow i_2 = -4A$ , $i_1 = 3A$

$v_g = v_1 + v_2 = 6 + 4 = 10V$

$v_1 = 6V$

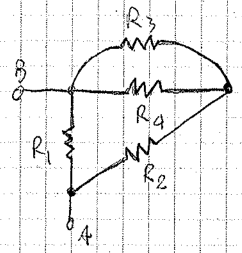
$i_3 = -i_1 - i_2 = -3 - (-4) = 1A$

Ora posso calcolare le $p^a$ $<0$ (GENERATORE)

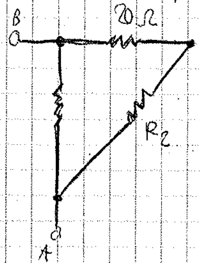
- $p^a_{3A} = -(3) \cdot v_g = -3 \cdot 10 = -30W$ (sono in convenzione dei generatori => devo cambiare segno!
- $p^a_{2\Omega} = i_1 v_1 = 6 \cdot 3 = 18 W = R_1 \cdot i_1^2 = v_1^2 / R_1$
- $p^a_{1\Omega} = -v_2 \cdot i_2 = -4 \cdot (-4) = 16 W$
- $p^a_{4V} = -(4) \cdot i_3 = -4 \cdot 1 = -4 W < 0$ (GENERATORE)

So che $\boxed{\sum_k p^a_k = 0}$ TELLING

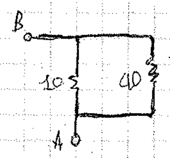
→ Ridisegno il circuito facendo collassare in un punto il corto circuito a ponte:




$R_3 // R_4 = 20\,\Omega$



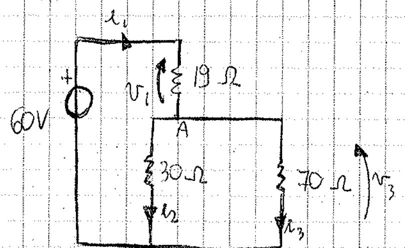

$20\,\Omega$ serie $R_2 = 40\,\Omega$




$10 // 40 = 8\,\Omega$

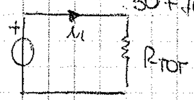
## PARTITORI DI TENSIONE E CORRENTE

2.14




Posso procedere in vari modi

- $R_{TOT} = 19 + \frac{30 \cdot 70}{30+70} = 40\,\Omega$




$i_1 = \frac{60}{40} = \frac{3}{2}\,A$

- Poi uso partitore di corrente: $i_2 = \frac{70}{70+30} \cdot i_1 = \frac{7}{10} \cdot 3/2 = 1{,}05\,A$

- Applico nuovamente il partitore

$i_3 = \frac{30}{30+70} \cdot i_1 = 0{,}45\,A$

In alternativa uso la KCL al nodo A:

Con la legge di Ohm trovo le tensioni

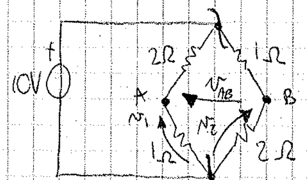
$v_1 = 19 \cdot i_1 = 28.5\,V$

$v_3 = 70 \cdot i_3 = 31.5\,V$

Verifiche

KVL maglia esterna: $60 - v_1 - v_3 = 0$

2.15

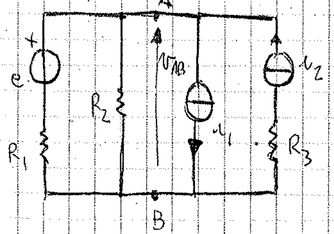



- tensione su serie ⇒ partitore di tensione!

