NUMERO: 852

DATA: 12/03/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Mancino

MATERIA: Analisi Matematica II + Eserc.

Prof. Lancelotti

03 - 10 - 2013

RICHIAMI DI TOPOLOGIA DI $\mathbb{R}^n$

Premessa fondamentale Se A, B sono due insiemi, $f: A \mapsto B$ è una funzione che associa ad ogni elemento dell'ins. A uno ed un solo elemento di B. A è il dominio di f e si può scrivere $A = \text{dom}(f)$; B è il codominio di f.

es. $f: [1,7] \to \mathbb{R} \Rightarrow \text{dom } f = [1,7]$

Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}} = \{(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n) : x_0, x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

$\mathbb{R}^n$ è uno SPAZIO VETTORIALE di dimensione n su $\mathbb{R}$: $+$; $0_{\mathbb{R}^n} = (0, \dots, 0) = 0$; $1 \in \mathbb{R}$

Esiste la BASE CANONICA: $(e_1, \dots, e_n)$

$$\begin{cases} e_1 = (1, 0, \dots, 0) \\ e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0) \\ e_i = (0, \dots, \overset{i-1}{0}, 1, \overset{i+1}{0}, \dots, 0) \\ e_n = (0, \dots, 1) \end{cases}$$

Se $\bar{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, allora $\bar{v} = (v_1, \dots, v_n) = (v_1, 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, 0, v_n) =$
$= v_1(1, 0, \dots, 0) + \dots + v_n(0, \dots, 0, 1) = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n$

PRODOTTO SCALARE

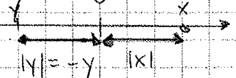
$$\left.\begin{array}{l} x = (x_1, \dots, x_n) \\ y = (y_1, \dots, y_n) \end{array}\right\} \in \mathbb{R}^n \qquad \boxed{x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n} \in \mathbb{R}$$

NORMA (o MODULO)

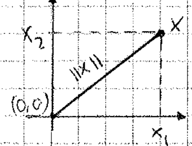
$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \|x - \underbrace{0}_{0_{\mathbb{R}^n}}\|$$

$\|x\|$ è la distanza di x dallo $0_{\mathbb{R}^n}$

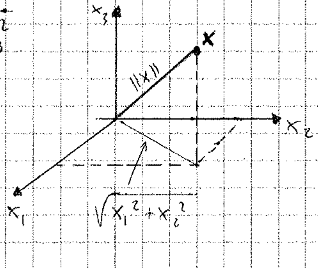
- $n = 1 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$ $\quad \|x\| = |x| = \sqrt{x^2} \Rightarrow$



- $n = 2 \Rightarrow x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$



- $n = 3 \Rightarrow x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

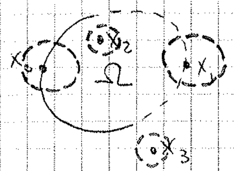


Def Siano $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$

Si chiama INTORNO (SFERICO) aperto di centro x_0 e raggio r (detto anche palla aperta) l'insieme $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r\}$

Si denota con $Fr(\Omega)$ o $\partial(\Omega)$.

Non è detto che x_0 appartenga a Ω. Evidentemente $\partial\Omega = \partial(\complement\Omega)$

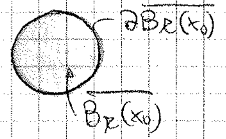


x_0 è di frontiera per Ω

x_1 è di frontiera per Ω

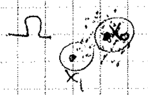
x_2, x_3 non sono punti di frontiera

- Si chiama **CHIUSURA** di Ω l'insieme $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$



es. patologico

Dato $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in \mathbb{Q}\}$



$\complement\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ $\quad$ $x_0 \in \Omega$, $x_1 \in \complement\Omega$

$\partial\Omega = \Omega \cup \complement\Omega = \mathbb{R}^2$

Def Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

Diciamo che Ω è **APERTO** se ogni punto di Ω è interno a Ω, cioè se $int(\Omega) = \Omega$.

Diciamo che Ω è **CHIUSO** se $\complement\Omega$ è aperto.

Diciamo che Ω è **LIMITATO** se $\exists\, r \geq 0$ tale che $\Omega \subseteq B_r(0)$.

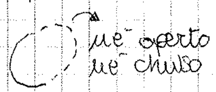
Diciamo che Ω è **COMPATTO** se Ω è chiuso e limitato.

Per convenzione $\emptyset$ e $\mathbb{R}^n$ sono contemporaneamente aperti e chiusi.

Oss Ω chiuso $\iff \partial\Omega \subseteq \Omega$

Ω aperto $\iff \Omega \cap \partial\Omega = \emptyset$

Ω chiuso $\implies \Omega = \overline{\Omega}$



Prop Valgono i seguenti fatti

1. L'unione di aperti è un insieme aperto;
2. L'intersezione di un numero finito di aperti è un insieme aperto;
3. L'unione di un numero finito di chiusi è un insieme chiuso;
4. L'intersezione di chiusi è un insieme chiuso;
5. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ non vuoto, $f: \Omega \to \mathbb{R}$ continua e $A \subseteq \mathbb{R}$.

   Allora si ha che:

   1) se A è aperto, allora $f^{-1}(A)$ è aperto

   2) se A è chiuso, allora $f^{-1}(A)$ è chiuso

   dove $f^{-1}(A) = \{x \in \Omega : f(x) \in A\}$ è la **PREIMMAGINE (o controimmagine)** tramite f

$= \underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{v_1}} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)}_{\in \mathbb{R}^m} + \dots + \underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{v_n}} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)}_{\in \mathbb{R}^m}$

- caso $m=1$, $f: \Omega \to \mathbb{R}$

Risulta che $df(x_0)(v) = \nabla f(x_0) \cdot v$, con $\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right)$

(3) Se f ammette tutte le derivate parziali in Ω e queste derivate sono continue in x_0, allora f è DIFFERENZIABILE in x_0.

Oss Se f è differenziabile in $x_0 \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, allora $\exists\ df(x_0): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ app. lineare; rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, a $df(x_0)$ si associa la **MATRICE JACOBIANA** di f in x_0, denotata con $J_f(x_0)$, siffatta:

($f: \Omega \to \mathbb{R}^m \Rightarrow \forall x \in \Omega\ f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$; $f_1, \dots, f_m: \Omega \to \mathbb{R}$ sono le componenti di f)

$$J_f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} \quad m \times n$$

Quindi se $v = (v_1, \dots, v_n) = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, allora $df(x_0)(v) = \underbrace{\underbrace{J_f(x_0)}_{m\times n} \underbrace{v}_{n\times 1}}_{m\times 1 \in \mathbb{R}^m} = \begin{pmatrix} \dots \\ \vdots \\ \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

Oss Se $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo aperto e se $f: I \to \mathbb{R}^n$ è derivabile in $x_0 \in I$, allora f è differenziabile in x_0 e $\forall x \in \mathbb{R}$, $df(x_0)(x) = f'(x_0)(x)$

DIFFERENZIALE DELLA FUNZ. COMPOSTA

Supponiamo che f sia differenziabile in x_0 e g sia differenziabile in $f(x_0)$, allora $g \circ f$ è differenziabile in x_0 e si ha che $\boxed{d(g \circ f)(x_0)(x) = dg(f(x_0))(df(x_0)(x))}$ $\forall x$

es

$$\begin{tikzcd} \underset{x_0}{\mathbb{R}^n} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & \underset{f(x_0)}{\mathbb{R}^m} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R}^k \end{tikzcd}$$

La matrice jacobiana di $g \circ f$ in x_0 è:

$$\underbrace{J_{g\circ f}(x_0)}_{k\times n} = \underbrace{\underbrace{J_g(f(x_0))}_{k\times m} \cdot \underbrace{J_f(x_0)}_{m\times n}}_{k\times n}$$

DERIVATA PARZIALE DELLA FUNZIONE COMPOSTA

Sia f differenziabile in x_0 e sia g differenziabile in $f(x_0)$

$$\begin{tikzcd} x\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & y\ \mathbb{R}^m \arrow[r, "g"] & \mathbb{R}^{k=1} \end{tikzcd}$$

con $x = (x_1, \dots, x_n)$; $f = (f_1, \dots, f_m)$

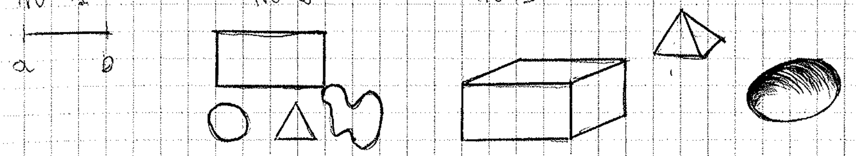
$y = (y_1, \dots, y_m)$;

Si ha che $\frac{\partial}{\partial x_i}(g \circ f)(x_0) = \frac{\partial g}{\partial y_1}(f(x_0)) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x_0) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(f(x_0)) \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(x_0) + \dots + \frac{\partial g}{\partial y_m}(f(x_0)) \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(x_0)$

7-10-13

INTEGRALI MULTIPLI

• $n=1$ • $n=2$ • $n=3$



Facendo un'analogia si può pensare di integrare su un rettangolo o su un parallelepipedo all'aumentare di n, tuttavia esistono casi meno semplici.

È necessaria quindi una base teorica per definire e distinguere gli insiemi su cui si possono calcolare gli integrali da quelli su cui non si possono calcolare: si tratta della TEORIA DELLA MISURA, che distingue tra INSIEMI MISURABILI, a cui si può attribuire una misura, e insiemi non misurabili, a cui non si può attribuire una misura.

TEORIA DI RIEMANN (Teoria della misura di Peano - Jordan)

TEORIA DI LEBESGUE (odierna teoria della misura)

▶ Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

Notazione Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ limitato non vuoto.

Diciamo che Ω è **MISURABILE** (in $\mathbb{R}^n$) se a Ω si può associare una misura, che nel caso $n=2$ è la classica area e nel caso $n=3$ è il classico volume.

Si denota con $m_n(\Omega)$ o $m(\Omega)$.

Evidentemente $m_n(\Omega) \in [0,+\infty)$ in $\mathbb{R}$.

Se $n=2$ si parla di AREA di Ω

Se $n=3$ si parla di VOLUME di Ω

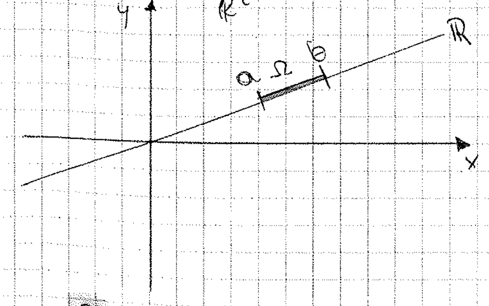
Se $n \geq 4$ si parla anche di VOLUME n-DIMENSIONALE di Ω

Poniamo $m(\emptyset)=0$

Oss.

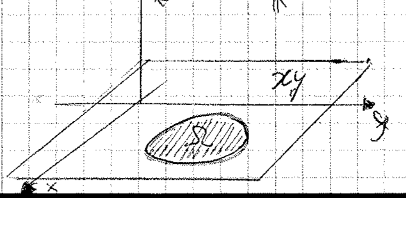
① Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ è misurabile, con $1 \leq k < n$, allora $m_n(\Omega)=0$

es $n=2$, $k=1$



$m_2(\Omega)=\text{area}(\Omega)=0$

es $n=3$, $k=2$



$m_3(\Omega)=\text{vol}(\Omega)=0$

perché il piano xy non ha spessore!

Def Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile

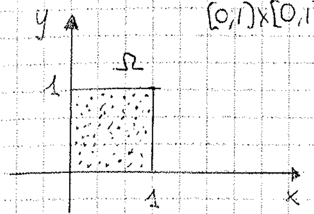
Diciamo che Ω è **TRASCURABILE** (in $\mathbb{R}^n$) se $m_n(\Omega) = 0$

TEOREMA Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme limitato, allora Ω è misurabile se e solo se $\partial\Omega$ è trascurabile

es. Insieme non misurabile (per la teoria di Peano)

$\Omega = \{(x,y) \subseteq [0,1]^2 \ / \ x,y \in \mathbb{Q}\}$

$[0,1]^2 = [0,1]\times[0,1]$



$\partial\Omega = [0,1]^2 \Rightarrow m_2(\partial\Omega) = \text{area}([0,1]^2) = 1 \neq 0$

$\Downarrow$

Ω non è misurabile

INTEGRALE MULTIPLO

Notazione Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile e $f: \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua e limitata.

Si chiama integrale (multiplo) di Riemann di f su Ω il numero reale che si denota con:

$$\int_\Omega f \quad ; \quad \int_\Omega f(x)\,dx \quad ; \quad \int f(x_1, x_2, \dots, x_n)\,dx_1 \cdots dx_n \quad ; \quad \underbrace{\int \cdots \int}_{n \text{ volte}} f(x_1, \dots x_n)\,dx_1 \cdots dx_n$$

$x \in \mathbb{R}^n$

Se $n=2$ si scrive anche $\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$ INTEGRALE DOPPIO

Se $n=3$ si scrive anche $\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ INTEGRALE TRIPLO

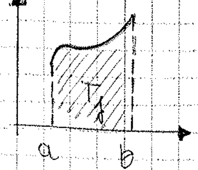
Ω è detto dominio di integrazione

Errori comuni: $\int f \ ; \ \int_\Omega f(x)$

Sia $f(x,y) = x^2 + 3xy$, allora $\int_\Omega (x^2+3xy)$ è sbagliato (manca "$dxdy$")

Geometrico

- Analisi I ($n=1$)



$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{area}(T_f)$$

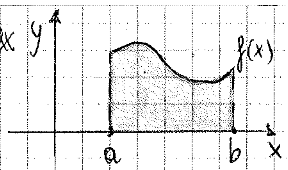
- In generale se $f \geq 0$ su Ω allora $\int_\Omega f$ è il volume $(n+1)$-dimensionale del trapezoide di f, cioè è $m_{(n+1)}(T_f)$ dove T_f è il trapezoide di f definito da

$$T_f = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega, \ 0 \leq x_{n+1} \leq f(x)\}$$

- $n=2$

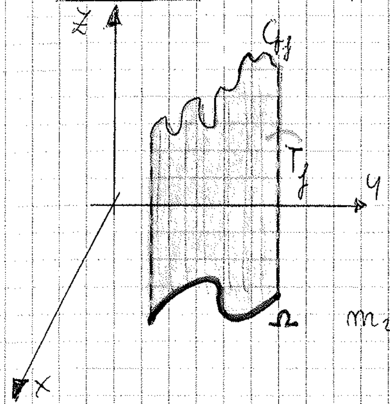
$$T_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \Omega, \ 0 \leq z \leq f(x,y)\}$$

a) $\int_a^b f(x)\,dx$



non importa che a e b siano compresi nell'integrazione perchè non aggiungo area => il punto non dà contributo

In Analisi due analizzo prop. a)



$\int_\Omega f = m_3(T_f)$

↳ il vol di una superficie è nullo!

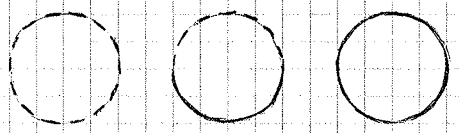
$m_2(\Omega)=0$

OSS a) + b) se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è un aperto misurabile, allora

$$\int_{\bar{\Omega}} f = \int_{\Omega} f \quad , \text{ dove } \bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$$

Infatti $\int_{\bar{\Omega}} f = \int_{\Omega\cup\partial\Omega} f =$ $\qquad$ Ω aperto $\Rightarrow \Omega \cap \partial\Omega = \emptyset \Rightarrow m(\Omega\cap\partial\Omega)=0$

$$= \int_\Omega f + \underbrace{\int_{\partial\Omega} f}_{=0 \ (m(\partial\Omega)=0)} = \int_\Omega f$$



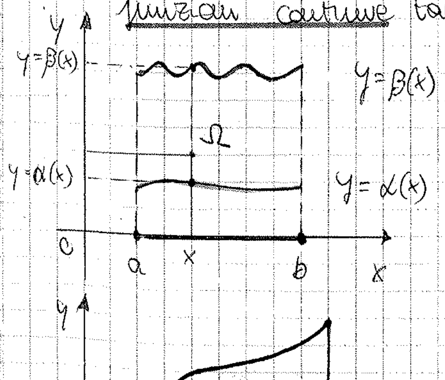
Integrare su questi insiemi non conta/ è la stessa cosa.

CALCOLO DEGLI INTEGRALI DOPPI

Def Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$,

Diciamo che Ω è Y-SEMPLICE o VERTICALMENTE CONVESSO => funzione di x se è della forma

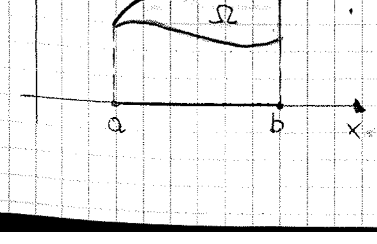
$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}$, dove α e $\beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue tali che $\alpha(x) \le \beta(x)$, $\forall x \in [a,b]$

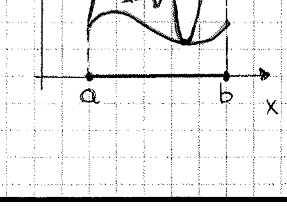


$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le x\}$ ← es

dato $x = x_0$, il segmento passante per x_0 è un insieme convesso e verticale.

la proiezione sulle x è un intervallo, inoltre è delimitato tra due funz.





Es Calcolo $\int_\Omega (x+y)\,dx\,dy$, dove $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0 \le y \le \frac{\sqrt{2}}{2},\ y \le x \le \sqrt{1-y^2}\}$

Sembra x-semplice: controlliamo che $\forall y$ $0 \le y \le \frac{\sqrt{2}}{2}$ si ha che $y \le \sqrt{1-y^2}$

$$\begin{cases} -1 \le y \le 1 \\ y < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} -1 \le y \le 1 \\ y \ge 0 \\ y^2 \le 1 - y^2 \end{cases} \leadsto \begin{cases} -1 \le y \le 1 \\ y \ge 0 \\ 2y^2 \le 1 \end{cases} \to \begin{cases} -1 \le y \le 1 \\ y \ge 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \le y \le \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow 0 \le y \le \frac{\sqrt{2}}{2}$$

non lo verifico per le necessità dell'es.

VERIFICATO!

