NUMERO: 850

DATA: 12/03/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Faletta

MATERIA: Analisi Matematica I

Prof. Ceragioli

1 CONCETTI INTRODUTTIVI DI LOGICA

PROPOSIZIONE: FRASE DI SENSO COMPIUTO

CONNETTIVI LOGICI: NON, ET, VEL, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$

CONDIZIONE SUFFICIENTE: $A \Rightarrow B$ A E' C.S. PER B

CONDIZIONE NECESSARIA: $A \Rightarrow B$ B E' C.N. PER A

DIMOSTRAZIONE PER CONTRAPPOSIZIONE: $P \Rightarrow Q$ E' EQUIVALENTE A DIRE $\neg Q \Rightarrow \neg P$

DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO: $P \Rightarrow Q$ E' EQUIVALENTE A DIRE $P \wedge \neg Q \Rightarrow R \wedge \neg R$

PREDICATI: PROPOSIZIONI CHE DIPENDONO DA UNE VARIABILI E SONO VERE O FALSE A SECONDA DEL VALORE DELLE VARIABILI

QUANTIFICATORI: ESISTENZIALE ($\exists$), UNIVERSALE ($\forall$); $\neg(\forall x : P(x)) = \exists x : \neg P(x)$; $\neg(\exists x : P(x)) = \forall x\ \neg P(x)$

2 INSIEMISTICA

INSIEME: CONCETTO PRIMITIVO, COLLEZIONE, GRUPPO, APPARTENENZA. PUO' ESSERE RAPPRESENTATO IN MANIERA ESTENSIVA, GRAFICA E INTENSIVA.

SOTTOINSIEME: $A \subseteq X$; A E' UN SOTTOINSIEME DI X SE OGNI ELEMENTO DI A E' UN ELEMENTO DI X; $x \in A \Rightarrow x \in X$

UNIONE: $A \cup B = \{a \in A \vee b \in B\}$; $[x \in A \cup B] \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$

INTERSEZIONE: $A \cap B = \{x \in A \wedge x \in B\}$; $[x \in A \cap B] \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$

COMPLEMENTARE IN X: $C_X A = \{x \in X : x \notin A\}$

DIFFERENZA: $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$

DIFFERENZA SIMMETRICA: $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

PRODOTTO CARTESIANO: $A \times B = \{(a, b), a \in A, b \in B\}$

INSIEMI NUMERICI: $\mathbb{N}$ = NATURALI, $\mathbb{Z}$ = INTERI RELATIVI, $\mathbb{Q}$ = RAZIONALI, $\mathbb{R}$ = REALI, $\mathbb{C}$ = COMPLESSI

PROPRIETA' NUMERI REALI: COMMUTATIVA DELLA SOMMA, ASSOCIATIVA DELLA SOMMA, COMMUTATIVA DEL PRODOTTO, ASSOCIATIVA DEL PRODOTTO, DISTRIBUTIVA DEL PRODOTTO RISPETTO ALLA SOMMA, ESISTENZA DELL'ELEMENTO NEUTRO DELLA SOMMA, ESISTENZA DELL'ELEMENTO NEUTRO DEL PRODOTTO, ESISTENZA DELL'OPPOSTO, ESISTENZA DEL RECIPROCO

ORDINAMENTO DI $\mathbb{R}$: $x > y$ SE $x - y > 0$; $x \geq y$ SE $x - y \geq 0$; $x < y$ SE $x - y < 0$; $x \leq y$ SE $x - y \leq 0$, SONO RELAZIONI RIFLESSIVE, ANTISIMMETRICHE E TRANSITIVE.

ASSIOMI DI COMPATIBILITA' ORDINAMENTO E STRUTTURA ALGEBRICA: 1) $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$; 2) $x, y \in \mathbb{R} \wedge z \in \mathbb{R}$, $z \geq 0 \Rightarrow x \leq y \Rightarrow xz \leq yz$

PRINCIPIO DI DEDEKIND O ASSIOMA DI CONTINUITA': $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $A, B \neq \emptyset$. SE $\forall a \in A, \forall b \in B$ VALE $a \leq b$ ALLORA $\exists c \in \mathbb{R}$ t.c. $a \leq c \leq b$

PROPRIETA' CONIUGATO: $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z}'$; $\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z}'$; $\bar{\bar{z}} = z$; $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$

$z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z$, $z \cdot \bar{z} = 2\,\mathrm{Im}\,z$; $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

FORMA TRIGONOMETRICA: $z = \rho[\cos\theta + i \sin\theta]$

PRODOTTO: $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos(\theta_1+\theta_2) + i \sin(\theta_1+\theta_2)]$

POTENZA: $(z)^n = \rho^n[\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$

FORMA ESPONENZIALE: $z = \rho e^{i\theta}$

FORMULE DI EULERO: $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$; $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

PRODOTTO: $z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

POTENZA: $(z)^n = \rho^n e^{i(n\theta)}$

EQUAZIONE DI EULERO: $e^{i\pi}+1=0$

RADICI n-ESIME: $(z)^{\frac{1}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$ $\quad 0 \le k \le n-1$

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA: UN POLINOMIO DI GRADO n IN $\mathbb{C}$ CON LE RADICI DISTINTE $z_1, \dots, z_n$ SI PUO' SCRIVERE COME: $P_n(z) = a_n(z-z_1)^{m_1} \cdot (z-z_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (z-z_r)^{m_r}$ DOVE $m_1 \ldots m_r$ SONO LE MOLTEPLICITA' DI $z_1 \ldots z_n$ E $m_1 + m_2 + \ldots + m_r = n$.

PROPOSIZIONE: SIA $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ UN POLINOMIO A COEFFICIENTI REALI; SE z_0 E' RADICE DI $P_n(z)$ ANCHE $\bar{z}_0$ E' RADICE DI $P_n(z)$

TEOREMA DI RUFFINI: SE z_0 E' RADICE DI $P(z)$ ALLORA $(z-z_0)$ DIVIDE $P(z)$.

4 FUNZIONI

FUNZIONE: A, B INSIEMI; $A, B \neq \emptyset$; SI CHIAMA FUNZIONE DA A IN B UN'APPLICAZIONE CHE AD OGNI ELEMENTO DI A ASSOCIA UN UNICO ELEMENTO DI B

DOMINIO: $f: A \to B$; A E' IL DOMINIO DELLA FUNZIONE

CODOMINIO: $f: A \to B$; B E' IL CODOMINIO DELLA FUNZIONE

DOMINIO FORMULA: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ASSEGNATA MEDIANTE UNA FORMULA, SI CHIAMA DOMINIO IL SOTTOINSIEME DI $\mathbb{R}$ IN CUI LA FUNZIONE HA SENSO

IMMAGINE: $f(A) = \{ b \in B : \exists a \in A , b = f(a) \}$

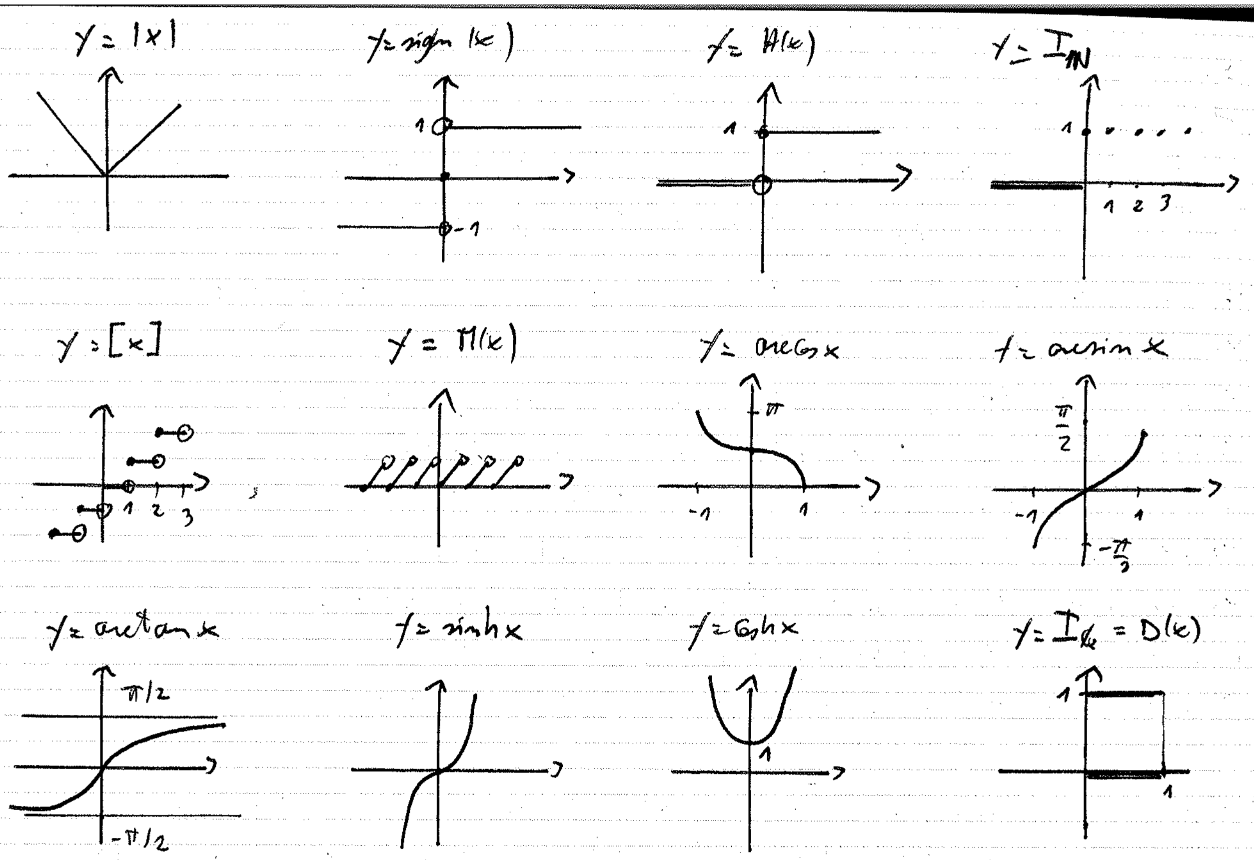
FUNZIONE SURIETTIVA: $f: A \to B$; $\forall b \in B \; \exists a \in A : b = f(a) \iff \mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}$