$v_1 = 10 \cdot \frac{1}{1+2} = \frac{10}{3}\,V$ ; $v_2 = 10 \frac{2}{1+2} = \frac{20}{3}\,V$

Applico KVL: $v_{AB} = v_1 - v_2 = \frac{10}{3} - \frac{20}{3} = -\frac{10}{3}\,V$

2.17 Applicazione di Millman: rami in parallelo { gen. tens. con resistori in serie / resistori / gen. corrente con eventuali resistori serie

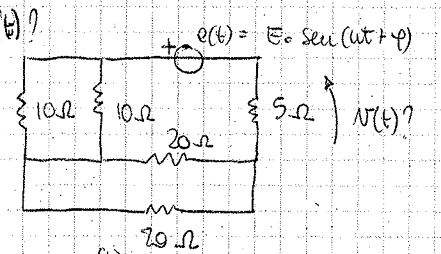



$$v_{AB} = \frac{\frac{e}{R_1} + i_2 - i_1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

2.18

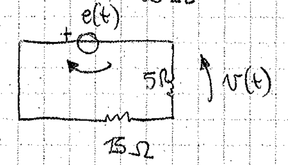
$v(t)$?

$e(t) = E_0 \sin(\omega t + \varphi)$



Per applicare il partitore di tensione devo avere un circuito di tipo serie: calcolo $R_{eq}$!

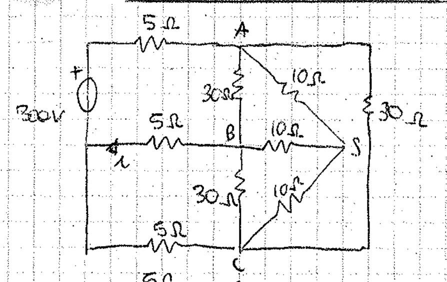
$(10 \| 10) = 5\Omega$ ; $(20 \| 20) = 10\Omega$ ; $(5+10) = 15\,\Omega$



$\Rightarrow$ applico partitore: $v(t) = e(t) \cdot \left(-\frac{5}{20}\right) = -0{,}25 E_0 \sin(\omega t + \varphi)$

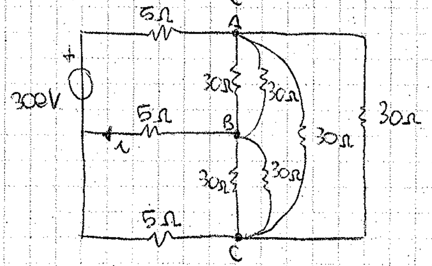
23-10-2013

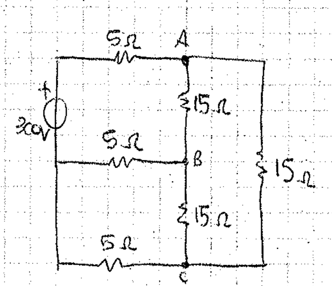
3.3 COMBINAZIONE DI RESISTORI



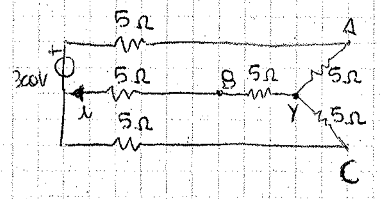
$R_\Delta = 3R_Y$ $\qquad i = ?$

trasformo ABCS da Y a $\Delta$

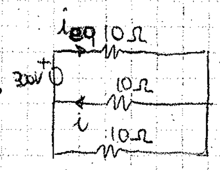




ABC è triangolo $\rightarrow$ passo a stella



serie $\Rightarrow$

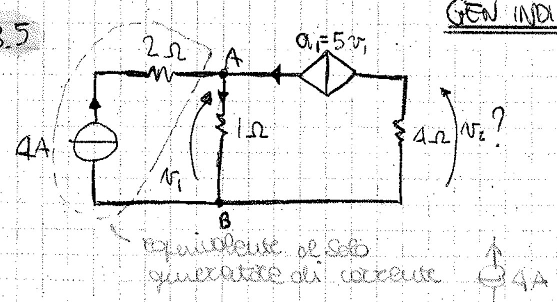


• PARTITORE DI CORRENTE a partire dal calcolo $i_{eq} = \frac{300}{15} = 20\,A = \frac{V}{R_{eq}(15\,\Omega)}$