Ω è x-semplice

Applico la formula:

$$\int_\Omega (x+y)\,dx\,dy = \int_0^{\sqrt{2}/2} \left[\int_y^{\sqrt{1-y^2}} (x+y)\,dx \right] dy = \int_0^{\sqrt{2}/2} \left[\frac{1}{2}x^2 + xy \right]_y^{\sqrt{1-y^2}} dy =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}/2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}y^2 + y\sqrt{1-y^2} - \frac{1}{2}y^2 - y^2 \right] dy = \int_0^{\sqrt{2}/2} \left[\frac{1}{2} - 2y^2 + y(1-y^2)^{1/2} \right] dy = \left[\frac{1}{2}y - \frac{2}{3}y^3 - \frac{1}{3}(1-y)^{3/2} \right]_0^{\sqrt{2}/2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{2}{3}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

14-10-13

▶ TEOREMA DEL CAMBIAMENTO DI VARIABILI

Siano Ω e $\Omega' \subseteq \mathbb{R}^2$, aperti misurabili, $f: \Omega \to \mathbb{R}$ continua e limitata e $\phi: \Omega' \to \Omega$ una funzione soddisfacente le seguenti proprietà:

1 _ ϕ è BIETTIVA

2 _ ϕ è di classe C^1 in Ω con $\det J_\phi(u,v) \ne 0$, $\forall (u,v) \in \Omega'$

Allora

$$\boxed{\int_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\Omega'} f(\phi(u,v)) \cdot |\det J_\phi(u,v)|\,du\,dv}$$

$(x,y) = \phi(u,v)$ $\qquad$ $\phi(\Omega') = \Omega$ perché suriettiva

$d\phi(u,v): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\Downarrow$

$J_\phi(u,v) \in \mathbb{R}^{2,2}$

Analisi I

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \quad \text{con } \varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b$$

$x = \varphi(t)$

$dx = d\varphi(t) = \varphi'(t)\,dt$

In cui variabili si fa questo cambiamento per avere un dominio più facile su cui integrare

Oss Se ϕ non è iniettiva su $A' \subseteq \Omega'$ con $m(A') = 0$, oppure se $\det J_\phi = 0$ su $A' \subseteq \Omega'$ con $m(A') = 0$, allora la formula di integrazione con il cambiamento di variabili si può ancora applicare

CAMBIAMENTI DI COORDINATE NOTEVOLI

1) COORDINATE POLARI NEL PIANO

Sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

$\phi: [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$,

$$\boxed{\phi(\rho, \theta) = (x_0 + \rho\cos\theta,\ y_0 + \rho\sin\theta)}$$

Se $(x_0, y_0) = (0,0)$ allora si ha: $\phi(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$

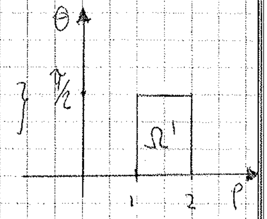
$$\int_\Omega \frac{xy}{x^2+y^2}\,dxdy = \int_{\Omega'} \frac{\rho\cos\theta \cdot \rho\,\text{sen}\theta}{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\text{sen}^2\theta}\cdot \rho\, d\rho\, d\theta = \int_{\Omega'} \frac{\rho^2\,\text{sen}\theta\cos\theta}{\rho^2}\,\rho\, d\rho\, d\theta = \int_{\Omega'} \rho\cos\theta\,\text{sen}\theta\, d\rho\, d\theta \quad \circledast$$

$\Omega' \subseteq [0,+\infty)\times[0,2\pi]$ tale che $\phi(\Omega') = \Omega$

- $(x,y)\in\Omega \Rightarrow \begin{cases} 1\le x^2+y^2\le 4 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1\le \rho^2\cos^2\theta+\rho^2\text{sen}^2\theta\le 4 \\ \rho\cos\theta\ge 0 \\ \rho\,\text{sen}\theta\ge 0 \\ \rho\ge 0 \\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1\le \rho^2\le 4 \\ \cos\theta\ge 0 \\ \text{sen}\theta\ge 0 \\ \rho\ge 0 \\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$

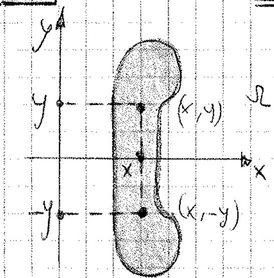
$\begin{cases} 1\le\rho\le 2 \\ \cos\theta\ge 0 \\ \text{sen}\theta\ge 0 \\ \rho\ge 0 \\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1\le\rho\le 2 \\ 0\le\theta\le \pi/2\end{cases}$

$\Omega' = \{(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^2 : 1\le\rho\le 2,\ 0\le\theta\le\pi/2\}$ è un rettangolo! ⇒ posso applicare la regola del caso particolare!

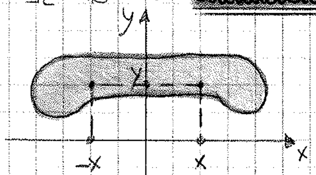


$$\circledast = \left(\int_1^2 \rho\, d\rho\right)\left(\int_0^{\pi/2} \cos\theta\,\text{sen}\theta\, d\theta\right) = \left[\frac{1}{2}\rho^2\right]_1^2 \left[\frac{1}{2}\text{sen}^2\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

Oss $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$ è **simmetrico** rispetto all'**asse x** se $\forall (x,y)\in\Omega$, anche $(x,-y)\in\Omega$



$\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$ è **simmetrico** rispetto all'**asse y** se $\forall (x,y)\in\Omega$, anche $(-x,y)\in\Omega$.



Oss Abbiamo 4 casi

① Ω simmetrico rispetto all'asse x e $f:\Omega\to\mathbb{R}$ tale che $f(x,-y) = f(x,y)$ (PARI), $\forall (x,y)\in\Omega$
Allora $\boxed{\int_\Omega f(x,y)\,dxdy = 2\int_{\Omega'} f(x,y)\,dxdy}$, dove $\Omega' = \{(x,y)\in\Omega : y\ge 0\}$ (oppure $y\le 0$)

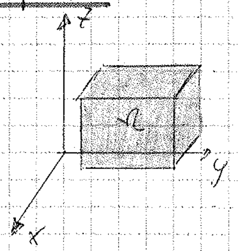
② Ω simmetrico rispetto all'asse x e $f:\Omega\to\mathbb{R}$ è tale che $f(x,-y) = -f(x,y)$ (DISPARI)
Allora $\boxed{\int_\Omega f(x,y)\,dxdy = 0}$

③ Ω simmetrico rispetto all'asse y e $f:\Omega\to\mathbb{R}$ tale che $f(-x,y) = f(x,y)$, $\forall (x,y)\in\Omega$
Allora $\boxed{\int_\Omega f(x,y)\,dxdy = 2\int_{\Omega'} f(x,y)\,dxdy}$, dove $\Omega' = \{(x,y)\in\Omega : x\ge 0\}$ (oppure $x\le 0$)

④ Ω simmetrico rispetto all'asse y e $f(-x,y) = -f(x,y)$ $\forall (x,y)\in\Omega$, allora $\boxed{\int_\Omega f(x,y)\,dxdy = 0}$

$\boxed{\text{Oss}}$ Se Ω è un parallelepipedo con spigoli // agli assi coordinati, cioè
$\Omega = [a,b] \times [c,d] \times [h,k]$ e $f: \Omega \to \mathbb{R}$ è tale che $f(x,y,z) = f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot f_3(z)$, dove
$f_1: [a,b] \to \mathbb{R}$, $f_2: [c,d] \to \mathbb{R}$, $f_3: [h,k] \to \mathbb{R}$ sono continue, allora

$$\boxed{\int_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \left(\int_a^b f_1(x)\,dx\right)\left(\int_c^d f_2(y)\,dy\right)\left(\int_h^k f_3(z)\,dz\right)}$$



es Calcolo $\int_\Omega (x^2+y^2)z\,dx\,dy\,dz$, dove $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 1,\ z \ge 0\}$

Analizzo Ω

FILI	$g(\text{altre due}) \le \text{var} \le h(\text{altre due})$
	altre due $\in D \subseteq \mathbb{R}^2$
STRATI	$a \le \text{var} \le b$
	altre due $\in \Omega_{\text{var}} \subseteq \mathbb{R}^2$

specchietto riassuntivo

→ Devo riscrivere Ω

Voglio integrare per fili: $0 \le z \le$ funzione(x,y)

• Da $x^2+y^2+z^2 \le 1$ ottengo $z^2 \le 1-x^2+y^2 \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{1-x^2-y^2} \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2} \\ 0 \le z \end{cases} \Rightarrow 0 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}$

• Sembra possibile integrare per fili ma $(x,y) \in D$?
D: $x^2+y^2 \le 1$

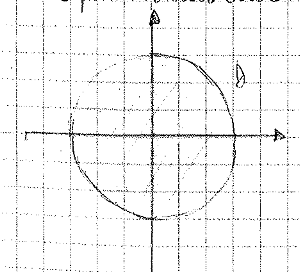
$$\begin{cases} \Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2},\ (x,y) \in D\} \\ D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\} \end{cases}$$

Applico la formula di integraz. per fili // asse z:

$$\int_\Omega (x^2+y^2)z\,dx\,dy\,dz = \int_D \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (x^2+y^2)z\,dz\right]dx\,dy = \int_D (x^2+y^2)\left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx\,dy =$$

$$\frac{1}{2}\int_D (x^2+y^2)(1-x^2-y^2)\,dx\,dy = (*)$$ Ora devo risolvere l'integrale doppio!

Disegno l'insieme D



→ Passo in coordinate polari centrate in $(0,0)$

$$\Phi = \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{matrix} \rho \ge 0 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{matrix} \qquad |\det J_\Phi(\rho,\theta)| = \rho$$

$$(*) = \frac{1}{2}\int_{D'} \rho^2(1-\rho^2)\cdot\rho\,d\rho\,d\theta = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 (\rho^3-\rho^5)\,d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi} 1\,d\theta\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\rho^4 - \frac{1}{6}\rho^6\right]_0^1 2\pi = \pi\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right) = \frac{\pi}{12}$$

$\rho \in [0,1]$, $\theta \in [0,2\pi] \Rightarrow D' = [0,1] \times [0,2\pi]$

↘ Se riesco a disegnare Ω posso avere suggerimenti: procedimento alternativo

Ricavo la matrice jacobiana

$$J\phi(\rho,\theta,\varphi)=\begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi & \rho\cos\theta\operatorname{sen}\varphi & \rho\operatorname{sen}\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$|\det J_\phi(\rho,\theta,\varphi)| = \left|\cos\theta\left(\rho\operatorname{sen}\theta\cos\theta\cos^2\varphi+\rho^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\operatorname{sen}^2\varphi\right)+(-\rho\operatorname{sen}\theta)(-1)^5\left(\rho\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\varphi+\rho\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi\right)\right| =$$

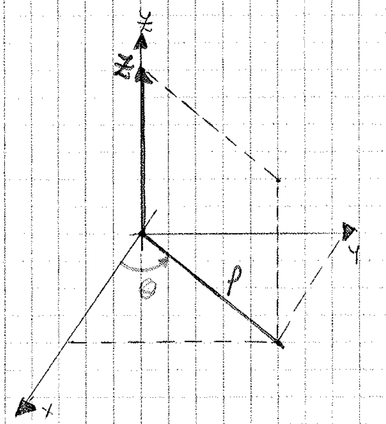
$$= \left|\rho^2\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta+\rho^2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}^2\theta\right| = \left|\rho^2\operatorname{sen}\theta\right| = \rho^2\operatorname{sen}\theta$$

2 COORDINATE CILINDRICHE

Con un asse parallelo all'asse z

$\phi : [0,+\infty)\times[0,2\pi]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$

$$\boxed{\phi(\rho,\theta,z)=(\overset{x}{\rho\cos\theta},\ \overset{y}{\rho\operatorname{sen}\theta},\ \overset{z}{z})}$$



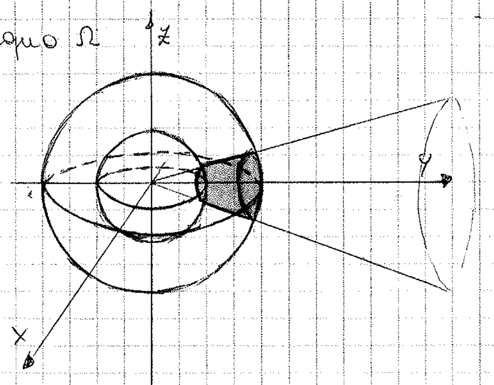
$$J_\phi(\rho,\theta,z)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\theta & 0\\ \operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$|\det J_\phi(\rho,\theta,z)| = \rho$$

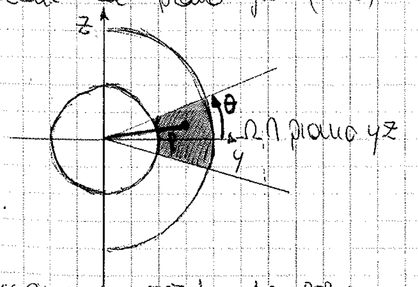
21 - 10 - 13

Es. Calcolo $\int_\Omega \frac{x^2}{x^2+z^2}\,dxdydz$ con $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \underbrace{1\le x^2+y^2+z^2\le 2}_{\text{circonferenze}},\ \underbrace{x^2+z^2\le y^2}_{\text{semicono // asse } y},\ y\ge 0\}$

Disegno Ω



Sezione col piano yz $(x=0)$



$$\left.\begin{array}{l} z^2\le y^2 \\ y\ge 0\end{array}\right\} \Rightarrow |z|\le y$$

Passiamo in coordinate polari nello spazio

- Misuriamo la colatitudine dall'asse y (che è l'asse di simmetria)

$$\phi:\begin{cases} x=\rho\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\\ y=\rho\cos\theta\\ z=\rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\end{cases}\qquad \rho\ge 0,\ 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\varphi\le 2\pi$$

Si ha che:

$$\int_\Omega \frac{x^2}{x^2+z^2}\,dxdydz = \int_{\Omega'}\frac{\rho^2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\varphi}{\rho^2\operatorname{sen}^2\theta}\,\rho^2\operatorname{sen}\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi = \int_{\Omega'}\rho^2\operatorname{sen}\theta\cos^2\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi =$$

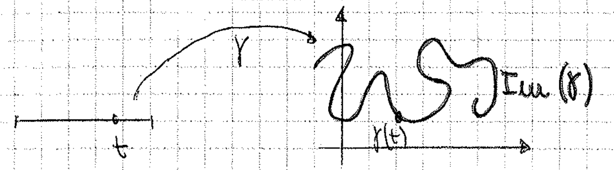
BREVI RICHIAMI SULLE CURVE PARAMETRICHE $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

Def sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo qualunque

Si chiama CURVA PARAMETRICA una funzione $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ continua.

Si chiama sostegno di γ, l'immagine di γ.

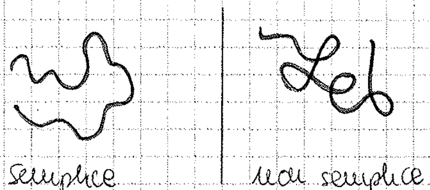


$n=2$ Il grafico avrebbe valori in $\mathbb{R}^3$

Mi deve anche dare info su come percorro il sostegno

Diciamo che γ è SEMPLICE se $\gamma(t_1)=\gamma(t_2) \Rightarrow t_1=t_2$ oppure che t_1 e t_2 sono gli estremi dell'intervallo I, se I contiene i suoi estremi.

Graficamente



Se è semplice induce sul sostegno un verso di percorrenza

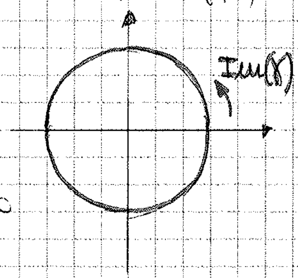
Def sia $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva parametrica.

Diciamo che γ è CHIUSA se $\gamma(a)=\gamma(b)$.

es • $\gamma: [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t)=(R\cos t, R\sin t)$ con $R>0$, γ è chiusa infatti $\gamma(0)=(R,0)$ e $\gamma(2\pi)=(R,0)$

Chi è l'$\mathrm{Im}(\gamma)$?

$(x,y)=\gamma(t)=(R\cos t, R\sin t) \Rightarrow \begin{cases} x=R\cos t \\ y=R\sin t \end{cases}$ $0 \leq t \leq 2\pi$ $x^2+y^2=R^2$



La curva parametrica induce un verso di percorrenza antiorario sul suo sostegno.

Per fare due giri devo prendere una nuova curva:

• $\eta: [0,4\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\eta(t)=(R\cos t, R\sin t)$, ma η non è semplice!

Def Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ una curva parametrica derivabile.

Diciamo che γ è regolare se γ' è continua e $\gamma'(t) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, $\forall t \in I$ con t un punto interno (non è negli estremi).