FUNZIONE INIETTIVA: $f: A \to B$; $a_1, a_2 \in A \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$; $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$

RESTRIZIONE: $f: \mathrm{dom}\, f \subseteq A \to B$; $g: \mathrm{dom}\, g \subseteq A \to B$; f SI DICE RESTRIZIONE DI g ALL'INSIEME $\mathrm{dom}\, f$ SE $\mathrm{dom}\, f \subseteq \mathrm{dom}\, g$

ESTENSIONE: $f: \mathrm{dom}\, f \subseteq A \to B$; $g: \mathrm{dom}\, g \subseteq A \to B$; g SI DICE ESTENSIONE DI f ALL'INSIEME $\mathrm{dom}\, g$ SE $\mathrm{dom}\, f \subseteq \mathrm{dom}\, g$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 46



INTORNO: x_0 CENTRO, r RAGGIO; INTERVALLO $(x_0-r, x_0+r) = I(x_0)$

INTORNO DESTRO: $(x_0, x_0+r) = I^+(x_0)$

INTORNO SINISTRO: $(x_0-r, x_0) = I^-(x_0)$

INTORNO DI $+\infty$: $(a, +\infty)$ $a \in \mathbb{R}$

INTORNO DI $-\infty$: $(-\infty, a)$ $a \in \mathbb{R}$

PUNTO DI ACCUMULAZIONE: $A \subseteq \mathbb{R}$, x_0 DI ACCUMULAZIONE PER A SE OGNI INTORNO DI x_0 CONTIENE DEI PUNTI DI A DIVERSI DA x_0

PUNTO ISOLATO: $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ PUNTO ISOLATO DI A SE ESISTE UN INTORNO DI x_0 CHE NON CONTIENE PUNTI DI A DIVERSI DA x_0

PUNTO INTERNO*: $A \subseteq \mathbb{R}$, x_0 PUNTO INTERNO SE È DI ACCUMULAZIONE E ~~NON~~ SE $A = [a,b]$ $x_0 \neq a, b$, CIOÈ L'INTORNO DEVE CONTENERE PUNTI SIA A DESTRA, SIA A SINISTRA

PUNTO DI ACCUMULAZIONE DESTRO: $A \subseteq \mathbb{R}$, x_0 DI ACCUMULAZIONE DESTRO PER A SE OGNI INTORNO DESTRO DI x_0 CONTIENE PUNTI DI A

PUNTO DI ACCUMULAZIONE SINISTRO: $A \subseteq \mathbb{R}$, x_0 DI ACCUMULAZIONE SINISTRO PER A SE OGNI INTORNO SINISTRO DI x_0 CONTIENE PUNTI DI A.

*PUNTO INTERNO: SIA $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ SI DICE PUNTO INTERNO AD A SE ESISTE UN INTORNO $I(x_0)$ TUTTO CONTENUTO IN A

PUNTO DI ESTREMO: PUNTO DI MASSIMO/MINIMO RELATIVO (O ASSOLUTO EVENTUALMENTE)

PROPOSIZIONE: $f: \text{dom} f \to \mathbb{R}$, x_0 DI ACC. DESTRO E SINISTRO PER $\text{dom} f$; SE $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l$ ALLORA $\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$; VALE ANCHE IL VICEVERSA E CIOÈ SE ESISTONO $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l$

2) TEOREMA SUI LIMITI DELLE FUNZIONI MONOTONE: $f: \text{dom} f \to \mathbb{R}$ MONOTONA, $x_0 \in \mathbb{R}$ DI ACC. PER $\text{dom} f$; DISTINGUIAMO 2 CASI

1) x_0 ACC. DESTRO PER $\text{dom} f \cap (x_0, +\infty) \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ E SI HA CHE:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \begin{cases} \inf \{ f(x), x \in \text{dom} f, x > x_0 \} & \text{SE } f \text{ È CRESCENTE} \\ \sup \{ f(x), x \in \text{dom} f, x > x_0 \} & \text{SE } f \text{ È DECRESCENTE} \end{cases}$$

2) x_0 ACC. SINISTRO PER $\text{dom} f \cap (-\infty, x_0) \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ E SI HA CHE:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \begin{cases} \sup \{ f(x), x \in \text{dom} f, x < x_0 \} & \text{SE } f \text{ È CRESCENTE} \\ \inf \{ f(x), x \in \text{dom} f, x < x_0 \} & \text{SE } f \text{ È CRESCENTE} \end{cases}$$

TEOREMA SUL LIMITE DELLA SOMMA DI FUNZIONI: $f, g: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, x_0 DI ACC. PER A, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l$, $\exists \lim_{x \to x_0} g(x) = m$; DISTINGUIAMO 3 CASI

1) $l \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = l + m$

2) $l \in \mathbb{R}, m = \pm\infty \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \pm\infty$

3) $l = +\infty \, (-\infty)$ E $m = +\infty \, (-\infty) \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = +\infty \, (-\infty)$

IL TEOREMA NON È APPLICABILE NEI CASI $l = +\infty, m = -\infty$ E $l = -\infty, m = +\infty$.

PROPOSIZIONE: $f, g: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ DI ACC. PER A; $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ E g LIMITATA INFERIORMENTE SU UN INTORNO DI x_0 ALLORA $\exists \lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = +\infty$

TEOREMA SUL LIMITE DEL PRODOTTO DI FUNZIONI: $f, g: A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ DI ACC. PER A; $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l$, $\exists \lim_{x \to x_0} g(x) = m$, ALLORA:

1) $l \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = l \cdot m$

2) $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, m = \pm\infty \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \begin{cases} +\infty ; l > 0 \\ -\infty ; l < 0 \end{cases} \quad l \neq 0$

3) $l = \pm\infty, m = \pm\infty \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \pm\infty$ (REGOLA DEI SEGNI)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 46

TEOREMA DEI 2 CARABINIERI: $f, g, h : A \to \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ DI ACC. PER A; SUPPONIAMO CHE $\exists\, I(x_0)$ t.c. $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$; $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$
ALLORA $\exists \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell$

LIMITI NOTEVOLI:

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$; $\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = e$; $\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$; $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$; $\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \in \mathbb{R}$; $\lim_{x \to 0} x^k |\log x|^p = 0$ $\ (k>0,\ p>0)$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log^p(x)}{x^k} = 0$ $(p > 0, k > 0)$; $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^k}{e^x} = 0$

6 CONTINUITÀ

CONTINUITÀ: $f : \text{dom} f \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \text{dom} f$; f È CONTINUA IN x_0 SE PER OGNI INTORNO $I(f(x_0))$ DI $f(x_0)$ ESISTE UN INTORNO $I(x_0)$ DI x_0 TALE CHE $\forall x \in \text{dom} f \cap I(x_0)$ SIA $f(x) \in I(f(x_0))$; CIOÈ: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ t.c. $\forall x \in \text{dom} f \cap |x - x_0| < \delta$, $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

OSSERVAZIONI: LA DEFINIZIONE È MOLTO SIMILE A QUELLA DEL LIMITE, TUTTAVIA LA DIFFERENZA È CHE x_0 VIENE CONSIDERATO E CIOÈ $|x - x_0| < \delta$ E NON $0 < |x - x_0| < \delta$. INOLTRE SE x_0 È DI ACCUMULAZIONE PER f, DIRE CHE f CONTINUA IN x_0 EQUIVALE A DIRE CHE $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$; INVECE SE $x_0 \in \text{dom} f$ MA È UN PUNTO ISOLATO PER IL $\text{dom} f$, ALLORA f È CONTINUA IN x_0 PER DEFINIZIONE

PUNTI DI DISCONTINUITÀ: $f : \text{dom} f \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \text{dom} f$; SI DISTINGUONO 3 CASI:

1) 1^a SPECIE (SALTO): $\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_1$ FINITO, $\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell_2$ FINITO, $\ell_1 \neq \ell_2$

2) 2^a SPECIE: ALMENO 1 DEI 2 LIMITI SINISTRO O DESTRO NON ESISTE OPPURE NON È FINITO

3) ELIMINABILE: $\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$ MA $f(x_0) \neq \ell$

NEL CASO DELLE DISCONTINUITÀ ELIMINABILI È POSSIBILE PROLUNGARE LA FUNZIONE PER CONTINUITÀ E CIÒ EQUIVALE A COSTRUIRE UNA NUOVA FUNZIONE $\tilde{f}$ TALE CHE

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq x_0 \\ \ell & x = x_0 \end{cases}$$

PROPRIETÀ EQUIVALENZA:

1) RIFLESSIVA: $f \sim f \quad x \to x_0$

2) SIMMETRICA: $f \sim g \quad x \to x_0 \Rightarrow g \sim f \quad x \to x_0$

3) TRANSITIVA: $f \sim g \quad x \to x_0, \; g \sim h \quad x \to x_0 \Rightarrow f \sim h \quad x \to x_0$

4) $f \sim g \quad x \to x_0 \iff f = g + o(g) \quad x \to x_0$

CONFRONTO DI INFINITI: $f, g : A \to \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ DI ACCUMULAZIONE PER A
$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$; DICIAMO CHE f HA ORDINE DI INFINITO INFERIORE A g O, EQUIVALENTEMENTE, CHE g HA ORDINE DI INFINITO SUPERIORE A f PER $x \to x_0$
SE VALE $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$; SE $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ f E g HANNO LO STESSO ORDINE DI INFINITO

CONFRONTO DI INFINITESIMI: $f, g : A \to \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ DI ACCUMULAZIONE PER A
$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$; DICIAMO CHE f HA ORDINE DI INFINITESIMO SUPERIORE RISPETTO A g O, EQUIVALENTEMENTE, CHE g HA ORDINE DI INFINITESIMO INFERIORE A f
PER $x \to x_0$ SE VALE $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$; SE $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, f E g HANNO LO STESSO ORDINE DI INFINITESIMO.