$$i = i_{eq} \cdot \frac{\frac{1}{10}}{\frac{2}{10}} = \frac{20}{2} = 10\,A$$

GEN INDIPENDENTI

3.5



equivalente al solo generatore di corrente

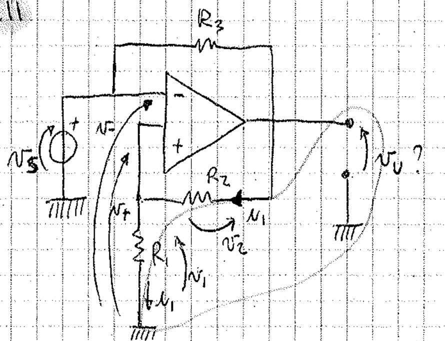
posso applicare Millman

$$v_{AB} = v_1 = \frac{4 + 5v_1}{1} \Rightarrow v_{AB} = v_1 = -1\,V$$

nota $v_1$ calcolo $a_1 = -5\,A$, corrente che passa per la resistenza da $4\,\Omega$ $\Rightarrow$ applico ohm

$$v_2 = 4 \cdot a_1 = 4 \cdot (-5) = -20\,V$$

**3.11**



$i_- = 0$ $\quad v_U = ?$ $\quad R_1 = 3\Omega$

$i_+ = 0$ $\quad R_2 = 9\Omega$

$v_d = 0$ $\quad R_3 = 9\Omega$

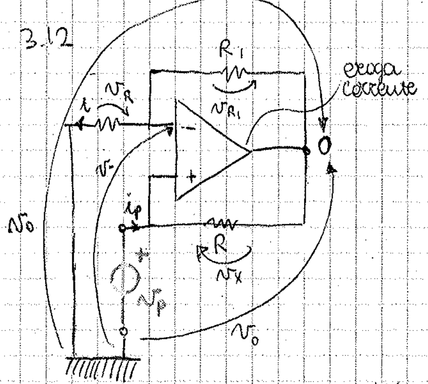
$v_+ = v_-$ $\quad v_S = 3V$

KVL: $v_- = v_S = v_+$

Ohm: $i_1 = \frac{v_+}{R_1} = \frac{v_S}{R_1}$ $\quad$ $i_1$ c'è anche su $R_2$ perchè $i_+ = 0$

KVL per trovare $v_U$: $\quad v_1 + v_2 = v_U = R_1 i_1 + R_2 i_1 = (R_1 + R_2) \cdot \frac{v_S}{R_1} = 12V$

**3.12**



$R_{eq}$?

Uso generatore di prova $v_p$ nota!

$v_+ = v_p = v_-$

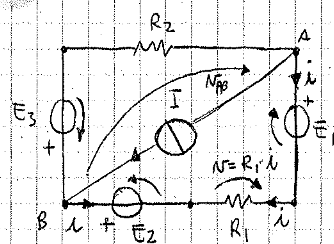
Ohm: $i = \frac{v_-}{R} = \frac{v_p}{R}$ $\quad$ $i$ scorre anche su $R_1$ perchè $i_- = 0$

KVL: $v_o = v_R + v_{R_1} = R \cdot i + R_1 i = (R + R_1) \frac{v_p}{R}$

KVL: $v_X = v_p - v_0 = v_p - \frac{R+R_1}{R} v_p = \left(1 - \frac{R_1}{R} - 1\right) v_p = -\frac{R_1}{R} v_p$

$i_p = \frac{v_X}{R} = -\frac{R_1}{R^2} v_p$ $\quad$ $R_{eq} = \frac{v_0}{i_p} = -\frac{R^2}{R_1}$

**2.18**



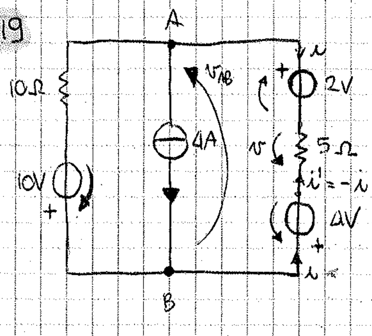
$E_1 = 2V$, $E_2 = 4V$, $E_3 = 10V$, $I = 4A$, $R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 10\Omega$ $\boxed{i?}$