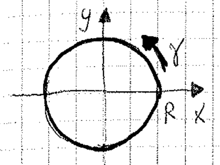
es $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $\gamma(t)=(t,t)$ è regolare: $\gamma'(t)=(1,1) \neq (0,0)$ $\mathrm{Im}(\gamma)$: bisettrice I/III

$\eta: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $\eta(t)=(t^3,t^3)$ non è regolare: $\eta'(t)=(3t^2,3t^2)$ che si annulla per $t=0$ (anche se il sostegno è lo stesso di γ) e 0 non è un estremo di I

Def Sia $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva parametrica. Diciamo che γ è REGOLARE A TRATTI se valgono i seguenti fatti:

① γ è derivabile in $[a,b]$ con derivata continua tranne che in un numero finito di punti

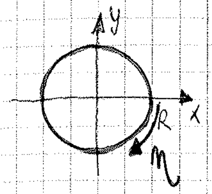
es $R>0$ $\quad \gamma:[0;2\pi]\to\mathbb{R}^2,\ \gamma(t)=(R\cos t, R\sin t)$



$\eta:[-2\pi,0]\to\mathbb{R}^2 \quad \eta(t)=(\overset{x}{R\cos(-t)},\overset{y}{R\sin(-t)}) \Rightarrow x^2+y^2=R^2$

$\eta(-2\pi)=(R,0)$

$\eta(-\frac{3}{2}\pi)=(0,-R)$



oss $\eta(t)=\gamma(-t) \Rightarrow \alpha(t)=-t$ di classe C^1 con $\alpha'(t)=-1<0 \Rightarrow$ sono antiequivalenti

CONSIGLIO:

▶ Antiorario $\quad (x_0,y_0) \quad R>0$

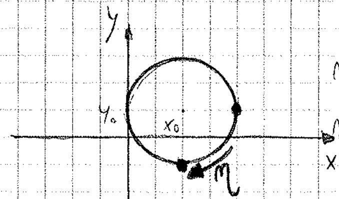
$\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$

$\gamma(t)=(x_0+R\cos t,\ y_0+R\sin t)$

▶ Orario

$\eta:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$

$\eta(t)=(x_0+R\cos t,\ y_0-R\sin t)$

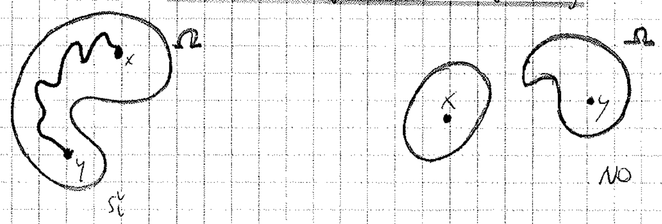


$\eta(0)=(x_0+R,y_0)$

$\eta(\frac{\pi}{2})=(x_0,y_0-R)$

Def: Sia $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto:

Diciamo che Ω è **CONNESSO per archi** se $\forall (x,y)\in\Omega$, $\exists$ una curva parametrica $\gamma:[a,b]\to\Omega$ tale che $\gamma(a)=x$ e $\gamma(b)=y$



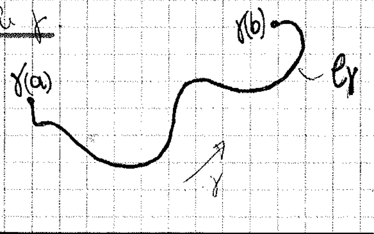
INTEGRALI CURVILINEI

Def: Siano $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto, $f:\Omega\to\mathbb{R}$ una funzione continua e $\gamma:[a,b]\to\Omega$ una curva parametrica semplice e regolare.

Si chiama **INTEGRALE CURVILINEO DI PRIMA SPECIE di f lungo γ** il n° reale

$$\boxed{\int_\gamma f=\int_a^b f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt}$$

Se $f=1$, allora $\int_\gamma 1=l_\gamma$ dove l_γ è la **LUNGHEZZA** di γ, ovvero la lunghezza del sostegno di γ.



② Se esiste $\alpha : [c,d] \to [a,b]$ biettiva, di classe C^1 con $\alpha'(\tau) < 0 \ \forall \tau \in [c,d]$ tale che $\eta = \gamma \circ \alpha$, allora

$$\boxed{\int_\gamma F \cdot dP = -\int_\eta F \cdot dP}$$

se γ e η inducono versi opposti allora l'integrale è l'opposto

Dim

① esercizio

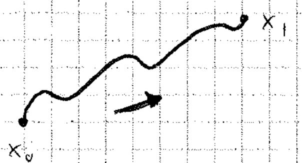
② $\int_\eta F \cdot dP = \int_c^d F(\eta(\tau)) \cdot \eta'(\tau)\, d\tau = \int_c^d F(\gamma(\alpha(\tau))) \cdot \gamma'(\alpha(\tau))\alpha'(\tau)\, d\tau =$

$\eta(\tau) = (\gamma \circ \alpha)(\tau) = \gamma(\alpha(\tau))$ $\qquad t = \alpha(\tau)$

$\eta'(\tau) = (\gamma \circ \alpha)'(\tau) = \gamma'(\alpha(\tau)) \cdot \alpha'(\tau)$ $\qquad dt = \alpha'(\tau)\, d\tau$

$\left.\begin{array}{l} \alpha \text{ biettiva} \Rightarrow \alpha \text{ è suriettiva} \Rightarrow \alpha([c,d]) = [a,b] \\ \alpha' < 0 \Rightarrow \alpha \text{ è strettamente decrescente} \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha(c) = b,\ \alpha(d) = a$

$= -\int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = -\int_\gamma F \cdot dP$



Se devo cercare la parametrizzazione, la uso indipendentemente dal verso indotto, poi a seconda di quello necessario cambio segno.

Def Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto, $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ campo vettoriale continuo e $\gamma : [a,b] \to \Omega$ una curva parametrica semplice REGOLARE A TRATTI.

Conformemente alla def. di curva regolare a tratti siano $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ tali che γ ristretta a $[t_{k-1}, t_k]$ è regolare $\forall\, k = 1, \dots, m$.

Si chiama INTEGRALE DI LINEA DI F LUNGO γ il numero reale

$$\boxed{\int_\gamma F \cdot dP = \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt}$$

esempio

Calcolare $\int_\gamma F \cdot dP$, dove $F(x,y) = (xy, x-y)$ e $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ è $\gamma(t) = (t, t^2)$

$\int_\gamma F \cdot dP = \int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = ⊛$

$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = F(t, t^2) \cdot (1, 2t) = (t^3, t - t^2) \cdot (1, 2t) = t^3 + 2t^2 - 2t^3 = 2t^2 - t^3$ sostituisco

$⊛ = \int_0^1 (2t^2 - t^3)\, dt = \left[\frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4\right]_0^1 = \frac{5}{12}$

es Calcolare $\int_\gamma F \cdot dP$ con $F(x,y) = \left(-2y/(x^2+y^2),\ 2x/(x^2+y^2)\right)$ e $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$

$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = F(\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) = \left(\frac{-2\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}, \frac{2\cos t}{1}\right) \cdot (-\sin t, \cos t) = 2\sin^2 t + 2\cos^2 t = 2$

Si chiama **versore normale** alla superficie Σ in $\sigma(u_0, v_0)$ il vettore

$$\boxed{n(u_0, v_0) = \frac{N(u_0, v_0)}{\| N(u_0, v_0) \|}}$$

(uno dei due versori normali alla sup., l'altro è il suo opposto!)

▶ Si dice che σ individua sul suo sostegno un orientamento detto anche **verso di attraversamento**

Def Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ aperti connessi per archi, $\sigma : A \to \mathbb{R}^3$ e $\tau : B \to \mathbb{R}^3$ due superfici parametriche semplici e regolari.
Diciamo che σ e τ sono **equivalenti** se esiste $\alpha : B \to A$ biettiva di classe C^1 con $\det J_\alpha(x, y) > 0 \ \forall (x, y) \in B$ tale che $\tau = \sigma \circ \alpha$

Prop Se σ e τ sono equivalenti, allora hanno lo stesso sostegno e inducono su di esso lo stesso verso di attraversamento.

Prop Siano σ, τ e α come nella def precedente tranne che per il segno del $\det J_\alpha(x, y)$. Supponiamo che $\forall (x, y) \in B$, $\det J_\alpha(x, y) < 0$.
Allora σ e τ hanno lo stesso sostegno ma inducono su di esso versi di attraversamento opposti.

es.

Siano: $R > 0$ e $\sigma : \overset{u}{\mathbb{R}} \times \overset{v}{(0, 2\pi)} \to \mathbb{R}^3$ definita da $\sigma(u, v) = (R\cos v, R\sin v, u)$.

• σ è di classe C^1

$$J_\sigma(u, v) = \begin{pmatrix} 0 & -R\sin v \\ 0 & R\cos v \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

colonne lin. indip. $\Rightarrow rg(J) = 2 \Rightarrow \sigma$ REGOLARE $\Rightarrow$ $\exists$ versore normale

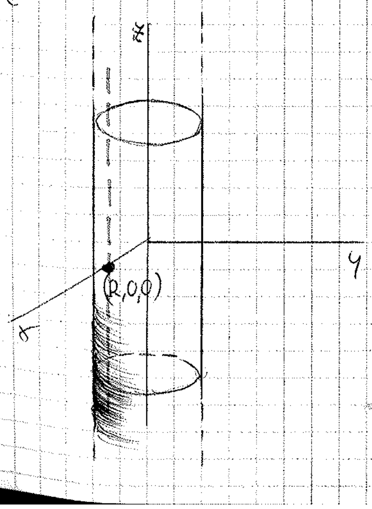
• Il sostegno di σ è $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = \sigma(u, v), u \in \mathbb{R}, v \in (0, 2\pi)\} \Rightarrow$

$(x, y, z) = \sigma(u, v) = (R\cos v, R\sin v, u) \Rightarrow$

$$\begin{cases} x = R\cos v \\ y = R\sin v \\ z = u \end{cases}$$

$\to x^2 + y^2 = R^2$ è un cilindro retto con asse coincidente con l'asse z

$v \neq 0, 2\pi \Rightarrow \begin{cases} x \neq R \\ y \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = R^3\} \setminus \{(R, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$



Si tratta del cilindro completo meno una retta!

INTEGRALI DI SUPERFICIE DI UNA FUNZIONE REALE

Def Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto connesso per archi, $K \subseteq A$ un compatto tale che ∂K sia il sostegno di una curva parametrica chiusa, semplice e regolare a tratti; $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ una calotta regolare, $\Sigma = \sigma(K)$ il sostegno di σ e $f: \Sigma \to \mathbb{R}$ una funzione continua.

Si chiama integrale di superficie (INTEGRALE SUPERFICIALE) di f su σ (o Σ) il numero reale:

$$\boxed{\int_\sigma f = \int_K f(\sigma(u,v)) \, \|N(u,v)\| \, du \, dv} = \int_\Sigma f = \int_\Sigma f \, d\Sigma$$

dove $N(u,v) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v)$

Se $f = 1$ allora $\int_\sigma 1 = A_\Sigma$ che è l'area della superficie Σ.

31-10-13

Oss Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto connesso per archi, $K \subseteq A$ un compatto tale che ∂K sia il sostegno di una curva parametrica chiusa, semplice e regolare a tratti, $g: A \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 e $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in K, \ z = g(x,y)\}$

Allora Σ è il grafico di g ristretto a K, cioè $\Sigma = G_{g|_K}$

In tal caso una parametrizzazione di Σ è $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ definita da

$\sigma(x,y) = (x, y, g(x,y))$ $\qquad \sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$

Il vettore normale $N(x,y)$ è $N(x,y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x,y) = $

$$\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \sigma_3}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial y}(x,y) & \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}(x,y) & \frac{\partial \sigma_3}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} =$$

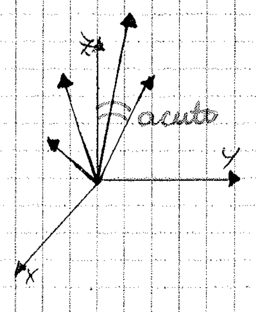
$$= \begin{pmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \\ 0 & 1 & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right)\bar{i} + \left(-\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right)\bar{j} + (1)\bar{k} =$$

$$\boxed{\Big(\underbrace{-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)}_{x}, \ \underbrace{-\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)}_{y}, \ 1\Big)}$$

$z > 0$ vett. punta verso l'alto

$\downarrow$

forma un angolo acuto con l'asse z



posso valutare i casi $\begin{cases} y = g(x,z) \\ x = g(y,z) \end{cases}$

TEOREMA DI INDIPENDENZA DELL'INTEGRALE DI SUPERFICIE DALLA PARAMETRIZZAZIONE

Siano $\sigma: K \to \mathbb{R}^3$ e $\tau: K' \to \mathbb{R}^3$ due calotte regolari equivalenti, $\Sigma = \sigma(K) = \tau(K')$ il sostegno di σ e τ e $f: \Sigma \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora

$$\boxed{\int_\sigma f = \int_\tau f}$$

Oss. Se σ e τ hanno lo stesso sostegno ma inducono su di esso versi di attraversamento opposti, allora risulta ancora che $\boxed{\int_\sigma f = \int_\tau f}$

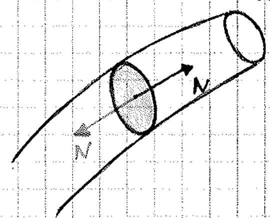
FLUSSO DI UN CAMPO VETTORIALE ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE

Def Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto non vuoto, $F: \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale continuo, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto connesso per archi, $K \subseteq A$ un compatto tale che ∂K sia il sostegno di una curva parametrica chiusa, semplice e regolare a tratti, $\sigma: K \to \Omega$ una calotta regolare e $\Sigma = \sigma(K)$ il sostegno di σ.

Si chiama FLUSSO DEL CAMPO F ATTRAVERSO σ (o Σ) il numero reale:

$$\boxed{\int_\sigma F \cdot n = \int_K F(\sigma(u,v)) \cdot N(u,v)\, du\, dv} = \int_\Sigma F \cdot n = \int_\sigma F \cdot n\, d\sigma = \int_\Sigma F \cdot n\, d\sigma$$

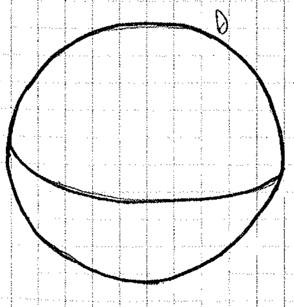
dove $N(u,v) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v)$, vettore normale a Σ nel punto $\sigma(u,v)$ e n è il versore normale a Σ con lo stesso verso di N



Si deve controllare che la parametrizzazione dia il versore normale nel senso corretto.

Se $\Sigma = \partial D$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$ tale che $\operatorname{int} D \neq \emptyset$, allora si parla di FLUSSO ENTRANTE/USCENTE da Σ (o da ∂D), ovvero flusso entrante/uscente del campo vettoriale dal bordo di D (∂D).

Oss N è entrante o uscente?



$\Sigma = \partial D$

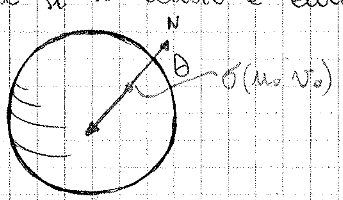
Il vettore N è continuo, se solo in un punto è entrante, allora lo è anche in tutti gli altri.

Si considera $(u_0, v_0) \in \operatorname{int} K$, cioè interno a K.

Si calcolano $\sigma(u_0, v_0)$ e $N(u_0, v_0)$

Tre modi per stabilire se il vettore è entrante o uscente:

① Metodo grafico



$F(\sigma_1(x,y)) \cdot N_1(x,y) = F(x,y,1) \cdot (0,0,1) = (x^2,y^2,1) \cdot (0,0,1) = 1$

$\overset{*}{=} \int_{K_1} 1\,dx\,dy = m(K_1) = \pi$ (area del cerchio)

Σ_2

Σ_2 è il grafico di $g_2(x,y) = x^2+y^2 \quad \forall (x,y) \in K_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\} = K_1$

$\Sigma_2 = \sigma_2(K_2) \quad \sigma_2 : K_2 \to \mathbb{R}^3$ è $\sigma_2(x,y) = (x,y,x^2+y^2)$

$\int_{\Sigma_2} F \cdot n\, d\sigma = \int_{K_2} F(\sigma_2(x,y)) \cdot N_2(x,y)\,dx\,dy \overset{*}{=}$

• $N(x,y) = \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}(x,y) = (-2x, -2y, 1)$

- Devo controllare il verso: è entrante in D, ma provo ad applicare il metodo vettoriale

$\exists (x,y,z) \in \partial D : [(x,y,z) - \sigma_2(\underbrace{u_0}_{x_0}, \underbrace{v_0}_{y_0})] \cdot N(\underbrace{u_0}_{x_0}, \underbrace{v_0}_{y_0}) < 0 \;?$
> 0

prendo $(x_0,y_0) = (0,0)$: $[(x,y,z) - \sigma_2(0,0)] \cdot N(0,0) = [(x,y,z) - (0,0,0)] \cdot (0,0,1) =$

$= (x,y,z) \cdot (0,0,1) = z = x^2+y^2 \ge 0$
$(x,y,z) \in \partial D$
$(x,y,z) \in \Sigma_2 \Rightarrow z = x^2+y^2 \to$ sostituisco

$\Rightarrow N$ è entrante

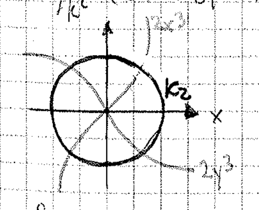
- Provo ad applicare il metodo analitico con $(x_0,y_0) = (0,0)$ per semplicità:

$\sigma(0,0) + \varepsilon N(0,0) = (0,0,0) + \varepsilon(0,0,1) = (0,0,\varepsilon) \in D? \Rightarrow 0^2+0^2 \le \varepsilon \le 1 \Rightarrow 0 \le \varepsilon \le 1 \Rightarrow \boxed{0 < \varepsilon \le 1}$
$\notin D\,?$
$\Downarrow$
N è entrante!

$\to N_2(x,y) = -N(x,y) = (2x, 2y, -1)$

$F(\sigma_2(x,y)) \cdot N_2(x,y) = F(x,y,x^2+y^2) \cdot (2x,2y,-1) = (x^2, y^2, x^2+y^2) \cdot (2x,2y,-1) = 2x^3 + 2y^3 - x^2 - y^2$

$\overset{*}{=} \int_{K^2} (2x^3+2y^3-x^2-y^2)\,dx\,dy = \underbrace{\int_{K_2} 2x^3 dx\,dy}_{0} + \underbrace{\int_{K_2} 2y^3 dx\,dy}_{0} - \int_{K_2} (x^2+y^2)\,dx\,dy =$



Osservo che i primi 2 contributi sono nulli perché sono funzioni dispari (i loro contributi si annullano) rispetto alla simmetria di K_2

$= -\int_{K_2} (x^2+y^2)\,dx\,dy = -\int_{K_2'} \rho^3\,d\rho\,d\theta = \left(\int_0^1 \rho^3 d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) = -2\pi \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 = -\frac{\pi}{2}$

polari $\quad K_2' \to [0,1] \times [0, 2\pi]$

$\Rightarrow \int_{\partial D} F \cdot n\, d\sigma = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

TEOREMA (DELLA DIPENDENZA DEL FLUSSO DAL VERSO DI ATTRAVERSAMENTO)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto non vuoto, $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ campo vettoriale continuo, $\sigma : K \to \Omega$ e $\tau : K' \to \Omega$ due superfici regolari. Allora

① Se σ e τ sono equivalenti $\boxed{\int_\sigma F \cdot n\, d\sigma = \int_\tau F \cdot n\, d\sigma}$

② Se σ e τ hanno lo stesso sostegno ma inducono su di esso versi di percorrenza

$$\oint_{\partial C} F\cdot dP = \oint_{\partial A} F\cdot dP = \int_A (1-2y)\,dx\,dy \underset{\text{polari}}{=} \int_{A'} (1-2\rho\,\mathrm{sen}\theta)\rho\, d\rho\, d\theta = \int_{A'} (\rho - 2\rho^2 \mathrm{sen}\theta)\, d\rho\, d\theta =$$

$[0,1]\times[0,2\pi]$

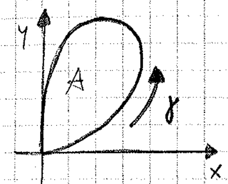
$$= \left(\int_0^1 1\, d\rho\right)2\pi - 2\left(\int_0^1 \rho^2 d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}\theta\, d\theta\right) = 2\pi\left[\frac{1}{2}\rho^2\right]_0^1 - 2\left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_0^1\left[-\cos\theta\right]_0^{2\pi} = \pi.$$

COROLLARIO: Siano $A\subseteq\mathbb{R}^2$ aperto limitato tale che ∂A sia il sostegno di una curva parametrica chiusa, semplice e regolare a tratti che induce su di esso un verso di percorrenza antiorario e $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ un campo vettoriale di classe C^1, tale che $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$: $\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = 1$, allora

$$\boxed{m(A) = \oint_{\partial A} F\cdot dP}$$

es $F(x,y) = (0, x)$ $\quad G(x,y) = (-y, 0)$ $\quad H(x,y) = \left(-\frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x\right)$ verificano l'ipotesi del corollario

es Calcolare l'area della zona di piano delimitata dalla curva $\gamma(t) = (\underbrace{t^3-3t^2+2t}_{x}, \underbrace{t-t^3}_{y})$, $0\le t\le 1$.