INFINITI CAMPIONE / STANDARD: SIA $f : A \to \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ DI ACC. PER A;
SIA $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$; SIA $u(x)$ UN INFINITO CAMPIONE SCELTO TRA:

1) x OPPURE $|x|$ SE $x \to +\infty$

2) $\frac{1}{x - x_0}$ OPPURE $\frac{1}{|x - x_0|}$ SE $x \to x_0 \in \mathbb{R}$

DICIAMO CHE f HA ORDINE DI INFINITO α $(\alpha > 0)$ PER $x \to x_0$ RISPETTO A $u(x)$ SE
$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{[u(x)]^\alpha} = \ell \in \mathbb{R}$, $\ell \neq 0$, CIOÈ SE $f \sim \ell [u(x)]^\alpha$ PER $x \to x_0$. IN PARTICOLARE
$\ell [u(x)]^\alpha$ È LA PARTE PRINCIPALE DI f RISPETTO A u PER $x \to x_0$.

INFINITESIMI CAMPIONE / STANDARD: SIA $f : A \to \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ DI ACC. PER A
SIA $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$; SIA $u(x)$ UN INFINITESIMO CAMPIONE SCELTO TRA:

1) $x - x_0$ OPPURE $|x - x_0|$ PER $x \to x_0 \in \mathbb{R}$

2) $\frac{1}{x}$ OPPURE $\frac{1}{|x|}$ PER $x \to +\infty$

ESISTENZA DI e: $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ È UNA SUCCESSIONE CRESCENTE E SUPERIORMENTE LIMITATA, QUINDI e ESISTE ED È COMPRESO TRA 2 E 3. DAL LIMITE DELLA SUCCESSIONE SI RICAVA IL LIMITE DELLA FUNZIONE: $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

CALCOLO DIFFERENZIALE

RAPPORTO INCREMENTALE: $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

DERIVATA: È IL LIMITE DEL RAPPORTO INCREMENTALE PER $x\to x_0$ E RAPPRESENTA IL COEFFICIENTE ANGOLARE DELLA RETTA TANGENTE AL GRAFICO DELLA FUNZIONE NEL PUNTO $(x_0, f(x_0))$, CIOÈ LA TANGENTE DELL'ANGOLO FORMATO DALLA RETTA TANGENTE E DALL'ASSE X

TEOREMA DI FERMAT: $f: \mathrm{dom} f \to \mathbb{R}$, f DERIVABILE IN OGNI PUNTO INTERNO AL $\mathrm{dom} f$, x_0 INTERNO AL $\mathrm{dom} f$ PUNTO DI ESTREMO (MASSIMO/MINIMO RELATIVO) PER f, ALLORA $f'(x_0)=0$, CIOÈ x_0 È UN PUNTO CRITICO PER f

PUNTO DI FERMAT O PUNTO CRITICO/STAZIONARIO: PUNTO IN CUI $f'(x_0)=0$

FORMULA DELL'INCREMENTO FINITO: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$ PER $x\to x_0$

DERIVABILITÀ E CONTINUITÀ: $f: \mathrm{dom} f \to \mathbb{R}$, x_0 INTERNO AL $\mathrm{dom} f$, f DERIVABILE IN x_0 ALLORA f CONTINUA IN x_0

DERIVATA DESTRA: SIA x_0 TALE CHE $\exists\, \delta>0$ PER CUI $[x_0, x_0+\delta] \subseteq \mathrm{dom} f$. DICIAMO DERIVATA DESTRA DI f IN x_0, SE ESISTE, IL $\lim_{x\to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_+(x_0)$

DERIVATA SINISTRA: SIA x_0 TALE CHE $\exists\, \delta>0$ PER CUI $[x_0-\delta, x_0] \subseteq \mathrm{dom} f$. DICIAMO DERIVATA SINISTRA DI f IN x_0, SE ESISTE, IL $\lim_{x\to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_-(x_0)$

TEOREMA DERIVATA DESTRA/SINISTRA: SE $\exists\, f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \iff \exists\, f'(x_0)$

CLASSIFICAZIONE DEI PUNTI DI NON DERIVABILITÀ: $f: \mathrm{dom} f \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathrm{dom} f$, f CONTINUA IN x_0:

PUNTO ANGOLOSO: $\exists\, f'_+(x_0)$, $\exists\, f'_-(x_0)$ MA $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$

CUSPIDE: $\lim_{x\to x_0^\pm} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm(\mp)\infty$ (DIVERSI)

FLESSO A TANGENTE VERTICALE: $\lim_{x\to x_0^\pm} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ O $-\infty$

DERIVABILE: f DERIVABILE IN x_0 INTERNO AL $\mathrm{dom} f$ SE ESISTE $f'(x_0)$

TEOREMA DI WEIERSTRASS: f continua in $[a,b]$ chiuso e limitato, allora $\exists\, x_m, x_n \in [a,b]$ t.c. $\forall x \in [a,b]$ $f(x_m) \le f(x) \le f(x_n)$, cioè f ammette massimo e minimo assoluti sull'intervallo $[a,b]$.

COROLLARIO CONTINUITÀ - LIMITATEZZA: f continua su un intervallo chiuso e limitato, allora f è limitata su questo intervallo

TEOREMA DI ROLLE: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, f continua su $[a,b]$ e derivabile su (a,b); se $f(a) = f(b)$ allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c. $f'(c) = 0$

TEOREMA DI LAGRANGE: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, f continua su $[a,b]$ e derivabile su (a,b); allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c. $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$. NOTA: il teorema di Rolle è il caso particolare con $f(a) = f(b)$.

SECONDA FORMULA DEGLI INCREMENTI FINITI: f derivabile in (a,b), per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in (a,b)$ $\exists\, c \in (a,b)$ t.c. $f(x_2) = f(x_1) + f'(c)(x_2 - x_1)$

CARATTERIZZAZIONE DELLE FUNZIONI COSTANTI: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a,b]$ derivabile in (a,b); si ha che f è costante su $[a,b]$ se e solo se $f'(x) = 0$ $\forall x \in (a,b)$
NOTA: è importante verificare la continuità di f su $[a,b]$.

MONOTONIA E DERIVATA 1ª: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile, in a e b $\exists\, f_+'(a)$ e $\exists\, f_-'(b)$

1) f crescente su $[a,b] \iff f'(x) \ge 0$ $\forall x \in [a,b]$
2) $f'(x) > 0$ $\forall x \in [a,b] \Rightarrow f$ strettamente crescente su $[a,b]$

NOTA: f strettamente crescente non implica $f'(x) > 0$ $\forall x \in [a,b]$ (es: $f(x) = x^3$).
NOTA: il teorema vale, in maniera analoga, per f decrescente e per $f'(x) \le 0$

PROPOSIZIONE: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a,b]$ e derivabile su (a,b); $f'(x) \ge 0$ $\forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ crescente su $[a,b]$ chiuso.

PROPOSIZIONE PUNTO DI MASSIMO: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ derivabile in $[a,b] \setminus \{x_0\}$; $f'(x) \ge 0$ $\forall x \in (a, x_0)$, $f'(x) \le 0$ $\forall x \in (x_0, b) \Rightarrow x_0$ punto di massimo

PROPOSIZIONE PUNTO DI MINIMO: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ derivabile in $[a,b] \setminus \{x_0\}$
$f'(x) \le 0$ $\forall x \in (a, x_0)$, $f'(x) \ge 0$ $\forall x \in (x_0, b) \Rightarrow x_0$ punto di minimo

TEOREMA DI DE L'HOPITAL $\left[\frac{0}{0}\right]$: $f, g: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ di accumulazione per A:

1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$

OSSERVAZIONE: LA DERIVATA 1ª DELLA FUNZIONE IN x_0 COINCIDE CON LA DERIVATA 1ª DEL POLINOMIO DI TAYLOR: $f'(x_0) = P_n'(x_0) = f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)\cdot 2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} n (x-x_0)^{n-1}$

GENERALIZZANDO: $f^{(k)}(x_0) = P_n^{(k)}(x_0) \quad \forall k = 1,2 \dots n$.

POLINOMIO DI MAC LAURIN: SI CONSIDERA IL POLINOMIO DI TAYLOR PER UNA FUNZIONE $f(x)$; SE $x_0 = 0$ IL POLINOMIO PRENDE IL NOME DI POLINOMIO DI MAC LAURIN ED E' DELLA FORMA:
$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)x + \frac{f''(x_0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n$

FORMULA DI TAYLOR CON RESTO DI LAGRANGE: $f: \text{dom} f \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \text{dom} f$ INTERNO, SIA $I(x_0) \in \text{dom} f$, f DERIVABILE n VOLTE CON DERIVATA n-ESIMA CONTINUA IN $I(x_0)$ CIOE' f DI CLASSE $C^n(I(x_0))$; f DERIVABILE $(n+1)$ VOLTE IN $I(x_0) \setminus \{x_0\}$ ALLORA $\forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$ $\exists\, t$ COMPRESO TRA x_0 E x TALE CHE: $f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)}$, DOVE $P_n(x)$ E' IL POLINOMIO DI TAYLOR DI f CENTRATO IN x_0 E $\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)}$ E' IL RESTO DI LAGRANGE

IRRAZIONALITA' DI e: e E' UN NUMERO IRRAZIONALE

FUNZIONE CONVESSA: $f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ INTERNO TALE CHE $\exists\, f'(x_0)$; DICIAMO CHE f E' CONVESSA IN x_0 SE $\exists\, I(x_0)$ t.c. $\forall x \in I(x_0)$, $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$, CIOE' IL GRAFICO DELLA FUNZIONE STA SOPRA AL GRAFICO DELLA RETTA TANGENTE NEL PUNTO x_0.