• Applico millmann

$$v_{AB} = \frac{\frac{E_1 - E_2}{R_1} - \frac{E_3}{R_2} - I}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{-\frac{2}{5} - \frac{10}{10} - 4}{\frac{15}{50}} = \frac{\frac{-4-10-40}{10}}{\frac{15}{50}} = -\frac{54}{10} \cdot \frac{\cancel{50}}{\cancel{15}_3} = -18V$$

KVL: $v_{AB} + E_2 - E_1 - R_1 i = 0$ $\quad$ $i = \frac{v_{AB} - E_1 + E_2}{R_1} = \frac{-18 - 2 + 4}{5} = -\frac{16}{5} A$

**2.19**

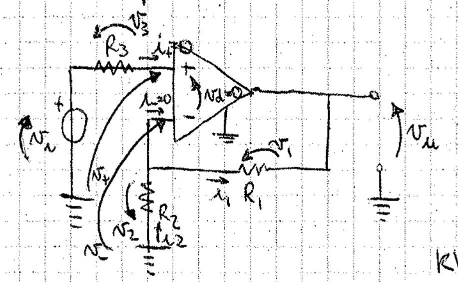


$$v_{AB} = \frac{\frac{2-4}{5} - 4 - \frac{10}{10}}{\frac{1}{10} + \frac{1}{5}} = \frac{-\frac{2}{5} - \frac{20}{5} - \frac{5}{5}}{\frac{1+2}{10}} = -\frac{\cancel{27}^{9}}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{10}^{2}}{\cancel{3}} = -18V$$

$v_{AB} - 2 + 5i + 4 = 0 \quad -5i = -2 + 18 \rightarrow i = -3.2A$

**3.9**

$v_u = f(v_i) = ?$



$v_3 = R_3 \cdot i_+ = 0\,V$

$v_+ = v_i = v_-$

$i_1 = i_2$ perché $i_- = 0$

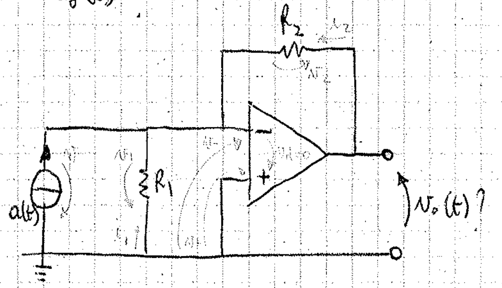
$KVL \Rightarrow v_- = -v_2 \Rightarrow v_2 = -\frac{v_i}{R_2} = i_1$

$KVL \Rightarrow v_u + v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_U + R_1 i_1 + R_2 i_2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow v_U = R_1 \frac{v_i}{R_2} + v_i = \left(\frac{R_1 + R_2}{R_2}\right) v_i$

**3.10**

$v_o(t) = ?$



$v_+ = v_-$

$KVL: v_- + v_1 = 0 \quad v_1 = -v_- = 0$

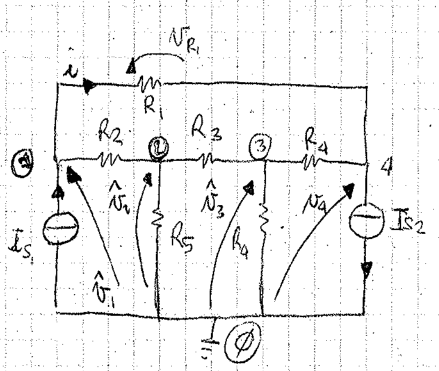
$i_1 = \frac{v_1}{R_1} = 0$

$KCL: i_2 = -a(t)$ perché $i_- = 0$

$v_2 = R_2 \cdot i_2 = -R_2 a(t)$

$KVL: v_o = v_2 + \cancel{v_-} \Rightarrow v_o = -R_2 a(t)$

**4.3**



METODO DEI NODI

30-10-13

$i = \frac{v_{R_1}}{R_1} = \frac{v_1 - v_4}{R_4} \qquad v_{R_1} = v_1 - v_4$

Nodo ① $\frac{v_1 - v_4}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} = I_{S_1}$