Per il corollario $m(A) = \int_A 1\,dx\,dy = \oint_\gamma F\cdot dP$, dove $F(x,y) = (-y, 0)$ ← preso a caso tra i campi che soddisfano la proprietà

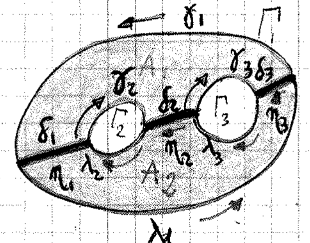
$$m(A) = \int_0^1 F(\gamma(t))\cdot \gamma'(t)\,dt \;(*)$$

$$F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t) = F(t^3-3t^2+2t,\ t-t^3)\cdot(3t^2-6t+2,\ 1-3t^2) = (t^3-t, 0)\cdot(3t^2-6t+2,\ 1-3t^2) =$$
$$= (t^3-t)\cdot(3t^2-6t+2) = 3t^5 - 3t^3 - 6t^4 + 6t^2 + 2t^3 - 2t = 3t^5 - 6t^4 - t^3 + 6t^2 - 2t$$

$$(*)\ \int_0^1 (3t^5 - 6t^4 - t^3 + 6t^2 - 2t)\,dt = \left[\frac{t^6}{2} - \frac{6}{5}t^5 - \frac{t^4}{4} + 2t^3 - t^2\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{6}{5} - \frac{1}{4} + 2 - 1 = \frac{10-24-5+20}{20} = \frac{1}{20}$$

7-11-13

OSS Vale anche se ∂A è l'unione di un numero finito di sostegni a due a due disgiunti di curve parametriche chiuse, semplici e regolari a tratti che inducono su di essi un orientamento positivo.



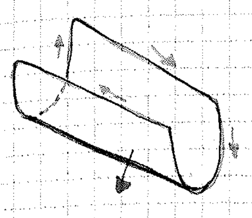
$\partial A = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$

$A = A_1 \cup A_2 \quad m(A_1\cap A_2) = 0$

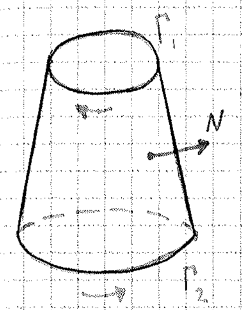
$\iint_A \dots = \int_{A_1}\dots + \int_{A_2}\dots =$ ← Teorema di Green

$$= \oint_{\partial A_1} F\cdot dP + \oint_{\partial A_2} F\cdot dP = \int_{\gamma_1} + \cancel{\int_{\delta_1}} + \int_{\gamma_2} + \cancel{\int_{\delta_2}} + \int_{\gamma_3} + \cancel{\int_{\delta_3}} + \int_{\lambda_1} + \cancel{\int_{\eta_3}} + \int_{\lambda_3} + \cancel{\int_{\eta_2}} + \int_{\lambda_2} + \cancel{\int_{\eta_1}} =$$

$$= \int_{\Gamma_1} F\cdot dP + \int_{\Gamma_2} F\cdot dP + \int_{\Gamma_3} F\cdot dP = \int_{\partial A} F\cdot dP$$



Oss Se ∂A è l'unione di un numero finito di sostegni a 2 a 2 disgiunti di curve parametriche chiuse semplici e regolari a tratti, allora $\partial\sigma$ è orientato positivamente se ognuna delle linee che costituiscono $\sigma(\partial K)$ è orientata positivamente nel senso precedente.



Σ "$\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$"

TEOREMA DI STOKES (O DEL ROTORE)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto non vuoto, $F: \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1, $F = (f_1, f_2, f_3)$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto limitato connesso per archi tale che ∂A sia l'unione di un numero finito di sostegni a 2 a 2 disgiunti di curve parametriche chiuse, semplici e regolari a tratti, $K = \bar{A}$ e $\sigma: K \to \Omega$ una calotta regolare con $\partial\sigma$ orientato positivamente. Allora

$$\boxed{\oint_{\partial\sigma} F \cdot dP = \int_{\sigma} \mathrm{rot}\, F \cdot n \, d\sigma},$$

dove $\mathrm{rot}\, F: \Omega \to \mathbb{R}^3$ è il ROTORE DI F, definito da:
$\forall (x,y,z) \in \Omega$

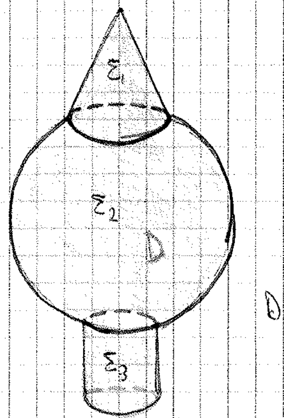
$$\mathrm{rot}\, F(x,y,z) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1(x,y,z) & f_2(x,y,z) & f_3(x,y,z) \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y,z) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z),\ \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) - \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y,z),\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) \right)$$

Es. Calcolo l'integrale di linea di $F(x,y,z) = (x,0,y)$ lungo il bordo di Σ, con $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1,\ x \geq 0,\ z \geq 0\}$, orientato positivamente rispetto al vettore normale uscente dalla sfera $x^2+y^2+z^2 \leq 1$.

11-11-13

TEOREMA DI GAUSS

Def Sia $D \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto limitato connesso per archi.
Diciamo che D è un aperto con bordo se ∂D è l'unione di un numero finito di sostegni di calotte regolari orientate secondo il verso uscente da D e aventi a 2 a 2 in comune al più sostegni di curve parametriche regolari a tratti



$$\partial D = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$$

TEOREMA DI GAUSS (o DELLA DIVERGENZA)

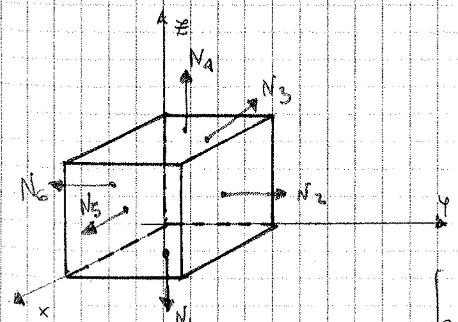
Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto non vuoto, $F: \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1
$F = (f_1, f_2, f_3)$ e $D \subseteq \Omega$ un aperto con bordo tale che $\partial D \subseteq \Omega$. Allora il flusso uscente da ∂D

$$\boxed{\int_{\partial D} F \cdot n \, d\sigma = \int_D \operatorname{div} F(x,y,z) \, dx\,dy\,dz},$$

dove $\operatorname{div} F: \Omega \to \mathbb{R}$ è la divergenza di F definita da $\forall (x,y,z) \in \Omega$:

$$\boxed{\operatorname{div} F(x,y,z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z)}$$

es Calcolare il flusso uscente di $F(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$ dal bordo di $D = [0,1]^3$



$\partial D = \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_6$ dove Σ_i è la i-esima faccia di D

$$\int_{\partial D} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Sigma_1} F \cdot n \, d\sigma + \dots + \int_{\Sigma_6} F \cdot n \, d\sigma$$

→ Per il Teorema di Gauss

$$\int_{\partial D} F \cdot n \, d\sigma = \int_D \operatorname{div} F(x,y,z) \, dx\,dy\,dz = \int_D 2(x+y+z) \, dx\,dy\,dz =$$

· Fili // asse z:

$$= 2 \int_K \left[\int_0^1 (x+y+z) \, dz \right] dx\,dy = 2 \int_K \left[(x+y)z + \frac{1}{2} z^2 \right]_0^1 dx\,dy = 2 \int_K \left(x+y+\frac{1}{2} \right) dx\,dy \overset{y\text{-semplice}}{=} 2 \int_0^1 \left[\int_0^1 \left(x+\frac{1}{2}+y \right) dy \right] dx =$$

$K \to [0,1] \times [0,1]$

$t = \|x,y,z\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \varphi(t) = -\frac{1}{t^3}$

$\boxed{\text{OSS}}$ Se $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ è radiale e continuo, allora F è conservativo.

→ Dim: F radiale $\Rightarrow F(x) = \varphi(\|x\|)\,x$, dove $\varphi: (a,b) \to \mathbb{R}$ è una funzione.

F continua $\Rightarrow \varphi$ continua $\Rightarrow$ anche la funzione $\{t \mapsto t\cdot\varphi(t)\}$ è continua.

Per il TFCI questa funzione ammette primitive su (a,b).

Sia $\phi: (a,b) \to \mathbb{R}$ una primitiva, quindi $\forall\, t \in (a,b)$: $\phi'(t) = t\cdot\varphi(t)$

Sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \phi(\|x\|)$

→ Proviamo che f è un potenziale di F su Ω:

Sia $i = 1,\dots,n$; $x \in \Omega$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\phi \circ \|x\|)(x) = \phi'(\|x\|)\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\|x\|(x) = \circledast$$

$\|x\| = \sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$

$x = (x_1,\dots,x_n)$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\|x\|(x) = \frac{2x_i}{2\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}} = \frac{x_i}{\|x\|}$$

$$\circledast = \|x\|\,\varphi(\|x\|)\,\frac{x_i}{\|x\|} = \varphi(\|x\|)\,x_i \quad \text{è continua in } \Omega$$

$\phi'(\|x\|) = \|x\|\,\varphi(\|x\|)$

Per la prop (2.3) pag. 12 f è differenziabile in Ω e $\forall x \in \Omega$:

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right) = (\varphi(\|x\|)x_1,\dots,\varphi(\|x\|)x_n) = \varphi(\|x\|)(x_1,\dots,x_n) = \varphi(\|x\|)\,x =$$

$= F(x) \Rightarrow f$ è un potenziale di F su $\Omega \Rightarrow F$ è conservativo

es. $F(x,y) = (x,y) = 1\,(x,y)$, $\varphi(t) = 1$ → è radiale

$t\varphi(t) = t = \phi'(t) \overset{\text{integro}}{\Rightarrow} \phi(t) = \frac{1}{2}t^2 \Rightarrow f(x,y) = \phi(\|(x,y)\|) = \frac{1}{2}\|(x,y)\|^2 =$

$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$

Verifica: $\nabla f(x,y) = (x,y) = F(x,y)$

es.

$$F(x,y,z) = -\frac{1}{\|(x,y,z)\|^3}(x,y,z)$$

$$\varphi(t) = -\frac{1}{t^3} \Rightarrow t\cdot\varphi(t) = -\frac{1}{t^2} = \phi'(t) \Rightarrow \phi(t) = \frac{1}{t}$$

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\|(x,y,z)\|} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

PROPRIETÀ DEI POTENZIALI

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto connesso per archi, $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ campo vettoriale conservativo e $f, g: \Omega \to \mathbb{R}$ due potenziali di F su Ω. Allora $\exists\, c \in \mathbb{R}$ tale che $\forall x \in \Omega$:

$$\boxed{f(x) - g(x) = c}$$

14-11-13

TEOREMA DELL'INTEGRALE DI LINEA DI UN CAMPO CONSERVATIVO

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto, $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ campo vettoriale continuo e conservativo, $f: \Omega \to \mathbb{R}$ un potenziale di F su Ω e $\gamma: [a,b] \to \Omega$ una curva parametrica semplice e regolare a tratti. Allora:

$$\boxed{\int_\gamma F \cdot dP = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))}$$

Inoltre se γ è chiusa: $\boxed{\oint_\gamma F \cdot dP = 0}$

→ **Dim**

Coerentemente alla def. di curva regolare a tratti esistono $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ tali che γ è derivabile con derivata continua e non nulla $\forall t \neq t_k$ e in t_k esistono le derivate laterali $\forall k = 0, \dots, m$.

$$\int_\gamma F \cdot dP = \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

→ Sia $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}$ la funzione $\varphi(t) = (f \circ \gamma)(t) = f(\gamma(t))$

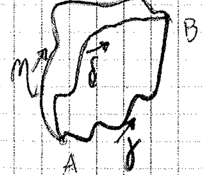
- φ è continua ed è derivabile dove γ è derivabile, cioè $\forall t \neq t_k$ con derivata
- $\varphi'(t) = (f \circ \gamma)'(t) = \underbrace{\nabla f(\gamma(t))}_{F} \cdot \gamma'(t) = F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$

  $[a,b] \xrightarrow{\gamma} \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$
- $\displaystyle\int_\gamma F \cdot dP = \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'(t)\, dt = \sum_{k=1}^{m} \big[\varphi(t)\big]_{t_{k-1}}^{t_k} = \sum_{k=1}^{m} \big(\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})\big) = \big(\varphi(t_1) - \varphi(t_0)\big) + \big(\varphi(t_2) - \varphi(t_1)\big)$

$$+ \big(\varphi(t_3) - \varphi(t_2)\big) + \dots + \big(\varphi(t_{m-1}) - \varphi(t_{m-2})\big) + \big(\varphi(t_m) - \varphi(t_{m-1})\big) = \underset{\substack{\parallel \\ b}}{\varphi(t_m)} - \underset{\substack{\parallel \\ a}}{\varphi(t_0)} = \varphi(b) - \varphi(a) =$$

$$= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) \;\blacksquare$$

OSS Ne segue che $\int_\gamma F \cdot dP$ non dipende dal percorso ma solo dai punti iniziale e finale se F è conservativo ⇒ **NON DIPENDE DALLA PARAMETRIZZAZIONE**



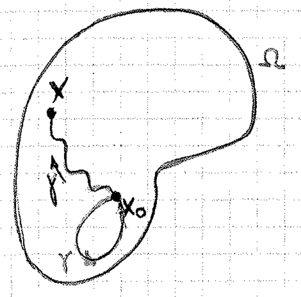
$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_\delta F \cdot dP = \int_\eta F \cdot dP$$

TEOREMA DI EQUIVALENZA PER I CAMPI CONSERVATIVI

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto connesso per archi e $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale continuo.

Allora sono fatti equivalenti:

1. F è conservativo
2. $\forall$ coppia di curve parametriche semplici e regolari a tratti $\gamma_1: [a,b] \to \Omega$ e $\gamma_2: [c,d] \to \Omega$ tali che $\gamma_1(a) = \gamma_2(c)$ e $\gamma_1(b) = \gamma_2(d)$ si ha che $\int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_{\gamma_2} F \cdot dP$



→ Sia $\gamma : [a,b] \to \Omega$ tale che $\gamma(a) = x_0$ e $\gamma(b) = x$

Proviamo che f è un potenziale di F

Se $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ proviamo che esiste $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ in Ω e che è continua in Ω $\forall j = 1, \dots, n$

e che $\nabla f(x) = F(x)$ cioè $\forall j = 1, \dots, n$: $\frac{\partial f}{\partial x_j} = f_j$

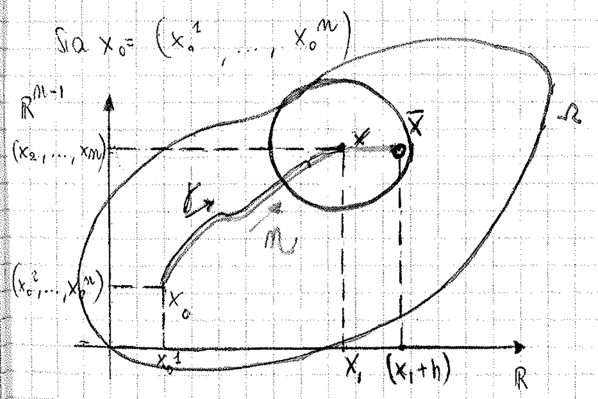
Per semplicità espositiva consideriamo $j = 1$.

→ Proviamo che $\forall x \in \Omega$ $\frac{\partial f}{\partial x}(x) = f_1(x)$

- Per definizione $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + he_1) - f(x)}{h} \in \mathbb{R}$ dove $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$

$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{h}$ con $x = (x_1, \dots, x_n)$

Sia $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$



$\left.\begin{array}{l}\Omega \text{ aperto} \\ x \in \Omega\end{array}\right\} \Rightarrow \exists r > 0 : B_r(x) \subseteq \Omega$

→ Sia $0 < h < r$ e consideriamo $\bar{x} = (x_1 + h, x_2, \dots, x_n) \in B_r(x)$

$\lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x}) - f(x)}{h}$

con $f(x) = \int_\gamma F \cdot dp$

$f(\bar{x}) = \int_\eta F \cdot dp$

dove $\eta : [a, b+h] \to \Omega$

- $\eta(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{se } a \leq t \leq b \\ (x_1 + t - b, x_2, \dots, x_n) & \text{se } b < t \leq b + h \end{cases}$

$x_1 = \alpha + b < \alpha + t \leq \alpha + b + h = x_1 + h \Rightarrow \alpha = x_1 - b$

18-11-13

TEOREMA (CONDIZIONE NECESSARIA PER I CAMPI CONSERVATIVI DI CLASSE C^1)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto connesso e $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale di classe C^1
$F = (f_1, \dots, f_n)$.