FUNZIONE CONCAVA: $f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ INTERNO TALE CHE $\exists\, f'(x_0)$, DICIAMO CHE f E' CONCAVA IN x_0 SE $\exists\, I(x_0)$ t.c. $\forall x \in I(x_0)$, $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$, CIOE' IL GRAFICO DELLA FUNZIONE STA SOTTO AL GRAFICO DELLA RETTA TANGENTE NEL PUNTO x_0

OSSERVAZIONE: SE $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ f E' STRETTAMENTE CONVESSA, SE INVECE $f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ f E' STRETTAMENTE CONCAVA

PUNTO DI FLESSO: $f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ INTERNO TALE CHE $\exists\, f'(x_0)$, DICIAMO CHE x_0 E' UN PUNTO DI FLESSO SE PER QUALCHE $\delta > 0$ SI VERIFICA 1 DELLE SEGUENTI CONDIZIONI:

1) $\begin{cases} f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0), & x \in (x_0-\delta, x_0) \\ f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0), & x \in (x_0, x_0+\delta) \end{cases} \Rightarrow$ FLESSO ASCENDENTE

2) $\begin{cases} f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0), & x \in (x_0-\delta, x_0) \\ f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0), & x \in (x_0, x_0+\delta) \end{cases} \Rightarrow$ FLESSO DISCENDENTE

NOTA: IL FLESSO E' ASCENDENTE O DISCENDENTE INDIPENDENTEMENTE DAL FATTO CHE LA FUNZIONE SIA CRESCENTE O DECRESCENTE. PER AVERE UN FLESSO ASCENDENTE LA FUNZIONE DEVE ESSERE CONCAVA IN $I^-(x_0)$ E CONVESSA IN $I^+(x_0)$; PER AVERE UN FLESSO DISCENDENTE LA FUNZIONE DEVE ESSERE CONVESSA IN $I^-(x_0)$ E CONCAVA IN $I^+(x_0)$

TRAPEZOIDE: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ LIMITATA, DEFINIAMO TRAPEZOIDE DI f SU $[a,b]$

$$T(f; a,b) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b \begin{cases} 0 \le y \le f(x) \\ f(x) \le y \le 0 \end{cases} \right\}$$

AREA TRAPEZOIDE: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ A SCALA TALE CHE $S = \{x_0, \dots x_m\}$ SIA UNA SUDDIVISIONE ADATTATA A f E $f_{|(x_{i-1}, x_i)} = c_i$; DEFINIAMO AREA DEL TRAPEZOIDE DI f SU $[a,b]$:

$$\text{Area } T(f; (a,b)) = c_1(x_1 - x_0) + c_2(x_2 - x_1) + \dots + c_m(x_m - x_{m-1}) = \sum_{k=1}^{m} c_k (x_k - x_{k-1}) =$$
$= \int f$ SU $[a,b]$ PER DEFINIZIONE.

INTEGRALE SUPERIORE DI f: $\overline{\int_{[a,b]}} f = \inf \left\{ \int_{[a,b]} h, h \in H^+ f \right\}$, AVENDO DEFINITO:

$$H^+_f = \{ h : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ A SCALA TALE CHE } h(x) \ge f(x), \forall x \in [a,b] \}$$

INTEGRALE INFERIORE DI f: $\underline{\int_{[a,b]}} f = \sup \left\{ \int_{[a,b]} g, g \in H^- f \right\}$ AVENDO DEFINITO:

$$H^-_f = \{ g : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ A SCALA TALE CHE } g(x) \le f(x), \forall x \in [a,b] \}$$

PROPOSIZIONE: $\underline{\int_{[a,b]}} f \le \overline{\int_{[a,b]}} f$ CIOÈ L'INTEGRALE INFERIORE È MINORE O UGUALE DI QUELLO SUPERIORE.

FUNZIONE RIEMANN INTEGRABILE: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ LIMITATA; f SI DICE INTEGRABILE SECONDO RIEMANN SU $[a,b]$ SE $\underline{\int_{[a,b]}} f = \overline{\int_{[a,b]}} f$.

INTEGRALE DEFINITO: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ LIMITATA, f RIEMANN INTEGRABILE; DEFINIAMO INTEGRALE DEFINITO DI f SU $[a,b]$, INDICATO CON $\int_a^b f(x)\,dx$, IL VALORE COMUNE AI DUE INTEGRALI SUPERIORE E INFERIORE DI f SU $[a,b]$. L'INTEGRALE DEFINITO RAPPRESENTA L'AREA DEL TRAPEZOIDE $T(f; a,b)$ CON LA CONVENZIONE CHE LE PARTI DI AREA SOPRA L'ASSE x SONO PRESE CON IL SEGNO + E LE PARTI DI AREA SOTTO L'ASSE x SONO PRESE CON IL SEGNO −. NOTA: NON TUTTE LE FUNZIONI SONO INTEGRABILI (ES: FUNZIONE DI DIRICHLET). NOTA: LE FUNZIONI A SCALA SONO INTEGRABILI SECONDO RIEMANN E L'INTEGRALE COINCIDE CON AREA $T(f; (a,b))$.

PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE: $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ INTEGRABILI SECONDO RIEMANN; VALGONO:

1) LINEARITÀ: $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$; $\lambda \int_a^b f = \int_a^b \lambda f \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
2) ADDITIVITÀ: $c \in [a,b]$; $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$
3) POSITIVITÀ: $f \ge 0$; $\int_a^b f \ge 0 \quad a < b$
4) MONOTONIA: $g \le f$, $x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b g \le \int_a^b f$
5) VALORE ASSOLUTO: $\left| \int_a^b f \right| \le \int_a^b |f|$
6) $\int_a^b f = -\int_b^a f$; $\int_c^c f = 0$

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE: f CONTINUA SU I, $x_0 \in I$ ALLORA $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ E' DERIVABILE IN I E $F'(x) = f(x)$; INOLTRE SIA G UNA PRIMITIVA DI f ALLORA $\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a)$

CALCOLO AREA SOTTESA DA UNA FUNZIONE: $A = \int_a^b |f(x)|\,dx$

CALCOLO AREA DELLA REGIONE COMPRESA TRA IL GRAFICO DI 2 FUNZIONI: $f,g : I \to \mathbb{R}$

1) DETERMINARE LE ASCISSE DEI PUNTI DI INTERSEZIONE TRA f E g RISOLVENDO L'EQUAZIONE $f(x) = g(x)$; $x_1, x_2 \dots x_k$
2) STUDIARE LA POSIZIONE RECIPROCA DI f E g SU OGNI INTERVALLINO $[x_i, x_{i+1}]$ DOVE $i = 1, \dots k-1$; CIOE' BISOGNA STABILIRE CHI STA SOPRA E CHI STA SOTTO SU OGNI INTERVALLINO;
3) SI CALCOLANO GLI INTEGRALI DEFINITI: $\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\text{CHI STA SOPRA} - \text{CHI STA SOTTO} \right) dx$
4) SI SOMMANO GLI INTEGRALI CALCOLATI AL PUNTO 3

FORMULA DI INTEGRAZIONE PER PARTI: f,g FUNZIONI DERIVABILI SU UN INTERVALLO I; VALE:
$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \left[f(x)g(x) \right]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$

TEOREMA: FORMULA DI INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE: $I, J \subseteq \mathbb{R}$ INTERVALLI E SIANO $f: I \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE CHE AMMETTE PRIMITIVA $F: I \to \mathbb{R}$ SU I E $\varphi: J \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE DERIVABILE E INVERTIBILE. ALLORA LA FUNZIONE $g: J \to \mathbb{R}$ DEFINITA COME $g(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ AMMETTE COME PRIMITIVA LA FUNZIONE $G: J \to \mathbb{R}$ DEFINITA COME $G(t) = F(\varphi(t))$

TEOREMA: INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE NEGLI INTEGRALI DEFINITI: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ E $\varphi: [\alpha, \beta] \to [a,b]$ CON $\varphi(\alpha) = a$ E $\varphi(\beta) = b$; SIA φ CONTINUA E CON DERIVATA φ' CONTINUA ALLORA SI HA CHE $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx$

METODO DI DECOMPOSIZIONE DI HERMITE: SI CONSIDERA $\int \frac{N(x)}{D(x)}\,dx$, CON $N(x)$ UN POLINOMIO DI GRADO n E $D(x)$ UN POLINOMIO DI GRADO m. ALLORA:

1) SE $n \geq m$ SI EFFETTUA LA DIVISIONE TRA POLINOMI: $N(x) = Q(x)D(x) + R(x)$, CON $R(x)$ UN POLINOMIO DI GRADO $< m$; $\int \frac{N(x)}{D(x)}\,dx = \int Q(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{D(x)}\,dx$
2) SE $n < m$ SI SCOMPONE: $D(x) = c(x-a_1)^{k_1} \dots (x-a_l)^{k_l}(x^2+b_1x+c_1)^{p_1} \dots (x^2+b_mx+c_m)^{p_m}$

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \dots + \frac{A_l}{x-a_l} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+b_1x+c_1} + \dots + \frac{B_mx+C_m}{x^2+b_mx+c_m} + \frac{d}{dx}\left(\frac{L(x)}{\Pi(x)} \right)$$