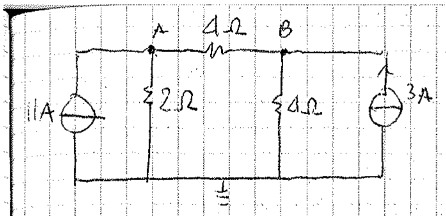
② $\frac{v_2 - v_1}{R_2} + \frac{v_2}{R_5} + \frac{v_2 - v_3}{R_3} = 0$

③ $\frac{v_3 - v_2}{R_3} + \frac{v_3}{R_6} + \frac{v_3 - v_4}{R_4} = 0$

④ $\frac{v_4 - v_1}{R_1} + \frac{v_4 - v_3}{R_1} = -I_{S_4}$

Scrivo l'eq per ispezione:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_2} & 0 & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_6}+\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_4} \\ -\frac{1}{R_1} & 0 & -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{S_1} \\ 0 \\ 0 \\ -I_{S_2} \end{bmatrix}$$

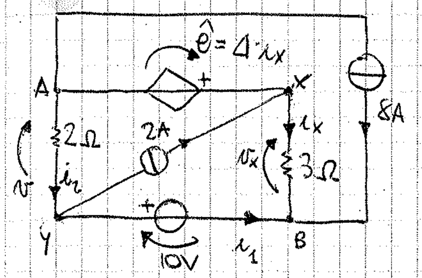



Ora posso applicare il metodo dei nodi

$$\frac{v_A - v_B}{4} + \frac{v_A}{2} = 11$$

$$\frac{v_B - v_A}{4} + \frac{v_A}{4} = 3$$

## 3.7

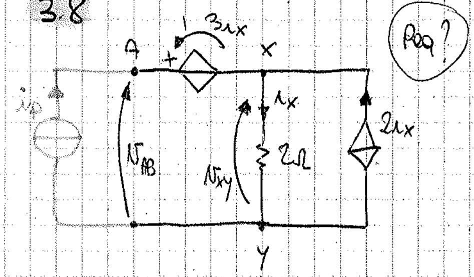



- KCL: $i_1 = -8 - i_x$
- KCL: $i_2 = 2 + i_1 = 2 - 8 - i_x = -6 - i_x$
- Ohm: $v_x = 3 i_x$
- Ohm: $v = 2 i_2 = -12 - 2 i_x$
- KVL: $v + \hat{e} + 10 = v_x \rightarrow -12 - 2 i_x + 4 i_x + 10 = 3 i_x$

$\Rightarrow i_x = -2A$

$v = -12 - 2(-2) = -12 + 4 = -8V$

## 3.8



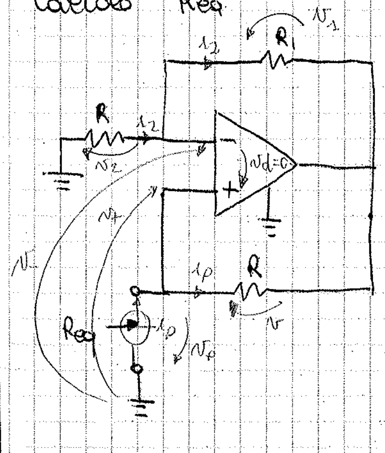

Thevenin: $v_{AB} = R_{eq} \cdot i_p \Rightarrow R_{eq} = \frac{v_{AB}}{i_p}$

- Ohm: $v_{xy} = 2 i_x$
- KVL: $v_{AB} = 3 i_x + 2 i_x = 5 i_x$
- KCL(Y): $i_x = 2 i_x + i_p \Rightarrow i_x = -i_p$

$\Rightarrow v_{AB} = 5(-i_p) = -5 i_p \Rightarrow R_{eq} = \frac{v_{AB}}{i_p} = -5\,\Omega$

## 3.12

Calcolo Req




© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 206