Se F è conservativo allora $\forall x \in \Omega$ e $\forall i, j = 1, \dots, n$ $\boxed{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)}$

Dim

- F conservativo $\Rightarrow \exists f: \Omega \to \mathbb{R}$ funz. differenziabile, tale che $\nabla f = F(x)$, $\forall x \in \Omega$, cioè $\forall x \in \Omega$ e $\forall i = 1, \dots, n$ $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = f_i(x)$.

F è di classe $C^1 \Rightarrow f_i$ è di classe $C^1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}$ è di classe C^1 $\forall i = 1, \dots, n$,

$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ è continua $\forall i, j = 1, \dots, n \Rightarrow f$ è di classe C^2.

- Per il lemma di Schwartz $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$ $\forall x \in \Omega$, $\forall i, j$.

$\forall x \in \Omega$ si ha che: $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_j}}_{f_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$ ∎

Oss F conservativo $\Rightarrow \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$

$\not\Leftarrow$ è una condizione necessaria ma non è sufficiente.

Se $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \neq \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \Rightarrow F$ NON È CONSERVATIVO

- Per $n = 3$ $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$ $\forall i, j = 1, 2, 3$

$\Updownarrow$

$\text{rot}\, F(x) = (0, 0, 0)$

Se $F: \Omega \to \mathbb{R}^3$ $(\Omega \subseteq \mathbb{R}^3)$ è CONSERVATIVO $\Rightarrow \text{rot}\, F = 0$

$\not\Leftarrow$

Se $\text{rot}\, F \neq 0, 0, 0 \Rightarrow F$ NON È CONSERVATIVO

Def Se F di classe C^1 è tale che $\text{rot}\, F = 0$, diciamo che F è IRROTAZIONALE

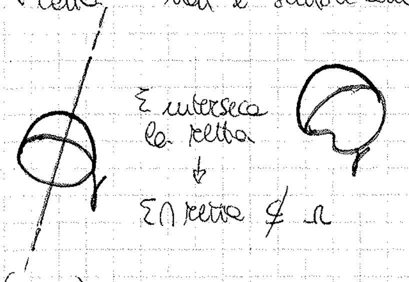
es.

$$F(x, y) = \Big(\underbrace{-\frac{2y}{x^2+y^2}}_{f_1(x,y)}, \underbrace{\frac{2x}{x^2+y^2}}_{f_2(x,y)}\Big)$$

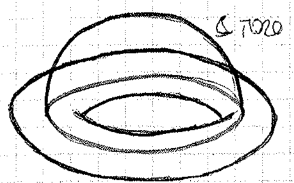
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) &= -\frac{2x^2 + 2y^2 - 4y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y^2 - 2x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) &= \frac{2x^2 + 2y^2 - 4x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y^2 - 2x^2}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}\right\} \text{verifica la condizione necessaria}$$

→ Per dimostrare che il campo non è conservativo usiamo il teorema di equivalenza

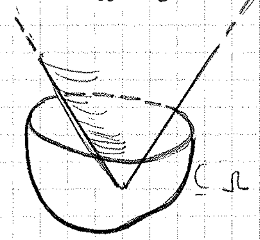
- $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus$ retta $\Rightarrow$ non è semplicemente connesso.



- TORO (TORUS) $\Rightarrow$ non è semplicemente connesso.



- $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus$ semicono $\Rightarrow$ è semplicemente connesso



TEOREMA (CONDIZIONE SUFFICIENTE (non necessaria) **PER I CAMPI CONSERVATIVI DI CLASSE C^1)**

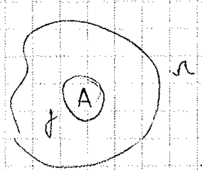
Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto e $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale di classe C^1
$F = (f_1, \dots, f_n)$.
Se Ω è semplicemente connesso e $\forall x \in \Omega$ e $\forall r, j = 1, \dots, n$, $\frac{\partial f_r}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_r}(x)$,
allora F è conservativo.

DIM

Sia $\gamma: [a,b] \to \Omega$ una curva parametrica chiusa semplice e regolare a tratti.
Proviamo che $\oint_\gamma F \cdot dP = 0$

- **$n=2$**

$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)$



Ω è semplicemente connesso. $\therefore A \subseteq \Omega$, $\partial A = Im(\gamma) \subseteq \Omega \Rightarrow \bar{A} \subseteq \Omega$

▶ $\oint_\gamma F \cdot dP = \oint_{\partial A} F \cdot dP = \int_A \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) \right) dx\,dy = 0$

se ∂A è ORIENTATO POSITIVAMENTE, per il teorema di Green

▶ Se ∂A non è orientato positivamente, allora per le proprietà degli integrali di linea

$\oint_\gamma F \cdot dP = \oint_{\partial A} F \cdot dP = -\int_A \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) \right) dx\,dy = 0$

Per il teorema di equivalenza F è conservativo.

21-11-13

RICHIAMI SUI LIMITI DI SUCCESSIONE

Def Una successione reale è una funzione reale definita su un sottoinsieme illimitato superiormente dell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali. Si denota con (a_n) o $\{a_n\}$.

Def Siano (a_n) una successione reale e $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, diciamo che ℓ è il limite di (a_n) per $n \to +\infty$ se per ogni intorno I_ℓ di ℓ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq n_0$ si ha $a_n \in I_\ell$. In tal caso scriviamo $\lim_{n\to+\infty} a_n$ o $\lim_n a_n$

- Se $\ell \in \mathbb{R}$, allora $I_\ell = (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$

  $\lim_n a_n = \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$ si ha $|a_n - \ell| < \varepsilon$

- Se $\ell = +\infty\ (-\infty)$ allora $I_\ell = (b, +\infty)\ (I_\ell = (-\infty, b))$, $b \in \mathbb{R}$

  $\lim_n a_n = +\infty\ (-\infty) \iff \forall b \in \mathbb{R}\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$ si ha $a_n > b\ (a_n < b)$

Se $\lim_n a_n = \ell \in \mathbb{R}$ diciamo che (a_n) è CONVERGENTE (a_n converge a ℓ)
Se $\lim_n a_n = +\infty$ diciamo che (a_n) DIVERGE POSITIVAMENTE
Se $\lim_n a_n = -\infty$ diciamo che (a_n) DIVERGE NEGATIVAMENTE
Se non esiste $\lim_n a_n$ diciamo che (a_n) è INDETERMINATA (oscillante)

es

$a_n = \frac{1}{n}$ converge a 0

$b_n = n$ diverge pos

$c_n = -n^2$ diverge neg

$d_n = (-1)^n$ indeterminata

Vengono

1. Teorema di unicità del limite
2. Teorema di limitatezza locale
3. Teorema della permanenza del segno
4. Teoremi del confronto
5. Teorema sulle successioni monotone
6. Algebra dei limiti
7. Stesse forme indeterminate

LIMITI NOTEVOLI

1. $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^k} = 1}$ $\forall k \in \mathbb{R}$

2. $\boxed{\lim_n \sqrt[n]{a^k} = 1}$ $\forall a > 0,\ k \in \mathbb{R}$

3. $\boxed{\lim_n \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a}$ $\forall a \in \mathbb{R}$

una sottosuccessione di (a_n) si denota con (a_{n_k}).

es

- Se (a_n) è una successione, sono sottosuccessioni

$b_n = a_{2n} \rightarrow \varphi(n) = 2n$

$c_n = a_{2n+1} \rightarrow \varphi(n) = 2n+1$

$d_n = a_{n^2} \rightarrow \varphi(n) = n^2$

$e_n = a_{n^3+n+5} \rightarrow \varphi(n) = n^3+n+5$

- non sono sottosuccessioni di (a_n)

$f_n = a_{7-n} \rightarrow \varphi(n) = 7-n$ che è strettamente decrescente

$g_n = a_{\log n} \rightarrow \varphi(n) = \log n \notin \mathbb{N}$

Proposizione Sia (a_n) una successione reale. Supponiamo che esista $\lim_n a_n = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
Allora per ogni sottosuccessione (a_{n_k}) di (a_n) si ha che $\lim_n a_{n_k} = \ell$

OSS Segue che se $\exists\, a_{n_k}$ e a_{n_h} sottosuccessioni di a_n tali che $\lim_n a_{n_{k_1}} = \ell_1$ e

$\lim_n a_{n_h} = \ell_2$, con $\ell_1 \neq \ell_2$, allora $\lim_n a_n \nexists$.

es

$d^n = (-1)^n$

Sia $b_n = d_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \Rightarrow \lim_n b_n = 1$

$c_n = d_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1 \Rightarrow \lim_n c_n = -1$

} per l'oss precedente $\lim_n d_n \nexists$
$\Rightarrow d_n$ è indeterminata.

TEOREMA DI BOLZANO-WEIERSTRASS

Sia (a_n) una successione reale limitata (cioè che $\exists\, M>0$ tale che $|a_n| < M$), allora esiste almeno una sottosuccessione a_{n_k} di a_n convergente.

CRITERIO DEL RAPPORTO PER LE SUCCESSIONI

Sia (a_n) una successione tale che $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Supponiamo che esista il $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in [0;+\infty) \cup \{+\infty\}$

Allora si ha che:

① se $\ell < 1$ allora $\lim_n a_n = 0$

② se $\ell > 1$ allora $\lim_n a_n = +\infty$

OSS Se $\ell = 1$ allora non si può concludere niente (NSPCN).

CRITERIO DELLA RADICE PER LE SUCCESSIONI

Sia a_n una successione tale che $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Supponiamo che esista il $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \ell \in [0,+\infty) \cup \{+\infty\}$

Allora si ha che:

① Se $\ell < 1$ allora $\lim_n a_n = 0$

OSS Per studiare il carattere della serie devo calcolare $\lim_n S_n$ (dove $S_n = \sum_{n=0}^{n} a_k$) e non $\lim_n a_n$.

$S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n$

$\rightarrow \lim_n S_n = \lim_n (a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n) \neq \lim_n a_0 + \lim_n a_1 + \dots + \lim_n a_{n+1} + \lim_n a_n$

perché gli addendi non sono costanti (aumentano).

25-11-13

ESEMPI NOTEVOLI

1 SERIE GEOMETRICA

$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a^n}$, $a \in \mathbb{R}$ con la convenzione che $0^0 = 1$

a = RAGIONE della serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \begin{cases} \text{converge a } \frac{1}{1-a} & \text{se } |a|<1 \\ \text{diverge positivamente} & \text{se } a \geq 1 \\ \text{è indeterminata} & \text{se } a \leq -1 \end{cases}$$

• $\forall n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k = a^0 + a^1 + \dots + a^n = 1 + a + a^2 + \dots + a^n$

OSS $\forall a \in \mathbb{R}$: $1 - a^{n+1} = 1^{n+1} - a^{n+1} = (1-a)(1+a+a^2+\dots+a^n)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \forall a \neq 1 & 1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \\ \text{se } a = 1 & 1 + a + a^2 + \dots + a^n = n+1 \end{cases}$$

▸ se $a = 1 \Rightarrow S_n = n+1 \Rightarrow \lim_n S_n = \lim_n (n+1) = +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1$ diverge positivamente

▸ se $a \neq 1 \Rightarrow S_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \Rightarrow \lim_n S_n = \lim_n \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \lim_n \left(\frac{1}{1-a} - \frac{a^{n+1}}{1-a}\right)$

• se $|a|<1 \Rightarrow \lim_n a^{n+1} = 0$

$\Rightarrow \lim_n S_n = \lim \left(\frac{1}{1-a} - \underbrace{\frac{a^{n+1}}{1-a}}_{0}\right) = \frac{1}{1-a} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a^n$ converge a $\frac{1}{1-a}$ se $|a|<1$,

si ha che $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$

• se $a>1 \Rightarrow \lim_n a^{n+1} = +\infty$

$\Rightarrow \lim_n S_n = \lim \left(\underbrace{\frac{1}{1-a}}_{\frac{1}{1-a}} - \left(\frac{a^{n+1}}{1-a}\right)\right) = +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a^n$ diverge positivamente

• se $a = -1 \Rightarrow S_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{1-(-1)^{n+1}}{2} = \frac{1-(-1)(-1)^n}{2} = \frac{1+(-1)^n}{2}$

CRITERI DI CONVERGENZA

PER TUTTE LE SERIE

Proposizione Il carattere di una serie non cambia se si aggiunge, si toglie o si modifica un numero finito di termini della serie.

→ Idea della dimostrazione

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, sia $b_n = a_n$ se $n \geq n_0$

(b_n) fa quello che vuole se $0 \leq n \leq n_0$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} b_k \underset{n \geq n_0}{=} \sum_{k=0}^{n_0-1} b_k + \sum_{k=n_0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n_0-1} + \sum_{k=n_0}^{n} a_k$$

$b_k = a_k \; \forall k \geq n_0$

$$\lim_n S_n = \lim_n \Big(\underbrace{\sum_{k=0}^{n_0-1} b_k}_{\in \mathbb{R}} - \sum_{k=n_0}^{n} a_k \Big)$$

non dipende da n — dipende da n

OSS Se $\sum a_n$ converge, allora aggiungendo, togliendo o modificando un numero finito di termini, la serie che si ottiene converge ma la somma può essere diversa da quella di $\sum a_n$.

In particolare se $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S \in \mathbb{R}$, allora

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n=0}^{m-1} a_n = S - (a_0 + a_1 + \dots + a_{m-1})$$

es
$$\sum_{n=3}^{\infty} 2^{-n} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = 2 - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}$$

Proprietà (**Algebra delle serie**)

Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ due serie reali e $\lambda \in \mathbb{R}$. Valgono i seguenti fatti:

1. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergono, allora convergono anche $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ e $\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n)$ e si ha che $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n$;
2. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergono entrambe positivamente (rispettivamente negativamente) allora anche $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ diverge positivamente (rispettivamente negativamente);
3. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge e la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge positivamente (risp. negativamente), allora la $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ diverge positivamente (risp. negativamente).

TEOREMA (**CONDIZIONE NECESSARIA**)

Sia (a_n) una successione reale.

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora $\lim_n a_n = 0$ — condiz. necessaria

→ **Dim**

• $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ $\quad \sum a_n$ converge $\Rightarrow \lim_n S_n = S \in \mathbb{R}$

TEOREMA (CRITERIO DEL CONFRONTO)

Siano (a_n) e (b_n) due successioni tali che $0 \le a_n \le b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Valgono i seguenti fatti:

① Se la $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge, allora anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \le \sum_{n=0}^{\infty} b_n$

② Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge, allora anche $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge

CASI SCOPERTI

③ $0 \le a_n \le b_n$, $\forall n$

$\sum b_n$ diverge $\Rightarrow$ NSPCN per $\sum a_n$

④ $0 \le a_n \le b_n$, $\forall n$

$\sum a_n$ converge $\Rightarrow$ NSPCN per $\sum a_n$

es. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^2 \ge n^2 - n$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$ $0 \le \frac{1}{n^2} \le \frac{1}{n^2-n} = \frac{1}{n(n-1)}$

$\frac{1}{n^2} = a_n$, $\frac{1}{n(n-1)} = b_n$ (serie di Mengoli)

$\rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} \underset{\substack{k=n-1 \\ n=k+1}}{=} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}}_{\text{serie di Mengoli}} = 1$

- Per il criterio del confronto $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ converge e risulta che $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \le \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1$
- Per le proprietà delle serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge e risulta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \underbrace{\frac{1}{1^2}}_{1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \le 1 + 1 = 2$

es. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (serie armonica)

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \ge 1$, $0 \le \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \le \frac{1}{n}$

$\rightarrow$ Infatti $f: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ $f(x) = \log(1+x) - x$

f è derivabile e $\forall x \ge 0$ $f'(x) = +\frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x}$ $\Rightarrow \forall x \ge 0$, $f'(x) \le 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ f è decrescente su $[0,+\infty)$

$\forall x \ge 0$ $f(x) \le f(0) = 0 \Rightarrow \forall x \ge 0$: $\log(1+x) - x \le 0$

- cioè $\forall x \ge 0$: $\log(1+x) \le x$

$\rightarrow$ Se $x = \frac{1}{n}$, allora: $\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \le \frac{1}{n}$

Poiché $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ diverge, per il criterio del confronto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge

TEOREMA (CRITERIO DELLA RADICE)

Sia a_n una successione tale che $a_n \geq 0 \ \forall n$

Supponiamo che esista $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \ell \in [0,+\infty) \cup \{+\infty\}$. Valgono i seguenti fatti:

1. Se $\ell < 1$, allora $\sum a_n$ converge;
2. se $\ell > 1$, allora $\sum a_n$ diverge;

OSS se $\ell = 1$, allora su $\sum a_n$ NSPCN.

es. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ $\quad a_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} \geq 0 \ \forall n \geq 1$ esponenziali

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \lim_n \sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_n \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$$

Per il criterio della radice $\sum a_n$ converge.

TEOREMA (CRITERIO DEL RAPPORTO)

Sia a_n una successione tale che $a_n \geq 0 \ \forall n$

Supponiamo che esista $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in [0,+\infty) \cup \{+\infty\}$. Valgono i seguenti fatti:

1. se $\ell < 1$, allora $\sum a_n$ converge;
2. se $\ell > 1$, allora $\sum a_n$ diverge;

OSS se $\ell = 1$ allora su a_n NSPCN.

es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ $\quad a_n = \frac{n!}{n^n} \geq 0$ fattoriali

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{\cancel{(n+1)}\, n!}{\cancel{(n+1)}(n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\frac{(n+1)^n}{n^n}} = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} =$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \text{per crit rapp } \sum a_n \text{ converge}$$

OSS $a_n \geq 0$

$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \Rightarrow \lim_n \sqrt[n]{a_n} = \ell$ $\quad$ se $\ell = 1$ vale per entrambi

$\lim \sqrt[n]{a_n} = \ell \Rightarrow \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ℓ / $\nexists$

TEOREMA (CRITERIO DI MCLAURIN)

Sia $f: [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione non negativa e decrescente e sia $a_n = f(n)$, $\forall n \geq 1$. Allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se e solo se l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge, e in tal caso si ha:

$$\boxed{\sum_{n=2}^{\infty} a_n \leq \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n}$$

- Per la disuguaglianza triangolare del modulo si ha che
$|S_n| = |a_0 + a_1 + \dots + a_n| \leq |a_0| + |a_1| + \dots + |a_n| = \sigma_n$
Poiché $\sum a_n$ e $\sum |a_n|$ convergono, allora $\exists \lim_n S_n \in \mathbb{R}$ e $\lim_n \sigma_n \in \mathbb{R}$;

→ Per il primo Teo del confronto sui limiti $\lim_n |S_n| \leq \lim_n \sigma_n$

Ne segue che: $\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| = \left|\lim_n S_n\right| = \lim_n |S_n| \leq \lim_n \sigma_n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$

OSS $\sum |a_n|$ conv $\Rightarrow$ $\sum a_n$ conv
$\not\Leftarrow$

Infatti, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge (a $-\log 2$), ma non converge assolutamente perché
$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, che diverge

OSS Se $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, allora: $\sum a_n$ converge $\Leftrightarrow$ $\sum a_n$ converge assolutamente

CRITERI PER LE SERIE DI TERMINI DI SEGNO ALTERNO

Def Diciamo che una serie è a termini di segno alterno se è della forma:
$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot b_n}$, dove $b_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Si osservi che $\boxed{\begin{array}{l} \cos(n\pi) = (-1)^n \\ \operatorname{sen}\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\right] = (-1)^n \end{array}}$

TEOREMA (CRITERIO DI LEIBNIZ) condizione sufficiente

Sia b_n una successione tale che $b_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Supponiamo che:

① $\lim_n b_n = 0$

② (b_n) è decrescente ($\forall n \geq 1$, $b_{n+1} \leq b_n$)

Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ converge.