AL NUMERATORE DI OGNI FRAZIONE SI METTE IL GENERICO POLINOMIO DIMINUITO DI UN GRADO RISPETTO AL GRADO DEL DENOMINATORE COMPRESO $L(x)$. IL POLINOMIO $\Pi(x)$ E' DEFINITO COME: $\Pi(x) = (x-a_1)^{k_1-1} \dots (x-a_l)^{k_l-1} \dots (x^2+b_1x+c_1)^{p_1-1} \dots (x^2+b_mx+c_m)^{p_m-1}$, CIOE' COME IL PRODOTTO DI TUTTI I FATTORI AL DENOMINATORE CIASCUNO DIMINUITO DI UN GRADO. IDENTITA' TRA POLINOMI

CRITERIO DEL CONFRONTO PER GLI INTEGRALI IMPROPRI: $f, g: [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ INTEGRABILI SU OGNI INTERVALLO $[a, b]$, SIA $0 \le f(x) \le g(x)$ $\forall x \in [a, +\infty)$:

1) SE $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ DIVERGE $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ DIVERGE
2) SE $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ CONVERGE $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ CONVERGE

NOTA: IL TEOREMA VALE SOLO PER FUNZIONI POSITIVE. OSSERVAZIONE: $f(x) \ge 0$ IMPLICA CHE $F(b) = \int_a^b f(x)\,dx$ E' CRESCENTE OVVERO $b_1 < b_2 \Rightarrow F(b_1) < F(b_2)$

TEOREMA: CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO: $f, g: [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ INTEGRABILI SU $[a, b]$ $\forall b > a$, SIA $\forall x$ $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, SIA $f \sim g$ $x \to +\infty$ ALLORA L'INTEGRALE IMPROPRIO DI f CONVERGE SE E SOLO SE L'INTEGRALE IMPROPRIO DI g CONVERGE:
$\int_a^b g(x) < +\infty \iff \int_a^{+\infty} f(x) < +\infty$
NOTA: E' IMPORTANTE CHE f ABBIA SEGNO COSTANTE IN $[a, b]$

FUNZIONE ASSOLUTAMENTE INTEGRABILE: $f: [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ INTEGRABILE SU OGNI $[a, b]$ CON $b > a$, f SI DICE ASSOLUTAMENTE INTEGRABILE SE $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ E' CONVERGENTE

TEOREMA: CRITERIO DELLA CONVERGENZA ASSOLUTA: $f: [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ INTEGRABILE SU $[a, b]$ $\forall b > a$. SE L'INTEGRALE IMPROPRIO DI f TRA a E $+\infty$ CONVERGE ASSOLUTAMENTE, ALLORA L'INTEGRALE IMPROPRIO DI f TRA a E $+\infty$ CONVERGE. IN PARTICOLARE SI HA CHE:
$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$
OSSERVAZIONE: NON VALE IL VICEVERSA DEL TEOREMA

TEOREMA: $f: [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE INTEGRABILE SU $[a, b]$ $\forall b > a$

1) SE f E' UN INFINITESIMO DI ORDINE SUPERIORE O UGUALE A $\frac{1}{x^\alpha}$ CON $\alpha > 1$ PER $x \to +\infty$, ALLORA L'INTEGRALE IMPROPRIO DI f TRA a E $+\infty$ CONVERGE
2) SE f E' NON NEGATIVA ED E' UN INFINITESIMO DI ORDINE INFERIORE O UGUALE A $\frac{1}{x^\alpha}$ CON $\alpha \le 1$ PER $x \to +\infty$, ALLORA L'INTEGRALE IMPROPRIO DI f TRA a E $+\infty$ DIVERGE

INTEGRALI DI FUNZIONI NON LIMITATE: $f: (a, b] \to \mathbb{R}$ CON $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$; SI CONSIDERA ALLORA $f|_{[c, b]}$ E QUINDI $\int_c^b f(x)\,dx$. SI STUDIA ALLORA L'INTEGRALE CON c VARIABILE E CIOE' $\lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$, SI PRESENTANO 3 CASI:

1) ESISTE FINITO $\Rightarrow$ L'INTEGRALE IMPROPRIO CONVERGE
2) ESISTE INFINITO $\Rightarrow$ L'INTEGRALE IMPROPRIO DIVERGE
3) NON ESISTE $\Rightarrow$ L'INTEGRALE IMPROPRIO E' INDETERMINATO

NOTA: f INTEGRABILE SU OGNI INTERVALLO $[c, b]$ CON $a < c < b$

NOTA: L'INTERVALLO PUÒ ESSERE ANCHE $\mathbb{R}$, L'IMPORTANTE È CHE NON SIANO PIÙ INTERVALLI.

INTEGRALE GENERALE: INSIEME DI TUTTE LE SOLUZIONI DI UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE SU UN INTERVALLO I. NOTA: NELL'ESPRESSIONE DELL'INTEGRALE GENERALE FIGURA UNA COSTANTE C.

INTEGRALE PARTICOLARE: UNA QUALUNQUE SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE OTTENUTA DALLA SCELTA DI UN VALORE PER LA COSTANTE C NELL'ESPRESSIONE DELL'INTEGRALE GENERALE

INTEGRALE SINGOLARE: SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE NON ESPRIMIBILE A PARTIRE DALL'ESPRESSIONE DELL'INTEGRALE GENERALE, CIOÈ NON È INGLOBABILE NELL'INTEGRALE GENERALE.

PROBLEMA DI CAUCHY: UN PROBLEMA DI CAUCHY O PROBLEMA AI VALORI INIZIALI È DATO DA

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \\ y''(t_0) = y_2 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{cases} \longrightarrow \text{CONDIZIONI INIZIALI}$$

SOLUZIONE PROBLEMA DI CAUCHY: UNA SOLUZIONE DI UN PROBLEMA DI CAUCHY SU UN INTERVALLO I TALE CHE $t_0 \in I$ È UNA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE SU I CHE SODDISFI LE CONDIZIONI INIZIALI

EQUAZIONI A VARIABILI SEPARABILI: EQUAZIONI DIFFERENZIALI DELLA FORMA: $y' = f(t)g(y)$

SE y_0 È UN PUNTO TALE CHE $g(y_0) = 0$ ALLORA LA FUNZIONE COSTANTE $y(t) = y_0$ È UNA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE. L'INTEGRALE GENERALE SI CALCOLA PONENDO:

$\displaystyle\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(t)\,dt$ ED ESPRIMENDO LA y IN FUNZIONE DELLA t.

TEOREMA DI PEANO: SI CONSIDERI IL PROBLEMA DI CAUCHY $\begin{cases} y' = f(t)g(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$, SE $f(t)$ È CONTINUA IN UN INTORNO DI t_0 E SE $g(y)$ È CONTINUA IN UN INTORNO DI y_0, ALLORA IL PROBLEMA DI CAUCHY AMMETTE ALMENO UNA SOLUZIONE DEFINITA IN UN INTORNO DI t_0.

TEOREMA DI ESISTENZA E UNICITÀ: SI CONSIDERI IL PROBLEMA DI CAUCHY $\begin{cases} y' = f(t)g(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$; SE ESISTE UN INTERVALLO I TALE CHE $f(t)$ È CONTINUA SU I E $t_0 \in I$ E SE ESISTE UN INTERVALLO J TALE CHE $g(y)$ È DERIVABILE SU J E $y_0 \in J$ ALLORA ESISTE ED È UNICA ($\exists!$) LA SOLUZIONE AL PROBLEMA DI CAUCHY DEFINITA SU UN INTERVALLO MASSIMALE $I' \subseteq I$ TALE CHE $x_0 \in I'$ E $\forall x \in I' \Rightarrow y(x) \in J$

RISOLUZIONE PROBLEMA DI CAUCHY: SI CERCANO LE EVENTUALI SOLUZIONI COSTANTI CHE SIANO SOLUZIONI ANCHE DEL PROBLEMA DI CAUCHY, SI VERIFICA DI POTER APPLICARE IL TEOREMA DI ESISTENZA E UNICITÀ; SE NON CI SONO SOLUZIONI COSTANTI SI CALCOLA L'INTEGRALE GENERALE E SI SOSTITUISCONO LE CONDIZIONI INIZIALI PER TROVARE IL VALORE DI C E DETERMINARE L'INT. PARTICOLARE.

EQUAZIONI DEL 2° ORDINE OMOGENEE: EQUAZIONI DIFFERENZIALI DELLA FORMA $y''+a_1y'+a_0y=0$
IL CALCOLO DELL'INTEGRALE GENERALE CONSISTE INTANTO NEL DETERMINARE L'EQUAZIONE CARATTERISTICA: $\lambda^2+a_1\lambda+a_0=0$; POI SI DISTINGUONO I 3 CASI

1) L'EQ. CARATTERISTICA AMMETTE 2 SOLUZIONI REALI E DISTINTE λ_1 E $\lambda_2 \in \mathbb{R}$; $e^{\lambda_1 t}$ E $e^{\lambda_2 t}$ SONO ALLORA SOLUZIONI; PERTANTO L'INTEGRALE GENERALE è ESPRESSO DALLA FORMULA:
$y(t) = c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}$; $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

2) L'EQ. CARATTERISTICA AMMETTE 2 SOLUZIONI COINCIDENTI $\lambda \in \mathbb{R}$; ALLORA L'INTEGRALE GENERALE è ESPRESSO DALLA FORMULA $y(t) = c_1e^{\lambda t}+c_2te^{\lambda t}$; $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

3) L'EQ. CARATTERISTICA AMMETTE 2 SOLUZIONI COMPLESSE CONIUGATE $\lambda_{1,2}=\mu\pm i\gamma$; ALLORA L'INTEGRALE GENERALE è ESPRESSO DALLA FORMULA: $y(t)=e^{\mu t}[c_1\cos\gamma t+c_2\sin\gamma t]$; $c_1,c_2\in\mathbb{R}$

PROPOSIZIONE: COMBINAZIONE LINEARE SOLUZIONI: SIA $y''+a_1y'+a_0y=0$ UN'EQ. DIFFERENZIALE OMOGENEA DEL 2° ORDINE; SE y_1 E y_2 SONO 2 SOLUZIONI ALLORA $\bar{y}=\alpha y_1+\beta y_2$; $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ è ANCORA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE. IN ALTRI TERMINI SE y_1 E y_2 SONO SOLUZIONI, ANCHE UNA LORO COMBINAZIONE LINEARE è ANCORA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE OMOGENEA.

PROPOSIZIONE: SOLUZIONI EQUAZIONE DEL 2° ORDINE COMPLETA: OGNI SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE COMPLETA è SOMMA DI UNA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE OMOGENEA $y''+a_1y'+a_0y=0$ E DI UNA SOLUZIONE PARTICOLARE DELL'EQUAZIONE COMPLETA. IN ALTRI TERMINI L'INTEGRALE GENERALE DELL'EQUAZIONE COMPLETA è: $y(t)=y_0(t)+y_p(t)$, DOVE $y_0(t)$ RAPPRESENTA L'INTEGRALE GENERALE DELL'EQ. OMOGENEA E $y_p(t)$ è UNA SOLUZIONE PARTICOLARE DELL'EQUAZIONE COMPLETA. L'INTEGRALE PARTICOLARE SI DETERMINA A SECONDA DELLA FORMA DEL TERMINE FORZANTE:

1) $b(t)=P(t)e^{\alpha t}$; SI DISTINGUONO 2 ULTERIORI SOTTOCASI:

- α NON è SOLUZIONE DELL'EQ. CARATTERISTICA $\lambda^2+a_1\lambda+a_0=0$ ALLORA $y_p(t)=Q(t)e^{\alpha x}$ CON $\deg Q(t)=\deg P(t)$
- α è SOLUZIONE DELL'EQ. CARATTERISTICA $\lambda^2+a_1\lambda+a_0$ CON MOLTEPLICITà m $(1\le m\le 2)$ ALLORA $y_p(t)=t^mQ(t)e^{\alpha x}$ CON $\deg Q(t)=\deg P(t)$

2) $b(t)=e^{\alpha t}[P(t)\cos(\beta t)+Q(t)\sin\beta t]$; SI DISTINGUONO 2 ULTERIORI SOTTOCASI:

- $\alpha\pm i\beta$ NON SONO SOLUZIONI DELL'EQ. CARATTERISTICA $\lambda^2+a_1\lambda+a_0=0$ ALLORA SI HA CHE $y_p(t)=e^{\alpha t}[P_1(t)\cos\beta t+Q_1(t)\sin\beta t]$ CON P_1, Q_1 DI GRADO UGUALE AL MASSIMO DEI GRADI DI P E Q CIOè $\deg P_1=\deg Q_1=\max\{\deg P,\deg Q\}$
- $\alpha\pm i\beta$ SONO SOLUZIONI DELL'EQ. CARATTERISTICA $\lambda^2+a_1\lambda+a_0=0$ ALLORA SI HA CHE: $y_p(t)=te^{\alpha t}[P_1(t)\cos\beta t+Q_1(t)\sin\beta t]$ CON $\deg P_1=\deg Q_1=\max\{\deg P,\deg Q\}$

$y_p(t)$ SI DETERMINA DERIVANDO E SOSTITUENDO $y'_p(t), y''_p(t)$ E $y_p(t)$ IN $y''+a_1y'+a_0y=b(t)$.

12 FORMULE VARIE

DETERMINAZIONE DOMINIO FUNZIONI

- $f(x) = c$; $\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R}$
- $f(x) = x^n$; $\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}$
- $f(x) = \frac{1}{x^n}$; $\mathrm{dom}\, f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$; $n \in \mathbb{N}$
- $f(x) = \sqrt[n]{x}$; $\mathrm{dom}\, f = [0, +\infty)$ se n pari ; $\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R}$ se n dispari ; $n \in \mathbb{N}$; $n \geq 2$
- $f(x) = x^q$; $\mathrm{dom}\, f = [0, +\infty)$ se $q > 0$; $\mathrm{dom}\, f = (0, +\infty)$ se $q < 0$; $q \in \mathbb{Q}$, $q \notin \mathbb{Z}$
- $f(x) = x^\alpha$; $\mathrm{dom}\, f = (0, +\infty)$; $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \notin \mathbb{Q}$
- $f(x) = a^x$; $\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R}$; $a > 0$
- $f(x) = \log_a x$; $\mathrm{dom}\, f = (0, +\infty)$; $a > 0$, $a \neq 1$
- $f(x) = \sin x$; $\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R}$
- $f(x) = \cos x$; $\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R}$
- $f(x) = \tan x$; $\mathrm{dom}\, f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}\}$
- $f(x) = \cot x$; $\mathrm{dom}\, f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}\}$
- $f(x) = \arcsin x$; $\mathrm{dom}\, f = [-1, 1]$
- $f(x) = \arccos x$; $\mathrm{dom}\, f = [-1, 1]$
- $f(x) = \arctan x$; $\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R}$
- $f(x) = \operatorname{arccotan} x$; $\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R}$
- $f(x) = \sinh x$; $\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R}$
- $f(x) = \cosh x$; $\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R}$
- $f(x) = \tanh x$; $\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R}$
- $f(x) = \coth x$; $\mathrm{dom}\, f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

LIMITI NOTEVOLI

- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \iff \sin x = x + o(x)$; $x \to 0$
- $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \iff \cos x = 1 - \frac{1}{2} x^2 + o(x^2)$; $x \to 0$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\log_a (1+x)}{x} = \frac{1}{\log a} \iff \log_a (1+x) = \frac{1}{\log a} x + o(x)$; $x \to 0$ $\forall a > 0, a \neq 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{1+x}{x} = 1 \iff \log(1+x) = x + o(x)$, $x \to 0$
- $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a \iff a^x = 1 + x \log a + o(x)$; $x \to 0$
- $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \iff e^x = 1 + x + o(x)$; $x \to 0$
- $\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \iff (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$; $x \to 0$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

SVILUPPI NOTEVOLI DI MC LAURIN

- $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots + \frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1} + o(x^{2m+1})$; $x \to 0$
- $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + \frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m} + o(x^{2m})$; $x \to 0$
- $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$; $x \to 0$
- $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{m!}x^m + o(x^m)$; $x \to 0$
- $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots + \frac{(-1)^{m-1}}{m}x^m + o(x^m)$, $x \to 0$
- $a^x = e^{x \log a} = 1 + \log a\, x + \frac{1}{2!}(\log a\, x)^2 + \frac{1}{3!}(\log a\, x)^3 + \dots + \frac{1}{m!}(\log a\, x)^m + o(x^m)$, $x \to 0$
- $\sinh x = 1 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots + \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1} + o(x^{2m+1})$, $x \to 0$
- $\cosh x = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + \frac{1}{(2m)!}x^{2m} + o(x^{2m})$, $x \to 0$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \dots + \binom{\alpha}{m}x^m + o(x^m)$, $x \to 0$
- $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$, $x \to 0$
- $\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^m + o(x^m)$, $x \to 0$
- $\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4)$, $x \to 0$
- $\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots + \frac{(-1)^m}{2m+1}x^{2m+1} + o(x^{2m+1})$ $x \to 0$
- $\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \dots + \frac{(-1)^m}{2m+1}\binom{-1/2}{m}x^{2m+1} + o(x^{2m+1})$ $x \to 0$

INTEGRALI INDEFINITI DELLE FUNZIONI ELEMENTARI

- $f(x) = k$; $\int f(x)\,dx = kx + c$, $k \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$
- $f(x) = x^\alpha$; $\int f(x)\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + c$; $\alpha \in \mathbb{R}$; $\alpha \neq -1$; $c \in \mathbb{R}$
- $f(x) = \frac{1}{x}$; $\int f(x)\,dx = \log|x| + c$, $c \in \mathbb{R}$
- $f(x) = a^x$; $\int f(x)\,dx = \frac{a^x}{\log a} + c$, $a > 0$, $a \neq 1$; $c \in \mathbb{R}$
- $f(x) = \sin x$; $\int f(x)\,dx = -\cos x + c$, $c \in \mathbb{R}$
- $f(x) = \cos x$; $\int f(x)\,dx = \sin x + c$, $c \in \mathbb{R}$
- $f(x) = \sinh x$; $\int f(x)\,dx = \cosh x + c$, $c \in \mathbb{R}$
- $f(x) = \cosh x$; $\int f(x)\,dx = \sinh x + c$, $c \in \mathbb{R}$
- $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$; $\int f(x)\,dx = \arctan x + c = -\operatorname{arccot} x + c$, $c \in \mathbb{R}$
- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $\int f(x) = \arcsin x + c = -\arccos x + c$, $c \in \mathbb{R}$
- $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$; $\int f(x) = \tan x + c$, $c \in \mathbb{R}$

3

13 DIMOSTRAZIONI RICHIESTE PER L'ESAME

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

$f: \text{dom} f \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ DI ACCUMULAZIONE PER IL $\text{dom} f$ E SIA $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$:

- $l > 0$ OPPURE $l = +\infty \Rightarrow \exists I(x_0)$ t.c. $f|_{\text{dom} f \cap I(x_0) \setminus \{x_0\}} > 0$
- $l < 0$ OPPURE $l = -\infty \Rightarrow \exists I(x_0)$ t.c. $f|_{\text{dom} f \cap I(x_0) \setminus \{x_0\}} < 0$

DIMOSTRIAMO IL CASO IN CUI $x_0 \in \mathbb{R}$ E $l \in \mathbb{R}$; SCRIVIAMO LA DEFINIZIONE DI $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$:
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_\varepsilon > 0$ t.c. $\forall x \in \text{dom} f \cap 0 < |x - x_0| < \delta$, $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$. SCEGLIAMO IN PARTICOLARE $\varepsilon = l/2$ ALLORA: $l - l/2 < f(x) < l + l/2$; $l/2 < f(x) < 3/2\, l$. CIO' SIGNIFICA CHE SE $l < 0 \Rightarrow f(x) < 0$ E CHE SE $l > 0 \Rightarrow f(x) > 0$.