Posto $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k b_k$ e $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$, si ha che $\forall n \geq 1$ $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$ e che
$|S - S_n| \leq b_{n+1}$

es. (serie armonica a termini di segno alterno)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n}\right)$ — $b_n \geq 0$

Non converge assolutamente.

① $\lim_n b_n = \lim_n \frac{1}{n} = 0$ ✓

② (b_n) è decrescente? $b_n = \frac{1}{n}$ $\quad b_{n+1} = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} = b_n$ ✓

Per il criterio di Leibniz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

9-12-13

SUCCESSIONI DI FUNZIONI

Sia $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$

Def Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ non vuoto, (f_n) una successione di funzioni da Ω in $\mathbb{R}$ e $f: \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo che f_n CONVERGE PUNTUALMENTE a f in Ω se $\forall x \in \Omega$ $\boxed{\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)}$ e in tal caso la funz. f è detta il LIMITE PUNTUALE di f_n in Ω e si scrive $\boxed{\lim_{n\to\infty} f_n = f}$ oppure $f_n \to f$ puntualmente in Ω

OSS $\lim_n f_n(x) = f(x) \iff \lim_n |f_n(x) - f(x)| = 0$

Def Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ un insieme non vuoto, (f_n) una successione di funzioni limitate da Ω in $\mathbb{R}$ e $f: \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione.
Diciamo che (f_n) CONVERGE UNIFORMEMENTE in Ω se $\boxed{\lim_n \|f_n - f\|_\infty = 0}$, dove $\boxed{\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)|}$.

In tal caso scriviamo $f_n \to f$ UNIFORMEMENTE in Ω.

OSS Se $f: \Omega \to \mathbb{R}$ è limitata si chiama NORMA DI f INFINITO (o NORMA DEL SUP) il numero reale $\boxed{\|f\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |f(x)|}$

$\forall x \in \Omega: \quad |f(x)| \leq \|f\|_\infty \quad (1)$

Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ è un compatto non vuoto e $f: \Omega \to \mathbb{R}$ è continua, allora f ha max su Ω, e quindi $|f|$ ha max su Ω. In tal caso $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |f(x)| = \max_{x\in\Omega} |f(x)|$

OSS • Se (f_n) limitate in Ω e $f_n \to f$ unif. in $\Omega \Rightarrow f$ è limitata in Ω

dim: Infatti, $f_n \to f$ uniformemente in $\Omega \Rightarrow \lim_n \|f_n - f\|_\infty = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \;\; \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon \quad (2)$

$\forall x \in \Omega: \quad |f(x)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x)| \underset{\text{disug. triang.}}{\leq} \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{\leq \|f_n - f\|_\infty} + \underbrace{|f_n(x)|}_{\leq \|f_n\|_\infty} \leq \underbrace{\|f_n - f\|_\infty}_{< \varepsilon \text{ per la (2)}} + \|f_n\|_\infty <$

per la proprietà (1)

$< \|f_n\|_\infty + \varepsilon$

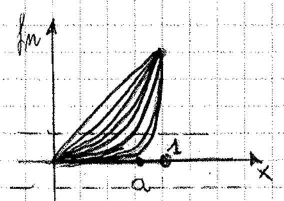
ovvero $\forall x \in \Omega$, $\forall n \geq n_0$ $\quad |f(x)| < \|f_n\|_\infty + \varepsilon \Rightarrow f$ è limitata in Ω e più precisamente $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |f(x)| \leq \|f_n\|_\infty + \varepsilon$

• Ne segue:

(f_n) limitata
$f_n \to f$ puntualmente in Ω
f non limitata in Ω

$\Rightarrow f_n \not\to f$ uniformemente in Ω

Quindi $\lim_n \|f_n - 0\|_\infty = \lim_n a^n \underset{0<a<1}{=} 0 \Rightarrow$ $f_n \to 0$ unif in $[0,a]$



f_n, $\forall n \geq 6$, appartiene alla striscia "$g-\varepsilon, g+\varepsilon$"

Prop Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ non vuoto, (f_n) una successione di funzioni limitate da Ω in $\mathbb{R}$ e $f: \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione.
Se (f_n) converge uniformemente a f in Ω allora (f_n) converge puntualmente a f in Ω

Dim $\forall x \in \Omega$

$0 \leq |f_n(x) - f(x)| \leq \underbrace{\|f_n - f\|_\infty}_{\substack{f_n \to +\infty \\ 0}}$
$f \to n \to +\infty$

Se $f_n \to f$ unif in Ω, allora $\|f_n - f\|_\infty \to 0 \Rightarrow \lim_n |f_n(x) - f(x)| = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow f_n \to f$ punt in Ω

Prop (CONTINUITÀ DEL LIMITE UNIFORME DI FUNZIONI CONTINUE)
Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ non vuoto, (f_n) una successione di funzioni continue e limitate da Ω in $\mathbb{R}$ e $f: \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione.
Se (f_n) converge uniformemente a f in Ω, allora anche f è continua.

OSS
$\left.\begin{array}{l} (f_n) \text{ continua} \\ (f_n) \to f \text{ puntualmente in } \Omega \\ f \text{ discontinua in } \Omega \end{array}\right\} \Rightarrow f_n \not\to f$ unif in Ω

TEOREMA DI PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO IL SEGNO DI INTEGRALE

Sia (f_n) una successione di funzioni continue da $[a,b]$ in $\mathbb{R}$ e sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione. Supponiamo che (f_n) converga uniformemente a f in $[a,b]$.
Allora
$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \left(\lim_n f_n(x)\right) dx = \lim_n \left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right)}$$

TEOREMA DI PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO IL SEGNO DI DERIVATA

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto e (f_n) una successione di funzioni di classe C^1 da I in $\mathbb{R}$. Supponiamo che
1. (f_n) converga puntualmente a f funzione, sull'intervallo I.
2. (f_n') converga uniformemente ad una funzione g su ogni sottointervallo chiuso e limitato dell'intervallo I

Allora f è di classe C^1 su I e $\forall x \in I$ $f'(x) = g(x)$, cioè $\forall x \in I$

$$\underbrace{\lim_{n} \|S_n - f\|_\infty = 0}_{\text{conv. unif}} \iff \lim_{n} |S_n - f| = 0 \iff \underbrace{\lim_{n} S_n = f}_{\text{convergenza}}$$

Inoltre: $\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |f_n(x)| = \sup_{x\in\Omega} |a_n| = |a_n| \Rightarrow \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty}_{\text{conv tot}} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|}_{\text{conv ass}}$

TEOREMA LEGAME FRA I QUATTRO TIPI DI CONVERGENZA

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ non vuoto e (f_n) una successione di funzioni limitate da Ω in $\mathbb{R}$, allora valgono le seguenti implicazioni fra i 4 tipi di conv. della $\sum f_n$:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \text{CONV. TOTALE} & \Rightarrow & \text{CONV. UNIFORME} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \text{CONV. ASSOLUTA} & \Rightarrow & \text{CONV. PUNTUALE} \end{array}}$$

(nessuna relaz. tra assoluta e uniforme)

Proposizione Continuità della somma di una serie di funzioni continue conv. ~~puntualmente~~ uniformemente

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ non vuoto, (f_n) una successione di funz continue e limitate da Ω in $\mathbb{R}$ e $f: \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione.

Supponiamo che $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converga uniformemente a f in Ω, allora risulta che f è continua

OSS

$$\left.\begin{array}{l} f_n \text{ continue} \\ f \text{ discontinua} \\ \sum f_n(x) = f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \sum f_n \text{ non converge uniformemente a } f$$

es. Serie che conv. uniformemente ma non assolutamente.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge $\Rightarrow$ conv. unif

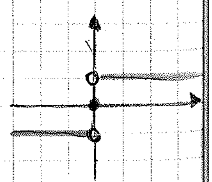
non conv. assolutamente

es. Serie che conv. assolutamente ma non uniformemente

$\sum_{n=0}^{\infty} [\operatorname{arctg}((n+1)x) - \operatorname{arctg}(nx)]$, $\forall x \in \mathbb{R}$ è una serie telescopica

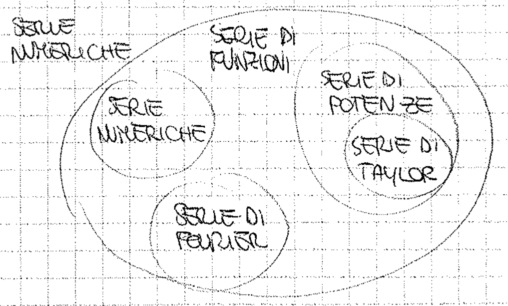
$\forall x \in \mathbb{R}$: $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} [\operatorname{arctg}(x(k+1)) - \operatorname{arctg}(kx)] = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} 2x - \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} 3x - \operatorname{arctg} 2x + \dots + \operatorname{arctg}((n+1)x) - \operatorname{arctg}(nx) = \operatorname{arctg}((n+1)x) \Rightarrow$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n} S_n(x) = \lim_{n} \operatorname{arctg}((n+1)x) = \left.\begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x < 0 \end{cases}\right\} = f(x)$$



$$\begin{cases} f \text{ è discontinua} \\ f_n(x) = \operatorname{arctg}((n+1)x) - \operatorname{arctg}(nx) \text{ è continua } \forall n \in \mathbb{N} \\ \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = f(x) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Per l'osservazione, $\sum f_n(x)$ non conv unif a f su $\mathbb{R}$



* i coeff devo essere sempre 1

16-12-13

SERIE DI POTENZE

Def Siano (a_n) una successione reale e $x_0 \in \mathbb{R}$. Si chiama **SERIE DI POTENZE CENTRATA IN x_0** la serie di funzioni $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n}$ con la convenzione che $0^0 = 1$

- Gli a_n sono anche detti COEFFICIENTI della serie.
- Si chiama RAGGIO DI CONVERGENZA della serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ l'entità

$$\boxed{R = \sup \left\{ t \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \text{ è convergente} \right\}}$$

non è sempre reale

cambio variabile: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \underset{t = x-x_0}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$

- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ converge certamente in $x = x_0$ al valore a_0 ($\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t)^n$ converge in $t=0$ ad a_0).

$0 \in \{ t \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \text{ converge} \} \Rightarrow R \in [0, +\infty] = [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$

TEOREMA SULL'INTERVALLO DI CONVERGENZA

Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze e $R \in [0, +\infty]$ il suo raggio di convergenza. Allora valgono i seguenti fatti:

1. Se $R = 0$, allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge solo in $x = 0$.
2. Se $0 < R < +\infty$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge assolutamente in $(-R, R)$ e converge uniformemente in $[-k, k]$, $\forall\, 0 < k < R$
3. Se $R = +\infty$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge assolutamente in $\mathbb{R}$ e uniformemente in $[-k, k]$, $\forall\, k > 0$

OSS 2) $\Rightarrow$ $x = \pm R$ (punti scoperti da trattare a parte)

3) $f_n(x) = a_n x^n$ è illimitata su $\mathbb{R}$, perciò non si può parlare di convergenza uniforme su $\mathbb{R}$.

TEOREMA DI ABEL

Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze e $R \in (0, +\infty)$ il suo raggio di convergenza. Se la serie di potenze converge nel punto $x = R$ (rispettivamente in $x = -R$) allora la serie converge uniformemente nell'intervallo $[-k, R]$, (resp in $[-R, k]$), $\forall\, 0 < k < R$.
In particolare se converge in entrambi i punti allora converge uniformemente in $[-R, R]$

es $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{2^n+3^n}{n}\right)}_{=a_n} x^n$ Applico il Teo della Radice.

- $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \sqrt[n]{\left|\frac{2^n+3^n}{n}\right|} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{2^n+3^n}{n}} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{3^n\left(1+\frac{2^n}{3^n}\right)}{n}} = \lim \frac{3\sqrt[n]{1+\cancel{\frac{2^n}{3^n}}}}{\sqrt[n]{n}} = 3$

- Per il teo della radice, $R=\frac{1}{3}$. La serie conv. assol in $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$
- per $x=\frac{1}{3}$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{n3^n}$ (serie a termini positivi)

$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2^n}{n3^n}+\frac{3^n}{n3^n}\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2^n}{n3^n}+\frac{1}{n}\right]$ ho scritto la serie come somma di due serie

- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n3^n}$ ho $\lim_n \sqrt[n]{\frac{2^n}{n3^n}} = \lim \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{2}{3}<1 \Rightarrow$ conv
- $\sum \frac{1}{n}$ div pos

$\Big\}$ diverge in $x=\frac{1}{3}$

- per $x=-\frac{1}{3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n+3^n}{n3^n} = \sum\left[(-1)^n\frac{2^n}{n3^n}+\frac{(-1)^n}{n}\right]$

- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ converge per Leibniz
- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{n3^n}$ per il passo precedente converge assolutamente $\Rightarrow$ conv

$\Big\}$ Per l'algebra la serie in $x=-\frac{1}{3}$ converge.

La serie conv. ass in $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$
La serie conv. punt in $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$
Per il teo di Abel conv unif in $\left[-\frac{1}{3},k\right]$, $\forall\ 0<k<\frac{1}{3}$

es $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(n!)}_{=a_n} x^n$ serie di potenze centrata in zero; Applico il Teorema del Rapporto

- $\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim \left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim_n \frac{(n+1)\cancel{n!}}{\cancel{n!}} = \lim_n (n+1) = +\infty$

→ Per il teo del rapporto, il raggio di convergenza è 0, la serie converge solo nel centro $x=0$

es $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{2^n}{n!}\right)}_{=a_n} x^n$ Applico il Teorema del Rapporto

- $\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{2^n} = \lim_n \frac{2\cdot 2^n}{(n+1)n!}\cdot\frac{n!}{2^n} = \lim_n \frac{2}{n+1} = 0$

- Per il teorema del rapporto il raggio è $R=+\infty$

→ la serie conv ass, anche punt, in $\mathbb{R}$ e unif in $[-k,k]$, $\forall k>0$

alla funzione e^{2x}

② Se $R_1 = R_2$ allora può essere che $R > \min\{R_1, R_2\} = R_1$. Considero ad esempio $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $R_1 \in (0, +\infty)$ e $b_n = -a_n$.

$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-a_n) x^n = -\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow R_2 = R_1$

$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot x^n = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow R = +\infty > R_1$

TEOREMA: PRODOTTO DI CAUCHY DI SERIE DI POTENZE

Siano $\sum a_n x^n$ e $\sum b_n x^n$ due serie di potenze aventi raggi di convergenza rispettivamente R_1 e R_2, allora la serie di potenze prodotto di Cauchy delle serie di $a_n x^n$ e $b_n x^n$, cioè la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ con $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ha raggio di convergenza $R \geq \min\{R_1, R_2\}$.

Inoltre $\forall x \in \mathbb{R}$ con $|x| < \min\{R_1, R_2\}$ si ha che $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)$ ⊛

⊛ $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n + \dots) =$

$= \underbrace{a_0 b_0}_{c_0} + \underbrace{(a_0 b_1 + a_1 b_0)}_{c_1} x + \underbrace{(a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)}_{c_2} x^2 + \dots$

19-12-13

TEOREMA DI DERIVAZIONE TERMINE A TERMINE PER LE SERIE DI POTENZE

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze avente raggio di convergenza $R \in (0, +\infty]$, allora la serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ ha raggio di convergenza R e si ha che $\forall x \in (-R, R)$,

$$\boxed{D\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} D(a_n x^n) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}}$$

per $n=0 \Rightarrow a_0 = \text{cost} \Rightarrow D(a_0) = 0$

Sia $\sum a_n x^n$ che $\sum n a_n x^{n-1}$ sono di classe C^1 e così via per ulteriori derivazioni.

Ne segue $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ è di classe C^{∞} se $R \in (0, +\infty]$

TEOREMA DI INTEGRAZIONE TERMINE A TERMINE PER LE SERIE DI POTENZE

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze avente raggio di convergenza $R \in (0, +\infty]$. Allora la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}$ ha anch'essa raggio di conv. R e risulta che $\forall x \in$ all'insieme di convergenza puntuale si ha che:

$$\boxed{\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}}$$

SERIE DI TAYLOR

Def Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto, $x_0 \in I$ e $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^{∞} sull'intervallo I. Si chiama serie di Taylor di f centrata in x_0 la serie di potenze

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)}_{a_n} (x - x_0)^n}$$

dove $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$ e $\forall n \geq 1 \quad f^{(n)}(x_0) = D^n f(x_0)$

es.