TEOREMA DEL CONFRONTO PER LIMITI INFINITI

$f, g: A \to \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ DI ACCUMULAZIONE PER A. SUPPONIAMO CHE ESISTE UN INTORNO $I(x_0)$ DI x_0 NEL QUALE $f(x) \leq g(x)$; ALLORA:

- SE $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$
- SE $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

DIMOSTRIAMO IL 1° CASO; SCRIVIAMO LA DEFINIZIONE DI $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$:
$\forall M \; \exists \tilde{I}(x_0)$ t.c. $\forall x \in (\text{dom} f \cap \tilde{I}(x_0)) \setminus \{x_0\}$. $f(x) > M$, DOVE CON $\tilde{I}(x_0)$ INDICHIAMO L'INTORNO IN CUI VALE IL LIMITE. CONSIDERIAMO QUINDI L'INTERSEZIONE TRA I DUE INTORNI:
$\bar{I}(x_0) = I(x_0) \cap \tilde{I}(x_0)$, IN $\bar{I}(x_0)$ VALE CHE $f(x) > M$ E CHE $g(x) \geq f(x)$, ALLORA NECESSARIAMENTE $g(x) > M$ E CIOE' $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$

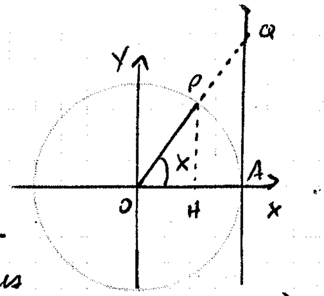
TEOREMA DEL CONFRONTO PER LIMITI FINITI

$f, g: A \to \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ DI ACCUMULAZIONE PER A. SUPPONIAMO CHE ESISTE UN INTORNO $I(x_0)$ DI x_0 NEL QUALE $f(x) \leq g(x)$. SE ESISTE $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ E ESISTE $\lim_{x \to x_0} g(x) = m$, $m \in \mathbb{R}$ ALLORA $l \leq m$

CONSIDERIAMO LA FUNZIONE $h(x) = g(x) - f(x)$, $\text{dom}\, h = A$, x_0 DI ACCUMULAZIONE PER A. DIRE $g(x) \geq f(x)$ IN $I(x_0)$ VUOL DIRE $g(x) - f(x) \geq 0$ E CIOE' $h(x) \geq 0$ IN $I(x_0)$. ALLORA PER IL COROLLARIO DEL TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO SI HA CHE:
$\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) - \lim_{x \to x_0} f(x) = m - l \geq 0$, OVVERO $l \leq m$

LIMITE NOTEVOLE: SENO CARDINALE

DIMOSTRARE CHE $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$



RAGIONIAMO DA UN PUNTO DI VISTA TRIGONOMETRICO: SIA x L'ANGOLO FORMATO TRA IL SEGMENTO $\overline{OP}$ E IL SEGMENTO $\overline{OA}$, SIA Q L'INTERSEZIONE TRA IL PROLUNGAMENTO DI $\overline{OP}$ E LA RETTA TANGENTE ALLA CIRCONFERENZA GONIOMETRICA PASSANTE PER A. L'ARCO $\widehat{PA} = r x = x$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$; CHIARAMENTE $\overline{PH} = \sin x$ E $\overline{QA} = \tan x$. FACCIAMO 2 OSSERVAZIONI:

- PER $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\sin x > 0$, TUTTAVIA $\sin x = \overline{PH} \leq \widehat{PA} = x$ CIOÈ $\sin x \leq x$, SFRUTTANDO IL FATTO CHE LA PROIEZIONE $\overline{PH}$ È MINORE DELL'ARCO $\widehat{PA}$; ALLORA, DIVIDENDO AMBO I MEMBRI PER $x > 0$ SI OTTIENE $\frac{\sin x}{x} \leq 1$
- $x = \widehat{PA} \leq \overline{QA} = \tan x$, CIOÈ $x \leq \tan x$, SFRUTTANDO IL FATTO CHE L'ARCO $\widehat{AP}$ È MINORE DEL SEGMENTO $\overline{QA}$; ALLORA: $x \leq \frac{\sin x}{\cos x}$; $x \cos x \leq \sin x$; $\cos x \leq \frac{\sin x}{x}$

ABBIAMO CIOÈ TROVATO UNA MAGGIORANTE E UNA MINORANTE DELLA FUNZIONE $\frac{\sin x}{x}$ PER $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ E IN PARTICOLARE: $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$. VALUTIAMO I LIMITI LATERALI:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \cos x = 1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} 1 = 1$ ALLORA PER IL TEOREMA DEI DUE CARABINIERI CONCLUDIAMO CHE $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{-\sin(-x)}{-(-x)} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sin(-x)}{-x}$; PONENDO $t = -x$; $x \to 0^-$, $t \to 0^+$

$\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1$

POICHÉ ESISTONO FINITI I 2 LIMITI LATERALI E SONO UGUALI CONCLUDIAMO CHE $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

PRINCIPIO DI ELIMINAZIONE DEI TERMINI TRASCURABILI

$f, g, f_1, g_1 : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ DI ACCUMULAZIONE PER A; SIA $f_1 = o(f)$ PER $x \to x_0$ E $g_1 = o(g)$ PER $x \to x_0$, ALLORA: $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x) + f_1(x)}{g(x) + g_1(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

CONSIDERIAMO L'ESPRESSIONE DEL LIMITE E UTILIZZIAMO LE DEFINIZIONI DI O PICCOLI:

- $f_1 = o(f)$ $x \to x_0$ VUOL DIRE CHE $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f_1}{f} = 0$
- $g_1 = o(g)$ $x \to x_0$ VUOL DIRE CHE $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{g_1}{g} = 0$

ALLORA $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x) + f_1(x)}{g(x) + g_1(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)\left[1 + \frac{f_1(x)}{f(x)}\right]}{g(x)\left[1 + \frac{g_1(x)}{g(x)}\right]} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

PRIMA FORMULA DELL'INCREMENTO FINITO

$f: \text{dom} f \to \mathbb{R}$, x_0 INTERNO AL $\text{dom} f$, f DERIVABILE IN x_0, ALLORA: $f(x) = f(x_0) + f'(x)(x-x_0) + o(x-x_0)$ PER $x \to x_0$

CONSIDERIAMO LA DEFINIZIONE DI DERIVATA: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$; $\lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \right] = 0$

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} = 0$, CIOÈ: $f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0) = o(x-x_0)$ PER $x \to x_0$

OVVERO: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$ PER $x \to x_0$

LEGAME FRA DERIVABILITÀ E CONTINUITÀ

$f: \text{dom} f \to \mathbb{R}$, x_0 INTERNO AL $\text{dom} f$, f DERIVABILE IN x_0 ALLORA f CONTINUA IN x_0.

SCRIVO LA 1ª FORMULA DELL'INCREMENTO FINITO: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$, $x \to x_0$

ALLORA $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} [f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)] = f(x_0)$

TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, CONTINUA IN $[a,b]$, SE $f(a)f(b) < 0 \Rightarrow \exists c \in (a,b)$ t.c. $f(c) = 0$

SUPPONIAMO $f(a) < 0$ E $f(b) > 0$; ANALIZZIAMO $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ E DISTINGUIAMO 3 CASI:

- $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0 \Rightarrow \exists c \in (a,b)$ t.c. $f(c) = 0$; $c = \frac{a+b}{2}$
- $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$; RINOMINO GLI INTERVALLI: $a_1 = a$, $b_1 = \frac{a+b}{2}$
- $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$; RINOMINO GLI INTERVALLI: $a_1 = \frac{a+b}{2}$, $b_1 = b$

ITERANDO IL PROCESSO PER I NUOVI INTERVALLI, SI IDENTIFICANO 2 SUCCESSIONI:

- $a_{n+1} = \begin{cases} a_n \\ \frac{a_n+b_n}{2} = a_n + \frac{b_n-a_n}{2} \end{cases}$; $a_{n+1} \geq a_n$; $f(a_n)$ NEGATIVA, CRESCENTE, LIMITATA
- $b_{n+1} = \begin{cases} b_n \\ \frac{a_n+b_n}{2} = b_n - \frac{b_n-a_n}{2} \end{cases}$; $b_{n+1} \leq b_n$; $f(b_n)$ POSITIVA, DECRESCENTE, LIMITATA

IN PARTICOLARE LE 2 SUCCESSIONI SONO LIMITATE PERCHÈ LE ANALIZZIAMO SU INTERVALLI; QUINDI, PER IL TEOREMA SULLE SUCCESSIONI MONOTONE E LIMITATE, AMMETTONO LIMITE. ALLORA: $\lim_{n \to +\infty} a_n = l_1$; $\lim_{n \to +\infty} b_n = l_2$. DOBBIAMO MOSTRARE CHE $l_1 = l_2 = c$ O, IN ALTRI TERMINI, CHE $\lim_{n \to +\infty} (b_n - a_n) = 0$. MA $(b_n - a_n)$ RAPPRESENTA L'AMPIEZZA DEL GENERICO INTERVALLO $[a_n, b_n]$ CHE A SUA VOLTA VALE: $(b_n - a_n) = \frac{b-a}{2^n}$. ALLORA $\lim_{n \to +\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$ E CIOÈ $l_1 = l_2 = c$. DOBBIAMO ORA MOSTRARE CHE $f(c) = 0$. CONSIDERIAMO LE 2 SUCCESSIONI:

- a_n CRESCENTE, STRETTAMENTE NEGATIVA CIOÈ $f(a_n) < 0$; PER IL COROLLARIO DEL TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO ALLORA: $\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = \lim_{n \to +\infty} f(c) \leq 0$

TEOREMA DI LAGRANGE

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, f CONTINUA SU $[a,b]$ E DERIVABILE IN (a,b), ALLORA $\exists\, c \in (a,b)$ t.c.
$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

CONSIDERIAMO DUE CASI:

- $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists\, c \in (a,b)$ t.c. $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$ PER IL TEOREMA DI ROLLE;
- $f(a) \neq f(b)$, CONSIDERIAMO LA FUNZIONE $g(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]$, CON $g(x)$ CONTINUA IN $[a,b]$ E DERIVABILE IN (a,b). CALCOLIAMO I VALORI DI g IN a E b:
$g(a) = f(a) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)\right] = 0$
$g(b) = f(b) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)\right] = f(b) - f(a) - f(b) + f(a) = 0$
POICHÉ $g(a) = g(b)$ POSSIAMO APPLICARE IL TEOREMA DI ROLLE: $\exists\, c \in (a,b)$ t.c. $g'(c) = 0$. IN PARTICOLARE: $g'(x) = f'(x) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot 1\right]$ $\Rightarrow$ $g'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$ E CIOÈ:
$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

CARATTERIZZAZIONE DELLE FUNZIONI COSTANTI

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, f CONTINUA SU $[a,b]$ E DERIVABILE IN (a,b); SI HA CHE f È COSTANTE SU $[a,b]$ SE E SOLO SE $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a,b)$.

DISTINGUIAMO LE 2 IMPLICAZIONI:

- $f(x)$ COSTANTE SU $[a,b] \Rightarrow f'(x) = 0\ \forall x \in (a,b)$ È UNA CONSEGUENZA DEL TEOREMA DI ROLLE;
- $f'(x) = 0\ \forall x \in (a,b) \Rightarrow f(x)$ COSTANTE SU $[a,b]$ CIOÈ $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$, $f(x_1) = f(x_2)$. PER LA 2ª FORMULA DELL'INCREMENTO FINITO SI HA CHE: $f(x_2) = f(x_1) + f'(c)(x_2 - x_1)$. MA POICHÉ $f'(c) = 0$ ESSENDO $c \in (a,b)$ ALLORA $f(x_2) = f(x_1)$ CIOÈ f COSTANTE SU $[a,b]$

CARATTERIZZAZIONE PRIMITIVE DI UNA FUNZIONE

$F: I \to \mathbb{R}$, DERIVABILE IN I; $G: I \to \mathbb{R}$ DERIVABILE IN I; SIANO F E G DUE PRIMITIVE DI f SU I OVVERO $F'(x) = f(x)$ E $G'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$, ALLORA F E G DIFFERISCONO PER UNA COSTANTE, CIOÈ $\exists\, k \in \mathbb{R}$ t.c. $F(x) - G(x) = k$, $\forall x \in I$

CONSIDERO $H(x) = F(x) - G(x)$ SU I; $H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$, $\forall x \in I$, CIOÈ IN TUTTI I PUNTI $H(x)$ HA DERIVATA NULLA. DUNQUE, PER LA CARATTERIZZAZIONE DELLE FUNZIONI COSTANTI, $H(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$, $\forall x \in I$, CIOÈ $F(x) - G(x) = k$

$\left| \int_{[a,b]} (h_m - g_m) \right| = \left| \sum_{k=1}^{m} [f(x_k) - f(x_{k-1})](x_k - x_{k-1}) \right|$ CHE RAPPRESENTA LA DIFFERENZA TRA LE AREE DEI RETTANGOLI SOTTESI DA h E LE AREE DEI RETTANGOLI SOTTESI DA g DI BASE $(x_k - x_{k-1})$ E DI ALTEZZA RISPETTIVAMENTE $f(x_k)$ E $f(x_{k-1})$. NOTIAMO CHE $x_k - x_{k-1}$ È L'AMPIEZZA DI CIASCUN INTERVALLINO E CIOÈ: $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{m}$; SOSTITUENDOLO NELLA FORMULA:

$$\left| \int_{[a,b]} (h_m - g_m) \right| = \left| \sum_{k=1}^{m} [f(x_k) - f(x_{k-1})] \frac{b-a}{m} \right| = \frac{b-a}{m} \left| \sum_{k=1}^{m} [f(x_k) - f(x_{k-1})] \right| =$$

$$= \frac{b-a}{m} \left| \cancel{f(x_1)} - f(x_0) + \cancel{f(x_2)} - \cancel{f(x_1)} + \cancel{f(x_3)} - \cancel{f(x_2)} + \dots + f(x_m) - \cancel{f(x_{m-1})} \right| =$$

$$= \frac{b-a}{m} \left| f(x_m) - f(x_0) \right| = \frac{b-a}{m} \left| f(b) - f(a) \right|, \text{ CON } f(b) > f(a) \text{ f CRESCENTE}$$

CONSIDERIAMO ALLORA $\lim_{m \to +\infty} \left| \int_{[a,b]} (h_m - g_m) \right| = \lim_{m \to +\infty} \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{m} = 0$; ALLORA SE CONSIDERO m SUFFICIENTEMENTE GRANDE, $\frac{b-a}{m} |f(b) - f(a)| < \varepsilon$, CHE CORRISPONDE ALLA TESI DEL LEMMA. CONCLUDIAMO QUINDI CHE f È INTEGRABILE SU $[a,b]$

TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ INTEGRABILE; SI DEFINISCE MEDIA DI f NELL'INTERVALLO $[a,b]$ IL VALORE: $m(f; a,b) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$; IN PARTICOLARE VALE CHE:

- $\inf_{[a,b]} f \leq m(f; a,b) \leq \sup_{[a,b]} f$
- SE f CONTINUA SU $[a,b] \Rightarrow \exists x_0 \in [a,b]$ t.c. $m(f; a,b) = f(x_0)$

DISTINGUIAMO LE DUE DIMOSTRAZIONI:

- $\inf_{[a,b]} f \leq m(f; a,b) \leq \sup_{[a,b]} f$; SIA $l = \inf_{[a,b]} f$ E $L = \sup_{[a,b]} f$; PER LA PROPRIETÀ DELLA MONOTONIA DELL'INTEGRALE ($g(x) \leq f(x) \Rightarrow \int_a^b g(x) \leq \int_a^b f(x)$) SI HA: $\int_a^b l \leq \int_a^b f \leq \int_a^b L$; ESSENDO l E L FUNZIONI A SCALA: $l(b-a) \leq \int_a^b f \leq L(b-a)$, CIOÈ: $l \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq L$
- f CONTINUA SU $[a,b] \Rightarrow \exists x_0 \in [a,b]$ t.c. $m(f; a,b) = f(x_0)$; L'IPOTESI CHE f SIA CONTINUA CI CONSENTE DI AFFERMARE CHE, PER IL TEOREMA DI WEIERSTRASS, f HA UN MASSIMO E UN MINIMO IN $[a,b]$ CIOÈ $\exists x_l, x_L$ t.c. $f(x_l) = l$ E $f(x_L) = L$. RESTRINGIAMO ALLORA f IN $[x_l, x_L]$; PER IL TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI f ASSUME TUTTI I VALORI COMPRESI TRA l E L E QUINDI IN PARTICOLARE ANCHE IL VALORE $m(f; a,b)$; ALLORA: $\exists x_0 \in [x_l, x_L] \subseteq [a,b]$ t.c. $f(x_0) = m(f; a,b)$

INTEGRAZIONE PER PARTI

$f: I \to \mathbb{R}$ DERIVABILE IN I, $g: I \to \mathbb{R}$ DERIVABILE IN I; ALLORA VALE LA RELAZIONE:
$\int f'(x) g(x)\, dx = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x)\, dx$

CONSIDERATO L'ESPRESSIONE DELLA DERIVATA DEL PRODOTTO DI f E g: $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;
ALLORA $f'(x)g(x) = (f(x)g(x))' - f(x)g'(x)$; INTEGRANDO AMBO I MEMBRI SI OTTIENE:
$\int f'(x)g(x)\, dx = \int (f(x)g(x))'\, dx - \int f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\, dx$

CRITERIO DI CONVERGENZA DEL CONFRONTO (INTERVALLO ILLIMITATO)

$f, g: [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ INTEGRABILI SU OGNI INTERVALLO $[a, b]$; SIA INOLTRE $0 \le f(x) \le g(x)$ $\forall x \in [a, +\infty)$, CIOÈ f E g POSITIVE. ALLORA:

- SE $\int_a^{+\infty} f(x)$ DIVERGE $\Longrightarrow \int_a^{+\infty} g(x)$ DIVERGE
- SE $\int_a^{+\infty} g(x)$ CONVERGE $\Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)$ CONVERGE

ESSENDO $f(x) \le g(x)$, PER LA MONOTONIA DELL'INTEGRALE DEFINITO $\int_a^b f(x) \le \int_a^b g(x)$. ALLORA

- SE $\int_a^{+\infty} f(x) = +\infty$, ALLORA LA FUNZIONE DI b $\int_a^b g(x)\,dx$ E' CRESCENTE E ILLIMITATA E ALLORA $\lim_{b \to +\infty} \int_a^b g(x)\, dx = +\infty$
- SE $\int_a^{+\infty} g(x) < +\infty$, ALLORA LA FUNZIONE DI b $\int_a^b f(x)\,dx$ E' CRESCENTE E LIMITATA E ALLORA $\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx < +\infty$

NOTA CHE SE $f \ge 0$, $g \ge 0$, LA FUNZIONE DI b E' CRESCENTE PERCHE' f E g SONO LE DERIVATE PRIME.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 46