$f(x) = \frac{1}{1-x}$

- f è C^∞ su $(-\infty, 1)$ e $(1, +\infty)$
- Mostriamo che f è analitica in zero, cioè che $\exists\, \delta > 0$ tale che $\forall x \in (-\delta, \delta)$ risulta che $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n$

$f(0) = 1 = 0!$

$f'(x) = -\frac{(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$ $\quad f'(0) = 1 = 1!$

$f''(x) = -\frac{-2(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{2}{(1-x)^3}$ $\quad f''(0) = 2 = 2!$

$f'''(x) = -\frac{-6(1-x)^2}{(1-x)^6} = \frac{6}{(1-x)^4}$ $\quad f'''(0) = 6 = 3!$

- In generale si dimostra che $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = n!/(1-x)^{n+1} \Rightarrow f^{(n)}(0) = n!$

Quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} n!\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = f(x)$$

converge se $|x| < 1$, cioè $\forall x \in (-1, 1)$

TEOREMA: CONDIZIONE SUFFICIENTE PER L'ANALITICITÀ

Siano $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ e $f: (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\boxed{C^\infty}$ su $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.
Supponiamo che esista $M > 0$ tale che $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\forall n \in \mathbb{N}$: $\boxed{|f^{(n)}(x)| \leq M}$
Allora f è analitica in x_0.

TEOREMA

Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze, $R \in (0, +\infty]$ il suo raggio di convergenza e $\forall x \in (-R, R)$ sia $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
Allora f è di classe C^∞ su $(-R, R)$ e $\forall n \in \mathbb{N}$ risulta che $f^{(n)}(0) = n!\, a_n$. In particolare la serie di McLaurin di f è $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$f^{(n)}(0) = n!\, a_n \Rightarrow a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$ $\qquad \boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n}$ $\forall x \in (-R, R)$

$\Rightarrow f$ è analitica in 0 e la sua serie di McLaurin è proprio la serie di partenza.

SVILUPPI IN SERIE NOTEVOLI DI MCLAURIN $\to$ quad. esercitazioni.

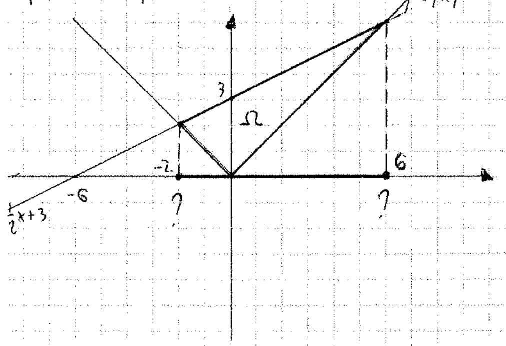
$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{12}$

4) Calcolo $\int_\Omega xy\,dxdy$ dove $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|\le y\le \frac{1}{2}x+3\}$

Ω sembra y-semplice, ma dov'è x ?

$|x|\le\frac{1}{2}x+3$ da risolvere.

Si può disegnare l'insieme



Conferma y-semplice!

Calcolo le intersezioni $|x|=\frac{1}{2}x+3$

$\begin{cases} x<0 \\ -x-\frac{1}{2}x=3\end{cases}$ $\quad\begin{cases} x\ge 0 \\ \frac{1}{2}x=3\end{cases}$

$\begin{cases} x<0 \\ -\frac{3}{2}x=3\end{cases}$ $\quad\begin{cases} x\ge 0 \\ x=6\end{cases}$

$\begin{cases} x<0 \\ x=-2\end{cases}$ $\quad\begin{cases} x\ge 0 \\ x=6\end{cases} \Rightarrow -2\le x\le 6$

$\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -2\le x\le 6,\ |x|\le y\le\frac{1}{2}x+3\}$ y-semplice

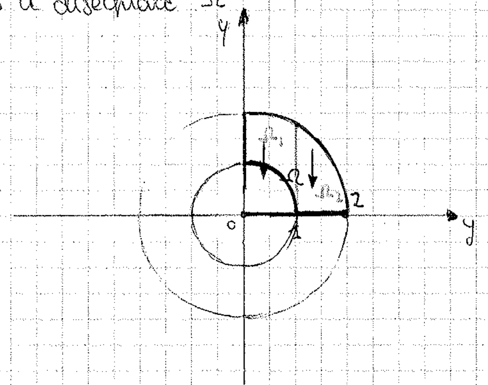
$$\int_\Omega xy\,dxdy=\int_{-2}^{6}\left[\int_{|x|}^{\frac{1}{2}x+3}xy\,dy\right]dx=\int_{-2}^{6}x\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{|x|}^{\frac{1}{2}x+3}dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{6}x\left[\left(\frac{1}{2}x+3\right)^2-|x|^2\right]dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-2}^{6}x\left[\frac{1}{4}x^2+3x+9-x^2\right]dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{6}\left(3x^2+9x-\frac{3}{4}x^3\right)dx=\frac{1}{2}\left[x^3+\frac{9}{2}x^2-\frac{3}{16}x^4\right]_{-2}^{6}=\frac{1}{2}\left(216+162-\frac{3\cdot\cancel{36}^{9}\cdot\cancel{36}^{9}}{\cancel{16}}+\right.$$

$$\left.+8-18+3\right)=\frac{1}{2}(378-243-7)=\frac{1}{2}\cdot 128=64.$$

5) Calcolo $\int_\Omega \frac{xy}{x^2+y^2}\,dxdy$ con $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0, y\ge 0\}$

Provo a disegnare Ω



$x^2+y^2=1$

$x^2+y^2=4$

$\left.\begin{matrix} x\ge 0 \\ y\ge 0\end{matrix}\right\}$ I° quadrante

Ω è y-semplice dal disegno!

$\llcorner\le y\le\urcorner$

$y^2=4-x^2 \quad y=\pm\sqrt{4-x^2}$ per $y\ge 0 \Rightarrow \urcorner\ \sqrt{4-x^2}$

$\left.\begin{matrix} y=\sqrt{1-x^2} & \text{per } 0\le x\le 1 \\ y=0 & \text{per } 1<x\le 2\end{matrix}\right] \Rightarrow \llcorner \begin{cases}\sqrt{1-x^2} & \text{se } 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{se } 1\le x\le 2\end{cases}$ definita a tratti

Conviene spezzare Ω in due insiemi tali che $m(\Omega_1\cap\Omega_2)=0$

$\Omega_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1,\ \sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{4-x^2}\}$

$\Omega_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le x\le 2,\ 0\le y\le\sqrt{4-x^2}\}$

Il segmento intersezione ha misura nulla!

$$\int_\Omega\frac{xy}{x^2+y^2}\,dxdy=\int_{\Omega_1}\frac{xy}{x^2+y^2}\,dxdy+\int_{\Omega_2}\frac{xy}{x^2+y^2}\,dxdy$$

$\begin{cases} 0\le\rho\le 1 \\ 0\le\rho\le 2\cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta\ge 0 \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0\le\rho\le 1 \\ 0\le\rho\le 2\cos\theta \\ \cos\theta\ge 0 \\ \operatorname{sen}\theta\ge 0 \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0\le\rho\le 1 \\ 0\le\rho\le 2\cos\theta \\ 0\le\theta\le \pi/2 \end{cases}$ intersezione tra due intervalli: qual è l'intervallo da considerare?

Analizzo le diseq. $\begin{cases} 1\le 2\cos\theta\ ? \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta\ge \frac{1}{2} \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{cases} \Rightarrow 0\le\theta\le\frac{\pi}{3}$

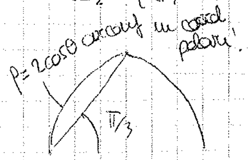
$\underbrace{\begin{cases} 0\le\theta\le\frac{\pi}{3} \\ 0\le\rho\le 1 \end{cases}}_{\Omega'_1}$ e $\underbrace{\begin{cases} \pi/3\le\theta\le\pi/2 \\ 0\le\rho\le 2\cos\theta \end{cases}}_{\Omega'_2} \Rightarrow \Omega' = \Omega'_1 + \Omega'_2$

dove

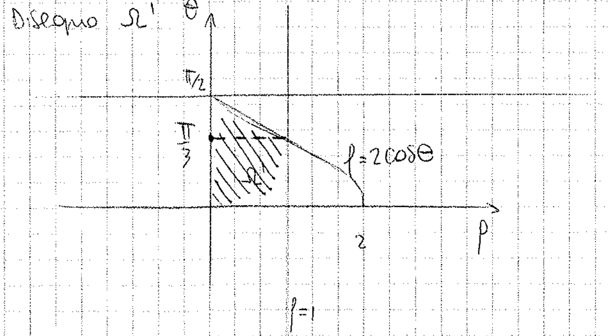
$\Omega'_1 = \{(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^2 : 0\le\rho\le 1,\ 0\le\theta\le\pi/3\}$

$\Omega'_2 = \{(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^2 : 0\le\rho\le 2\cos\theta,\ \frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\}$

con $m(\Omega'_1 \cap \Omega'_2) = 0$ confermato graficamente



Disegno Ω'



- l'insieme è ρ-semplice, bisogna dividere l'integrale in due parti.
- l'insieme è θ-semplice, considerando $\theta = \arccos\frac{1}{2}$

lo risolvo come ρ-semplice

$$\int_{\Omega'} \rho^3 \operatorname{sen}\theta\cos\theta\, d\rho\, d\theta = \int_{\Omega'_1} \rho^3 \operatorname{sen}\theta\cos\theta\, d\rho\, d\theta + \int_{\Omega'_2} \rho^3 \cos\theta\operatorname{sen}\theta\, d\rho\, d\theta = \frac{3}{32} + \frac{1}{96} = \frac{10}{96} = \frac{5}{48}.$$

- $\displaystyle\int_{\Omega'_1} \rho^3 \operatorname{sen}\theta\cos\theta\, d\rho\, d\theta = \left(\int_0^1 \rho^3 d\rho\right)\left(\int_0^{\pi/3} \operatorname{sen}\theta\cos\theta\, d\theta\right) = \left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^1 \cdot \left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\theta\right]_0^{\pi/3} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{32}$

- $\displaystyle\int_{\Omega'_2} \rho^3 \operatorname{sen}\theta\cos\theta\, d\rho\, d\theta \underset{\rho\text{-semplice}}{=} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi/2}\left[\int_0^{2\cos\theta} \rho^3 \operatorname{sen}\theta\cos\theta\, d\rho\right] d\theta = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\theta\cos\theta \left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^{2\cos\theta} d\theta =$

$\displaystyle = 4\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\theta\cos^5\theta\, d\theta = 4\left[-\frac{1}{6}\cos^6\theta\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{3}\left(0 - \frac{1}{64}\right) = \frac{1}{96}$

INTEGRALI TRIPLI

Esempio

1) Calcolo $\int_\Omega xy^2z^3\,dxdydz$ con $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le x\le 1,\ 1\le y\le 2,\ 2\le z\le 3\}$

Ω è un cubo con spigoli // agli assi coordinati:

$$\int_\Omega xy^2z^3\,dxdydz = \left(\int_0^1 x\,dx\right)\left(\int_1^2 y^2\,dy\right)\left(\int_2^3 z^3\,dz\right) = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1\left[\frac{1}{3}y^3\right]_1^2\left[\frac{1}{4}z^4\right]_2^3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 7\cdot\frac{1}{4}(81-16) = \frac{455}{24}$$

2) Calcolo volume di $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \underbrace{0\le z\le 2x}_{\text{riguarda } z},\ \underbrace{1\le x+y\le 2,\ x\ge 0,\ y\ge 0}_{\text{riguardano } x \text{ e } y}\}$

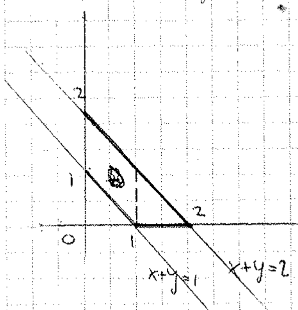
$$\boxed{m(\Omega)=\int_\Omega 1\,dxdydz}$$

Riscrivo $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in D,\ 0\le z\le 2x\}$ dove $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le x+y\le 2,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$

Integrando per fili // asse z si ha:

$$m(\Omega)=\int_\Omega 1\,dxdydz = \int_D\left[\int_0^{2x} dz\right]dxdy = \int_D 2x\,dxdy$$

Risolvo l'integrale doppio: analizzo e disegno D



D è y-semplice!

Devo spezzare in due insiemi tali che $D = S_x \cup D_x$

$$\left.\begin{array}{l} S_x=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1,\ 1-x\le y\le 2-x\} \\ D_x=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le x\le 2,\ 0\le y\le 2-x\}\end{array}\right\}\text{ y-semplici}$$

$$\int_D 2x\,dxdy = \int_{S_x} 2x\,dxdy + \int_{D_x} 2x\,dxdy = \int_0^1\left[\int_{1-x}^{2-x} 2x\,dy\right]dx + \int_1^2\left[\int_0^{2-x} 2x\,dy\right]dx =$$

$$= \int_0^1\left[2xy\right]_{1-x}^{2-x}dx + \int_1^2\left[2xy\right]_0^{2-x}dx = \int_0^1 \left(2x(2-x)-2x(1-x)\right)dx + \int_1^2 \left(2x(2-x)\right)dx =$$

$$= \int_0^1\left(4x-2x^2-2x+2x^2\right)dx + \int_1^2\left(4x-2x^2\right)dx = \left[x^2\right]_0^1 + \left[2x^2-\frac{2}{3}x^3\right]_1^2 = 1+8-\frac{16}{3}-2+\frac{2}{3} = \frac{7}{3}$$

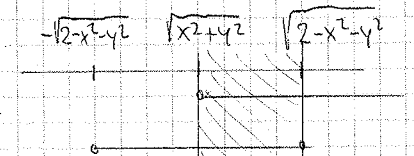
25-10-13

3) Calcolo $\int_\Omega z\,dxdydz$ dove $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\le 2,\ \sqrt{x^2+y^2}\le z\}$

$\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\ ?$

$x^2+y^2+z^2\le 2 \Rightarrow z^2\le 2-x^2-y^2 \Rightarrow -\sqrt{2-x^2+y^2}\le z\le\sqrt{2-x^2-y^2}$, C.E.: $2-x^2-y^2\ge 0$

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\le z \\ -\sqrt{2-x^2-y^2}\le z\le\sqrt{2-x^2-y^2} \\ x^2+y^2\le 2\end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{2-x^2-y^2} \\ x^2+y^2\le 2\end{cases}$$

Controllo: $\sqrt{x^2+y^2}\overset{?}{\le}\sqrt{2-x^2-y^2} \rightarrow x^2+y^2\le 2-x^2-y^2 \Rightarrow 2x^2+2y^2\le 2 \Rightarrow x^2+y^2\le 1$

$$\Omega\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{2-x^2-y^2} \\ x^2+y^2\le 1\end{cases} \Rightarrow D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1\}$$

$\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in D,\ \cancel{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{2-x^2-y^2}\}$

$\circledast = \int_{D'} \frac{\rho\cos\theta}{\rho} \cdot \rho \, d\rho d\theta = \int_{D'} \rho\cos\theta \, d\rho \, d\theta = \circledast$

$(x,z) \in D \Rightarrow 1 \le x^2+z^2 \le 2x \Rightarrow \begin{cases} 1 \le \rho^2 \le 2\rho\cos\theta \\ \rho \ge 0 \\ -\pi \le \theta \le \pi \end{cases}$ $\begin{cases} \rho \ge 1 \\ \rho \le 2\cos\theta \\ -\pi \le \theta \le \pi \end{cases}$ $\begin{cases} 1 \le \rho \le 2\cos\theta \\ -\pi \le \theta \le \pi \end{cases}$ ρ-semplice

Controllo che $1 \overset{?}{\le} 2\cos\theta \Rightarrow \theta \in [-\pi, \pi] \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta \ge \frac{1}{2} \\ -\pi \le \theta \le \pi \end{cases} \Rightarrow -\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{3}$

$D' = \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le \rho \le 2\cos\theta, -\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{3}\}$

$\circledast \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left[\int_1^{2\cos\theta} \rho\cos\theta \, d\rho\right] d\theta = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos\theta \left[\frac{1}{2}\rho^2\right]_1^{2\cos\theta} d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos\theta (4\underbrace{\cos^2\theta}_{1-\sin^2\theta} - 1) d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos\theta(3 - 4\sin^2\theta) d\theta =$

$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (3\cos\theta - 4\cos\theta\sin^2\theta) d\theta = \frac{1}{2}\left[3\sin\theta - \frac{4}{3}\sin^3\theta\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] =$

$= \frac{1}{2}[3\sqrt{3} - \sqrt{3}] = \sqrt{3}$

3) $\int_\Omega x \, dx dy dz \qquad \Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le y \le z^2, \ z^2 - 2z + y^2 < 0, \ 0 < x < \sqrt{yz}\}$

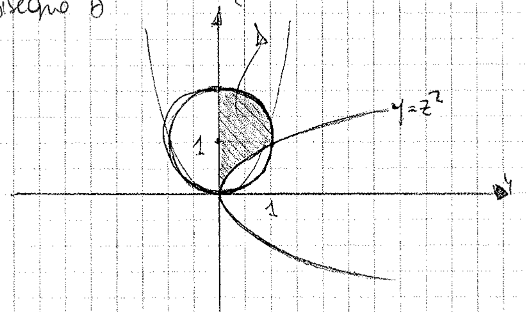
$D = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < z^2, \ z^2 - 2z + y^2 < 0, \ z > 0\}$ → necessario dal controllo della disuguaglianza.

$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (y,z) \in D, \ 0 < x < \sqrt{yz}\}$

→ Fili // all'asse x

$\int_\Omega x \, dx dy dz = \int_D \left[\int_0^{\sqrt{yz}} x \, dx\right] dy dz = \int_D \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{yz}} dy dz = \int_D \frac{1}{2} yz \, dy dz = \circledast$

Disegno D



$(z-1)^2 + y^2 < 1 \qquad z = 1 + \sqrt{1-y^2}$

→ D è un insieme z-semplice

$D = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y < 1, \ \sqrt{y} < z < 1 + \sqrt{1-y^2}\}$

$\circledast = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\int_{\sqrt{y}}^{1+\sqrt{1-y^2}} yz \, dz\right] dy = \frac{1}{2}\int_0^1 y\left[\frac{1}{2}z^2\right]_{\sqrt{y}}^{1+\sqrt{1-y^2}} dy = \frac{1}{4}\int_0^1 y\left[(1+\sqrt{1-y^2})^2 - y\right] dy =$

$\frac{1}{4}\int_0^1 y\left(1+1-y^2 + 2\sqrt{1-y^2} - y\right) dy = \frac{1}{4}\int_0^1 \left(2y - y^3 + 2y(1-y^2)^{1/2} - y^2\right) dy = \frac{1}{4}\left[y^2 - \frac{1}{4}y^4 - \frac{2}{3}(1-y^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}y^3\right]_0^1 =$

$= \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) = \frac{13}{48}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 136

08-11-13

INTEGRALI DI LINEA

1) CIRCONFERENZA ANTIORARIO

(x_0, y_0) ; $R>0$

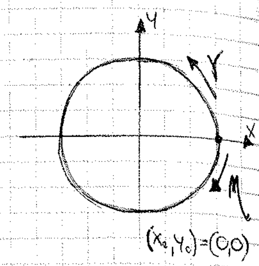
- $\gamma: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$\boxed{\gamma(t) = (x_0 + R\cos t,\ y_0 + R\sin t)}$

2) CIRCONFERENZA ORARIO

- $\eta: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$\boxed{\eta(t) = (x_0 + R\cos t,\ y_0 - R\sin t)}$



3) ELLISSE ANTIORARIO

(x_0, y_0) $a, b > 0$

- $\gamma: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$\boxed{\gamma(t) = (x_0 + a\cos t,\ y_0 + b\sin t)}$

4) ELLISSE ORARIO

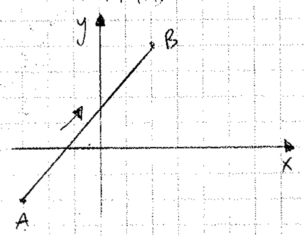
(x_0, y_0) , $a, b > 0$

- $\eta: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$\boxed{\eta(t) = (x_0 + a\cos t,\ y_0 - b\sin t)}$

5) SEGMENTO NEL PIANO

$A(x_A, y_A)$ $B(x_B, y_B)$ da A a B



- $\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^2$

$\boxed{\gamma(t) = (x_A + t(x_B - x_A),\ y_A + t(y_B - y_A))}$

Controllo la parametrizzazione:

$\gamma(0) = (x_A, y_A) \to A$

$\gamma(1) = (x_B, y_B) \to B$

$(x,y) = \gamma(t) \Rightarrow \begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A) \\ y = y_A + t(y_B - y_A) \end{cases}$ $0 \le t \le 1$

Suppongo $x_A \neq x_B$ e $y_A \neq y_B$

$\begin{cases} t = \dfrac{x - x_A}{x_B - x_A} \\ t = \dfrac{y - y_A}{y_B - y_A} \end{cases}$ $\dfrac{y - y_A}{y_B - y_A} = \dfrac{x - x_A}{x_B - x_A} \Rightarrow$ è la retta per A e B

Osservo che $0 \le t \le 1$

Suppongo che $x_A \le x_B$, $y_A \le y_B$

$x_A = x_A - 0 \le x_A + t\underbrace{(x_B - x_A)}_{\ge 0} \le x_A + 1(x_B - x_A) = x_B$

Analogamente $y_A \le y_A + t(y_B - y_A) \le y_B$

- Se prendo $t < 0 \to$ semiretta da (x_A, y_A) a $-\infty$
- Se prendo $t > 1 \to$ semiretta da $x_B\ y_B$ a $+\infty$

- Se $x_A = x_B$ e $y_A \neq y_B$: $\gamma(t) = (x_A, y_A + t(y_B - y_A))$

$\int_{\gamma_1} F\cdot dP = \int_{\gamma_1} F(\gamma_1(t))\cdot\gamma_1'(t)\,dt = ⊛$

$F(\gamma_1(t))\cdot\gamma_1'(t) = F(2\cos t, 2\,\text{sen}\,t)\cdot(-2\,\text{sen}\,t, 2\cos t) = (4\cos t\,\text{sen}\,t, 4)\cdot(-2\,\text{sen}\,t, 2\cos t) = -8\cos t\,\text{sen}^2 t + 8\cos t$

$⊛ = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-8\cos t\,\text{sen}^2 t + 8\cos t)\,dt = \left[-\frac{8}{3}\text{sen}^3 t + 8\,\text{sen}\,t\right] = -\frac{8}{3}+8-\frac{8}{3}+8 = -\frac{16}{3}+16 = \frac{32}{3}$

② $A(0,2) \to B(0,-2)$

• $\gamma_2 \; [0,1] \to \mathbb{R}^2$

$\gamma_2(t) = (0, 2+t(-2-2)) = (0, 2-4t)$

Controllo $\gamma_2(0) = 0,2 \qquad \gamma_2(1) = 0,-2$

$\int_{\gamma_2} F\cdot dP = \int_0^1 F(\gamma_2(t))\cdot\gamma'(t)\,dt = ⊛$

$F(\gamma_2(t))\cdot\gamma_2'(t) = F(0, 2-4t)\cdot(0,-4) = (0,(2-4t)^2)(0,-4) = -4(2-4t)^2$

$= \int_0^1 -4(4t-2)^2\,dt = -4\left[\frac{1}{12}(4t-2)^3\right]_0^1 = -\frac{1}{3}(8+8) = -\frac{16}{3}$

$\int_{\gamma} F\cdot dP = \int_{\gamma_1} F\cdot dP + \int_{\gamma_2} F\cdot dP = -\frac{16}{3}+\frac{32}{3} = \frac{16}{3}$

▶ Alternativa: usare il Teorema di Green:

$\int_{\gamma} F\cdot dP = \oint_{\partial A} F\cdot dP = \int_A \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\right)dx\,dy = \int_A (2x-x)\,dx\,dy = \int_A x\,dx\,dy =$ polari

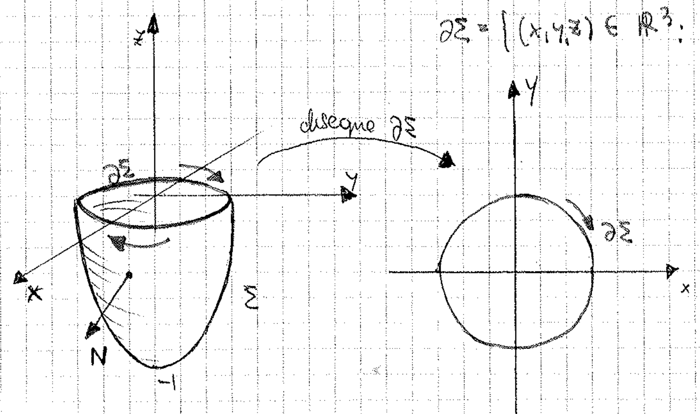
dove $F = (f_1, f_2)$, $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4,\ x \ge 0\}$

$= \int_{A'} \rho^2\cos\theta\,d\rho\,d\theta = \left(\int_0^2 \rho^2\,d\rho\right)\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta\right) [\text{sen}\,\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^2 = \frac{1\cdot 8\cdot 2}{3} = \frac{16}{3}$

$A' = [0,2]\times\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

4) Calcolo l'integrale di linea del campo $F(x,y,z) = (y, -x, z^2)$ lungo il bordo della superficie $\Sigma = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z = x^2+y^2-1,\ x^2+y^2 \le 1\}$, orientato positivamente rispetto al vettore normale uscente dal paraboloide $z = x^2+y^2-1$

$\partial\Sigma = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1,\ z = 0\}$



PARAMETRIZZAZIONE:

• $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$

$\gamma(t) = (\cos t, -\text{sen}\,t, 0)$

$\int_{\partial\Sigma} F\cdot dP = \int_{\gamma} F\cdot dP = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt$

$= \int (4\sin^2\theta\cos^2\varphi + 4\sin^2\theta\sin^2\varphi)\, 4\sin\theta\, d\theta d\varphi = \int_K 16\sin^2\theta\sin\theta\, d\theta d\varphi = \int_K 16\sin\theta\,(1-\cos^2\theta)\, d\theta d\varphi =$

$= 16\left(\int_0^{\pi}(\sin\theta - \sin\theta\cos^2\theta)\,d\theta\right)\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right) = 16\cdot 2\pi\cdot\left[-\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\pi} = 32\pi\left(1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}\right) = 32\pi\left(2-\frac{2}{3}\right) =$

$= \frac{128}{3}\pi.$

2) Calcolo $\int_\Sigma \frac{1}{z^4}\, d\sigma$ dove $\Sigma = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 1\le z\le 2\right\}$

$\Sigma \to \sigma \to N$

• Σ è il grafico di $g(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\Sigma = \sigma(K)$ dove $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ e $\sigma(x,y) = (x,y,g(x,y)) = \left(x,y,\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

Per trovare K: $1\le z\le 2 \Rightarrow 1 \le \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \le 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \le \sqrt{x^2+y^2} \le 1 \Rightarrow \frac{1}{4} \le x^2+y^2 \le 1$

• $K = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{1}{4} \le x^2+y^2 \le 1\}$

• Calcolo $N(x,y) = \frac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial y}(x,y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}, 1\right) =$

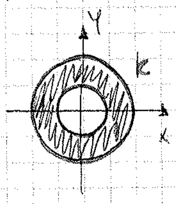
$= \left(\frac{+\cancel{2}x}{\cancel{2}(x^2+y^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}, 1\right).$

• $\|N(x,y)\| = \sqrt{\frac{x^2}{(x^2+y^2)^3} + \frac{y^2}{(x^2+y^2)^3} + 1} = \sqrt{\frac{1}{(x^2+y^2)^2} + 1} = \frac{\sqrt{1+(x^2+y^2)^2}}{x^2+y^2}.$

$f(x,y,z) = \frac{1}{z^4}$

$\Rightarrow \int_\Sigma \frac{1}{z^4}\, d\sigma = \int_\Sigma f\, d\sigma = \int_K f(\sigma(x,y))\,\|N(x,y)\|\,dxdy = \int_K f\left(x,y,\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{\sqrt{1+(x^2+y^2)^2}}{x^2+y^2}\,dxdy =$

$= \int_K \left(\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}\right)^4 \cdot \frac{\sqrt{1+(x^2+y^2)^2}}{x^2+y^2} = \int_K \frac{1}{\frac{1}{(x^2+y^2)^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+(x^2+y^2)^2}}{x^2+y^2}\,dxdy = \int_K (x^2+y^2)\sqrt{1+(x^2+y^2)^2}\,dxdy =$ polari



$= \int_{K'} \rho^3\sqrt{1+\rho^4}\,d\rho\, d\theta = \left(\int_{\frac{1}{2}}^{1} \rho^3\sqrt{1+\rho^4}\,d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) = 2\pi\left[\frac{1}{6}(1+\rho^4)^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} =$

$K' \to [0,2\pi]\times[\frac{1}{2},1]$

$= \frac{\pi}{3}\left(2\sqrt{2} - \frac{17}{16}\cdot\frac{\sqrt{17}}{4}\right).$

3) Calcolo $\int_\Sigma \frac{z}{\sqrt{4+x^2+y^2}}\, d\sigma$ con $\Sigma = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z = \log(x^2+y^2),\ 1\le x^2+y^2\le e^2\}$

• Σ è il grafico di $g(x,y) = \log(x^2+y^2)$ $g : K\to\mathbb{R}$ con $K = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le x^2+y^2\le e^2\}$

$\Sigma \to \sigma \to N$

• $\Sigma = \sigma(K)$ con $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ $\sigma(x,y) = (x,y,\log(x^2+y^2))$

Calcolo $N(x,y) = \frac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y)\wedge\frac{\partial\sigma}{\partial y}(x,y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1\right) = \left(-\frac{2x}{x^2+y^2}, -\frac{2y}{x^2+y^2}, 1\right)$

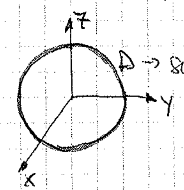
• $\|N(x,y)\| = \sqrt{\frac{4x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{4y^2}{(x^2+y^2)^2} + 1} = \sqrt{\frac{4}{x^2+y^2}+1} = \sqrt{\frac{4+x^2+y^2}{x^2+y^2}}$

Alternativa: Gauss

$$\int_{\partial D} F\cdot n\, d\sigma = \int_D \operatorname{div} F(x,y,z)\, dxdydz = \int_D (1+y)\, dxdydz = \int_D dxdydz + \cancel{\int_D y\, dxdydz}^{\,0} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{32}{3}\pi$$

$F(x,y,z) = (x-y,\ xz,\ yz)$

$\operatorname{div} F(x,y,z) = 1+y$

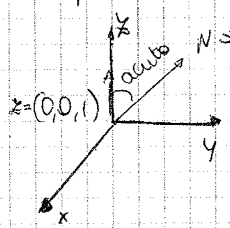


$D \rightarrow$ simmetrico rispetto al piano xz, mentre (y) cambia segno $\Rightarrow$ integrale nullo

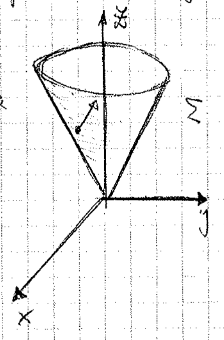
2) Calcola il flusso del campo $F(x,y,z) = \left(-3x,\ -3y,\ 2\sqrt{x^2+y^2} - z\right)$ attraverso

$\Sigma = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z = 2\sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2 \le 9 \right\}$

orientata in modo che il versore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z.



$N \Rightarrow$ la terza componente deve essere positiva



$\Sigma \rightarrow \sigma \rightarrow N$

Σ è il grafico di $g(x,y) = 2\sqrt{x^2+y^2}$

$g: K \rightarrow \mathbb{R}$, $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \le 9\}$

$\Sigma = \sigma(K)$ $\quad \sigma: K \rightarrow \mathbb{R}^3$ $\quad \sigma(x,y) = \left(x, y, 2\sqrt{x^2+y^2}\right)$

$$N_\sigma(x,y) = \frac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x,y) = \left(-\frac{2\cdot 2x}{2\sqrt{x^2+y^2}},\ -\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 1 \right)$$

N_σ come è orientato? $\Rightarrow$ 3ª componente $>0 \Rightarrow$ angolo acuto con $\hat{k} \Rightarrow N(x,y) = N_\sigma(x,y)$

$$\int_\Sigma F\cdot n\, d\sigma = \int_K F(\sigma(x,y))\cdot N(x,y)\, dxdy = ⊛$$

$$F(\sigma(x,y))\cdot N(x,y) = F\left(x, y, 2\sqrt{x^2+y^2}\right)\cdot\left(-\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ -\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 1\right) = (-3x, -3y, 0)\cdot\left(-\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ -\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 1\right) =$$

$$= \frac{6x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{6y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 6\sqrt{x^2+y^2}$$

$$⊛ = \int_K 6\sqrt{x^2+y^2}\, dxdy \underset{\text{polari}}{=} 6 \int_{K'} \rho^2\, d\rho d\theta = 6\left(\int_0^3 \rho^2\, d\rho\right) 2\pi = 12\pi \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^3 = 12\pi\cdot 9 = 108\pi$$

$K' \rightarrow [0,3]\times[0,2\pi]$

22-11-13

1) Calcola il flusso uscente di $F(x,y,z) = (x, 0, z^2)$ attraverso ∂D, $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 \le 9,\ -1 \le z \le 1\}$.

∂D almeno 3 insiemi perché D ha 3 disuguaglianze

$\partial D = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$

- $\Sigma_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 = 9,\ -1 \le z \le 1\}$
- $\Sigma_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 \le 9,\ z = -1\}$
- $\Sigma_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 \le 9,\ z = 1\}$

per ottenere le superfici pongo ogni volta una disuguaglianza con $=$, lasciando il resto invariato.

$$\int_{\partial D} F \cdot n\, d\sigma = 18\pi - 9\pi + 9\pi = 18\pi$$

Alternativa: Teorema di Gauss

$$\int_{\partial D} F \cdot n\, d\sigma = \int_D \operatorname{div} F(x,y,z)\, dx\,dy\,dz = \int_D (1+2z)\, dx\,dy\,dz$$

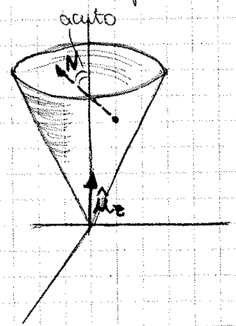
- $\operatorname{div} F = 1 + 0 + 2z = (1+2z)$

Per fili // asse z:

$$\int_K \left[\int_{-1}^{1} (1+2z)\, dz\right] dx\,dy = \qquad K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 9\}$$

$$= \int_K \left[z + z^2 \right]_{-1}^{1} dx\,dy = \int_K \left(1+1+1-1\right) dx\,dy = 2\int_K dx\,dy = 2\, m(K) = 2 \cdot 9\pi = 18\pi$$

2) Calcolo flusso di $F(x,y,z) = (x^2, y^2, z)$ attraverso a superficie $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2 \le 4\}$ orientata in modo che il versore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z.

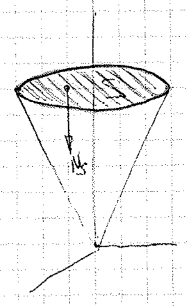


Non si può applicare subito Gauss (non c'è il "tappo")

$\Sigma \to \sigma \to N$

Alternativa: Teorema di Gauss

Devo creare un modo $\partial D = \Sigma \cup S$



$$\int_{\partial D} F \cdot n\, d\sigma = \int_\Sigma F \cdot n\, d\sigma + \int_S F \cdot n\, d\sigma \Rightarrow \boxed{\int_\Sigma F \cdot n\, d\sigma = \underbrace{\int_{\partial D} F \cdot n\, d\sigma}_{\text{flusso entrante}} - \int_S F \cdot n\, d\sigma}$$

$$\int_{\partial D} F \cdot n\, d\sigma = -(\text{Flusso uscente da } \partial D) \underset{\text{gauss}}{=} -\int_D \operatorname{div} F(x,y,z)\, dx\,dy\,dz =$$

$$= -\int_D (+2x + 2y + 1)\, dx\,dy\,dz = \circledast$$

$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2\}$

$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le 4,\ z = 2\}$

$\circledast$ fili // asse z $= -\int_K \left[\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} (2x+2y+1)\, dz\right] dy\,dx = -\int_K (2x+2y+1)\left(2-\sqrt{x^2+y^2}\right) dx\,dy =$

$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4\}$

simmetria dispari rispetto asse y

simmetria dispari rispetto all'asse y

$$= -\underbrace{\int_K 2x\left(2-\sqrt{x^2+y^2}\right) dx\,dy}_{0} - \underbrace{\int_K 2y\left(2-\sqrt{x^2+y^2}\right) dx\,dy}_{0} - \int_K \left(2-\sqrt{x^2+y^2}\right) dx\,dy = -\int_K \left(2-\sqrt{x^2+y^2}\right) dx\,dy =$$